



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 85 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лысов В.Г.

Сильная асимптотика
аппроксимаций Эрмита-
Паде для системы
Никишина с весами Якоби

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лысов В.Г. Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита-Паде для системы Никишина с весами Якоби // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 85. 35 с. doi:[10.20948/prepr-2017-85](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-85)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-85>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.Г. Лысов

Сильная асимптотика аппроксимаций
Эрмита–Паде для системы Никишина
с весами Якоби

Москва – 2017

УДК 517.53

В.Г. Лысов

Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы Никишина с весами Якоби.

Рассматриваются аппроксимации Эрмита–Паде для преобразований Коши весов Якоби на одном отрезке. Такая система функций образует систему Никишина. Знаменатели аппроксимаций известны как многочлены совместной ортогональности Якоби–Пинеиро. Для случая двух весов получены интегральные представления, исследована слабая асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде. Для индексов на главной диагонали найдены формулы сильной асимптотики многочленов и функций второго рода. Применяется классический метод перевала.

Ключевые слова: многочлены совместной ортогональности Якоби–Пинеиро, система Никишина, интегральные представления, обобщенные гипергеометрические функции, сильная асимптотика, метод перевала.

V.G. Lysov

Strong asymptotics of Hermite–Pade approximants for the Nikishin system of Jacobi weights.

The Hermite–Pade approximants for the Cauchy transforms of the Jacobi weights on one interval are considered. This system of functions forms a Nikishin system. The denominators of the approximants are known as Jacobi–Pineiro polynomials. For the case of two weights the integral representations are obtained, the weak asymptotics is investigated. For the diagonal indexes the strong asymptotics of the polynomials and the functions of the second kind are found. The classical saddle point method is applied.

Key words: Jacobi–Pineiro multiple orthogonal polynomials, Nikishin system, integral representations, generalized hypergeometric functions, strong asymptotics, saddle point method.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00025).

© Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2017

© В.Г. Лысов, 2017

1 Введение и основные результаты

1.1 Аппроксимации Эрмита–Паде

Рассмотрим $\vec{f} := (f_1, \dots, f_r)$ — вектор ростков аналитических функций в окрестности бесконечности:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{jk}}{z^{k+1}}, \quad j = 0, \dots, r.$$

Аппроксимациями Эрмита–Паде [27] второго типа (с общим знаменателем) [36] вектора ростков \vec{f} для мультииндекса $\vec{n} := (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ называются рациональные функции $\left(\frac{P_{\vec{n},1}}{Q_{\vec{n}}}, \dots, \frac{P_{\vec{n},r}}{Q_{\vec{n}}}\right)$, такие, что степень знаменателя $Q_{\vec{n}}$ не превосходит $|\vec{n}| := n_1 + \dots + n_r$ и выполнены интерполяционные условия в бесконечности:

$$R_{\vec{n},j}(z) := (Q_{\vec{n}}f_j - P_{\vec{n},j})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 0, \dots, r. \quad (1)$$

Условия (1) образуют линейную однородную систему $|\vec{n}|$ уравнений относительно $|\vec{n}| + 1$ неизвестного коэффициента $Q_{\vec{n}}$, поэтому нетривиальное решение всегда существует. Многочлены $P_{\vec{n},j}$ являются полиномиальными частями разложений $Q_{\vec{n}}f_j$ в бесконечности. Функции остатка $R_{\vec{n},j}$ называются функциями второго рода.

В настоящей работе рассматриваются аппроксимации Эрмита–Паде для набора марковских [37] функций:

$$f_j(z) = \widehat{w}_j(z) := \int_{\Delta} \frac{w_j(x)dx}{z-x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad j = 0, \dots, r, \quad (2)$$

где $\Delta := [0, 1]$ — единичный отрезок, а w_1, \dots, w_r — положительные веса Якоби [29] на этом отрезке, имеющие один общий показатель:

$$w_j(x) := x^{\alpha_j}(1-x)^{\beta}, \quad x \in (0, 1), \quad \alpha_j, \beta > -1, \quad j = 0, \dots, r. \quad (3)$$

Хорошо известно, что для марковских функции (2) интерполяционные условия (1) эквивалентны системе соотношений совместной ортогональности относительно весов w_j (см. утверждение 1 в главе 4):

$$\int_{\Delta} Q_{\vec{n}}(x)x^k w_j(x)dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 0, \dots, r. \quad (4)$$

При этом для функций второго рода справедливы представления:

$$R_{\vec{n},j}(z) = \frac{1}{p_{n_j}(z)} \int_{\Delta} \frac{p_{n_j}(x) Q_{\vec{n}}(x)}{z-x} w_j(x) dx \quad \forall p_{n_j} \not\equiv 0 : \deg p_{n_j} \leq n_j. \quad (5)$$

Естественно предполагать, что показатели α_j имеют различные дробные части: $\alpha_j - \alpha_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$. Тогда набор весовых функций (3) образует алгебраическую систему Чебышёва (АТ-систему) [42] на Δ . Отсюда следует, что $Q_{\vec{n}}$ имеет $|\vec{n}|$ простых нулей на Δ . Таким образом, все индексы \vec{n} нормальны, т.е. степень многочлена $Q_{\vec{n}}$ равна $|\vec{n}|$, он определен с точностью до постоянного множителя, а аппроксимации Эрмита–Паде определены однозначно.

Аппроксимации Эрмита–Паде для для набора (2), (3) впервые были рассмотрены в [45]. Многочлены $Q_{\vec{n}}$ называются многочленами совместной ортогональности Якоби–Пинейро [4]. При необходимости, чтобы подчеркнуть зависимость от параметров $\vec{\alpha}$ и β , знаменатели $Q_{\vec{n}}$ и функции второго рода $R_{\vec{n},j}$ будем обозначать также $Q_{\vec{n}}^{\vec{\alpha},\beta}$ и $R_{\vec{n},j}^{\vec{\alpha},\beta}$. При $r = 1$ пара $Q_n^{\alpha,\beta}$, $R_n^{\alpha,\beta}$ есть классический многочлен Якоби [29], [47] на отрезке $[0, 1]$ и функция второго рода, см. [40].

Многочлены Якоби–Пинейро находят приложения в разных задачах математической физики, см. [1], [38]. Алгебраические свойства $Q_{\vec{n}}$ изучались в [4], [14], [28]. Предельное распределение нулей исследовалось в работе [39], поведение в окрестностях концов Δ — в работе [13].

Целью настоящей работы является исследование асимптотических свойств $Q_{\vec{n}}$ и $R_{\vec{n},j}$ в случае $r = 2$ весов.

1.2 Многочлены Якоби–Пинейро

Для многочленов Якоби–Пинейро справедлива явная формула [4], [45]:

$$(1-x)^\beta Q_{\vec{n}}(x) = \left(\prod_{j=1}^r x^{-\alpha_j} \frac{1}{n_j!} \frac{d^{n_j}}{dx^{n_j}} x^{\alpha_j+n_j} \right) (1-x)^{\beta+|\vec{n}|}. \quad (6)$$

Операторы в произведении формулы (6) коммутируют. Соотношения ортогональности (4) легко проверяются с помощью формулы интегрирования по частям. По аналогии с классическим случаем $r = 1$ будем называть представление (6) формулой Родрига. Формула (6) фиксирует

свободный член многочленов $Q_{\vec{n}}$:

$$Q_{\vec{n}}(0) = \prod_{j=1}^r \frac{(\alpha_j + 1)_{n_j}}{n_j!},$$

где $(\alpha)_n := (\alpha) \cdots (\alpha + n - 1)$ — символ Похгаммера. Далее всюду в настоящей работе используется эта нормировка.

В работе [4] изучались алгебраические свойства многочленов совместной ортогональности для классических весов. В частности, для многочленов Якоби–Пинейро при $r = 2$ были найдены линейные дифференциальные и рекуррентные уравнения третьего порядка. Из интегральных представлений, полученных ниже для $Q_{\vec{n}}$ и $R_{\vec{n},j}$, следует, что набор функций $\left(Q_{\vec{n}}, \frac{1}{w_1}R_{\vec{n},1}, \frac{1}{w_2}R_{\vec{n},2}\right)$ образует базис в линейном пространстве решений этих уравнений.

Как видим, многочлены Якоби–Пинейро сохраняют целый ряд свойств классических ортогональных многочленов: удовлетворяют дифференциальным и рекуррентным соотношениям, имеют явные представления в виде формул Родрига. Еще одним таким свойством является связь [28] с (обобщенными) гипергеометрическими функциями:

$$(1-x)^\beta \frac{Q_{\vec{n}}(x)}{Q_{\vec{n}}(0)} = {}_{r+1}F_r \left(\begin{matrix} \vec{\alpha} + \vec{1} + \vec{n}, -\beta - |\vec{n}| \\ \vec{\alpha} + \vec{1} \end{matrix}; x \right), \quad (7)$$

где $\vec{1} = (1, \dots, 1)$ и

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix}; x \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k k!}.$$

1.3 Система Никишина

Если вектор показателей $\vec{\alpha}$ таков, что $\alpha_j - \alpha_{j+1} \in (0, 1)$, то набор функций (2), (3) образует систему Никишина. Итак, исключительно для целей этого пункта введем дополнительное ограничение: $\alpha_1 - \alpha_2 \in (0, 1)$.

Заметим, что для степенной функции справедливо тождество:

$$z^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{(-x)^{-\alpha} dx}{z-x}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (8)$$

где выбирается одна и та же ветвь, голоморфная вне отрицательной полуоси. Отсюда следует, что при $\alpha_1 - \alpha_2 \in (0, 1)$ отношение рассматриваемых весов Якоби есть преобразование Коши некоторого веса:

$$\frac{w_2}{w_1}(z) = \widehat{\rho}(z) := \int_{\Gamma} \frac{\rho(x)dx}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \quad (9)$$

где

$$\rho(x) := \frac{\sin \pi(\alpha_1 - \alpha_2)}{\pi} (-x)^{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad \Gamma := (-\infty, 0]. \quad (10)$$

Преобразования Коши набора весов на множестве Δ , отношение которых удовлетворяет (9) для некоторого веса ρ на Γ , где $\text{cap}(\Delta \cap \Gamma) = \emptyset$, по определению, образуют систему функций Никишина [41] порядка $r = 2$.

Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина обладают замечательным свойством (см. [19], [26]): помимо условий интерполяции в бесконечности (1), они равны приближаемой функции в некоторых точках на множестве Γ . Продемонстрируем это. Пусть w_1 и w_2 — весовые функции на Δ , а их отношение формулой (9) аналитически продолжается в область $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, где множества Γ и Δ не перекрываются. Обозначим $m := \min(n_1 + 1, n_2)$. Нетрудно показать (см. утверждение 2 в главе 4), что функция второго рода $R_{\vec{n},1}$ удовлетворяет соотношениям ортогональности относительно веса ρ :

$$\int_{\Gamma} R_{\vec{n},1}(x) x^k \rho(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (11)$$

Из ортогональности (11) следует, что $R_{\vec{n},1}$ имеет не менее m нулей внутри Γ , которые по сути являются дополнительными узлами интерполяции.

Пусть $q_{\vec{n},1}$ — многочлен, построенный по нулям $R_{\vec{n},1}$ внутри Γ . Тогда $\deg q_{\vec{n},1} \geq m$. Многочлен $Q_{\vec{n}}$ удовлетворяет соотношениям ортогональности на Δ с переменным (т.е. зависящим от \vec{n}) весом:

$$\int_{\Delta} Q_{\vec{n}}(x) x^k \frac{w_1}{q_{\vec{n},1}}(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_1 + m - 1.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что $Q_{\vec{n}}$ имеет не менее $|\vec{n}| = n_1 + m$ нулей внутри Δ . В частности, это рассуждение доказывает нормальность индексов вида $n_1 \geq n_2 - 1$. Нормальность всей таблицы индексов для пары функций, образующих систему Никишина, была установлена в [16]. Нормальность всех индексов для системы Никишина произвольного порядка доказана в работах [21], [22].

Несмотря на несимметричность приведенных построений относительно перестановки индексов $1 \leftrightarrow 2$, оказывается, что для индексов на главной диагонали функции $\frac{1}{w_1}R_{\vec{n},1}$ и $\frac{1}{w_2}R_{\vec{n},2}$ асимптотически близки: $\frac{R_{\vec{n},2}}{R_{\vec{n},1}} \rightarrow \frac{w_2}{w_1}$ в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$ при $n_1 = n_2 \rightarrow \infty$. Поэтому наряду с функциями второго рода $R_{\vec{n},j}$ рассматривают [26] функции $R_{\vec{n},j}^*$:

$$R_{\vec{n},2}^* := -\frac{w_2}{w_1}R_{\vec{n},1}^* := \frac{w_2}{w_1}R_{\vec{n},1} - R_{\vec{n},2}. \quad (12)$$

То есть вместо набора $\left(Q_{\vec{n}}, \frac{1}{w_1}R_{\vec{n},1}, \frac{1}{w_2}R_{\vec{n},2}\right)$ будем рассматривать набор функций с разномасштабной асимптотикой $\left(Q_{\vec{n}}, \frac{1}{w_1}R_{\vec{n},1}, \frac{1}{w_1}R_{\vec{n},1}^*\right)$. Непосредственно из определения (12) следует, что функции $R_{\vec{n},j}^*$ являются аналитическими вне $\Delta \cup \Gamma$. На самом деле они аналитичны вне Γ , поскольку их скачки на Δ равны нулю, а особенности в точке 1 устранимы.

При $\alpha_1 - \alpha_2 \in (0, 1)$ для функции $R_{\vec{n},2}^*$ справедливо интегральное представление, аналогичное (5):

$$R_{\vec{n},2}^*(z) = \frac{1}{p_m(z)} \int_{\Gamma} \frac{p_m(x)R_{\vec{n},1}(x)}{z-x} \rho(x) dx, \quad \forall p_m \neq 0 : \deg p_m \leq m. \quad (13)$$

Формула (13) осуществляет аналитическое продолжение функции $R_{\vec{n},2}^*$ из области $\mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \Gamma)$ в область $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Системы Никишина широко распространены в теории специальных функций [18], [34], [50]. Приложениям в теории аппроксимации посвящены работы [46], [51]. Приложениям в теории вероятностей — работы [6], [31], [32]. Приложениям в теории чисел — работы [48], [49].

1.4 Задача равновесия векторного потенциала

Метод исследования асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде, основанный на векторной задаче равновесия, был разработан в [23]–[25]. Из работы [26] следует, что слабая асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы Никишина в случае, когда Δ и Γ — непересекающиеся отрезки вещественной оси, описывается решением некоторой векторной задачи равновесия. Для рассматриваемых нами аппроксимаций нарушаются сразу два условия: конденсаторы Δ и Γ касаются, а множество Γ не ограничено. Однако оказывается, что результат работы [26] остается верным. Прежде чем его сформулировать, поставим задачу равновесия векторного потенциала.

Для замкнутого множества $K \subset \mathbb{C}$ рассмотрим класс $\mathcal{M}(K)$ конечных мер μ с носителем $S(\mu) \subseteq K$, имеющих конечную энергию, т.е. неотрицательных σ -аддитивных функций на σ -алгебре борелевских подмножеств K , таких, что

$$I(\mu) := \iint \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) d\mu(x) < +\infty.$$

Подмножество $\mathcal{M}(K)$, состоящее из мер массы $\theta > 0$, обозначим $\mathcal{M}_\theta(K)$. Для пары замкнутых множеств Δ и Γ и $\theta \in (0, 1]$ рассмотрим векторную задачу равновесия логарифмического потенциала V^μ с матрицей взаимодействия Никишина A_N :

$$V^\mu(x) := \int \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t), \quad A_N := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. В декартовом произведении $\mathcal{M}_2(\Delta) \times \mathcal{M}_\theta(\Gamma)$ найти векторную меру $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, удовлетворяющую соотношениям равновесия:

$$\begin{aligned} 2V^{\lambda_1}(x) - V^{\lambda_2}(x) & \begin{cases} = \omega_1, & x \in S(\lambda_1), \\ \geq \omega_1, & x \in \Delta, \end{cases} \\ 2V^{\lambda_2}(x) - V^{\lambda_1}(x) & \begin{cases} = \omega_2, & x \in S(\lambda_2), \\ \geq \omega_2, & x \in \Gamma, \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

где ω_1, ω_2 — некоторые константы равновесия.

Задача 2. В декартовом произведении $\mathcal{M}_2(\Delta) \times \mathcal{M}_\theta(\Gamma)$ найти векторную меру $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, минимизирующую функционал энергии J :

$$J(\vec{\mu}) := I(\mu_1 - \mu_2) + I(\mu_1) + I(\mu_2).$$

Предложение 1. Задачи 1 и 2 эквивалентны, их решение существует и единственно.

Ниже будет исследована зависимость носителей компонент равновесной меры $\vec{\lambda}$ от значения параметра θ . Оказывается, для всех $\theta \in (0, 1]$ носитель λ_1 совпадает с Δ , а носитель λ_2 , который мы обозначим через Γ^* , монотонно возрастает по θ :

$$\begin{aligned} \theta \in (0, 1) & \Rightarrow S(\lambda_1) = \Delta, \quad S(\lambda_2) := \Gamma^* = [x^*, 0], \quad \frac{d}{d\theta} x^* < 0; \\ \theta = 1 & \Rightarrow S(\lambda_1) = \Delta, \quad S(\lambda_2) := \Gamma^* = \Gamma, \quad \omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Более того, для концевой точки x^* носителя λ_2 справедлива формула:

$$x^* = \frac{-27\theta^2}{(\theta - 1)^2(\theta^2 + 2)(\theta + 2)^2(2\theta + 1)}. \quad (15)$$

Таким образом, носители всегда имеют точку касания в начале координат, а при $\theta = 1$ один из них не является компактом. Этот случай наименее изучен, и именно для него далее будет получена сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде. Результат о слабой асимптотике $(Q_{\vec{n}}, R_{\vec{n},1}, R_{\vec{n},1}^*)$ приведен в следующем пункте.

Задача 1 также связана с другой постановкой аппроксимационной задачи [3]. В недавней работе [7] исследуется задача равновесия с матрицей взаимодействия Никишина и констрейном. Определению носителей равновесных мер для векторных задач равновесия посвящена работа [33].

1.5 Слабая асимптотика

Слабую асимптотику в терминах равновесного потенциала для последовательности ортогональных многочленов удобно записывать, если их старший коэффициент равен единице. В нашем случае нормировка многочленов $Q_{\vec{n}}(z) = a_{\vec{n}}z^{|\vec{n}|} + \dots$ фиксирована формулой (6). Нетрудно увидеть, что при $r = 2$ старший коэффициент $Q_{\vec{n}}$ равен:

$$a_{\vec{n}} = (-1)^{n_1+n_2} \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \binom{\alpha_1 + n_1}{k} \binom{\beta + |\vec{n}|}{n_1 - k} \binom{\alpha_2 + |\vec{n}| - k}{j} \binom{\beta + n_2 + k}{n_2 - j}.$$

Рассмотрим последовательность мультииндексов Λ , такую, что существуют положительные пределы $\lim_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{n_1}{|\vec{n}|} \geq \lim_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{n_2}{|\vec{n}|}$. Пусть $\frac{n_1}{|\vec{n}|} \rightarrow \frac{2-\theta}{2}$ и $\frac{n_2}{|\vec{n}|} \rightarrow \frac{\theta}{2}$ при $\vec{n} \in \Lambda$ и $\theta \in (0, 1]$. Тогда слабый предел $a_{\vec{n}}$ равен:

$$a_\theta := \lim_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{2}{|\vec{n}|} \ln |a_{\vec{n}}| = \ln \frac{(4 - \theta)^{4-\theta} (2 + \theta)^{2+\theta}}{16 \theta^\theta (2 - \theta)^{2-\theta}}. \quad (16)$$

Слабая асимптотика рассматриваемых аппроксимаций Эрмита–Паде описывается в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть последовательность мультииндексов Λ такова, что $\frac{n_2}{|\vec{n}|} \rightarrow \frac{\theta}{2}$, $\theta \in (0, 1]$. Тогда для функций $(Q_{\vec{n}}, R_{\vec{n},1}, R_{\vec{n},1}^*)$ справедливы следу-

ющие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{2}{|\vec{n}|} \ln |Q_{\vec{n}}(z)| &= -V^{\lambda_1}(z) + a_\theta, & z \in \mathbb{C} \setminus \Delta; \\ \lim_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{2}{|\vec{n}|} \ln |R_{\vec{n},1}(z)| &= V^{\lambda_1}(z) - V^{\lambda_2}(z) - \omega_1 + a_\theta, & z \in \mathbb{C} \setminus (\Delta \cup \Gamma^*); \\ \lim_{\vec{n} \in \Lambda} \frac{2}{|\vec{n}|} \ln |R_{\vec{n},1}^*(z)| &= V^{\lambda_2}(z) - \omega_1 - \omega_2 + a_\theta, & z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*. \end{aligned}$$

1.6 Алгебраическая риманова поверхность

Решение задачи 1 может быть выражено в терминах алгебраических функций. В этом пункте формулируется соответствующий результат.

Рассмотрим кубическое уравнение относительно переменной s :

$$z = R(s) := \frac{4s^3}{((2 + \theta)s - \theta)((4 - \theta)s - 2 + \theta)}. \quad (17)$$

Это уравнение определяет алгебраическую функцию третьей степени, которая является однозначной на некоторой компактной трехлистной римановой поверхности \mathcal{R} . Критические точки функции R с учетом кратности имеют вид: $0, 0, 1, s^*$, а критические значения (проекция точек ветвления) равны: $0, 0, 1, x^*$, где x^* определяется формулой (15), а

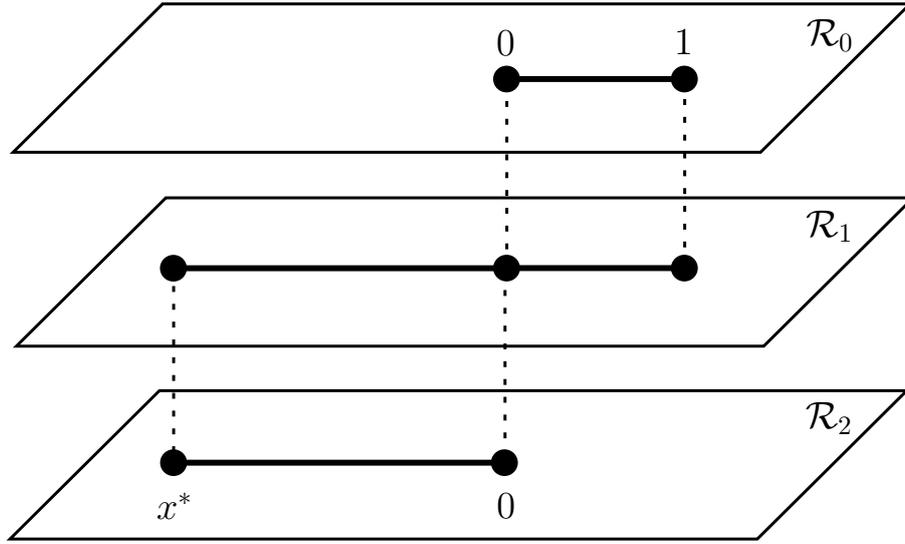
$$s^* = \frac{3\theta(2 - \theta)}{8 + 2\theta - \theta^2}.$$

Риманова поверхность \mathcal{R} реализуется как склейка трех экземпляров комплексной сферы с разрезами Δ и Γ^* :

$$\mathcal{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad \mathcal{R}_1 := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \cup \Gamma^*), \quad \mathcal{R}_2 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma^*.$$

Листы подклеиваются крест-накрест вдоль разрезов, как изображено на рис. 1. Поверхность \mathcal{R} имеет род нуль, рациональная функция R (17) осуществляет конформное отображение комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_s$ на поверхность \mathcal{R} , точнее $R = \pi \circ \varphi$, где $\pi : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_z$ — естественная проекция, а $\varphi : \overline{\mathbb{C}}_s \rightarrow \mathcal{R}$ конформное отображение.

На поверхности \mathcal{R} определим мероморфную функцию h , имеющую три полюса и три нуля: простой полюс в точке ветвления над 1, полюс

Рис. 1: Риманова поверхность \mathcal{R} функции h

кратности два над 0 , три нуля над ∞ (простые при $\theta \in (0, 1)$, простой и кратный в точке ветвления при $\theta = 1$). Такая функция h существует и единственна с точностью до постоянного множителя. Пусть h_j — голоморфные ветви, сужения функции h на листы \mathcal{R}_j , $j = 0, 1, 2$. Фиксируем нормировку h условием $\lim_{z \rightarrow \infty} zh_0(z) = 2$. В координатах s функция h является рациональной (т.е. $h \circ \varphi$ рациональна на $\overline{\mathbb{C}}_s$) и равна:

$$h = \frac{((2 + \theta)s - \theta)((4 - \theta)s - 2 + \theta)}{2s^2(s - 1)} = \frac{2s}{z(s - 1)}. \quad (18)$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат этого пункта.

Предложение 2. Пусть h — параметрически заданная выражениями (17), (18) алгебраическая третьей степени функция переменной z . Пусть h_0 и h_2 — две ее ветви, голоморфные в областях $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma^*$, соответственно, где $\Gamma^* = [x^*, 0]$, а x^* определен формулой (15). Тогда решение задачи равновесия 1 выражается через скачки функций h_0, h_2 :

$$\begin{aligned} d\lambda_1(x) &= \frac{-1}{2\pi i} (h_0^+ - h_0^-)(x)dx, & x \in \Delta; \\ d\lambda_2(x) &= \frac{1}{2\pi i} (h_2^+ - h_2^-)(x)dx, & x \in \Gamma^*. \end{aligned} \quad (19)$$

В настоящей работе алгебраическое уравнение для функции h является следствием явных формул для аппроксимаций Эрмита–Паде. Возмож-

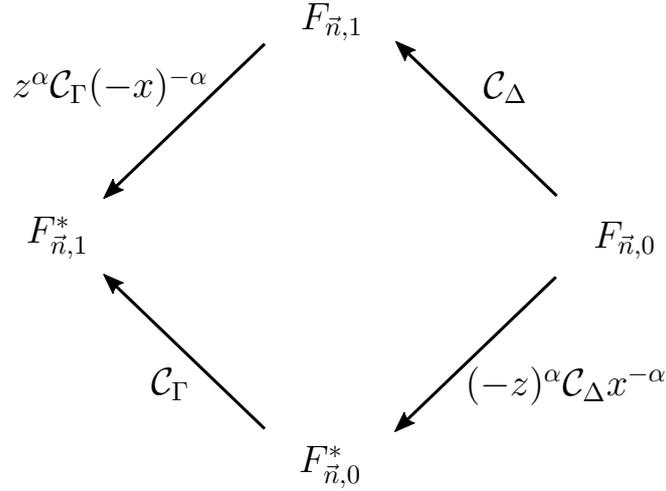


Рис. 2: Действие \mathcal{C} на функции $F_{\vec{n},j}, F_{\vec{n},j}^*$ ($\alpha := \alpha_1 - \alpha_2$)

ность нахождения алгебраического уравнения для функции h в ситуации, когда явных формул нет, продемонстрирована в работах [5], [10].

1.7 Интегральные представления

В этом пункте приведены интегральные представления для набора функций $(w_1 Q_{\vec{n}}, R_{\vec{n},1}, R_{\vec{n},1}^*)$. Далее эти интегральные представления используются при исследовании асимптотики. Введем обозначения для четырех повторных интегралов:

$$\begin{aligned}
 F_{\vec{n},0}(z) &:= \oint_{\gamma_z} \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1}} \oint_{\gamma_t} \frac{s^{n_2+\alpha_2}(1-s)^{n_1+n_2+\beta} ds}{(s-t)^{n_2+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus \Delta}, \\
 F_{\vec{n},1}(z) &:= \int_0^1 \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1}} \oint_{\gamma_t} \frac{s^{n_2+\alpha_2}(1-s)^{n_1+n_2+\beta} ds}{(s-t)^{n_2+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta, \\
 F_{\vec{n},0}^*(z) &:= \oint_{\gamma_z} \frac{t^{n_1}(-t)^{\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1}} \int_0^1 \frac{s^{n_2+\alpha_2}(1-s)^{n_1+n_2+\beta} ds}{(s-t)^{n_2+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus \Gamma}, \\
 F_{\vec{n},1}^*(z) &:= \int_{-\infty}^0 \frac{t^{n_1}(-t)^{\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1}} \int_0^1 \frac{s^{n_2+\alpha_2}(1-s)^{n_1+n_2+\beta} ds}{(s-t)^{n_2+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,
 \end{aligned}$$

где γ_z, γ_t — контуры, обходящие в положительном направлении точки z и t соответственно. Первые три интеграла абсолютно сходятся при стандартных условиях на параметры: $\alpha_1, \alpha_2, \beta > -1, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$. Для абсолютной сходимости четвертого интеграла дополнительно потребуем,

чтобы $\alpha_1 - \alpha_2 \in (-n_1 - 1, n_2 + 1)$. При этих условиях интегралы определяют голоморфные функции в указанных областях:

$$\begin{aligned} F_{\vec{n},0} &\in H\left(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus \Delta}\right), & F_{\vec{n},1} &\in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \\ F_{\vec{n},0}^* &\in H\left(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus \Gamma}\right), & F_{\vec{n},1}^* &\in H(\mathbb{C} \setminus \Gamma). \end{aligned}$$

Эти функции обладают рядом любопытных свойств, см. предложение 3 ниже. Например, интеграл Коши $(\mathcal{C}_\gamma f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(x)dx}{x-z}$ преобразует функции $F_{\vec{n},j}$, $F_{\vec{n},j}^*$ по схеме, изображенной на рис. 2.

Предложение 3. 1) Интеграл Коши \mathcal{C} преобразует функции $F_{\vec{n},j}$, $F_{\vec{n},j}^*$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} F_{\vec{n},1} &= \mathcal{C}_\Delta F_{\vec{n},0}, & (-z)^{\alpha_2 - \alpha_1} F_{\vec{n},0}^* &= \mathcal{C}_\Delta (x^{\alpha_2 - \alpha_1} F_{\vec{n},0}^*), \\ F_{\vec{n},1}^* &= \mathcal{C}_\Gamma F_{\vec{n},0}^*, & z^{\alpha_2 - \alpha_1} F_{\vec{n},1}^* &= \mathcal{C}_\Gamma ((-x)^{\alpha_2 - \alpha_1} F_{\vec{n},1}^*), \quad \alpha_1 - \alpha_2 \in (0, 1). \end{aligned}$$

2) Линейное пространство $\langle F_{\vec{n},0}, F_{\vec{n},1}, F_{\vec{n},0}^*, F_{\vec{n},1}^* \rangle$ имеет размерность, равную трем. Справедливы следующие соотношения между $F_{\vec{n},1}, F_{\vec{n},0}^*, F_{\vec{n},1}^*$:

$$\left(F_{\vec{n},1} + \left(e^{2\pi i(\alpha_1 - \alpha_2)} - 1 \right) F_{\vec{n},1}^* \right) (z) = F_{\vec{n},0}^*(z) \begin{cases} 1, & \text{Im } z > 0, \\ e^{2\pi i(\alpha_1 - \alpha_2)}, & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

Связь между интегралами $F_{\vec{n},j}, F_{\vec{n},j}^*$ и рассматриваемыми аппроксимациями Эрмита–Паде отражена в следующей теореме.

Теорема 2. Для набора функций $(w_1 Q_{\vec{n}}, R_{\vec{n},1}, R_{\vec{n},1}^*)$ справедливы следующие интегральные представления:

$$(w_1 Q_{\vec{n}}, R_{\vec{n},1}, R_{\vec{n},1}^*) = - \left(\frac{F_{\vec{n},0}}{4\pi^2}, \frac{F_{\vec{n},1}}{2\pi i}, \frac{\sin \pi(\alpha_1 - \alpha_2) F_{\vec{n},1}^*}{\pi} \right). \quad (20)$$

1.8 Сильная асимптотика

Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для общих систем Никишина с непересекающимися отрезками получена в [2], для обобщенных систем Никишина с непересекающимися отрезками — в [9]. Отметим также работу об асимптотике отношения для системы Никишина [8].

Здесь приведены формулы сильной асимптотики в диагональном случае $n_1 = n_2 = n$. При $\theta = 1$ уравнение (17) имеет вид: $4s^3 = z(3s - 1)^2$. Пусть s_0, s_1, s_2 — голоморфные ветви этой алгебраической функции, такие, что $s_j \in H(\mathcal{R}_j)$, где, напомним, $\mathcal{R}_0 = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, $\mathcal{R}_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, $\mathcal{R}_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для интегралов $F_{\vec{n},1}^*$ и $F_{\vec{n},j}$, $j = 0, 1$, справедливы следующие асимптотические формулы при $n_1 = n_2 = n \rightarrow \infty$:*

$$\begin{aligned} \frac{F_{\vec{n},j}(z)}{(-1)^{j+1}} &\approx \frac{\pi}{n} \left(\frac{2s_j}{3s_j - 1} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1} \sqrt{\frac{s_j - \frac{1}{3}}{s_j - 1}} w_1(s_j) (3s_j - 1)^{2n}, \quad z \in \mathcal{R}_j, \\ F_{\vec{n},1}^*(z) &\approx \frac{\pi}{n} \left(\frac{2s_2}{1 - 3s_2} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1} \sqrt{\frac{s_2 - \frac{1}{3}}{s_2 - 1}} w_1(s_2) (3s_2 - 1)^{2n}, \quad z \in \mathcal{R}_2. \end{aligned}$$

2 Интегральные представления

Эта глава посвящена доказательству теоремы 2. Интегральные представления для $Q_{\vec{n}}, R_{\vec{n},1}$ являются простыми следствиями формулы Родрига (6), формула для $R_{\vec{n},1}^*$ менее тривиальна.

2.1 Интегральное представление для $Q_{\vec{n}}$

Перепишем формулу Родрига (6) для случая $r = 2$:

$$z^{\alpha_1} (1 - z)^\beta Q_{\vec{n}}(z) = \frac{1}{n_1!} \frac{d^{n_1}}{dz^{n_1}} z^{n_1 + \alpha_1 - \alpha_2} \frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{dz^{n_2}} z^{n_2 + \alpha_2} (1 - z)^{n_1 + n_2 + \beta}.$$

Интегральное представление для $Q_{\vec{n}}$ получается из этой формулы двукратным применением формулы Коши для производной аналитической функции. Действительно, по формуле Коши имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} t^{n_2 + \alpha_2} (1 - t)^{n_1 + n_2 + \beta} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_t} \frac{s^{n_2 + \alpha_2} (1 - s)^{n_1 + n_2 + \beta} ds}{(s - t)^{n_2 + 1}} =: \frac{G(t)}{2\pi i}. \end{aligned} \quad (21)$$

По определению, функции $F_{\vec{n},0}$, $F_{\vec{n},1}$ связаны с $G_{\vec{n}}$ соотношениями:

$$F_{\vec{n},0}(z) = \oint_{\gamma_z} \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} G(t) dt}{(t-z)^{n_1+1}}, \quad F_{\vec{n},1}(z) = \int_0^1 \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} G(t) dt}{(t-z)^{n_1+1}}. \quad (22)$$

Еще раз применяя формулу Коши, получим требуемое:

$$w_1(z) Q_{\vec{n}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n_1!} \frac{d^{n_1}}{dz^{n_1}} z^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} G(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_z} \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} G(t) dt}{(t-z)^{n_1+1}}.$$

Заметим, что по формуле (6) (при $r = 1$) определенная формулой (21) функция G выражается через классические многочлены Якоби:

$$\frac{G(t)}{2\pi i} = t^{\alpha_2} (1-t)^{n_1+\beta} Q_{n_2}^{\alpha_2, n_1+\beta}(t). \quad (23)$$

2.2 Интегральные представления для $R_{\vec{n},1}$

Нам понадобится следующая лемма, которая является следствием формулы интегрирования по частям.

Лемма 1. 1) Пусть функции $\tilde{u}, \tilde{v} \in C^n[0, 1]$, а $u(x) := x^{c_0}(1-x)^{c_1} \tilde{u}(x)$, $v(x) := x^{d_0}(1-x)^{d_1} \tilde{v}(x)$, где $c_0 + d_0 > n - 1$ и $c_1 + d_1 > n - 1$, тогда

$$\int_0^1 u(x) \frac{d^n v}{dx^n}(x) dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{d^n u}{dx^n}(x) v(x) dx.$$

2) Пусть $\tilde{u}, \tilde{v} \in C^n[1, +\infty)$, $\tilde{u}^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x) = O(x^{-k})$ при $x \rightarrow +\infty$, $k = 0, \dots, n$, а $u(x) := x^{c_0-c_1}(x-1)^{c_1} \tilde{u}(x)$, $v(x) := x^{d_0-d_1}(x-1)^{d_1} \tilde{v}(x)$, где $c_1 + d_1 > n - 1$, а $c_0 + d_0 < n - 1$, тогда

$$\int_1^{+\infty} u(x) \frac{d^n v}{dx^n}(x) dx = (-1)^n \int_1^{+\infty} \frac{d^n u}{dx^n}(x) v(x) dx.$$

Условия леммы достаточны для абсолютной сходимости интегралов и равенства нулю всех внеинтегральных слагаемых. Доказательство приведено в последней главе.

Интегральное представление для $R_{\vec{n},1}$ выводится из (5) и (22) с помощью леммы 1 с учетом (23):

$$\begin{aligned} R_{\vec{n},1}(z) &= \int_0^1 \frac{Q_{\vec{n}}(t) w_1(t) dt}{z-t} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{dt}{z-t} \frac{1}{n_1!} \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} G(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} G(t) dt}{(t-z)^{n_1+1}}. \end{aligned}$$

Получим еще одно интегральное выражение для $R_{\vec{n},1}$. Используя формулу (21) и снова применяя лемму 1, продолжим цепочку тождеств:

$$\begin{aligned} -R_{\vec{n},1}(z) &= \int_0^1 \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1}} \frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} t^{n_2+\alpha_2} (1-t)^{n_1+n_2+\beta} = \\ &= (-1)^{n_2} \int_0^1 t^{n_2+\alpha_2} (1-t)^{n_1+n_2+\beta} dt \frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} \frac{t^{n_1+\alpha_1-\alpha_2}}{(t-z)^{n_1+1}} = \\ &= \frac{(-1)^{n_1+n_2+1}}{z^{n_2+1-\alpha_1+\alpha_2}} \int_0^1 t^{n_2+\alpha_2} (1-t)^{n_1+n_2+\beta} dt \frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{d(t/z)^{n_2}} \frac{\left(\frac{t}{z}\right)^{n_1+\alpha_1-\alpha_2}}{\left(1-\frac{t}{z}\right)^{n_1+1}}. \end{aligned}$$

Обозначим через $q_{\vec{n}}$ многочлен степени n_1 , задаваемый формулой:

$$q_{\vec{n}}(x) = \frac{(1-x)^{n_1+n_2+1}}{x^{\alpha_1-\alpha_2} n_2!} \frac{d^{n_2}}{dx^{n_2}} \frac{x^{n_1+\alpha_1-\alpha_2}}{(1-x)^{n_1+1}}, \quad (24)$$

тогда получим следующее соотношение для $R_{\vec{n},1}$:

$$-R_{\vec{n},1}(z) = \int_0^1 t^{n_2+\alpha_1} (1-t)^{n_1+n_2+\beta} \frac{z^{n_1} q_{\vec{n}}\left(\frac{t}{z}\right) dt}{(t-z)^{n_1+n_2+1}}. \quad (25)$$

2.3 Интегральное представление для $R_{\vec{n},1}^*$

Перейдем теперь к доказательству последнего из соотношений (20). Из определения $R_{\vec{n},j}^*$ (см. (12)) следует, что $R_{\vec{n},1}^* = -\frac{w_1}{w_2} R_{\vec{n},2}^*$. Будем использовать полученное ранее представление (13) в виде преобразования Коши: $R_{\vec{n},2}^* = \widehat{R_{\vec{n},1} \rho}$. Это представление было получено нами в предположении, что $\alpha_1 - \alpha_2 \in (0, 1)$. Вначале докажем требуемое при этом ограничении, а затем снимем ограничение, применив принцип аналитического продолжения по $\vec{\alpha}$. Итак, с учетом определения веса ρ (10) и выражения для $R_{\vec{n},1}$ (25), имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\pi R_{\vec{n},2}^*(z)}{\sin \pi(\alpha_1 - \alpha_2)} &= \int_{-\infty}^0 \frac{R_{\vec{n},1}(x)(-x)^{\alpha_2-\alpha_1} dx}{z-x} = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{(-x)^{\alpha_2-\alpha_1} dx}{x-z} \int_0^1 s^{n_2+\alpha_1} (1-s)^{n_1+n_2+\beta} \frac{x^{n_1} q_{\vec{n}}\left(\frac{s}{x}\right) ds}{(s-x)^{n_1+n_2+1}} = \\ &= \int_0^1 s^{n_2+\alpha_1} (1-s)^{n_1+n_2+\beta} ds \int_{-\infty}^0 \frac{x^{n_1} q_{\vec{n}}\left(\frac{s}{x}\right) (-x)^{\alpha_2-\alpha_1} dx}{(s-x)^{n_1+n_2+1} (x-z)} = \\ &= \int_0^1 s^{n_2+\alpha_1} (1-s)^{n_1+n_2+\beta} I(s, z) ds, \quad (26) \end{aligned}$$

где

$$I(s, z) := \int_{-\infty}^0 \frac{x^{n_1} q_{\vec{n}}\left(\frac{s}{x}\right) (-x)^{\alpha_2 - \alpha_1} dx}{(s-x)^{n_1+n_2+1} (x-z)}, \quad s > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Преобразуем интеграл $I(s, z)$. Вначале сделаем замену, перейдя от переменной x к переменной $\tau = s/x$:

$$\begin{aligned} I(s, z) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\left(\frac{s}{\tau}\right)^{n_1} q_{\vec{n}}(\tau) \left(\frac{s}{-\tau}\right)^{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{s}{\tau^2} d\tau}{\left(s - \frac{s}{\tau}\right)^{n_1+n_2+1} \left(\frac{s}{\tau} - z\right)} = \\ &= \frac{(-1)^{n_1+n_2+1}}{z s^{n_2+\alpha_1-\alpha_2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\tau^{n_2} q_{\vec{n}}(\tau) (-\tau)^{\alpha_1-\alpha_2} d\tau}{(1-\tau)^{n_1+n_2+1} \left(\frac{s}{z} - \tau\right)}. \end{aligned}$$

Выражение (24) для многочлена $q_{\vec{n}}$ можно переписать, поменяв ветвь степенной функции в числителе и знаменателе:

$$q_{\vec{n}}(x) = \frac{(1-x)^{n_1+n_2+1}}{(-x)^{\alpha_1-\alpha_2} n_2!} \frac{d^{n_2}}{dx^{n_2}} \frac{x^{n_1} (-x)^{\alpha_1-\alpha_2}}{(1-x)^{n_1+1}}.$$

Подставим это выражение для $q_{\vec{n}}$ в рассматриваемый интеграл и снова применим лемму 1 (напомним, что пока $\alpha_1 - \alpha_2 \in (0, 1)$):

$$\begin{aligned} I(s, z) &= \frac{(-1)^{n_1+n_2+1}}{z s^{n_2+\alpha_1-\alpha_2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\tau^{n_2} d\tau}{\left(\frac{s}{z} - \tau\right)} \frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{d\tau^{n_2}} \frac{\tau^{n_1} (-\tau)^{\alpha_1-\alpha_2}}{(1-\tau)^{n_1+1}} = \\ &= \frac{(-1)^{n_1+1}}{z s^{n_2+\alpha_1-\alpha_2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\tau^{n_1} (-\tau)^{\alpha_1-\alpha_2} d\tau}{(1-\tau)^{n_1+1}} \frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{d\tau^{n_2}} \frac{\tau^{n_2}}{\left(\frac{s}{z} - \tau\right)}. \end{aligned}$$

Заметим, что справедливо тождество

$$\frac{1}{n_2!} \frac{d^{n_2}}{d\tau^{n_2}} \frac{\tau^{n_2}}{\left(\frac{s}{z} - \tau\right)} = \frac{\left(\frac{s}{z}\right)^{n_2}}{\left(\frac{s}{z} - \tau\right)^{n_2+1}}.$$

Используя это равенство, снимем один этаж в формуле для $I(s, z)$. Затем сделаем замену $\tau = \frac{t}{z}$, получим:

$$\begin{aligned} I(s, z) &= \frac{(-1)^{n_1+1}}{z s^{n_2+\alpha_1-\alpha_2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\tau^{n_1} (-\tau)^{\alpha_1-\alpha_2}}{(1-\tau)^{n_1+1}} \frac{\left(\frac{s}{z}\right)^{n_2} d\tau}{\left(\frac{s}{z} - \tau\right)^{n_2+1}} = \\ &= (zs)^{\alpha_2-\alpha_1} \int_{z\mathbb{R}_-} \frac{t^{n_1} (-t)^{\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1} (s-t)^{n_2+1}}. \end{aligned}$$

В последнем интеграле деформируем контур, заменив луч $z\mathbb{R}_-$ на \mathbb{R}_- . Это можно сделать по теореме Коши, так как особенности подынтегральной функции в точках s и z находятся в одном из двух углов, образованных лучами, а ее поведение в окрестности бесконечности имеет вид $O\left(\frac{1}{t^{n_2+2+\alpha_2-\alpha_1}}\right) = o\left(\frac{1}{t}\right)$. Получим следующее выражение для $I(s, z)$:

$$I(s, z) = (zs)^{\alpha_2-\alpha_1} \int_{-\infty}^0 \frac{t^{n_1}(-t)^{\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1}(s-t)^{n_2+1}}.$$

Подставляя эту формулу в (26), получим выражение для $R_{\vec{n},2}^*$, совпадающее с требуемым после смены порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} \frac{-\pi R_{\vec{n},1}^*(z)}{\sin \pi(\alpha_1 - \alpha_2)} &= \frac{\pi R_{\vec{n},2}^*(z) z^{\alpha_1-\alpha_2}}{\sin \pi(\alpha_1 - \alpha_2)} = \\ &= \int_0^1 s^{n_2+\alpha_2} (1-s)^{n_1+n_2+\beta} ds \int_{-\infty}^0 \frac{t^{n_1}(-t)^{\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n_1+1}(s-t)^{n_2+1}} = F_{\vec{n},1}^*(z). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая импликация:

$$\alpha_1 - \alpha_2 \in (0, 1) \quad \Rightarrow \quad R_{\vec{n},1}^*(z) = \frac{\sin \pi(\alpha_1 - \alpha_2)}{\pi} F_{\vec{n},1}^*(z).$$

Заметим, что в тождестве выше левая часть $R_{\vec{n},1}^* := \frac{w_1}{w_2} R_{\vec{n},2} - R_{\vec{n},1}$ аналитически зависит от $\vec{\alpha}$ в области $\{\vec{\alpha} : \operatorname{Re} \alpha_j > -1, j = 1, 2\}$ в силу доказанных интегральных представлений для $R_{\vec{n},j}$ (интеграл для $R_{\vec{n},2}$ получается из интеграла для $R_{\vec{n},1}$ перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$). Интеграл $F_{\vec{n},1}^*$ в правой части этого тождества является аналитической функцией в $\{\vec{\alpha} : \operatorname{Re}(\alpha_1 - \alpha_2) \in (-n_1 - 1, n_2 + 1), \operatorname{Re} \alpha_j > -1, j = 1, 2\}$. По теореме единственности тождество справедливо во всей этой области.

Обратим внимание, что для $F_{\vec{n},1}^*$ выполнено соотношение, аналогичное соотношениям (22) для $F_{\vec{n},j}$:

$$F_{\vec{n},1}^*(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{t^{n_1}(-t)^{\alpha_1-\alpha_2} g(t) dt}{(t-z)^{n_1+1}}, \quad (27)$$

где функция g есть функция второго рода для классических многочленов Якоби (см. выражение (23) для G):

$$g(t) := \int_0^1 \frac{s^{n_2+\alpha_2} (1-s)^{n_1+n_2+\beta} ds}{(s-t)^{n_2+1}} = \frac{-\widehat{G}(t)}{2\pi i} = -R_{n_2}^{\alpha_2, n_1+\beta}(t). \quad (28)$$

3 Формулы сильной асимптотики

Данная глава посвящена нахождению формул сильной асимптотики для аппроксимаций Эрмита–Паде в диагональном случае $n_1 = n_2 = n$ при $n \rightarrow \infty$. Используются полученные в теореме 2 интегральные представления, асимптотика которых изучается методом перевала.

3.1 Метод перевала в \mathbb{C}^m

Пусть \mathfrak{Z} — гладкое компактное многообразие в \mathbb{C}^m вещественной размерности m , возможно, с краем. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathfrak{Z}} \psi(\mathbf{z}) \Phi^n(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (29)$$

где $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$, $d\mathbf{z} = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$, а функции ψ , Φ голоморфны во внутренних точках \mathfrak{Z} . Пусть известно, что интеграл не изменится, если заменить \mathfrak{Z} на многообразии \mathfrak{Z}' с тем же краем. Пусть \mathfrak{Z}' обладает следующим свойством: функция $\Phi|_{\mathfrak{Z}'}$ достигает максимума модуля только во внутренней точке $\mathbf{z}_0 \in \mathfrak{Z}'$, являющейся невырожденной точкой перевала (седловой точкой) функции Φ :

$$|\Phi(\mathbf{z}_0)| > |\Phi(\mathbf{z})|, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}' \setminus \{\mathbf{z}_0\}, \quad (\ln \Phi)'(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}, \quad \det (\ln \Phi)''(\mathbf{z}_0) \neq 0.$$

Такое многообразие \mathfrak{Z}' будем называть *перевальным*. Интеграл по перевальному многообразию имеет асимптотическое разложение (гл. 5 [20]):

$$\int_{\mathfrak{Z}} \psi(\mathbf{z}) \Phi^n(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathfrak{Z}'} \psi(\mathbf{z}) \Phi^n(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \sim \Phi^n(\mathbf{z}_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^{m/2+k}},$$

где главный член a_0 асимптотического ряда имеет вид:

$$a_0 = (2\pi)^{m/2} \psi(\mathbf{z}_0) (\det [- (\ln \Phi)''(\mathbf{z}_0)])^{-1/2}. \quad (30)$$

Основная трудность применения метода перевала состоит в обосновании существования подходящего многообразия \mathfrak{Z}' . Ситуация упрощается в одномерном случае, когда рассматриваются интегралы на кривых в \mathbb{C} . В случае повторных интегралов $F_{\vec{n},0}$, $F_{\vec{n},1}$, $F_{\vec{n},1}^*$ можно попытаться свести задачу к последовательному применению одномерного метода перевала.

3.2 Лемма о перевальных многообразиях

Интегралы $F_{\vec{n},0}$, $F_{\vec{n},1}$, $F_{\vec{n},1}^*$ имеют вид (29), где Φ имеет вид:

$$\Phi(t, s; z) := \frac{ts(1-s)^2}{(t-z)(s-t)},$$

а множитель ψ для $F_{\vec{n},0}$, $F_{\vec{n},1}$ и множитель ψ^* для $F_{\vec{n},1}^*$ имеют вид:

$$\psi(t, s; z) := \frac{t^{\alpha_1 - \alpha_2} w_2(s)}{(t-z)(s-t)}, \quad \psi^*(t, s; z) := \frac{(-t)^{\alpha_1 - \alpha_2} w_2(s)}{(t-z)(s-t)}.$$

Найдем критические точки функции Φ . Приравняем к нулю ее частные логарифмические производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \Phi(t, s; z) &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t-z} + \frac{1}{s-t} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi(t, s; z) &= \frac{1}{s} - \frac{2}{1-s} - \frac{1}{s-t} = 0. \end{aligned}$$

Упрощая, получим кубическое уравнение для точек перевала $(t, s)(z)$:

$$z = \frac{4s^3}{(3s-1)^2}, \quad t = \frac{2s^2}{3s-1}. \quad (31)$$

Каждая из алгебраических функций t и s от переменной z допускает выделение трех голоморфных ветвей t_j, s_j :

$$t_0, s_0 \in H(\mathbb{C} \setminus [0, 1]), \quad t_1, s_1 \in H(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]), \quad t_2, s_2 \in H(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

Найдем выражения для абсолютных значений функции Φ в точках перевала $(t, s)(z)$ (*перевальных высот c_j*):

$$c_j(z) := |\Phi(t_j, s_j; z)| = |3s_j - 1|^2 = \frac{4|s_j|^3}{|z|}.$$

Перевальные высоты c_j упорядочены: $c_0 \geq c_1 \geq c_2$, причем первое равенство достигается только при $z \in [0, 1]$, второе — только при $z \in (-\infty, 0]$. Этот факт имеет простое доказательство. Докажем для примера второе из неравенств. В силу принципа максимума достаточно показать, что $c_2/c_1 \leq 1$ на границе области гармоничности $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. Очевидно,

что $c_2/c_1 = 1$ на $[-\infty, 0]$. Заметим, что для произвольной пары точек $y_1 \in \mathbb{C}$, $y_2 \in [a, b]$ справедливо по меньшей мере одно из неравенств $|y_2 - a| \leq |y_1 - a|$ или $|y_2 - b| \leq |y_1 - b|$. Фиксируем $z \in [0, 1]$, тогда $s_2(z) \in [0, 1/4] \subset [0, 1/3]$. Таким образом, выполнено по меньшей мере одно из неравенств (а на самом деле оба): $|s_2(z)| \leq |s_1(z)|$ или $|s_2(z) - 1/3| \leq |s_1(z) - 1/3|$. По определению c_j любое из этих неравенств влечет $c_2(z) \leq c_1(z)$. То есть $c_2/c_1 \leq 1$ на $[0, 1]$. Что и требовалось. Отметим, что упорядоченность перевальных высот тесно связана с так называемой структурой листов Наттолла, см. [30], [43], [44]. В рассматриваемом случае разрезы вдоль Δ и Γ определяют три листа поверхности \mathcal{R} на которых упорядочены величины $\ln c_j(z) = \operatorname{Re} \int^z h_j d\zeta$. Естественные вопросы об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде для комплексных систем Никишина приводят к содержательным геометрическим проблемам о разрезах Наттолла [11], [12]. Из неравенства для перевальных высот $c_0 > \max(c_1, c_2)$ следует сходимость рассматриваемых аппроксимаций Эрмита–Паде вне отрезка Δ .

Теперь мы готовы сформулировать основную лемму о существовании перевальных многообразий для интегралов $F_{\vec{n},0}$, $F_{\vec{n},1}$, $F_{\vec{n},1}^*$.

Лемма 2. *При $j = 0, 1, 2$ для любого $z \in \mathcal{R}_j$ найдется кривая $\Gamma_j(z)$, а для любого $t \in \Gamma_j(z)$ найдется кривая $\gamma_j(t)$, такие, что*

- а) кривая $\Gamma_j(z)$ содержит $t_j(z)$, кривая $\gamma_j(t_j(z))$ содержит $s_j(z)$;
- б) максимум $|\Phi|$ на $\mathfrak{Z}' := \{(t, s) : t \in \Gamma_j(z), s \in \gamma_j(t)\}$ достигается только в точке перевала $(t_j, s_j)(z)$;
- в) для интегралов $F_{\vec{n},1}^*$, $F_{\vec{n},j}$, $j = 0, 1$, справедливы равенства:

$$F_{\vec{n},j}(z) = \int_{\Gamma_j(z)} \frac{t^{n+\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n+1}} \int_{\gamma_j(t)} \frac{s^{n+\alpha_2}(1-s)^{2n+\beta} ds}{(s-t)^{n+1}}, \quad z \in \mathcal{R}_j,$$

$$F_{\vec{n},1}^*(z) = \int_{\Gamma_2(z)} \frac{t^n (-t)^{\alpha_1-\alpha_2} dt}{(t-z)^{n+1}} \int_{\gamma_2(t)} \frac{s^{n+\alpha_2}(1-s)^{2n+\beta} ds}{(s-t)^{n+1}}, \quad z \in \mathcal{R}_2.$$

Доказательство этой леммы выходит за рамки этой публикации и будет приведено в одной из следующих. Отметим, что в основе лежит последовательное доказательство существования перевальных контуров для одномерных интегралов (21), (28), а затем (22), (27).

3.3 Асимптотические формулы

Найдем матрицу Гессе функции $\ln \Phi$ в перевальных точках (см. (31)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln \Phi(t, s; z) &= \frac{-1}{t^2} + \frac{1}{(t-z)^2} + \frac{1}{(s-t)^2} = \frac{(3s-1)^3}{s^3(1-s)^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln \Phi(t, s; z) &= \frac{-1}{s^2} - \frac{2}{(1-s)^2} + \frac{1}{(s-t)^2} = \frac{2(3s-2)}{s(1-s)^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \ln \Phi(t, s; z) &= \frac{-1}{(s-t)^2} = \frac{(3s-1)^2}{s^2(1-s)^2}.\end{aligned}$$

Отсюда вычисляем определитель матрицы Гессе:

$$\det (\ln \Phi)''(t_j, s_j; z) = \frac{3(3s_j - 1)^3}{s_j^4(s_j - 1)^3}.$$

Заметим, что в перевальных точках справедливы равенства (см. (31)):

$$t = \frac{2s^2}{3s-1}, \quad \frac{1}{t-z} = \frac{(3s-1)^2}{2s^2(s-1)}, \quad \frac{1}{s-t} = \frac{3s-1}{s(s-1)}.$$

Теперь вычислим значения функции ψ в точках перевала $(t_j, s_j)(z)$, при $j = 0, 1$, и функции ψ^* в точке перевала $(t_2, s_2)(z)$:

$$\begin{aligned}\psi(t_j, s_j; z) &= \left(\frac{2s_j}{3s_j-1} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{w_1(s_j)(3s_j-1)^3}{2s_j^3(s_j-1)^2}, \quad j = 0, 1, \\ \psi^*(t_2, s_2; z) &= \left(\frac{2s_2}{1-3s_2} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{w_1(s_2)(3s_2-1)^3}{2s_2^3(s_2-1)^2}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (30) получаем главный член асимптотики в теореме 3.

4 Доказательства утверждений

4.1 Утверждения 1 и 2

Утверждение 1. *Условия интерполяции (1) для марковских функций:*

$$f_j(z) = \hat{w}_j(z) := \int_{\Delta_j} \frac{w_j(x) dx}{z-x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j, \quad j = 0, \dots, r,$$

эквивалентны соотношениям ортогональности:

$$\int_{\Delta_j} Q_{\bar{n}}(x)x^k w_j(x)dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 0, \dots, r, \quad Q_{\bar{n}} \neq 0. \quad (32)$$

Доказательство. Из (1) следует, что $\text{Res}_{\infty} z^k R_{\bar{n},j} = \text{Res}_{\infty} z^k Q_{\bar{n}} \widehat{w}_j = 0$, при $k = 0, \dots, n_j - 1$. Таким образом, интеграл от функции $z^k Q_{\bar{n}} \widehat{w}_j$ по контуру, обходящему отрезок Δ_j , равен нулю. Воспользуемся формулой Сохоцкого–Племеля и заменим интеграл от $z^k Q_{\bar{n}} \widehat{w}_j$ вокруг отрезка на интеграл от $x^k Q_{\bar{n}} w_j$ по отрезку. В результате получим соотношения (32).

Обратно, пусть многочлен $Q_{\bar{n}} \neq 0$ удовлетворяет условиям (32), тогда по $Q_{\bar{n}}$ определим многочлены $P_{\bar{n},j}$ и функции $R_{\bar{n},j}$:

$$P_{\bar{n},j}(z) = \int_{\Delta_j} \frac{Q_{\bar{n}}(z) - Q_{\bar{n}}(x)}{z - x} w_j(x)dx, \quad R_{\bar{n},j}(z) = \int_{\Delta_j} \frac{Q_{\bar{n}}(x)}{z - x} w_j(x)dx.$$

Из этих определений следуют равенства: $R_{\bar{n},j} = Q_{\bar{n}} \widehat{w}_j - P_{\bar{n},j}$. В силу соотношений ортогональности (32) первое слагаемое в тождестве

$$R_{\bar{n},j}(z) = \frac{1}{p_{n_j}(z)} \int_{\Delta_j} \left[\frac{p_{n_j}(z) - p_{n_j}(x)}{z - x} + \frac{p_{n_j}(x)}{z - x} \right] Q_{\bar{n}}(x) w_j(x)dx$$

равно нулю для любого многочлена p_{n_j} степени, не превосходящей n_j . Таким образом, имеет место следующее представление для $R_{\bar{n},j}$:

$$R_{\bar{n},j}(z) = \frac{1}{p_{n_j}(z)} \int_{\Delta_j} \frac{p_{n_j}(x) Q_{\bar{n}}(x)}{z - x} w_j(x)dx \quad \forall p_{n_j} \neq 0 : \deg p_{n_j} \leq n_j. \quad (33)$$

В частности, отсюда следует, что $R_{\bar{n},j}(z) = O(z^{-n_j-1})$ при $z \rightarrow \infty$, то есть условия (1) выполнены.

Утверждение 2. *Аппроксимации Эрмита–Паде для системы Никитшина (9) и мультииндекса (n_1, n_2) обладают свойствами 1–3 ниже.*

1. *Функции второго рода $R_{\bar{n},1}$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности при $t := \min(n_1 + 1, n_2)$:*

$$\int_{\Gamma} R_{\bar{n},1}(x)x^k \rho(x)dx = 0, \quad k = 0, \dots, t - 1. \quad (34)$$

2. *Пусть $q_{\bar{n},1}$ — многочлен, построенный по нулям $R_{\bar{n},1}$ внутри Γ , тогда $\deg q_{\bar{n},1} \geq t$, а знаменатели $Q_{\bar{n}}$ удовлетворяют соотношениям:*

$$\int_{\Delta} Q_{\bar{n}}(x)x^k \frac{w_1}{q_{\bar{n},1}}(x)dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_1 + \deg q_{\bar{n},1} - 1. \quad (35)$$

3. Следующая комбинация функций второго рода $R_{\bar{n},2}^* := \frac{w_2}{w_1}R_{\bar{n},1} - R_{\bar{n},2}$ имеет интегральное представление:

$$R_{\bar{n},2}^*(z) = \frac{1}{p_m(z)} \int_{\Gamma} \frac{p_m(x)R_{\bar{n},1}(x)}{z-x} \rho(x) dx, \quad \forall p_m \neq 0 : \deg p_m \leq m. \quad (36)$$

Доказательство. 1. Из определения системы Никишина (9) и представления (33) вытекает цепочка равенств при $k = 0, \dots, n_1 - 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} Q_{\bar{n}}(t)t^k w_2(t) dt &= \int_{\Delta} Q_{\bar{n}}(t)t^k w_1(t) dt \int_{\Gamma} \frac{\rho(x) dx}{t-x} = \\ &= \int_{\Gamma} \rho(x) dx \int_{\Delta} \frac{t^k Q_{\bar{n}}(t)}{t-x} w_1(t) dt = - \int_{\Gamma} R_{\bar{n},1}(x) x^k \rho(x) dx. \end{aligned}$$

Тогда ортогональность (34) следует из ортогональности (32) для $Q_{\bar{n}}$.

2. Из ортогональности (34) следует, что $R_{\bar{n},1}$ имеет не менее m нулей внутри Γ , т.е. $\deg q_{\bar{n},1} \geq m$, а отношение $R_{\bar{n},1}/q_{\bar{n},1}$ голоморфно в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ и

$$\frac{R_{\bar{n},1}}{q_{\bar{n},1}}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_1 + \deg q_{\bar{n},1} + 1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Заметим, что из (33) по формуле Сохоцкого–Племеля, следует, что скачок функции $R_{\bar{n},1}$ на Δ имеет вид: $R_{\bar{n},1}^+ - R_{\bar{n},1}^- = -2\pi i Q_{\bar{n}} w_1$. Пусть теперь γ_{Δ} — контур, обходящий отрезок Δ против часовой стрелки, тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} -\operatorname{Res}_{\infty} z^k \frac{R_{\bar{n},1}}{q_{\bar{n},1}} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\Delta}} z^k \frac{R_{\bar{n},1}}{q_{\bar{n},1}}(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} x^k \frac{R_{\bar{n},1}^- - R_{\bar{n},1}^+}{q_{\bar{n},1}}(x) dx = \int_{\Delta} x^k \frac{Q_{\bar{n}} w_1}{q_{\bar{n},1}}(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из поведения (37) в ∞ получаем ортогональность (35).

3. Заметим, что представление (36) аналогично представлению (33). В силу ортогональности (34) достаточно доказать (36) для случая $p_m \equiv 1$. Можно проверить, что функция $R_{\bar{n},2}^*$ и интеграл в формуле (36) имеют равные скачки на Γ и устранимые особенности в концах Γ . Отсюда следует, что их разность является целой функцией с нулем в бесконечности. По теореме Лиувилля разность тождественно равна нулю. Другое доказательство следует из тождества:

$$\frac{1}{(z-x)(x-t)} = \frac{1}{z-t} \left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-t} \right)$$

и следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{R_{\vec{n},1}(x)}{z-x} \rho(x) dx &= \int_{\Gamma} \frac{\rho(x) dx}{z-x} \int_{\Delta} \frac{Q_{\vec{n}}(t)}{x-t} w_1(t) dt = \\ &= \int_{\Delta} \frac{Q_{\vec{n}}(t)}{z-t} w_1(t) dt \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-t} \right] \rho(x) dx = \\ &= \int_{\Delta} \frac{Q_{\vec{n}}(t)}{z-t} w_1(t) dt \left[\frac{w_2}{w_1}(z) - \frac{w_2}{w_1}(t) \right] = \frac{w_2}{w_1}(z) R_{\vec{n},1}(z) - R_{\vec{n},2}(z). \end{aligned}$$

Доказательство формулы (7). Приведем доказательство выражения для многочленов Якоби–Пинейро через обобщенные гипергеометрические функции. Доказательство опирается на одно свойство операторов, входящих формулу Родрига (6). Вначале заметим, что из зеркального свойства символа Похгаммера следует равенство:

$$x^{-\alpha} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+n+k} = \frac{(\alpha+1+k)_n}{n!} x^k = \frac{(\alpha+1)_n (\alpha+1+n)_k}{n! (\alpha+1)_k} x^k.$$

Отсюда следует известное тождество для гипергеометрических функций:

$$x^{-\alpha} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+n} {}_pF_q \left(\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix}; x \right) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_{p+1}F_{q+1} \left(\begin{matrix} \alpha+1+n, \vec{a} \\ \alpha+1, \vec{b} \end{matrix}; x \right).$$

Формула (7) теперь вытекает из формулы (6) и следующего простого тождества:

$$(1-x)^{\beta+|\vec{n}|} = {}_1F_0 \left(-\beta - |\vec{n}|; x \right).$$

Доказательство формулы (8). Докажем, что равенство (8) выполнено с точностью до мультипликативной константы, тогда сама константа восстанавливается по скачку левой и правой частей. Итак, покажем, что

$$f(z) := \int_{-\infty}^0 \frac{z^{\alpha} (-x)^{-\alpha} dx}{z-x} \Rightarrow f'(z) \equiv 0, \quad z \notin (-\infty, 0]$$

при $\alpha \in (0, 1)$. Это вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} f'(z) &= z^{\alpha-1} \int_{-\infty}^0 \frac{(\alpha-1)z - \alpha x}{(z-x)^2} (-x)^{-\alpha} dx = \\ &= z^{\alpha-1} \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dx} \frac{(-x)^{1-\alpha}}{z-x} dx = z^{\alpha-1} \frac{(-x)^{1-\alpha}}{z-x} \Big|_{-\infty}^0 = 0. \end{aligned}$$

4.2 Предложения 1, 2 и лемма 1

Доказательство предложения 2. Для доказательства достаточно проверить, что скачки функций h_0, h_2 на Δ и Γ^* определяют, см. (19), положительные меры λ_1, λ_2 с массами 2 и θ , потенциалы которых удовлетворяют соотношениям равновесия (14).

Вначале докажем, что λ_1, λ_2 являются знакопостоянными мерами. В силу непрерывности достаточно показать, что скачок h_0 не обращается в нуль на $(0, 1)$, а скачок h_2 не обращается в нуль на $(x^*, 0)$. Предположим обратное. Пусть, для определенности, при некотором $x_0 \in (0, 1)$ скачок h_0 равен нулю. Так как все функции h_j являются вещественно аналитическими: $\overline{h_j(\bar{z})} = h_j(z)$, то $h_0(x_0) \in \mathbb{R}$. Функция $h_2 \in H(\mathbb{C} \setminus \Gamma^*)$, поэтому $h_2(x_0) \in \mathbb{R}$. По формуле (18) s и hz связаны дробно-линейным преобразованием, имеющим вещественные коэффициенты. То есть при $z = x_0 \in (0, 1)$ кубическое уравнение (17) относительно s имеет более одного вещественного решения. На самом деле при $z \in (x^*, 0) \cup (0, 1)$ уравнение (17) имеет одно вещественное и пару комплексно-сопряженных решений. Полученное противоречие доказывает, что λ_1 и λ_2 (аналогично) знакопостоянны.

Теперь покажем, что знакопостоянные меры λ_1, λ_2 положительны, и найдем их массы. При $\theta \in (0, 1)$ функции h_0, h_2 голоморфны в окрестности бесконечности и имеют вычеты -2 и θ . Тогда для массы λ_1 имеем:

$$|\lambda_1| = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Delta} (h_0^+ - h_0^-)(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\Delta}} h_0(z) dz = 2,$$

где γ_{Δ} — контур, обходящий отрезок Δ против часовой стрелки. Аналогично $|\lambda_2| = \theta$. Случай $\theta = 1$ доказывается предельным переходом.

Осталось показать, что потенциалы мер λ_1, λ_2 удовлетворяют равенствам и неравенствам (14). Вначале рассмотрим сумму всех ветвей $\text{Tr } h := h_0 + h_1 + h_2$. Как симметрическая функция ветвей, $\text{Tr } h$ является рациональной, причем $\text{Tr } h(\infty) = 0$. Так как функция h на \mathcal{R} имеет полюсы только в точках ветвления, причем порядок полюса всегда меньше порядка ветвления, то все особенности $\text{Tr } h$ устранимы. По теореме Лиувилля $\text{Tr } h \equiv 0$. Далее заметим, что по формуле Сохоцкого–Племеля функции h_0, h_2 являются преобразованиями Коши мер λ_1, λ_2 :

$$h_0(z) := \int \frac{d\lambda_1(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta, \quad h_2(z) := - \int \frac{d\lambda_2(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*.$$

Исключая $h_1 = -h_0 - h_2$ в граничных условиях на берегах разрезов

$$h_0^\pm(x) = h_1^\mp(x), \quad x \in (0, 1); \quad h_1^\pm(x) = h_2^\mp(x), \quad x \in (x^*, 0),$$

получим следующее:

$$\begin{aligned} (h_0^+ + h_0^-)(x) + h_2(x) &= 0, & x \in (0, 1), \\ (h_2^+ + h_2^-)(x) + h_0(x) &= 0, & x \in (x^*, 0). \end{aligned}$$

Заметим, что комплексные потенциалы $\mathcal{V}^{\lambda_j}(z) := -\int \ln(z-x)d\lambda_j(x)$ являются первообразными $-\widehat{\lambda}_j$, а $h_0 = \widehat{\lambda}_1$ и $h_2 = -\widehat{\lambda}_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{V}_+^{\lambda_1} + \mathcal{V}_-^{\lambda_1}\right)(x) - \frac{1}{2} \left(\mathcal{V}_+^{\lambda_2} + \mathcal{V}_-^{\lambda_2}\right)(x) &= \omega_1, & x \in \Delta, \\ \left(\mathcal{V}_+^{\lambda_2} + \mathcal{V}_-^{\lambda_2}\right)(x) - \frac{1}{2} \left(\mathcal{V}_+^{\lambda_1} + \mathcal{V}_-^{\lambda_1}\right)(x) &= \omega_2, & x \in \Gamma^*, \end{aligned}$$

где ω_1, ω_2 — некоторые вещественные константы. Вещественный и комплексный потенциалы связаны тождеством $V^{\lambda_j}(x) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{V}_+^{\lambda_j} + \mathcal{V}_-^{\lambda_j}\right)(x)$ при $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, полученные соотношения совпадают с равенствами (14). Теперь проверим, что при $\theta \in (0, 1)$ и при $x < x^*$ выполнено неравенство $(2V^{\lambda_2} - V^{\lambda_1})(x) > \omega_2$. Достаточно показать, что эта линейная комбинация потенциалов убывает слева от x^* , то есть ее производная $2h_2 + h_0 \equiv h_2 - h_1 < 0$ при $x < x^*$. Ясно, что при x , близких к $-\infty$, $(h_2 - h_1)(x) = 2(1 - \theta)x^{-1} + O(x^{-2}) < 0$. Пусть теперь $h_1(x_0) = h_2(x_0)$ при некотором $x_0 < x^*$. Тогда по формуле (18) $s_1(x_0) = s_2(x_0)$, то есть при $z = x_0 < x^*$ уравнение (17) имеет кратный корень, что неверно. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 2.

Доказательство предложения 1. Предложение 1 вытекает из регулярности рассматриваемых компактов и общей теоремы из работы [15] (см. теорему 1.8 и следствие 1.10). Схематично опишем независимое доказательство. Заметим, что существование решения задачи 1 уже доказано в предложении 2. Таким образом, осталось проверить следующие факты: решение задачи 1 является решением задачи 2, а задача 2 имеет не более одного решения. Такая схема доказательства реализована в работе [35] (см. лемму 3 в подразделе 2.2) и без изменений переносится на рассматриваемый случай. Однако требуется сделать один комментарий. Важную роль в доказательстве [35] играет положительная определенность функционала энергии на нейтральных зарядах. Этот факт хорошо известен

для зарядов на компактах, см., например, [42]. В рассматриваемом случае мы имеем дело с замкнутым неограниченным множеством Γ . В этом случае необходимо использовать утверждение из работы [17].

Теорема [17]. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$. Тогда $I(\mu_1 - \mu_2) \geq 0$, причем равенство достигается только при $\mu_1 = \mu_2$.

Доказательство леммы 1. 1. Достаточно проверить сходимость хотя бы одного из интегралов и равенство нулю всех внеинтегральных слагаемых в формуле интегрирования по частям:

$$\int_0^1 (uv^{(n)})(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(u^{(k)}v^{(n-1-k)} \right) \Big|_0^1 + (-1)^n \int_0^1 (u^{(n)}v)(x)dx.$$

Особенности в концах являются интегрируемыми, поскольку

$$\left(u^{(n)}v \right) (x) = x^{c_0+d_0-n}(1-x)^{c_1+d_1-n} \tilde{u}_n(x)$$

для некоторой функции $\tilde{u}_n \in C[0, 1]$, и $c_j + d_j - n > -1$, $j = 0, 1$. Далее, равенство нулю внеинтегральных членов следует из представления

$$\left(u^{(k)}v^{(n-1-k)} \right) (x) = x^{c_0+d_0-n+1}(1-x)^{c_1+d_1-n+1} \tilde{u}_k(x)$$

для некоторой функции $\tilde{u}_k \in C^{\min(k+1, n-k)}[0, 1]$, где $k = 0, \dots, n-1$.

2. Снова применяем формулу интегрирования по частям. Аналогично предыдущему случаю убеждаемся, что интегралы сходятся в точке 1 и все внеинтегральные слагаемые в этой точке равны нулю. Осталось проверить сходимость и равенство нулю внеинтегральных членов в бесконечности. По формуле Лейбница легко видеть, что при $k = 0, \dots, n$

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{c_1} \tilde{u}(x) = O(x^{-k}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Снова по формуле Лейбница для k -ой производной произведения:

$$u^{(k)}(x) = x^{c_0-k} \sum_{j=0}^k b_{kj} x^j \frac{d^j}{dx^j} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{c_1} \tilde{u}(x) = O(x^{c_0-k}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где $b_{kj} := \binom{k}{j} (k-j)! \binom{c_0}{k-j}$ — постоянные. Аналогичные соотношения справедливы для функции v . В итоге получим, что функция $u^{(n)}v$ интегрируема в бесконечности, т.к. $(u^{(n)}v)(x) = O(x^{c_0+d_0-n}) = O(x^{-1-\varepsilon})$ при

$x \rightarrow +\infty$, где $\varepsilon := n - 1 - c_0 - d_0 > 0$, а все внеинтегральные слагаемые в бесконечности равны нулю:

$$\left(u^{(k)}v^{(n-1-k)}\right)(x) = O(x^{-\varepsilon}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Автор благодарит А.И. Аптекарева, В.Н. Сорокина и Д.Н. Тулякова за плодотворные обсуждения проблемы на семинаре по теории рациональных аппроксимаций кафедры ТФФА мехмата МГУ.

Список литературы

- [1] Adler, M.; van Moerbeke, P.; Wang, D. Random matrix minor processes related to percolation theory. *Random Matrices Theory Appl.* 2 (2013), no. 4, 72 pp.
- [2] Аптекарев А.И. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина, *Матем. сб.*, 190:5 (1999), 3–44.
- [3] Аптекарев А.И., Боголюбский А.И., Ятцелев М.Л. Сходимость лучевых последовательностей аппроксимаций Фробениуса–Паде, *Матем. сб.*, 208:3 (2017), 4–27.
- [4] Aptekarev, A.I.; Branquinho, A.; Van Assche, W. Multiple Orthogonal Polynomials for Classical Weights. *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 355, no. 10 (Oct., 2003), pp. 3887-3914.
- [5] Aptekarev, A.I.; Kalyagin, V.A.; Lysov, V.G.; Toulyakov, D.N. Equilibrium of vector potentials and uniformization of the algebraic curves of genus 0. *J. Comput. Appl. Math.*, 233:3 (2009), 602–616.
- [6] Аптекарев А.И., Койэлаарс А.Э. Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов, *УМН*, 66:6(402) (2011), 123–190.
- [7] Аптекарев А.И., Лопес Лагомасино Г., Мартинес-Финкельштейн А. О системах Никишина с дискретными компонентами и слабой асимптотике многочленов совместной ортогональности, *УМН*, 72:3(435) (2017), 3-64.
- [8] Аптекарев А.И., Лопес Лагомасино Г., Роча И.А. Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде, *Матем. сб.*, 196:8 (2005), 3-20.
- [9] Аптекарев А.И., Лысов В.Г. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде, *Матем. сб.*, 201:2 (2010), 29-78.
- [10] Аптекарев А.И., Лысов В.Г., Туляков Д.Н. Трехлистные римановы поверхности рода 0 с фиксированными проекциями точек ветвления, *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2007, №13, 21 с.

- [11] Artekarev A.I., Tulyakov D.N. Geometry of Hermite–Pade approximants for system of functions f, f^2 with three branch points, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, №77, 25 pp.
- [12] Аптекарев А.И., Туляков Д.Н. Абелев интеграл Наттолла на римановой поверхности кубического корня многочлена третьей степени, Изв. РАН. Сер. матем., 80:6 (2016), 5–42.
- [13] Van Assche, W. Mehler–Heine asymptotics for multiple orthogonal polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 1, 303–314.
- [14] Beckermann, B.; Coussement, J.; Van Assche, W. Multiple Wilson and Jacobi–Pineiro polynomials. J. Approx. Theory 132 (2005), no. 2, 155–181.
- [15] Beckermann, B.; Kalyagin, V.; Matos A.; Wielonsky, F. Equilibrium problems for vector potentials with semidefinite interaction matrices and constrained masses. Constr. Approx., 37:1 (2013), 101–134.
- [16] Бустаманте Ж., Лопес Лагомасино Г. Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций, Матем. сб., 183:11 (1992), 117–138.
- [17] Segrell, U.; Kolodziej, S.; Levenberg, N. Two problems on potential theory for unbounded sets. Math. Scand. 83, 265–276 (1998).
- [18] Coussement, E.; Van Assche, W. Multiple orthogonal polynomials associated with the modified Bessel functions of the first kind. Constr. Approx. 19:2 (2003), 237–263.
- [19] Driver, K.; Stahl, H. Normality in Nikishin systems. Indag. Math. (N.S.), 5 (1994), no. 2, 161–187.
- [20] Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
- [21] Fidalgo Prieto, U.; López Lagomasino, G. Nikishin systems are perfect. Constr. Approx. 34 (2011), no. 3, 297–356.
- [22] Fidalgo Prieto, U.; López Lagomasino, G. Nikishin systems are perfect. The case of unbounded and touching supports. J. Approx. Theory 163 (2011), no. 6, 779–811.

- [23] Гончар А.А., Рахманов Е.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа, Тр. МИАН, 157 (1981), 31-48.
- [24] Гончар А.А., Рахманов Е.А. Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов, Матем. сб., 125(167):1(9) (1984), 117–127.
- [25] Гончар А.А., Рахманов Е.А. О задаче равновесия для векторных потенциалов, УМН, 40(244):4 (1985), 155–156.
- [26] Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н. Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа, Матем. сб., 188:5 (1997), 33-58.
- [27] Hermite, Ch. Sur la fonction exponentielle, C. R. Acad. Sci. Paris 77, 18–24, 74–79, 226–233, 285–293 (1873).
- [28] Ismail M.E.H. Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. With two chapters by Van Assche W.; with a foreword by Askey R.A.
- [29] Jacobi, C.G.J. Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Journ. für Math., 56 (1859), 149-165.
- [30] Комлов А.В., Пальвелев Р.В., Суетин С.П., Чирка Е.М. Аппроксимации Эрмита–Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности, УМН, 72:4(436) (2017), 95–130.
- [31] Kuijlaars, A. B. J. Multiple orthogonal polynomial ensembles, Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory, Contemp. Math., vol. 507, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 155–176.
- [32] Kuijlaars, A.B.J.; Martinez-Finkelshtein, A.; Wielonsky, F. Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights. Comm. Math. 286:1 (2009), 217–275.
- [33] Лапик М.А. О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле, Матем. сб., 206:2 (2015), 41–56.

- [34] Лысов В.Г. Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лагерра, Матем. сб., 196:12 (2005), 99–122.
- [35] Лысов В.Г., Туляков Д.Н. О векторной теоретико-потенциальной задаче равновесия с матрицей Анжелеско, Тр. МИАН (2017).
- [36] Mahler, K. Perfect systems, Compos. Math. 19 (1968) 95–166.
- [37] Markov, A.A. Deux demonstrations de la convergence de certains fractions continues. Acta Math. 19, 93–104 (1895).
- [38] Mukhin, E.; Varchenko, A. Multiple orthogonal polynomials and a counterexample to the Gaudin Bethe ansatz conjecture. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 11, 5383–5418.
- [39] Neuschel, T.; Van Assche, W. Asymptotic zero distribution of Jacobi–Pineiro and multiple Laguerre polynomials. J. Approx. Theory 205 (2016), 114–132.
- [40] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций, М.: Наука, 1974.
- [41] Никишин Е. М. О совместных аппроксимациях Паде, Матем. сб., 113(155):4(12) (1980), 499–519.
- [42] Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность, М.: Наука, 1988.
- [43] Nuttall J. Hermite–Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface. J. Approx. Theory, 32:3 (1981), 233–240.
- [44] Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials, J. Approx. Theory, 42:4 (1984), 299–386.
- [45] Piñeiro Dias L.R. On simultaneous Padé approximants for a collection of Markov functions, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I, 2 (1987), 67–70.
- [46] Рахманов Е.А. Теорема Гончара–Шталя о ρ^2 и связанные с ней направления исследований по рациональным аппроксимациям аналитических функций, Матем. сб., 207:9 (2016), 57–90.
- [47] Сегё Г. Ортогональные многочлены, М.: Физматлит, 1962.

- [48] Сорокин В.Н. Аппроксимации Эрмита–Паде последовательных степеней логарифма и их арифметические приложения, Изв. вузов. Матем., 1991, № 11, 66-74.
- [49] Сорокин В.Н. Аппроксимации Эрмита-Паде для систем Никишина и иррациональность $\zeta(3)$, УМН, 49:2(296) (1994), 167-168.
- [50] Сорокин В.Н. Обобщенные многочлены Полачека, Матем. сб., 200:4 (2009), 113-130.
- [51] Суетин С.П. Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение, УМН, 70:5(425) (2015), 121-174.

Оглавление

1	Введение и основные результаты	3
1.1	Аппроксимации Эрмита–Паде	3
1.2	Многочлены Якоби–Пинейро	4
1.3	Система Никишина	5
1.4	Задача равновесия векторного потенциала	7
1.5	Слабая асимптотика	9
1.6	Алгебраическая риманова поверхность	10
1.7	Интегральные представления	12
1.8	Сильная асимптотика	13
2	Интегральные представления	14
2.1	Интегральное представление для $Q_{\vec{n}}$	14
2.2	Интегральные представления для $R_{\vec{n},1}$	15
2.3	Интегральное представление для $R_{\vec{n},1}^*$	16
3	Формулы сильной асимптотики	19
3.1	Метод перевала в \mathbb{C}^m	19
3.2	Лемма о перевальных многообразиях	20
3.3	Асимптотические формулы	22
4	Доказательства утверждений	22
4.1	Утверждения 1 и 2	22
4.2	Предложения 1, 2 и лемма 1	26