ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 84 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Маштаков Я.В., Шестаков С.А.

Построение некоторых опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Маштаков Я.В., Шестаков С.А. Построение некоторых опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 84. 26 с. doi:**10.20948/prepr-2017-84**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-84**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков

Построение некоторых опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников

Москва — 2017

Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков

Построение некоторых опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников

В работе рассматривается группа из четырёх спутников, образующих тетраэдр. Ставится задача построения относительных орбит с тем, чтобы тетраэдр при пассивном движении в рамках задачи Хилла–Клохесси–Уилтшира сохранял свою форму и размер. Найдено несколько семейств решений, обеспечивающих постоянство качества тетраэдра, являющегося специально введённой функцией от объёма и длин сторон тетраэдра.

Ключевые слова: группа спутников, тетраэдральная конфигурация, опорные орбиты, качество тетраэдра

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00739 а

Y. Mashtakov, S. Shestakov

Reference relative orbits construction for tetrahedral satellite configuration

The paper considers the group of four satellites forming the tetrahedron. Investigated problem is to find such relative orbits that in the linear Hill-Clohessy-Wiltshire model tetrahedron based on these satellites preserves its volume and shape. Families of solutions that ensure constant quality that is a special function of volume and edge lengths are obtained.

Key words: satellite formation, tetrahedral configuration, reference orbits, tetrahedral quality

Введение

Групповой полёт расширяет возможности наблюдений и экспериментов в космосе: несколько спутников могут решать сходные задачи в близких, но различных точках пространства. Помимо этого, общая надежность системы повышается, поскольку спутники могут частично заменять друг друга в случае поломок, так что неисправность одного спутника не влечёт утрату работоспособности всей группы.

В качестве примера научной задачи, решаемой группами малых спутников, необходимо упомянуть изучение магнитосферы Земли. Основной способ изучения состоит в непосредственном замере параметров магнитосферы [1–4]. В 2015 году космическое агентство NASA в рамках миссии MMS по исследованию магнитосферы запустило четыре малых аппарата. Для обеспечения требуемых исследований спутники должны были формировать правильный тетраэдр с заданной длиной рёбер [5], что успешно реализовано в ходе миссии [6].

Использование группы спутников для проведения исследований влечет за собой потребность последовательного решения ряда задач. Во-первых, требуется спроектировать орбиту для группы спутников с тем, чтобы они решали требуемую задачу. Во-вторых, после вывода отдельных спутников на орбиту необходимо сформировать из них требуемую конфигурацию. В-третьих, из-за различных возмущений, действующих на спутники во время движения по орбите, конфигурация будет разрушаться с течением времени. Таким образом, становится необходимым создание алгоритмов поддержания требуемой конфигурации группы спутников, что, учитывая ограниченные возможности по управлению орбитальным движением, является нетривиальной задачей.

Цель настоящей работы – частичное решение первой проблемы в рамках задачи, сходной с задачей миссии MMS. В работе ищутся опорные орбиты для группы спутников с тем, чтобы группа образовывала в пространстве тетраэдр, остающийся, по возможности, постоянным, конечно, в рамках введенного критерия “постоянства”.

Поиск опорных орбит ведётся в линеаризованной постановке в предположении близких околокруговых орбит спутников группы. Затем вводятся функции, отражающие изменение размеров и формы тетраэдра, и ведется поиск начальных данных, сохраняющих конфигурацию. Далее приводятся примеры конкретных орбит и сравнение поведения конфигураций в линеаризованной и полной невозмущённой моделях.

1. Постановка задачи

Мы будем рассматривать следующую постановку задачи.

- Четыре аппарата движутся пассивно по близким околокруговым кеплеровым орбитам, образуя тетраэдр.

- Необходимо так задать начальные условия для спутников, чтобы тетраэдр со временем не менял свои размер и форму (точное описание того, что мы понимаем под размером и формой, будет приведено ниже).
- Кроме того, необходимо, чтобы объём тетраэдра был ненулевым, то есть чтобы спутники двигались не в одной плоскости.

В дальнейшем мы будем использовать слова «группа», «формация» и «тетраэдр» для описания совместного движения спутников по орбите. В работе используются следующие правые ортонормированные системы координат:

- инерциальная система координат O_aXYZ (ИСК): центр O_a расположен в центре масс Земли, O_aZ направлен вдоль оси вращения Земли, O_aX направлен в точку весеннего равноденствия эпохи J2000;
- орбитальная система координат $Oxyz$ (ОСК): центр O совпадает с одним из спутников, ось Oz направлена вдоль радиус-вектора опорного тела от центра Земли, ось Oy — по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки.

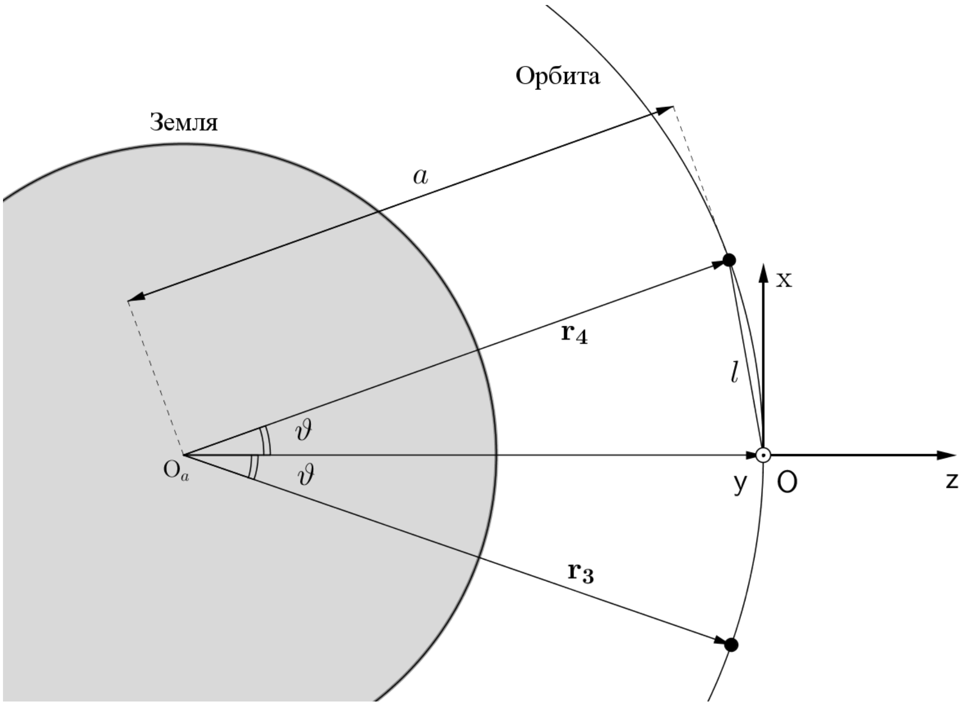


Рис. 1. Орбитальная система координат

2. Поиск опорной относительной орбиты в круговом движении

Будем использовать следующие предположения о движении группы. Каждый из спутников движется по околокруговой орбите, а один из спутников движется по круговой орбите вокруг Земли. Орбитальную систему координат тогда мы свяжем именно с этим спутником. Предположим также, что большие полуоси орбит каждого из спутников равны между собой с тем, чтобы относительный дрейф спутников в группе был равен нулю, так как в этом случае периоды обращения спутников одинаковые. Это обеспечивает периодичность относительных орбит спутников и, как следствие, ограниченность объёма тетраэдра, образованного ими. В этом случае движение спутников в ОСК описывается хорошо известными уравнениями Хилла–Клохесси–Уилтшира [7]

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2n\dot{z} = 0, \\ &\ddot{y} + n^2 y = 0, \\ &\ddot{z} - 2n\dot{x} - 3n^2 z = 0, \end{aligned}$$

где $n = \sqrt{\mu / a_{orb}{}^3}$ – среднее движение, μ – гравитационный параметр Земли, a_{orb} – большая полуось орбиты спутника, с которым связана ОСК. Для краткости записи здесь и далее введём обозначение $\nu = nt$. Периодическое относительное движение спутников в ОСК тогда представляется в виде

$$\begin{aligned} &x_i(t) = 2A_i \cos\nu - 2B_i \sin\nu + C_i, \\ &y_i(t) = D_i \sin\nu + E_i \cos\nu, \qquad (i = 1 \ldots 4) \\ &z_i(t) = A_i \sin\nu + B_i \cos\nu. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь заглавными буквами с индексом *i* обозначены постоянные. Так как ОСК связана с одним из спутников (без ограничения общности назовём его четвёртым), то для него выполнено $\mathbf{r}_4 = \langle x_4(\mathrm{t}), y_4(\mathrm{t}), z_4(\mathrm{t}) \rangle = \langle 0,0,0 \rangle$.

Теперь опишем математически требования о сохранении формы и размеров тетраэдра, опираясь на [8]. Необходимо, чтобы объём тетраэдра оставался постоянным, что имеет простую алгебраическую интерпретацию. Форма тетраэдра, однако, не имеет простого описания, так как (в отличие от треугольников), зная лишь длины сторон и объёмы двух тетраэдров, невозможно определить, тождественны ли они. Не будем требовать потому от тетраэдра полного сохранения формы, ограничимся лишь одним параметром, «усредняющим» форму тетраэдра, и будем считать, что при сохранении этого параметра форма сохраняется в допустимых пределах. Его можно выбирать достаточно произвольно. Поскольку постоянство объёма имеет для нас особую важность, потребуем, чтобы объём входил в него в явном виде как один из множителей. Тогда определим *качество* тетраэдра так:

$$\mathbb{Q} = 12 \frac{(3\mathbb{V})^{2/3}}{\mathbb{L}}.$$

Здесь $\mathbb{L}$ есть сумма квадратов длин всех рёбер тетраэдра, $\mathbb{V}$ – его объём, а числовой множитель подобран таким образом, чтобы на правильном тетраэдре качество равнялось единице. На вырожденном тетраэдре, вследствие $\mathbb{V} = 0$, качество равняется нулю.

3. Сохранение объёма

Запишем объём тетраэдра с вершинами в рассматриваемых четырёх спутниках. Пусть радиус-векторы спутников $\mathbf{r}_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle, \quad i = 1\ldots 4$, тогда выражение для объёма имеет вид

$$\mathbb{V} = \frac{1}{6}\det\left\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4\right\| = \frac{1}{6}\det\left\|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\right\|.$$

Подставляя значения для радиус-векторов и раскрывая скобки, получим, что объём представляет собой некоторый тригонометрический полином от ν вида

$$\begin{aligned} 6\mathbb{V} = P\sin^3\nu + Q\cos^3\nu + R\sin^2\nu\cos\nu + T\sin\nu\cos^2\nu + \\ + U\sin^2\nu + V\cos^2\nu + W\sin\nu\cos\nu. \end{aligned} \tag{2}$$

Коэффициенты в полиноме суть функции от начальных данных движения спутников. Получим необходимые условия сохранения объема постоянным и ненулевым.

Требуется, чтобы тетраэдр, образованный четырьмя спутниками, сохранял размер. Выясним, когда тригонометрический полином тождественно постоянен по истинной аномалии. Для этого подставим вместо ν последовательно $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ и приравняем полученные значения:

$$Q + V = P + U = -Q + V = -P + U,$$

из чего следует, что $Q = P = 0$ и $U = V$. С учётом полученного перепишем выражение для объёма (2):

$$6\mathbb{V} = \sin\nu\cos\nu\,(R\sin\nu + T\cos\nu + W) + U.$$

Теперь подставим вместо ν последовательно $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Учитывая постоянство объема, получим цепочку равенств:

$$R + T + \sqrt{2}W = -(R - T + \sqrt{2}W) = -R - T + \sqrt{2}W = -(-R + T + \sqrt{2}W),$$

откуда $R + T = 0, \quad R = T$, то есть $R = T = 0$ и, следовательно, $W = 0$.

Таким образом, для постоянства объёма $\mathbb{V}$ необходимо, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} &P = Q = T = W = R = 0, \\ &U = V. \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно также, что эти условия являются и достаточными, так как при их выполнении объём будет равен $\mathbb{V} = \frac{U}{6}$.

Будем искать начальные данные, обеспечивающие ненулевой объем тетраэда. Для этого подробнее опишем условия (3), раскрыв коэффициенты в формуле (2). Определим векторы из коэффициентов в уравнениях (1). Введем обозначения $\mathbf{A}=\langle A_1,A_2,A_3\rangle$, $\mathbf{B}=\langle B_1,B_2,B_3\rangle$, $\mathbf{C}=\langle C_1,C_2,C_3\rangle$, $\mathbf{D}=\langle D_1,D_2,D_3\rangle$, $\mathbf{E}=\langle E_1,E_2,E_3\rangle$. Тогда условия (3) имеют вид

$$\begin{aligned}
U=V &\to (\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{A})=(\mathbf{C},\mathbf{E},\mathbf{B}),\\
P=0 &\to (\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D})=0,\\
Q=0 &\to (\mathbf{A},\mathbf{E},\mathbf{B})=0,\\
\mathrm{W}=0 &\to (\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{B})=(\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{E}),\\
R=0 &\to (\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{E})=0,\\
T=0 &\to (\mathbf{A},\mathbf{D},\mathbf{B})=0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot,\cdot)$ обозначает смешанное произведение векторов.

Если один из векторов $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E}$ равен нулю, то выражение для U или для V обнуляется, а вместе с ним обнуляется и объём тетраэдра. Пусть ни один из этих векторов не равен нулю, тогда векторы $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E}$ компланарны.

Предположим, что вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коллинеарны, тогда $\mathbf{A}=k\mathbf{B}$, откуда получим

$$\begin{aligned}
U=V &\to (\mathbf{C},\mathbf{D},k\mathbf{B})=(\mathbf{C},\mathbf{E},\mathbf{B}),\\
\mathrm{W}=0 &\to (\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{B})=(\mathbf{C},k\mathbf{B},\mathbf{E}).
\end{aligned}$$

Умножим второе равенство на k. Тогда

$$k(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{B})=k^2(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{E}).$$

В то же время из первого равенства

$$k(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{B})=(\mathbf{C},\mathbf{E},\mathbf{B}).$$

Следовательно, или $k^2=-1$, или $(\mathbf{C},\mathbf{E},\mathbf{B})=0$. Первое невозможно, а второе неудовлетворительно вследствие обнуления объёма. Потребуем, чтобы векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ были неколлинеарными, тогда они образуют базис в плоскости, а компланарные им векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ раскладываются по ним с некоторыми коэффициентами. Запишем разложения

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}&=a\mathbf{A}+b\mathbf{B},\\
\mathbf{E}&=c\mathbf{A}+d\mathbf{B}.
\end{aligned}$$

С учетом условий $U=V$, $W=0$ из (4) получим

$$\begin{aligned}
(\mathbf{C},a\mathbf{A}+b\mathbf{B},\mathbf{A})&=(\mathbf{C},c\mathbf{A}+d\mathbf{B},\mathbf{B}),\\
(\mathbf{C},a\mathbf{A}+b\mathbf{B},\mathbf{B})&=(\mathbf{C},\mathbf{A},c\mathbf{A}+d\mathbf{B}),
\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{A})&=c(\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}),\\
a(\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B})&=d(\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}),
\end{aligned}$$

а значит, $a = d$, $b = -c$. Итого, получив неколлинеарные векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ можно найти по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= a\mathbf{A} + b\mathbf{B}, \\ \mathbf{E} &= -b\mathbf{A} + a\mathbf{B}, \end{aligned} \tag{5}$$

где a и $b \neq 0$ – произвольные коэффициенты. При подобном выборе коэффициентов объём (2) равен

$$\mathbb{V} = \frac{b}{6}(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}). \tag{6}$$

4. Сохранение формы

Аналогично объёму запишем цепочку выражений для суммы квадратов длин рёбер

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2 = \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 + \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2. \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых и упрощений мы снова получим некоторый тригонометрический полином от ν (здесь мы обозначаем коэффициенты теми же буквами, не имея при этом в виду, что они равны соответствующим коэффициентам в выражении для объёма – в данном случае это некоторые неопределённые коэффициенты, точные выражения для которых будут даны позднее):

$$\mathbb{L} = P\cos^2\nu + Q\cos\nu\sin\nu + R\sin^2\nu + T\cos\nu + U\sin\nu + W.$$

Для получения условий, накладываемых на коэффициенты и обеспечивающих сохранения формы, вновь подставим вместо ν последовательно $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ и приравняем полученные значения:

$$P + T + W = R + U + W = P - T + W = R - U + W.$$

Отсюда $T = U = 0,\ P = R$. Тогда $\mathbb{L} = Q\cos\nu\sin\nu + P + W$, а значит $Q = 0$.

Таким образом, для обеспечения постоянства $\mathbb{L}$ необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} &Q = T = U = 0, \\ &P = R. \end{aligned} \tag{7}$$

Эти условия являются также и достаточными, и тогда $\mathbb{L} = P + W$.

Подробно распишем теперь условия (7) и примем во внимание обеспечивающие сохранение объёма формулы (5). Условия $T = U = 0$ записываются в виде

$$\begin{aligned} &C_1(12A_1 - 4A_2 - 4A_3) + C_2(12A_2 - 4A_1 - 4A_3) + C_3(12A_3 - 4A_1 - 4A_2) = 0, \\ &-C_1(12B_1 - 4B_2 - 4B_3) - C_2(12B_2 - 4B_1 - 4B_3) - C_3(12B_3 - 4B_1 - 4B_2) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Выделим условие $Q=0$:

$$Q=(2a^2-2b^2-6)(3A_1B_1+3A_2B_2+3A_3B_3- \\ -A_1B_2-A_1B_3-A_2B_1-A_2B_3-A_3B_1-A_3B_2)+ \\ +2ab(3B_1^2+3B_2^2+3B_3^2-3A_1^2-3A_2^2-3A_3^2+ \\ +2A_1A_2+2A_1A_3+2A_2A_3-2B_1B_2-2B_1B_3-2B_2B_3)=0.$$

Условие $P=R$ имеет вид

$$a^2(3B_1^2+3B_2^2+3B_3^2-2B_1B_2-2B_1B_3-2B_2B_3)+ \\ 2ab(-3A_1B_1-3A_2B_2-3A_3B_3+A_1B_2+A_1B_3+A_2B_1+A_2B_3+A_3B_1+A_3B_2)+ \\ b^2(3A_1^2+3A_2^2+3A_3^2-2A_1A_2-2A_1A_3-2A_2A_3)+ \\ (12A_1^2+12A_2^2+12A_3^2-8A_1A_2-8A_1A_3-8A_2A_3+ \\ +3B_1^2+3B_2^2+3B_3^2-2B_1B_2-2B_1B_3-2B_2B_3) \\ = \\ a^2(3A_1^2+3A_2^2+3A_3^2-2A_1A_2-2A_1A_3-2A_2A_3)+ \\ 2ab(3A_1B_1+3A_2B_2+3A_3B_3-A_1B_2-A_1B_3-A_2B_1-A_2B_3-A_3B_1-A_3B_2)+ \\ b^2(3B_1^2+3B_2^2+3B_3^2-2B_1B_2-2B_1B_3-2B_2B_3)+ \\ (3A_1^2+3A_2^2+3A_3^2-2A_1A_2-2A_1A_3-2A_2A_3+ \\ +12B_1^2+12B_2^2+12B_3^2-8B_1B_2-8B_1B_3-8B_2B_3).$$

Соответственно, обозначив

$$\eta=3A_1B_1+3A_2B_2+3A_3B_3-A_1B_2-A_1B_3-A_2B_1-A_2B_3-A_3B_1-A_3B_2, \\ \zeta=3B_1^2+3B_2^2+3B_3^2-3A_1^2-3A_2^2-3A_3^2+ \\ +2A_1A_2+2A_1A_3+2A_2A_3-2B_1B_2-2B_1B_3-2B_2B_3,$$

из условий

$$Q=0, \\ P=R$$

получаем систему

$$(a^2-b^2-3)\eta+ab\zeta=0, \\ (a^2-b^2-3)\zeta-4ab\eta=0.$$

Это система линейных уравнений относительно двух неизвестных: a^2-b^2-3 и ab. Она имеет тривиальное нулевое решение, но тогда $ab=0$, а значит, либо $a=0$, которое влечёт $-b^2-3=0$, что невозможно, либо $b=0$, которое, согласно (6), влечёт обнуление объёма, что неудовлетворительно. Следовательно, система уравнений должна иметь решение, отличное от тривиального, а для этого детерминант этой системы должен быть равен нулю:

$$-4\eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \eta &= 0, \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, для сохранения объёма и формы при условии невырожденности полученного тетраэдра должно выполняться условие неколлинеарности векторов **A** и **B**, а кроме того

$$\mathbf{D} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B},$$

$$\mathbf{E} = -b\mathbf{A} + a\mathbf{B},$$

$$3A_1B_1 + 3A_2B_2 + 3A_3B_3 - A_1B_2 - A_1B_3 - A_2B_1 - A_2B_3 - A_3B_1 - A_3B_2 = 0,$$

$$3\left(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2\right) + 2\left(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 - B_1B_2 - B_1B_3 - B_2B_3\right) = 0,$$

$$C_1(3A_1 - A_2 - A_3) + C_2(3A_2 - A_1 - A_3) + C_3(3A_3 - A_1 - A_2) = 0,$$

$$C_1(3B_1 - B_2 - B_3) + C_2(3B_2 - B_1 - B_3) + C_3(3B_3 - B_1 - B_2) = 0.$$

Для полного описания конфигураций, сохраняющих форму и размер, необходимо решить эту систему относительно неизвестных векторов $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E}$. Поскольку это система из 10 уравнений относительно 15 неизвестных, то её решения распадаются на пятипараметрические семейства, которые мы и будем искать. Два из параметров – это константы $a,\ b$, ещё одна константа необходимо должна быть пропорциональна объёму тетраэдра, поскольку он сохраняется, а изменение объёма при сохранении формы не влияет на значение качества. Четвёртым параметром является начальная фаза группировки – поскольку со временем величина $\nu = nt$ вне зависимости от начальных данных пробегает все значения от 0 до 2π, то сдвиг всех спутников на одинаковую фазу никак не влияет на динамику конфигурации. Для нахождения пятого параметра заметим, что если предположить векторы **A** и **B** известными, то для нахождения трёх неизвестных компонент вектора **C** мы имеем только два уравнения, а значит, вектор **C** можем определить только с точностью до множителя, который и будет пятым параметром системы. Отдельно заметим, что перенумерация спутников не влияет на динамику, так что мы будем относить два разных решения, получаемых друг из друга перенумерацией спутников, к одному семейству решений.

В общем виде получить решение системы затруднительно, так что обратимся к некоторым важным частным случаям.

5. Поиск опорных орбит

Для поиска частных решений сделаем замену

$$A_1 = \alpha\cos\varphi,\quad B_1 = \alpha\sin\varphi,$$

$$A_2 = \beta\cos\psi,\quad B_2 = \beta\sin\psi,$$

$$A_3 = \gamma\cos\theta,\quad B_3 = \gamma\sin\theta,$$

где α, β, γ – амплитуды колебаний соответственно первого, второго и третьего спутников в ОСК, а углы φ, ψ, θ – их начальные фазы. Тогда система (8) переходит в систему

$$\begin{aligned} &C_1(3\alpha\cos\varphi - \beta\cos\psi - \gamma\cos\theta) + C_2(3\beta\cos\psi - \alpha\cos\varphi - \gamma\cos\theta) \\ &\qquad + C_3(3\gamma\cos\theta - \alpha\cos\varphi - \beta\cos\psi) = 0, \\ &C_1(3\alpha\sin\varphi - \beta\sin\psi - \gamma\sin\theta) + C_2(3\beta\sin\psi - \alpha\sin\varphi - \gamma\sin\theta) \\ &\qquad + C_3(3\gamma\sin\theta - \alpha\sin\varphi - \beta\sin\psi) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

а система (9) – в систему

$$\begin{aligned} &2\left(\alpha\beta\cos(\varphi+\psi) + \alpha\gamma\cos(\varphi+\theta) + \beta\gamma\cos(\psi+\theta)\right) = \\ &\qquad = 3\left(\alpha^2\cos 2\varphi + \beta^2\cos 2\psi + \gamma^2\cos 2\theta\right), \\ &2\left(\alpha\beta\sin(\varphi+\psi) + \alpha\gamma\sin(\varphi+\theta) + \beta\gamma\sin(\psi+\theta)\right) \\ &\qquad = 3\left(\alpha^2\sin 2\varphi + \beta^2\sin 2\psi + \gamma^2\sin 2\theta\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Сделаем теперь основное упрощающее предположение: пусть две из трёх амплитуд равны между собой – без ограничения общности решений пусть амплитуды второго и третьего спутников β и γ равны. Если они обе равны нулю, то три спутника (второй, третий и четвёртый) покоятся в ОСК, а тетраэдр, образованный группой, вырожден. Следовательно, равные амплитуды не должны обращаться в нуль. Кроме того, используем свободу в определении начального момента во времени: поскольку во время движения спутников по орбите величина $\nu = nt$ вне зависимости от начальных данных пробегает все значения от 0 до 2π, то начальный момент во времени можно выбирать любым – сдвиг его лишь прибавляет одно и то же число ко всем фазам φ, ψ, θ. Выберем поэтому начальный момент таким, чтобы $\varphi = 0$.

Таким образом, при наличии предположений

$$\beta = \gamma = K \neq 0,$$
$$\alpha = pK,$$
$$\varphi = 0,$$

система (10) переходит в систему

$$\begin{aligned} &C_1(3p - \cos\psi - \cos\theta) + C_2(3\cos\psi - p - \cos\theta) + C_3(3\cos\theta - p - \cos\psi) = 0, \\ &C_1(-\sin\psi - \sin\theta) + C_2(3\sin\psi - \sin\theta) + C_3(3\sin\theta - \sin\psi) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

а система (11) приводится к виду

$$2p\left(\cos\psi + \cos\theta\right) + 2\cos(\psi+\theta) = 3p^2 + 3\left(\cos 2\psi + \cos 2\theta\right),$$
$$2p\left(\sin\psi + \sin\theta\right) + 2\sin(\psi+\theta) = 3\left(\sin 2\psi + \sin 2\theta\right).$$

Путём несложных тригонометрических преобразований придём к системе:

$$4\cos\frac{\psi+\theta}{2}\left(p\cos\frac{\psi-\theta}{2}+4\cos\frac{\psi+\theta}{2}-6\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}\right)+$$
$$+12\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}-8-3p^2=0, \qquad (13)$$
$$4\sin\frac{\psi+\theta}{2}\left(p\cos\frac{\psi-\theta}{2}+4\cos\frac{\psi+\theta}{2}-6\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}\right)=0.$$

Второе уравнение системы (13) разложено на множители, а потому возникают два случая.

Случай 1: $\sin\frac{\psi+\theta}{2}=0$**.**

В этом случае $\psi=-\theta+2\pi k$. Здесь и далее мы будем рассматривать углы по модулю 2π, так что $\psi=-\theta$. Система (13) приобретает вид

$$4p\cos\theta-12\cos^2\theta+8-3p^2=0,$$
$$\psi=-\theta.$$

Тогда

$$\cos\theta=\frac{p\pm2\sqrt{6-2p^2}}{6}.$$

Это уравнение имеет решения при $p\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$. Поскольку амплитуда не может быть отрицательной, то и p не может быть отрицательным, а значит, $p\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ и два семейства решений при этих значениях имеют вид

$$\psi=-\arccos\frac{p\pm2\sqrt{6-2p^2}}{6},$$
$$\theta=\arccos\frac{p\pm2\sqrt{6-2p^2}}{6}. \qquad (14)$$

При этом $\sin\psi=-\sin\theta$, $\cos\psi=\cos\theta$. Если $p=\sqrt{3}$, то два семейства решений будут совпадать. Зависимость θ от p представлена на рис. 2.

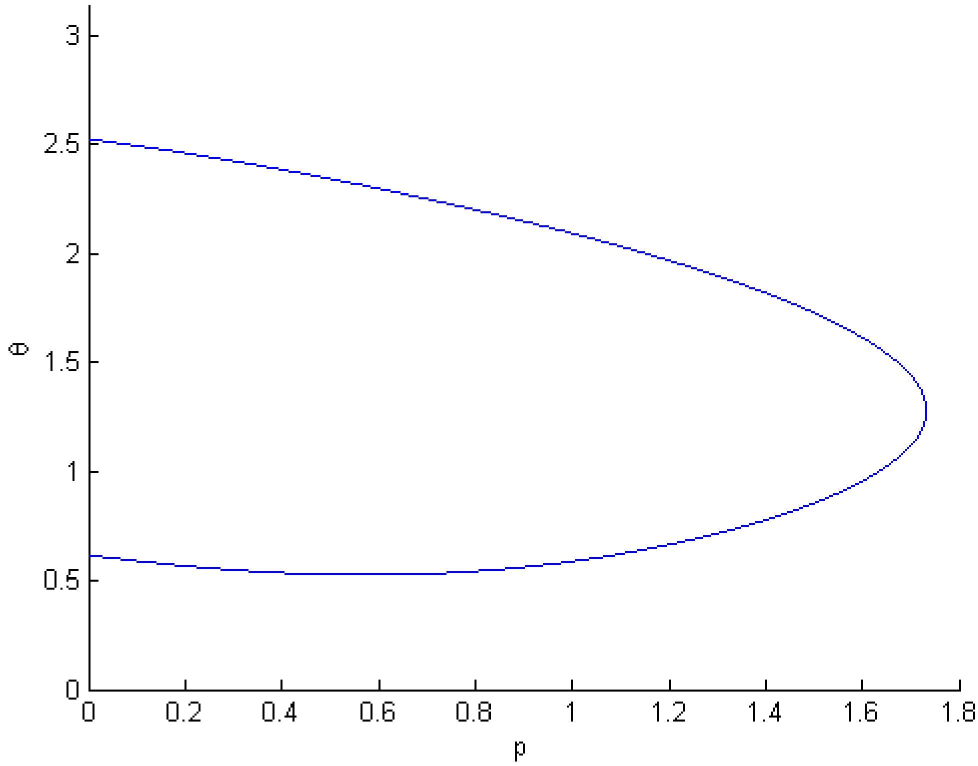


Рис. 2. Зависимость угла θ от параметра p

Теперь, с использованием системы (12) и полученных результатов (14), определим значения коэффициентов C_i из системы уравнений

$$p(3C_1 - C_2 - C_3) + (3C_2 - C_1 - C_3)\cos\psi + (3C_3 - C_1 - C_2)\cos\theta = 0,$$
$$(3C_2 - C_1 - C_3)\sin\psi + (3C_3 - C_1 - C_2)\sin\theta = 0.$$

Поскольку $\psi = -\theta$, то $3C_2 - C_1 - C_3 = 3C_3 - C_1 - C_2$ или $C_2 = C_3$. C_1 находится по формуле

$$C_1 = C_2 \frac{2p - 4\cos\theta}{3p - 2\cos\theta}. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = K\begin{pmatrix} p \\ \cos\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = K\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = c\begin{pmatrix} \dfrac{2p - 4\cos\psi}{3p - 2\cos\psi} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где K и c – произвольные коэффициенты.

Случай 2: $\sin\dfrac{\psi + \theta}{2} \neq 0$**.**

В этом случае система (13) переписывается в виде

$$12\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}-8-3p^2=0,$$
$$p\cos\frac{\psi-\theta}{2}+4\cos\frac{\psi+\theta}{2}-6\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}=0.$$

Упрощая, получим

$$\begin{aligned}&\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}=\frac{8+3p^2}{12},\\ &p\cos\frac{\psi-\theta}{2}=\frac{3p^2}{2}\cos\frac{\psi+\theta}{2}.\end{aligned}\qquad(16)$$

Рассмотрим вначале общий случай $p\neq 0$:

$$\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}=\frac{8+3p^2}{12},$$
$$\cos\frac{\psi+\theta}{2}=\frac{2}{3p}\cos\frac{\psi-\theta}{2}.$$

Для существования решений требуется, чтобы $p\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. Получаем

$$\begin{aligned}&\psi=\pm\arccos\frac{\frac{4}{p}+\frac{3p}{2}-\sqrt{6-2\left(\frac{2}{p}-3p\right)^2}}{9},\quad p\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right],\\ &\theta=\pm\arccos\frac{\frac{4}{p}+\frac{3p}{2}+\sqrt{6-2\left(\frac{2}{p}-3p\right)^2}}{9},\quad p\in\left(\frac{2}{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right],\\ &\theta=\mp\arccos\frac{\frac{4}{p}+\frac{3p}{2}+\sqrt{6-2\left(\frac{2}{p}-3p\right)^2}}{9},\quad p\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}\right].\end{aligned}\qquad(17)$$

Эти семейства решений отличаются от семейств для первого случая, если только не выполняется

$$\frac{p\pm 2\sqrt{6-2p^2}}{6}=\frac{\frac{4}{p}+\frac{3p}{2}\pm\sqrt{6-2\left(\frac{2}{p}-3p\right)^2}}{9},$$

то есть когда $p=1$ или $p=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Явные выражения для C_i довольно громоздки, но могут в явном виде быть получены подстановкой (17) в (12).

6. Частные решения с одинаковой амплитудой

Предположим, что $p=1$, т.е. $\alpha=\beta=\gamma=K\neq 0$, а значит, три спутника вращаются вокруг четвёртого с одинаковой амплитудой.

Из (14) получаем

$$\psi=-\arccos\frac{1\pm 4}{6},$$
$$\theta=\arccos\frac{1\pm 4}{6}.$$

Поскольку $p=1$, в случае равных амплитуд $\alpha=\beta=\gamma=K\neq 0$ существуют два различных семейства решений: каждое семейство путём перестановки спутников между собой и сдвига всех углов на произвольное число порождает бесконечное множество решений с фазами:

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi,\theta)&=\left(0,\frac{4\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right),\\ (\varphi,\psi,\theta)&=\left(0,-\arccos\frac{5}{6},\arccos\frac{5}{6}\right).\end{aligned}\qquad(18)$$

Рассмотрим подробнее каждое из семейств.

Семейство 1: $(\varphi,\psi,\theta)=\left(0,\frac{4\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$**.**

В этом семействе фазы спутников расположены равномерно на окружности, тогда

$$\mathbf{A}=K\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=K\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Получаем полный набор начальных данных:

$$\mathbf{A}=K\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=K\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}=aK\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}+bK\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix},\quad \mathbf{E}=-bK\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}+aK\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix},$$

где a,b,c,K – произвольные постоянные. Пятый параметр – произвольный угол, который можно добавить одновременно ко всем трём углам (φ,ψ,θ), не меняющий ни объём, ни качество тетраэдра. Для этого семейства объём равен

$$\mathbb{V} = \frac{b}{6}(\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{B}) = -cK^2 b\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Прямой подсчёт $\mathbb{L}$ даёт

$$\mathbb{L} = 6K^2(a^2 + b^2 + 5) + 3c^2.$$

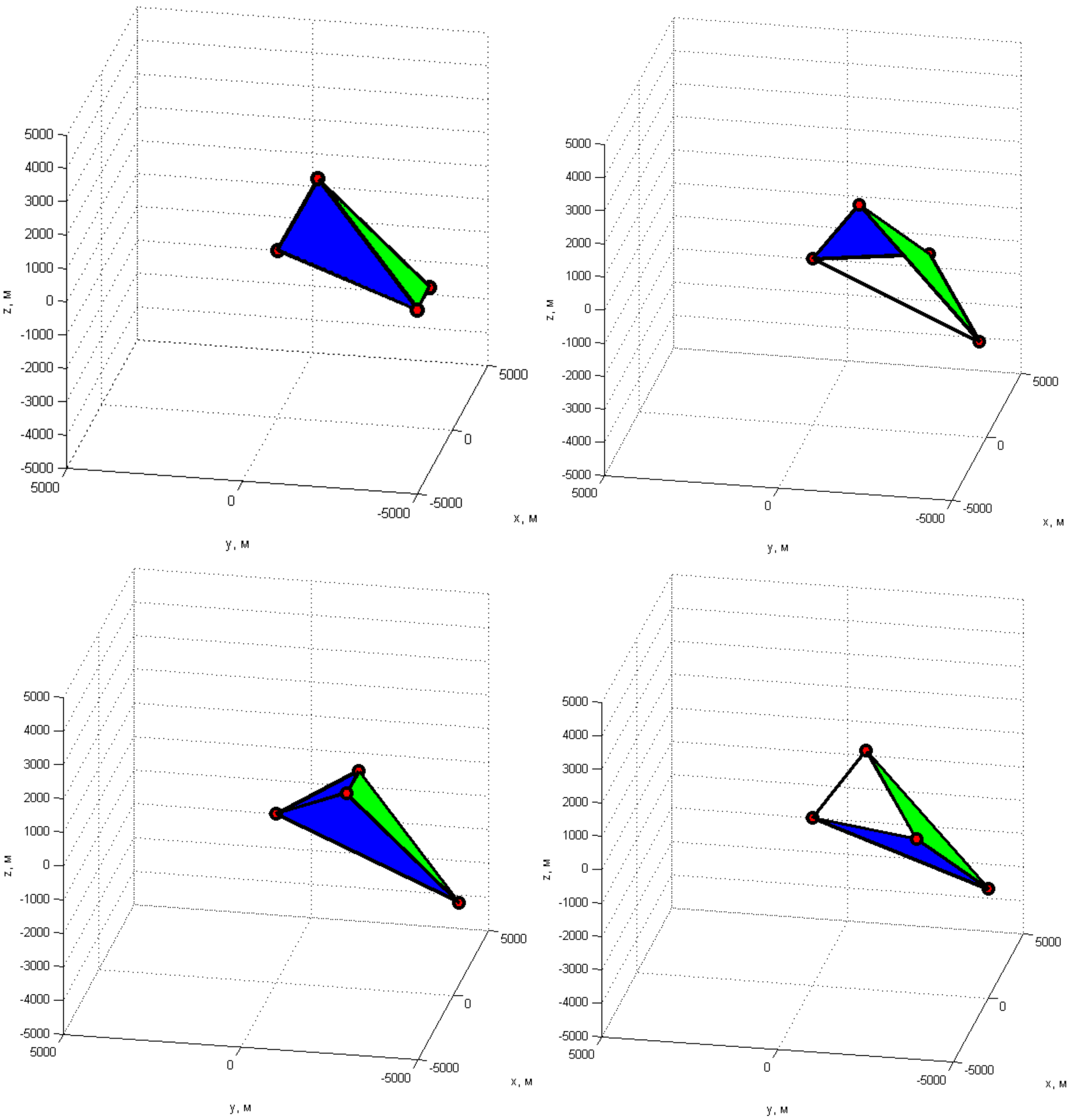
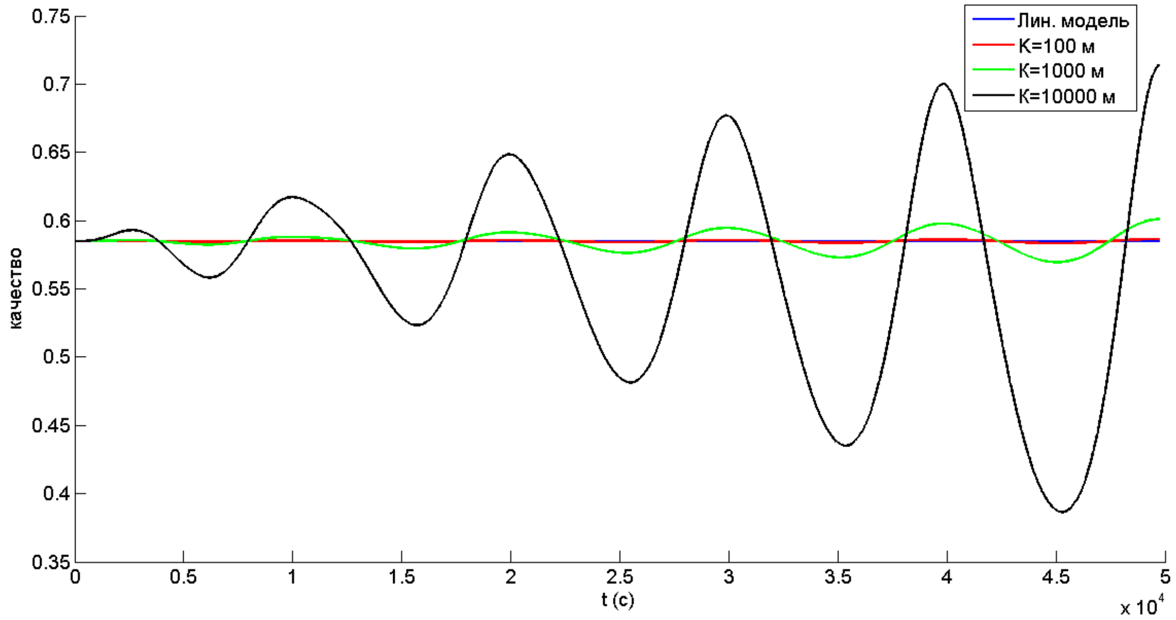


Рис. 3. Оптимальная конфигурация для первого семейства при одинаковых амплитудах, $K = 1000$ м, $b = -\sqrt{5}$, $c = -K\sqrt{10}$ для различных фаз: четверть, половина, три четверти и полный период обращения в ОСК

Поскольку $\mathbb{Q}=12\frac{(3\mathbb{V})^{2/3}}{\mathbb{L}}$, то для максимизации качества тетраэдра и, соответственно, приближения его формы к правильной требуется положить $a=0$. Тогда

$$\mathbb{Q}=\frac{6}{2^{1/3}}\cdot\frac{c^{2/3}K^{4/3}b^{2/3}}{2b^2K^2+10K^2+c^2}=3\sqrt[3]{4}\cdot\frac{(c/K)^{2/3}b^{2/3}}{2b^2+10+(c/K)^2}.$$



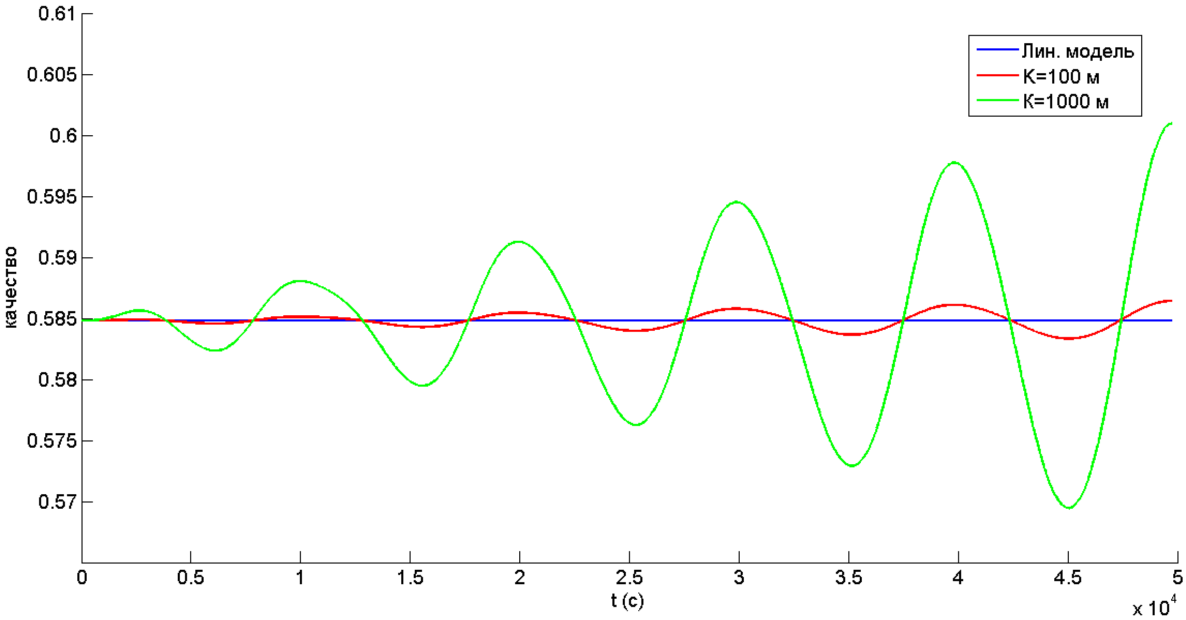


Рис. 4. Эволюция качества в линейной модели и в центральном поле при разных значениях параметра K

Максимум достигается при $b = \pm\sqrt{5},\quad c = \pm K\sqrt{10}$ и равен $\mathbb{Q}_{max} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$. На рис. 3 представлена визуализация получающегося тетраэдра, а на рис. 4 – эволюция качества формации в нелинейной модели движения в зависимости от величины относительных орбит спутников.

Семейство 2: $(\varphi,\psi,\theta) = \left(0, -\arccos\dfrac{5}{6}, \arccos\dfrac{5}{6}\right)$**.**

В этом семействе фазы сдвинуты друг относительно друга на один и тот же угол $\arccos\dfrac{5}{6} \approx 33.56^\circ$, тогда

$$\mathbf{A} = K\begin{pmatrix} 1 \\ 5/6 \\ 5/6 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = K\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix},\quad \mathbf{C} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем полный набор начальных данных:

$$\mathbf{A} = K\begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = K\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix},\quad \mathbf{C} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = aK\begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix} + bK\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix},\quad \mathbf{E} = -bK\begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix} + aK\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix},$$

где a,b,c,K – произвольные постоянные. При этом

$$\mathbb{V} = \frac{b}{6}(\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{B}) = -cK^2 b\frac{11\sqrt{11}}{108},$$

$$\mathbb{L} = \frac{22}{9}K^2(a^2 + b^2 + 5) + 11c^2.$$

Максимум качества здесь достигается при $a = 0, b = \pm\sqrt{5}, c = \pm K\sqrt{10}/3$ и снова равен $\mathbb{Q}_{max} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$. На рис. 5 представлена визуализация получающегося тетраэдра, а на рис. 6 – эволюция качества формации в нелинейной модели движения в зависимости от величины относительных орбит спутников.

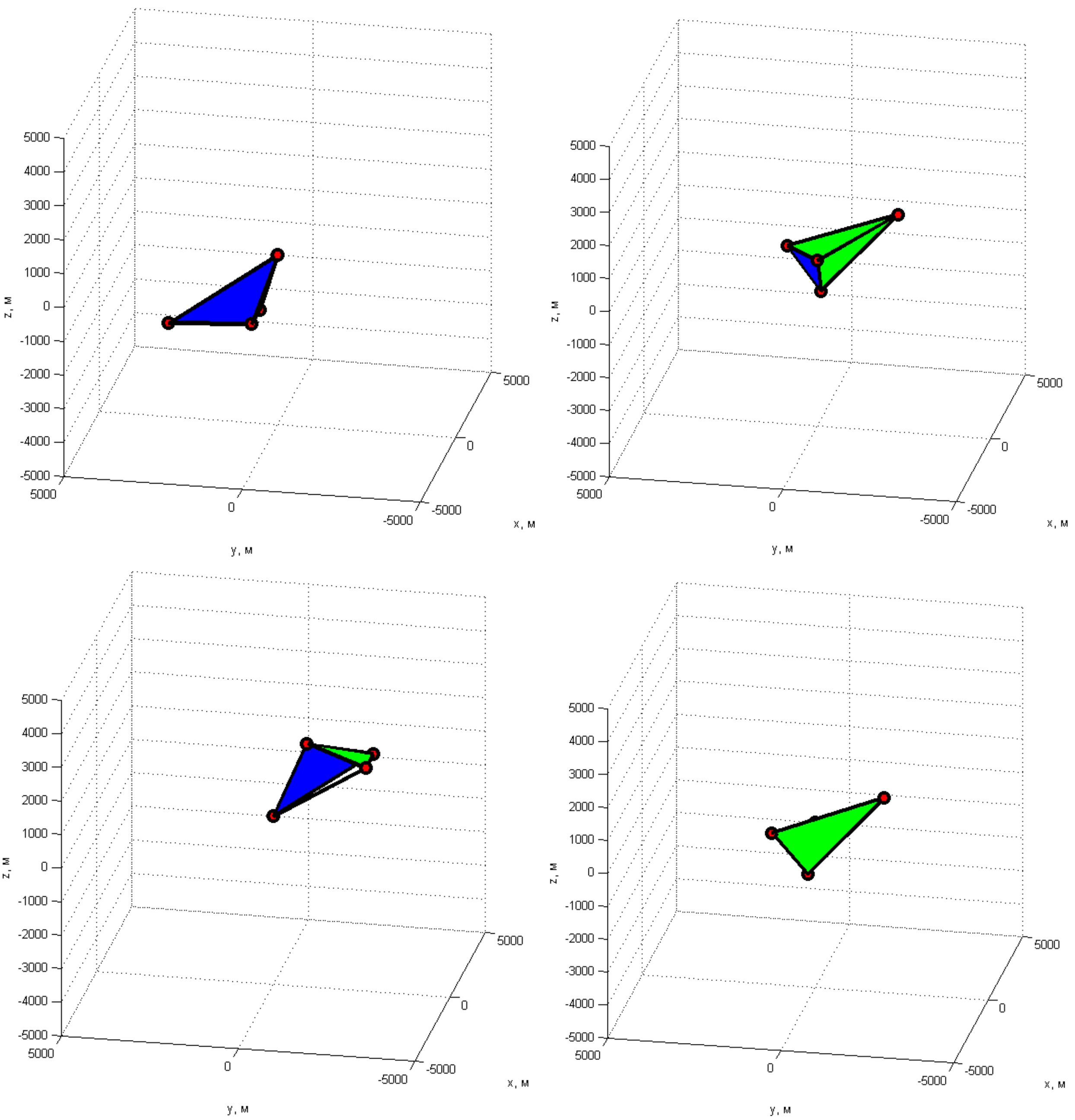


Рис. 5. Оптимальная конфигурация для второго семейства при одинаковых амплитудах, $K = 1000$ м, $b = \sqrt{5}$, $c = -K\sqrt{10}\,/\,3$ для различных фаз: четверть, половина, три четверти и полный период обращения в ОСК

7. Частные решения при нулевой амплитуде

Предположим теперь, что $p = 0$, т.е. $\alpha = \beta = K \neq 0$, $\gamma = 0$. Это значит, что два спутника имеют одинаковую амплитуду, а третий имеет амплитуду, равную нулю, т.е. покоится в ОСК. В ИСК два спутника из четырёх движутся друг за другом с постоянной разницей фаз между ними.

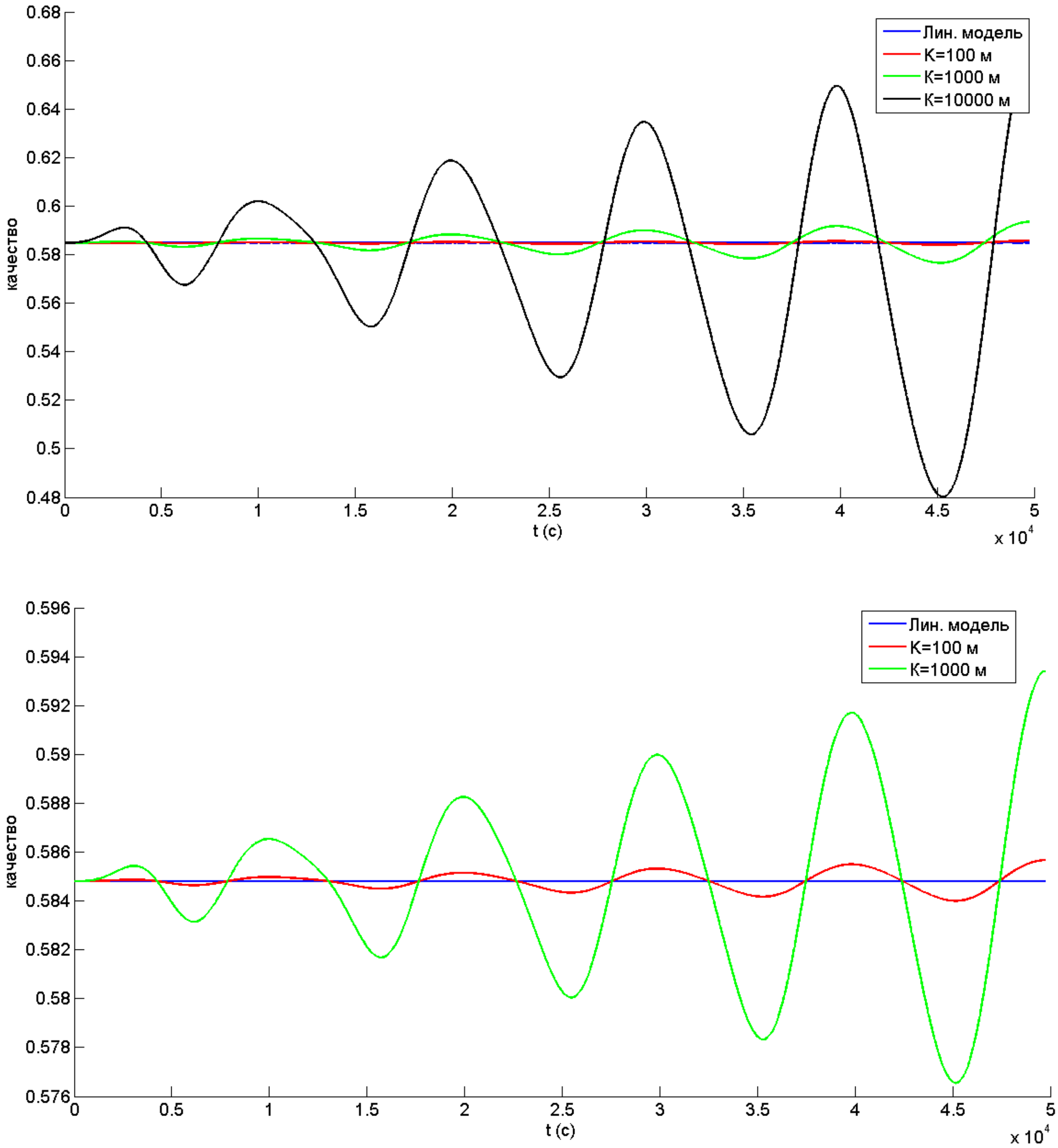


Рис. 6. Эволюция качества в линейной модели и в центральном поле при разных значениях параметра K

В случае 1 по формуле (14) получаем

$$\psi = -\arccos\frac{\pm\sqrt{6}}{3}, \quad \theta = \arccos\frac{\pm\sqrt{6}}{3}.$$

При нулевой амплитуде два спутника покоятся в ОСК, а потому на разность фаз между спутниками группы влияет только модуль выражения $\theta-\psi$, но

$$|\theta-\psi| = \left|2\arccos\frac{\pm\sqrt{6}}{3}\right| = \arccos\frac{1}{3},$$

а потому оба семейства порождают одну и ту же конфигурацию.

Из (15) получаем

$$C_2 = C_3, \quad C_1 = 2C_2.$$

Тогда

$$\mathbf{A} = K\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = K\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = aK\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} + bK\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = -bK\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} + aK\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

где a, b, c, K – произвольные постоянные. При этом

$$\mathbb{V} = \frac{b}{6}(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}) = cK^2 b\frac{2\sqrt{2}}{9}, \quad \mathbb{L} = \frac{8}{3}K^2(a^2 + b^2 + 5) + 8c^2.$$

Максимум качества здесь достигается при $a = 0,\ b = \pm\sqrt{5},\ c = \pm K\sqrt{\frac{5}{3}}$ и снова равен $\mathbb{Q}_{max} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Общий вариант случая 2 не имеет решений, т.к. $p \notin \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, но если в системе (16) положить $p = 0$, второе уравнение обратится в тождество, получим

$$\cos^2\frac{\psi - \theta}{2} = \frac{2}{3},$$
$$\sin\frac{\psi + \theta}{2} \neq 0.$$

Уравнение системы даёт $\cos(\psi - \theta) = \frac{1}{3}$, так что порождаемое семейство решений то же самое, что и в случае 1 (рис. 7).

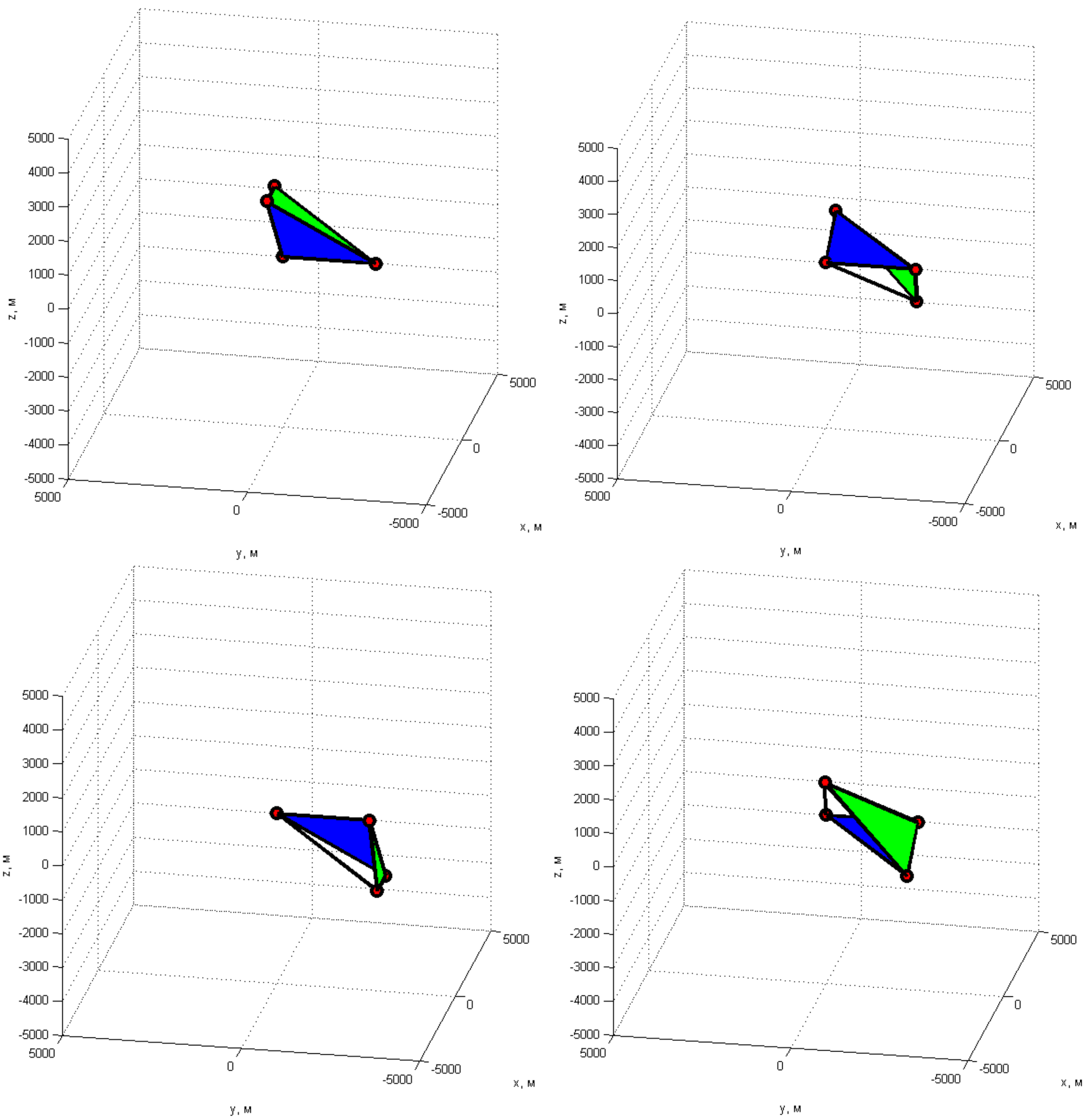


Рис. 7. Оптимальная конфигурация для семейства при нулевой амплитуде, $K = 1000$ м, $b = -\sqrt{5}$, $c = -K\sqrt{5/3}$ для различных фаз: четверть, половина, три четверти и полный период обращения в ОСК

На рис. 8 представлена эволюция качества тетраэдра для различных размеров относительных орбит спутников. Легко видеть, что, как и в предыдущих случаях, при увеличении относительных расстояний скорость разрушения формации также растет. Связано это с тем, что уравнения Хилла–Клохесси–Уилтшира получены в предположении малости относительных расстояний по сравнению с размерами орбиты.

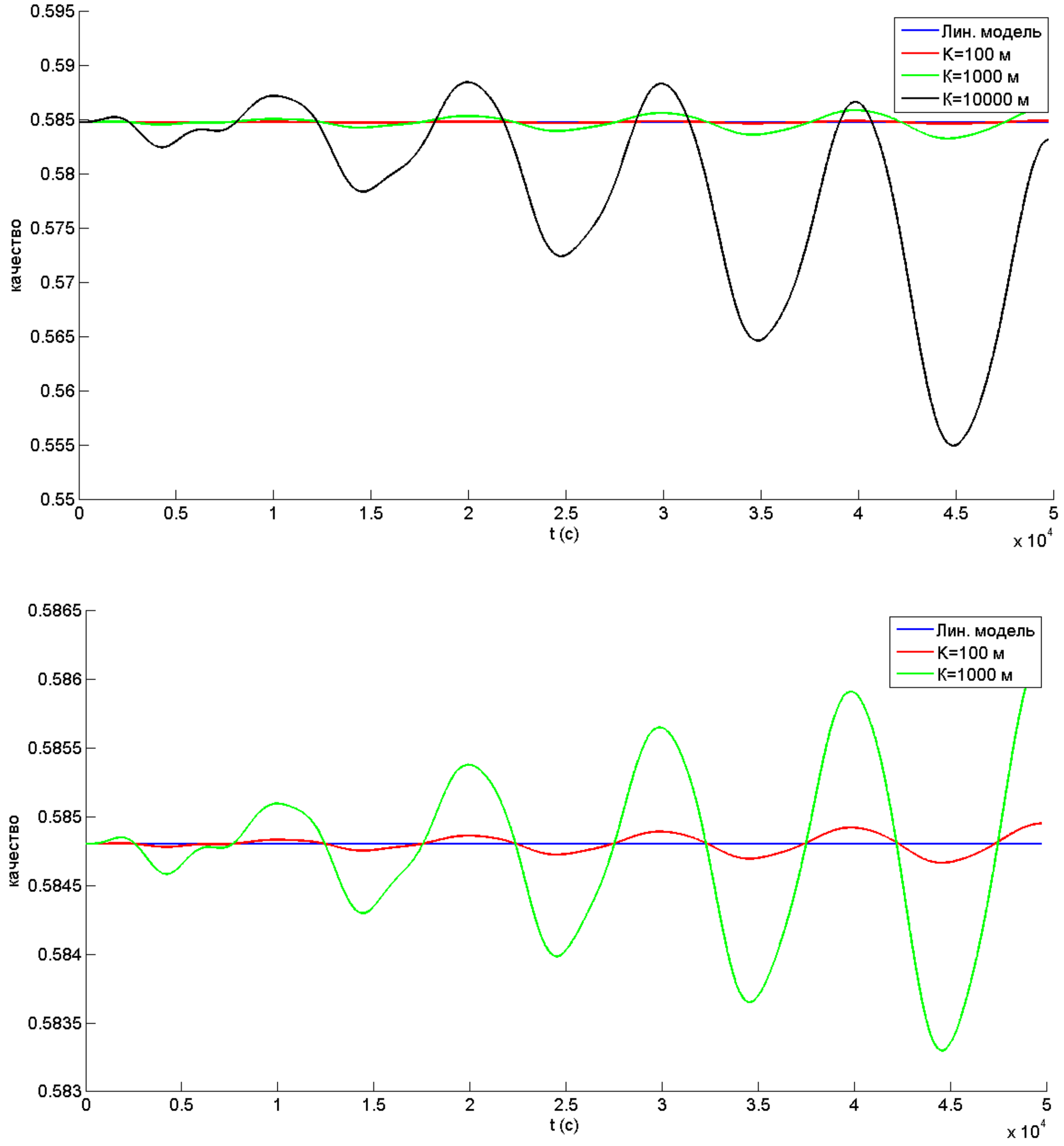


Рис. 8. Эволюция качества в линейной модели и в центральном поле при разных значениях параметра K

Как видно из рис. 4, 6, 8, на достаточно больших промежутках времени формация разрушается, а спутники разлетаются друг относительно друга даже при отсутствии учёта возмущений. Из этого следует, что для сохранения формы и размеров тетраэдра необходимо активное управление формацией. Для этого, например, на низких орбитах может использоваться сила аэродинамического сопротивления [9]. Для отработки алгоритмов управления орбитальным движением, кроме того, полезно проведение наземных испытаний на специализированных стендах [10].

Заключение

В работе рассмотрена задача построения опорного относительного движения четырех спутников, движущихся в группе. Основной целью является поиск таких орбит, при пассивном движении по которым, по крайней мере в рамках линейной модели Хилла–Клохесси–Уилтшира, обеспечивалось бы постоянство качества тетраэдра, в вершинах которого находятся спутники.

В общем случае найдены условия, обеспечивающие постоянство объема и формы получающегося тетраэдра. При упрощающем предположении о равенстве амплитуд двух спутников найдены все возможные семейства орбит, удовлетворяющие поставленной задаче. Показано, что в случае, когда два спутника покоятся в орбитальной системе координат, а также в случае равенства трех амплитуд, максимально достижимое качество тетраэдра составляет $5^{-1/3}$.

Приведено сравнение поведения качества тетраэдра для нескольких величин амплитуд. Получен ожидаемый результат, что для достаточно больших амплитуд (от 1 км) формация распадается довольно быстро, а следовательно, необходима разработка дополнительных алгоритмов поддержания опорного орбитального движения.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность М.Ю. Овчинникову, А.А. Чернышову и М.М. Могилевскому за советы и полезные обсуждения при постановке и решении задачи.

Литература

1. INTERBALL Satellite [Electronic resource]. URL: http://www.iki.rssi.ru/interball/ (accessed: 30.08.2017).
2. GEOTAIL Satellite [Electronic resource]. URL: https://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/news/geotail-20th.html (accessed: 30.08.2017).
3. THEMIS Satellite [Electronic resource]. URL: https://www.nasa.gov/mission_pages/themis/mission/index.html (accessed: 30.08.2017).
4. MMS Satellite [Electronic resource]. URL: https://mms.gsfc.nasa.gov/ (accessed: 30.08.2017).
5. Guzman J.J., Edery A. Mission design for the MMS tetrahedron formation // Aerosp. Conf. 2004. Proceedings. 2004 IEEE. 2004. Vol. 1. P. 540.
6. Roscoe W.T. et al. Optimal Formation Design for Magnetospheric Multiscale Mission Using Differential Orbital Elements // J. Guid. Control. Dyn. 2011. Vol. 34, № 4. P. 1070–1080.
7. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // J. Astronaut. Sci. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–678.
8. Маштаков Я.В., Шестаков С.А. Поддержание тетраэдральной конфигурации группы спутников при помощи одноосного управления // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 95. 27 с.
9. Иванов Д.С., Кушнирук М.С. Исследование алгоритма управления пространственным движением группы спутников с помощью аэродинамической силы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 53. 32 с.
10. Биндель Д. и др. Лабораторный стенд для верификации алгоритмов управления группировкой спутников // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. Vol. 48, № 5. P. 109–117.

Оглавление

Введение 3
1. Постановка задачи 3
2. Поиск опорной относительной орбиты в круговом движении 4
3. Сохранение объёма...6
4. Сохранение формы 8
5. Поиск опорных орбит..10
6. Частные решения с одинаковой амплитудой 15
7. Частные решения при нулевой амплитуде 19
Заключение 24
Литература 25