



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 80 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Игнатов А.И., Сазонов В.В.

Стабилизация режима  
солнечной ориентации  
искусственного спутника  
Земли электромагнитной  
системой управления

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 80. 31 с. doi:[10.20948/prepr-2017-80](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-80)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-80>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**А.И. Игнатов, В.В. Сазонов**

**СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕЖИМА СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ  
ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ**

Москва – 2017

## Аннотация

Исследован режим солнечной ориентации искусственного спутника Земли. Параметры спутника соответствуют параметрам спутников «Бион М» и «Фотон М-4». В этом режиме нормаль к плоскости солнечных батарей спутника неизменно направлена на Солнце, продольная ось лежит в плоскости орбиты, абсолютная угловая скорость спутника весьма мала. Режим стабилизируется с помощью электромагнитов, взаимодействующих с магнитным полем Земли и вращающегося маховика, создающего постоянный гиросtatический момент вдоль продольной оси спутника. Такой момент можно создать и с помощью системы двигателей-маховиков, постоянство гиросtatического момента означает, что эта система будет функционировать без насыщения. Управление вращательным движением спутника осуществляется за счет изменения токов в электромагнитах. Исследованы два закона управления, уменьшающие угловую скорость спутника и стабилизирующие солнечную ориентацию. Их реализация не требует проведения сложных измерений, достаточно иметь показания солнечного датчика, трехосного магнитометра и аппаратуру для их обработки. Эффективность законов управления проверена посредством математического моделирования движения спутника относительно центра масс под действием гравитационного и аэродинамического моментов, а также момента, создаваемого электромагнитами.

**A.I. Ignatov, V.V. Sazonov. Stabilization of the spacecraft in the solar orientation mode by electromagnetic attitude control system.** We investigate solar orientation mode of an Earth artificial satellite. Satellite parameters are close to parameters of the spacecraft Bion M and Foton M-4. In this mode, the normal to the plane of satellite solar batteries is permanently directed on the Sun, the satellite longitudinal axis lies in the orbital plane, absolute angular rate of the satellite is practically equal to zero. The mode is stabilized by electromagnets interacting with the Earth magnetic field and the flywheel with constant gyrostatic moment directed along the satellite longitudinal axis. Such a moment can be created also by a system of reaction wheels. Constancy of gyrostatic moment means that such a system will be operated without saturation. The satellite attitude control is implemented by change of currents in the electromagnets. We investigate two control laws that reduce the satellite angular rate and stabilize the solar orientation mode. Measurements of a triaxial magnetometer and solar sensor need only to form these laws. Realization of the laws requires a few watts of electric power. We test the laws by the mathematical modeling the spacecraft attitude motion taking into account the gravitational and the aerodynamic torques acted upon the spacecraft, as well as the control torques produced by the electromagnetic system. As the results of modeling show, the investigated orientation mode provides very small residual accelerations onboard the satellite.

**1. Уравнения движения спутника.** Спутник считаем гиростатом, центр масс которого – точка  $O$  – движется по геоцентрической орбите. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс и интерпретации результатов математического моделирования введем три правые декартовы системы координат.

Связанная со спутником система  $Ox_1x_2x_3$  образована его главными центральными осями инерции. Несколько упрощая модель, полагаем, что оси этой системы связаны с характерными элементами конструкции спутника: ось  $Ox_1$  параллельна его продольной оси, ось  $Ox_2$  перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Гиростатический момент спутника направлен по оси  $Ox_1$ . Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе  $Ox_1x_2x_3$ .

Начало гринвичской системы  $Sy_1y_2y_3$  находится в центре Земли, плоскость  $Sy_1y_2$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $Sy_1$  пересекает гринвичский меридиан, ось  $Sy_3$  направлена к Северному полюсу.

В квазиинерциальной системе координат  $CZ_1Z_2Z_3$  ось  $CZ_2$  параллельна вектору кинетического момента орбитального движения спутника, ось  $CZ_3$  лежит в плоскости экватора и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты спутника. Абсолютная величина угловой скорости этой системы не превышает  $7^\circ/сут$ .

Положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно гринвичской системы зададим нормированным кватернионом  $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ ,  $\|Q\| = 1$ . Кватернионная формула перехода между этими системами координат имеет вид  $(0, y_1, y_2, y_3) = Q \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ Q^{-1}$ . Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к гринвичской системе обозначим  $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ ; где  $b_{ij}$  – косинус угла между осями  $Sy_i$  и  $Ox_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты  $Q$  по формулам:

$$\begin{aligned} b_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & b_{12} &= 2(q_1q_2 - q_0q_3), & b_{13} &= 2(q_1q_3 + q_0q_2), \\ b_{21} &= 2(q_2q_1 + q_0q_3), & b_{22} &= q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2, & b_{23} &= 2(q_2q_3 - q_0q_1), \\ b_{31} &= 2(q_3q_1 - q_0q_2), & b_{32} &= 2(q_3q_2 + q_0q_1), & b_{33} &= q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2. \end{aligned}$$

Положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $CZ_1Z_2Z_3$  будем задавать углами  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , которые введем с помощью следующего условия. Если точку  $C$  перенести в точку  $O$ , то систему  $CZ_1Z_2Z_3$  можно перевести в систему  $Ox_1x_2x_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\delta + \pi/2$  вокруг оси  $CZ_2$ ; 2) на угол  $\beta$  вокруг оси  $CZ_3$ , полученной после первого поворота; 3) на угол  $\gamma$  вокруг оси  $CZ_1$ , полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью  $Ox_1$ . Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к квазиинерциальной

системе обозначим  $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$ ; где  $a_{ij}$  – косинус угла между осями  $CZ_i$  и  $Ox_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через введенные углы по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{21} &= \sin \beta, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, & a_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ & & a_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, \\ & & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ & & a_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая его движение относительно центра масс – вращательное движение. Подсистема уравнений движения центра масс записывается в гринвичской системе координат. В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент спутника считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована уравнениями Эйлера для компонент абсолютной угловой скорости спутника  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  и кинематическими уравнениями для кватерниона  $Q$ . В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также управляющий момент, создаваемый электромагнитами. Для гравитационного момента существует простое аналитическое выражение [1]. Аэродинамический момент  $\mathbf{M}_a$  вычислялся в предположении, что спутник имеет форму прямого кругового цилиндра с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами солнечными батареями. Ось цилиндра совпадает с осью  $Ox_1$ , радиус цилиндра –  $R$ , высота –  $L_c$ . Пластины расположены в плоскости  $Ox_1x_3$  симметрично относительно оси  $Ox_1$ . Стороны пластин параллельны осям  $Ox_1$  и  $Ox_3$ , суммарная площадь пластин –  $S_b$ . Координаты геометрических центров масс цилиндра и пластин суть  $(z_c, 0, 0)$  и  $(z_b, 0, 0)$ . Полагая столкновения молекул атмосферы со спутником абсолютно неупругими, аэродинамический момент представим в виде [1]

$$\mathbf{M}_a = \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}).$$

Здесь  $\rho_a$  – плотность атмосферы в точке  $O$ ,  $\mathbf{v}$  – скорость точки  $O$  относительно гринвичской системы координат,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{v})$  – первый момент геометрической фигуры, которая представляет собой проекцию внешней оболочки

спутника на плоскость  $\Pi_v$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{v}$ . Вектор  $\mathbf{P}$  лежит в плоскости  $\Pi_v$  и вычисляется относительно проекции на  $\Pi_v$  точки  $O$ . Формула для  $\mathbf{M}_a$  инвариантна относительно замены  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + p\mathbf{v}$ , где  $p$  – произвольный скаляр. По этой причине функцию  $\mathbf{P}(\mathbf{v})$  можно задавать, не связывая себя условием  $\mathbf{P} \in \Pi_v$ . В частности, компоненты вектора  $|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v})$  удобно задавать в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Для рассматриваемого спутника этот вектор можно взять в виде

$$|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \left( \pi z_c R^2 |\mathbf{v}_1| + 2z_c RL_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2} + z_b S_b |\mathbf{v}_2|, 0, 0 \right),$$

где  $v_i$  – компоненты вектора  $\mathbf{v}$ .

Механический момент, создаваемый электромагнитами, имеет вид

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$  – собственный магнитный момент электромагнитов,  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$  – магнитная индукция МПЗ в точке  $O$ ,

$$B_i = \sum_{j=1}^3 B_{yj} b_{ji} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$B_{yi}$  – компоненты вектора магнитной индукции МПЗ в точке  $O$ , рассчитываемые согласно модели IGRF.

Уравнения Эйлера и кинематические уравнения для кватерниона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - vx_2x_3) + l_2B_3 - l_3B_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - vx_1x_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(l_3B_1 - l_1B_3 + pv_3 - h\omega_3), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - vx_1x_2) + \lambda(l_1B_2 - l_2B_1 - pv_2 + h\omega_2), \\ 2\dot{q}_0 &= -q_1\omega_1 - q_2\omega_2 - q_3(\omega_3 - \omega_E), \\ 2\dot{q}_1 &= q_0\omega_1 + q_2(\omega_3 + \omega_E) - q_3\omega_2, \\ 2\dot{q}_2 &= q_0\omega_2 + q_3\omega_1 - q_1(\omega_3 + \omega_E), \\ 2\dot{q}_3 &= q_0(\omega_3 - \omega_E) + q_1\omega_2 - q_2\omega_1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu_E}{r^5}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$p = \rho_a \left( \frac{\pi R^2 z_c}{I_1} |\mathbf{v}_1| + \frac{S_b z_b}{I_1} |\mathbf{v}_2| + \frac{2RL_c z_c}{I_1} \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right).$$

Здесь  $x_i$  – компоненты геоцентрического радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  точки  $O$ ,  $I_i$  – моменты инерции спутника относительно осей  $Ox_i$ ,  $l_i = L_i / I_1$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $I_1 h$  – гиростатический момент спутника (направлен по оси  $Ox_1$ ),  $\mu_E$  и  $\omega_E$  – гравитационный параметр Земли и ее угловая скорость.

Чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения, к уравнениям (2) надо добавить соотношения, описывающие изменение величин  $l_i$ . Явный вид этих соотношений будет указан ниже.

Приведем использованные в расчетах числовые значения параметров описанной модели. Параметры спутника:  $\lambda = 0.25$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $I_1 h = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ ,  $I_1 = 2600 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $R = 1.3 \text{ м}$ ,  $L_c = 5 \text{ м}$ ,  $S_b = 33 \text{ м}^2$ ,  $z_b = -1 \text{ м}$ ,  $z_c = 0.3 \text{ м}$ . Параметры модели атмосферы во всех расчетах были следующие:  $F = 137.0$ ,  $F_{81} = 117.09$ ,  $K_p = 2.333$ .

Начальные условия движения центра масс спутника задавались в момент 10:13:07 декретного московского времени 05.05.2013. На этот момент элементы орбиты составляли: высота в апогее 575.2 км, высота в перигее 546.8 км, наклонение  $64.87^\circ$ , аргумент широты перигея  $-124.65^\circ$ , долгота восходящего узла (отсчитывается от точки весеннего равноденствия эпохи даты)  $-16.73^\circ$ . Начальные условия уравнений (1) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия принятой орбиты. Этот момент служил началом отсчета времени – точкой  $t = 0$ .

**2. Стабилизация спутника-гиростата.** Уравнения (2) громоздки и неудобны для пояснения режима солнечной ориентации спутника. Этот режим и способ его стабилизации поясним с помощью более простых уравнений, учитывающих только главные факторы. А именно, предположим, что спутник имеет ось материальной симметрии  $Ox_1$ , т.е.  $\mu = 0$ , орбита центра масс спутника – круговая и неизменна в абсолютном пространстве, на спутник действует только гравитационный момент. Вращательное движение такого спутника описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= 0, & \dot{\omega}_2 &= (1 - \lambda)(\omega_1 \omega_3 - 3\omega_0^2 \eta_1 \eta_3) - \lambda h \omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda)(\omega_1 \omega_2 - 3\omega_0^2 \eta_1 \eta_2) + \lambda h \omega_2, \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \tan \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\delta} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), & \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ \eta_i &= a_{1i} \sin u + a_{3i} \cos u \quad (i = 1, 2, 3).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь  $\omega_0$  – среднее движение спутника (орбитальная частота),  $u$  – аргумент широты спутника (угол между осью  $CZ_3$  радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ ),  $\dot{u} = \omega_0$ . Величины  $a_{ij}$  выражаются через углы  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  по формулам п. 2.

В силу первого уравнения (3)  $\omega_1 = \text{const}$ . Будем считать эту величину параметром. Заменим  $\omega_2$  и  $\omega_3$  переменными

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma, \quad \Omega_3 = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma$$

и введем новый параметр  $H = \lambda h + \omega_1$ . В новых переменных уравнения (3) распадаются на не зависящую от  $\gamma$  подсистему

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_2 &= -(H - \Omega_2 \tan \beta) \Omega_3 - 3\omega_0^2 (1 - \lambda) \sin(\delta - u) \cos(\delta - u) \cos \beta, \\ \dot{\Omega}_3 &= (H - \Omega_2 \tan \beta) \Omega_2 - 3\omega_0^2 (1 - \lambda) \cos^2(\delta - u) \sin \beta \cos \beta, \\ \dot{\delta} &= \frac{\Omega_2}{\cos \beta}, \quad \dot{\beta} = \Omega_3, \end{aligned} \quad (4)$$

и уравнение  $\dot{\gamma} = \omega_1 - \Omega_2 \tan \beta$ . Параметры  $H$  и  $\omega_1$  будем считать независимыми.

При  $|H| \gg \omega_0$  уравнения (6) допускают решения, в которых

$$\begin{aligned} \Omega_2 &\approx \frac{3\omega_0^2 (1 - \lambda)}{H} \cos^2(\delta - u) \sin \beta \cos \beta, \\ \Omega_3 &\approx -\frac{3\omega_0^2 (1 - \lambda)}{H} \sin(\delta - u) \cos(\delta - u) \cos \beta. \end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в последние два уравнения (4), получим

$$\dot{\delta} = \frac{3\omega_0^2 (1 - \lambda)}{H} \cos^2(\delta - u) \sin \beta, \quad \dot{\beta} = -\frac{3\omega_0^2 (1 - \lambda)}{H} \sin(\delta - u) \cos(\delta - u) \cos \beta.$$

Последние уравнения интегрируются в квадратурах [1]. В случае  $|H| \gg \omega_0$  получить представление об их решениях можно, усреднив правые части уравнений по  $u$ . Усредненные уравнения имеют вид

$$\dot{\delta} = \frac{3\omega_0^2 (1 - \lambda)}{2H} \sin \beta, \quad \dot{\beta} = 0.$$

Для дальнейшего представляют интерес стационарные решения этих уравнений. В них  $\beta = 0$ , а  $\delta$  – произвольная постоянная. Можно доказать [4], что для любого  $\delta_0$  и достаточно больших  $H$ , таких, что  $\sin(\pi H / 2\omega_0)$  не лежит в малой окрестности нуля, уравнения (2) имеют периодическое решение с периодом  $\pi / \omega_0$ , удовлетворяющее условиям

$$\delta - \delta_0 = O(H^{-1}), \quad \beta = O(H^{-1}), \quad \Omega_2 = O(H^{-1}), \quad \Omega_3 = O(H^{-1}).$$

Для этого решения можно так выбрать  $\omega_1 = O(H^{-2})$ , что при любом  $\gamma_0$  будет

выполняться соотношение  $\gamma = \gamma_0 + O(H^{-2})$ . В соответствующем периодическом решении уравнений (2) ось  $Ox_2$  будет совершать малые колебания в окрестности направления, задаваемого углами  $\delta_0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma_0$ . В частности, можно направить эту ось на Солнце. Указанное выше периодическое решение системы (4) является орбитально устойчивым в первом приближении.

Из-за разного рода возмущающих факторов ( $\mu \neq 0$ , эллиптичность орбиты, аэродинамический момент и др.) система (3) не имеет решений описанного типа. Но она имеет решения, для которых приведенные выше оценки выполнены на некотором не очень продолжительном отрезке времени. Чтобы обеспечить достаточно точное выполнение этих оценок длительное время (стабилизировать режим солнечной ориентации) можно использовать управляющий момент (1), создаваемый электромагнитами.

**3. Управление вращательным движением.** Дипольный момент электромагнитов, обеспечивающий стабилизацию режима солнечной ориентации спутника, будем искать в виде [2]

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{u}}{|\mathbf{B}|^2}, \quad \mathbf{u} = I_1 \mathbf{m}, \quad (5)$$

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  – управление, вид которого предстоит установить. Подставив выражение (5) в (1), получим формулу

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2} \mathbf{B}. \quad (6)$$

Если в последней формуле отбросить вычитаемое  $|\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ , то она перейдет в формулу

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{u}, \quad (7)$$

которая обеспечила бы широкие возможности для построения законов управления. Вычитаемое  $|\mathbf{B}|^{-2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$  уменьшает эти возможности, но если осуществлять управление на промежутках времени длиной виток и более, то в ряде случаев влияние этого слагаемого можно нивелировать. Положительным фактором здесь является достаточно большое наклонение орбиты спутника.

Режимом солнечной ориентации спутника будем называть такое движение, в котором с малыми ошибками выполнены следующие условия: ось  $Ox_2$  направлена на Солнце, ось  $Ox_1$  лежит в плоскости орбиты, угловая скорость спутника равна нулю. Эти условия выражаются соотношениями

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{s}, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – орты осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – орт направления «Земля–Солнце»,  $\mathbf{n}$  – орт нормали к плоскости оскулирующей орбиты спутника.

При упрощающем предположении (7) режим солнечной ориентации можно реализовать с помощью закона управления [3]

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_2 = -\frac{2\xi(1 + \lambda\mu)}{\lambda}\omega_2, \quad m_3 = -\frac{2\xi\omega_3 + \xi^2 s_1}{\lambda} \quad (9)$$

при достаточно большом значении коэффициента  $\xi > 0$ . Уравнения движения спутника в этом случае имеют решения, в которых приближенно выполнены все условия (8) кроме первого [3]. Выполнение условия  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$  обеспечивается достаточно большим гиростатическим моментом, направленным вдоль оси  $Ox_1$ . Здесь имеет место ситуация, которая в упрощенном виде исследована в [4].

В случае упрощающего предположения (7) более точный режим солнечной ориентации можно реализовать с помощью закона управления

$$m_1 = -2\xi\omega_1 + \xi^2 s_3, \quad m_2 = -\frac{1 + \lambda\mu}{\lambda}(2\xi\omega_2 - \xi^2 s_{\perp 3}),$$

$$m_3 = -\frac{2\xi\omega_3 + \xi^2(s_1 + s_{\perp 2})}{\lambda}. \quad (10)$$

где  $\mathbf{s}_{\perp} = (s_{\perp 1}, s_{\perp 2}, s_{\perp 3})$  – орт лежащий в плоскости орбиты спутника перпендикулярно  $\mathbf{s}$ .

Законы (9) и (10) оказались достаточно эффективными и при использовании формулы (6), т.е. с учетом ограничения, обусловленного реализацией посредством электромагнитов.

В предлагаемой системе управления каждая компонента  $L_i$  вектора  $\mathbf{L}$  реализуется собственным электромагнитом. Система имеет три одинаковых электромагнита [5]. Их дипольные моменты, реализующие компоненты  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , параллельны осям  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  и  $Ox_3$  соответственно. Возможные способы реализации электромагнитов приведены в [5, 6]. Реализация управления не требует проведения сложных измерений, достаточно иметь показания солнечного датчика, трехосного магнитометра и аппаратуру для их обработки.

#### 4. Математическое моделирование режима солнечной ориентации.

Цель моделирования – показать, что законы управления (6), (9) и (6), (10) обеспечивают гашение возмущенного движения спутника и стабилизацию его в режиме солнечной ориентации. Начальные условия движения при моделировании задавались следующим образом: ось  $Ox_2$  (нормаль к плоскости солнечных батарей) направлена по орту  $\mathbf{s}$ , ось  $Ox_1$  лежит в плоскости орбиты спутника, начальные значения угловой скорости  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = 0.01^\circ/\text{с}$ . Решения уравнений (2) с такими начальными условиями вычислялись на отрезке  $0 \leq t \leq 6 \cdot 86.4 \cdot 10^3 \text{ с}$  (6 суток). Все расчеты выполнялись при  $\xi = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , в тени Земли соотношения (9) и (10) не нарушались. Результаты интегрирования уравнений (2) при использовании закона управления (6), (9) приведены на рис.

1 – 4 в виде графиков черного цвета. На рис. 1 изображены графики зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , на рис. 2 – графики углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отклонения оси  $Ox_2$  от орта  $\mathbf{s}$ . Эти углы вычисляются по формулам

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{b_{22}S_1 - b_{12}S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, \quad \alpha_2 = \arcsin \left( b_{32} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} - \frac{S_3(b_{12}S_1 + b_{22}S_2)}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \right),$$

где  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  – компоненты орта  $\mathbf{s}$  в системе  $Cy_1y_2y_3$ . Они отсчитываются в перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по прямой «Земля–Солнце». Плоскость отсчета угла  $\alpha_2$  содержит ось  $Cy_3$ . Направление отсчета этого угла – на север, направление отсчета угла  $\alpha_1$  – на восток. На рис. 2 изображен также график угла  $\phi = \arccos(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{s})$  между осью  $Ox_2$  и ортом  $\mathbf{s}$ . На рис. 3, 4 приведены графики компонент угловой скорости  $\omega_i$  и магнитного момента  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Результаты интегрирования уравнений (2) с управлением (6), (10) приведены на рис. 5 – 8 (черные графики), которые устроены аналогично рис. 1 – 4. Результаты моделирования показали, что управления (6), (9) и (6), (10) достаточно точно обеспечивают устойчивую солнечную ориентацию спутника – см. графики угла  $\phi$  на рис. 2, 5. Для компонент угловой скорости имеют место оценки  $|\omega_i(t)| < 0.01^\circ/\text{с}$ .

Для сравнения законов управления вида (6) и (7) на рис. 1 – 3 и 5 – 8 в виде красных графиков приведены результаты интегрирования уравнений (2) с законами управления (7), (9) и (7), (10). Красные графики имеют тот же смысл, что и изображенные в тех же координатных осях графики черные. Как видно из рисунков и следовало ожидать, управления вида (6) обеспечивают более точную ориентацию спутника, чем управления вида (7). Однако графики угловых скоростей (рис. 3, 7) для обоих типов управлений практически одинаковы; почти совпадают и графики компонент магнитного момента (последние приведены только для управлений вида (6)). Графики углов  $\delta$  и  $\beta$  для обоих типов правлений близки, а графики углов  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\phi$  заметно различаются. Анализ последних графиков показывает, что основное отличие и одновременно нарушение режима ориентации сосредоточено в углах  $\gamma$  и  $\alpha_2$ . Это нарушение, во-первых, невелико. Угол  $\phi$  всегда был меньше  $20^\circ$ , его среднее значение составило около  $15^\circ$ . Поскольку ток солнечных батарей пропорционален  $\cos\phi$ , максимальные краткосрочные потери энергопотребления составили менее 6%, а средние не более 3%. Во-вторых, смещение от точной ориентации по углам  $\gamma$  и  $\alpha_2$  имеет доминирующую постоянную составляющую (см. рис. 1, 2 и 5, 6), поэтому ее можно компенсировать, направив ось  $Ox_2$  не точно по орту  $\mathbf{s}$ , а на несколько градусов в сторону.

**5. Периодическая аппроксимация ориентированного движения.** Анализ рис. 1 – 8 показывает, что установившийся режим солнечной ориентации

спутника похож на периодическое движение. Основываясь на этом свойстве, построим аппроксимации режима солнечной ориентации спутника набором периодических движений. На каждом орбитальном витке – между последовательными прохождениями восходящего узла орбиты – построим аппроксимирующее периодическое движение. При построении этого движения гринвичскую систему координат примем инерциальной, зафиксировав ее положение относительно второй геоэквиаториальной системы координат на момент прохождения начального (на данном витке) восходящего узла. Иными словами, зафиксируем соответствующее среднее звездное время. Орбиту спутника в «замороженной» гринвичской системе примем кеплеровой эллиптической. Элементы этой орбиты вычисляются по фазовому вектору реальной орбиты в начальном восходящем узле. Таким образом, от витка к витку долгота восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат меняется, меняется и положение орбиты относительно МПЗ и Солнца, но внутри витка эти долгота, положение относительно МПЗ и Солнца остаются неизменными. Уравнения вращательного движения спутника возьмем в виде (2), положив в них  $\omega_E = 0$  и приняв в формулах для расчета координат и компонент скорости точки  $O$  в «замороженной» гринвичской системе формулы кеплерова движения. Получившуюся систему уравнений обозначим (2'). Время входит в эту систему периодически с орбитальным периодом, поэтому можно поставить задачу об отыскании ее периодических решений. Интерес представляет такое периодическое решение, которое можно будет использовать как аппроксимацию решения исходной системы (2) на данном витке.

Построение периодического решения системы (2') сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи

$$\omega(t_0) = \omega(t_0 + T), \quad Q(t_0) = Q(t_0 + T). \quad (11)$$

Здесь  $t_0$  – момент прохождения начального восходящего узла орбиты на витке аппроксимации,  $T$  – период используемой в системе (2') кеплеровой орбиты. Задача (2'), (11) решается методом пристрелки. Краевые условия (11) рассматриваются как уравнения для определения неизвестных начальных условий  $\omega(t_0)$ ,  $Q(t_0)$ . Кватернион  $Q(t)$  должен быть нормированным, в процессе решения задачи (2'), (11) это обстоятельство учитывается следующим образом.

Вариацию решения  $\omega(t)$ ,  $Q(t)$  системы (2') на каждой итерации метода пристрелки представим в виде

$$\Delta\omega(t), \quad \Delta Q(t) = \frac{1}{2} Q(t) \circ \theta(t),$$

где  $\theta(t)$  – вектор бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения  $Q(t)$ . Вектор  $\theta(t)$  удовлетворяет уравнению  $\dot{\theta} + \omega(t) \times \theta = \Delta\omega(t)$ , а вектор  $\Delta\omega(t)$  – системе уравнений в вариациях для первых трех уравнений (2') (в этой системе вариации векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  можно

вычислять по формулам  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta}$ ,  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\theta}$  и  $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \boldsymbol{\theta}$ . Подстановка варьируемого решения в краевые условия (11) приводит к соотношениям

$$Q(t_0 + T) \circ \boldsymbol{\theta}(t_0 + T) - Q(0) \circ \boldsymbol{\theta}(0) = 2[Q(t_0) - Q(t_0 + T)],$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega}(t_0 + T) - \Delta \boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0 + T).$$

Величины  $\boldsymbol{\theta}(t_0 + T)$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}(t_0 + T)$  входят в эти соотношения в виде линейных комбинаций величин  $\boldsymbol{\theta}(t_0)$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}(t_0)$  (что требует интегрирования 6 экземпляров систем уравнений в вариациях для  $\Delta \boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  на отрезке  $[t_0, t_0 + T]$ ). Полученные соотношения рассматриваются как линейные уравнения относительно  $\boldsymbol{\theta}(t_0)$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}(t_0)$ . Эти уравнения выглядят переопределенными, но на самом деле среди них не более шести линейно независимых. Решение этих уравнений находится с помощью процедуры сингулярного разложения их матрицы. Величины  $[Q(t_0) + \Delta Q(t_0)] / \|Q(t_0) + \Delta Q(t_0)\|$  и  $\boldsymbol{\omega}(t_0) + \Delta \boldsymbol{\omega}(t_0)$  принимаются в качестве новых значений  $Q(t_0)$  и  $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ . Итерации заканчиваются, когда поправки  $|\boldsymbol{\theta}(t_0)|$ ,  $|\Delta \boldsymbol{\omega}(t_0)|$  станут меньше заданных пределов. Начальным приближением начальных условий периодического решения служат значения переменных системы (2) в точке  $t_0$ .

На рис. 9, 10 приведены результаты аппроксимации рассмотренного ранее решения системы (2) с законом управления (6), (9) решениями краевой задачи (2'), (11). Здесь изображены графики зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  и компонент угловой скорости  $\omega_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Графики аппроксимируемого решения – черные, графики аппроксимирующих решений – красные. При построении аппроксимации пропущен участок переходного процесса. Начальное приближение при решении краевой задачи задавалось следующими начальными условиями в соответствующих точках  $t_0$ : ось  $Ox_2$  направлена по орту  $\mathbf{s}(t_0)$ , ось  $Ox_1$  лежит в плоскости кеплеровой орбиты, начальные значения угловой скорости – нулевые. Красные графики в малых окрестностях моментов прохождения восходящих узлов орбиты налегают друг на друга (кеплеров период несколько больше драконического), но при выбранном масштабе графиков налегания практически не заметны.

На рис. 11, 12 приведены результаты аналогичной аппроксимации решения уравнений (2) с законом управления (6), (10). Рисунки устроены аналогично рис. 9, 11. Как видим, в обоих случаях аппроксимация оказалась достаточно точной. Возможность такой аппроксимации обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, кеплерова аппроксимация орбиты в данной задаче более чем достаточна для построения вращательного движения спутника на орбитальном витке. Во-вторых, МПЗ в «замороженной» системе  $S_{y_1 y_2 y_3}$  в течение витка меняется сравнительно мало, поскольку оно близко к полю диполя, момент которого лежит вблизи точки  $C$  и составляет с осью  $S_{y_3}$  малый угол ( $\sim 12^\circ$ ). Поле диполя, расположенного в точке  $C$  и направленного по  $S_{y_3}$  (т.н. прямой диполь) в таком случае вообще бы не менялось.

Удобство построенной аппроксимации заключается в том, что, рассмотрев семейство решений краевой задачи (2'), (11) для различных значений долготы восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат, вычислив мультипликаторы этого семейства, можно выбрать подходящие параметры законов управления и сами эти законы.

На рис. 13, 14 приведены начальные условия решений краевой задачи (2'), (6), (10), (11) в зависимости от долготы восходящего узла орбиты. Здесь момент  $t_0$  и угол  $\psi$  между ортом  $s$  и осью  $CZ_2$  фиксированы:  $t_0 = 10:13:07$  ДМВ 05.05.2013,  $\psi = 128.95^\circ$ . Этот угол и элементы кеплеровой орбиты (кроме долготы восходящего узла) соответствуют принятой орбите спутника (см. п.1) на указанный момент. Начальные условия представлены значениями углов  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  и компонент угловой скорости  $\omega_i$  в момент  $t_0$ .

На рис. 15, 16 приведены аналогичные графики для решения той же краевой задачи в случае  $t_0 = 02:48:30$  ДМВ 25.06.2013 и  $\psi = 1.75^\circ$ . В указанный момент  $t_0$  угол  $\psi$  на принятой орбите достигал своего минимально значения. Рассмотренные варианты выбора значений угла  $\psi$  относятся к двум крайним случаям, когда Солнце лежит почти в плоскости орбиты и когда оно находится в зените над ней.

На рис. 17 представлен график степени устойчивости решений краевой задачи (2'), (11), использованных для аппроксимации установившегося вращательного движения спутника при управлении (6), (9) (см. рис. 1 – 4 и 9, 10); участок переходного процесса здесь отсутствует. Степень устойчивости рассчитывалась по формуле

$$\sigma = -\frac{1}{T} \ln \rho,$$

где  $\rho$  – максимум модулей мультипликаторов системы уравнений в вариациях, для решения задачи (2'), (11). Степень устойчивости вычислена для каждого витка орбиты спутника, поэтому график ее зависимости от времени представляет собой кусочно-постоянную функцию – на витке степень устойчивости принята постоянной, в восходящих узлах орбиты она меняется скачком.

На рис. 18 аналогичным образом представлен график степени устойчивости решений краевой задачи (2'), (11), использованных для аппроксимации вращательного движения спутника при управлении (6), (10) (см. рис. 5 – 8 и 11, 12). Как видно из рисунков, все аппроксимирующие периодические решения асимптотически устойчивы, причем при управлении (6), (10) значения  $\sigma$  получились почти в два раза больше, чем при управлении (6), (9).

**6. Заключение.** 1. Показано, что приемлемый режим солнечной ориентации спутника можно обеспечить без изменения его гиросtatического момента. Если гиросtatический момент создается системой двигателей-маховиков, постоянство ее кинетического момента означает, что эта система сможет функционировать без насыщения по кинетическому моменту.

2. Предложен способ аппроксимации ориентированного движения спутника посредством набора периодических решений. Такая аппроксимация упро-

щает параметрическое исследование этого движения.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00143).

### Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
2. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975.
3. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем остаточных микроускорений электромеханическими исполнительными органами // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2008. № 91. 32 с.
4. Сазонов В.В., Троицкая А.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 5. С. 595-607.
5. Абрашкин В.И., Пузин Ю.А., Сазонов В.В. Электромагнитная система управления вращательным движением спутника, обеспечивающая малый уровень микроускорений на его борту // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 22. 36 с.
6. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 28. 32 с.

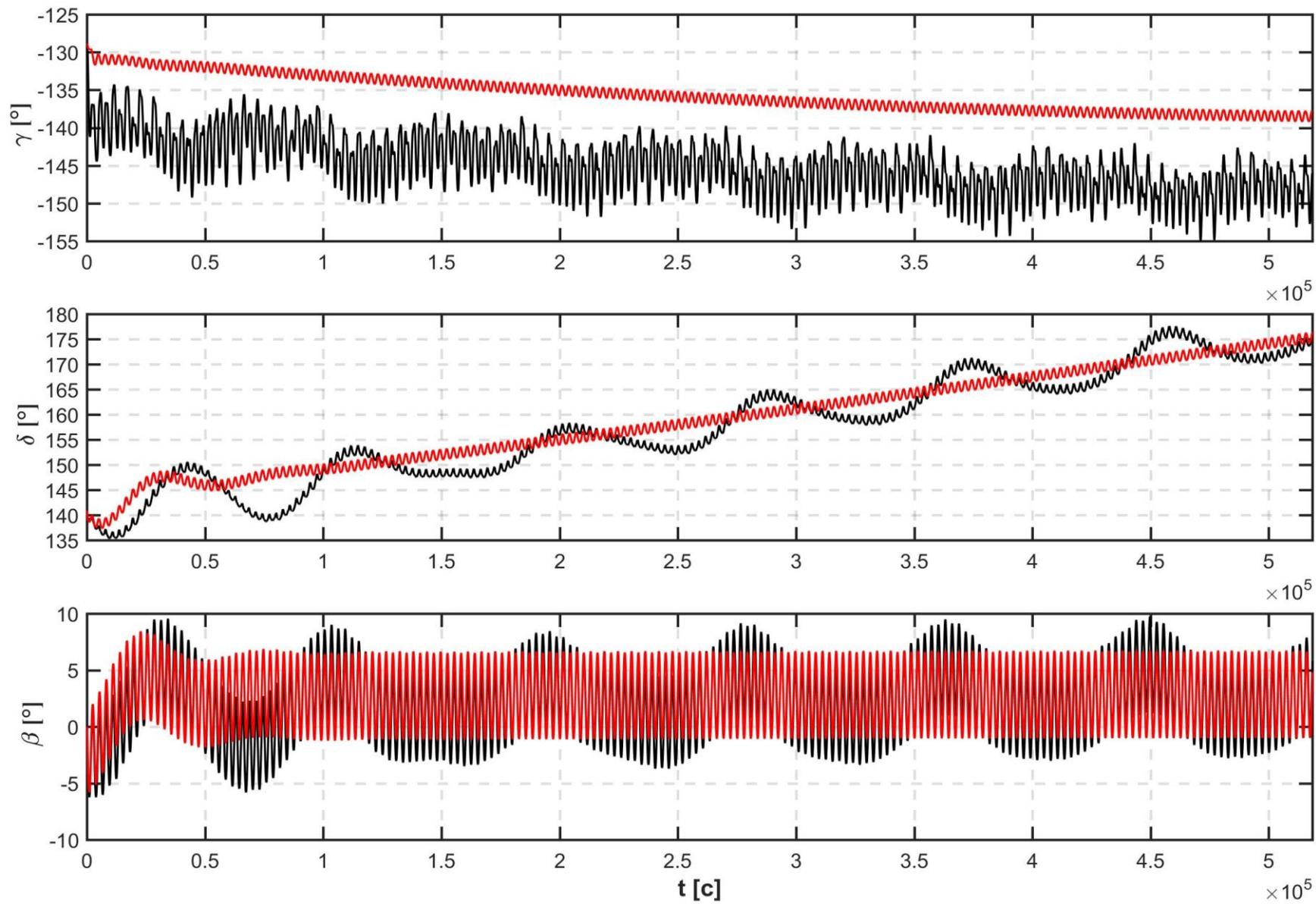


Рис. 1. Графики углов ориентации спутника относительно системы  $CZ_1Z_2Z_3$ :  
 черные линии – при управлении (6), (9), красные линии – при управлении (7), (9).

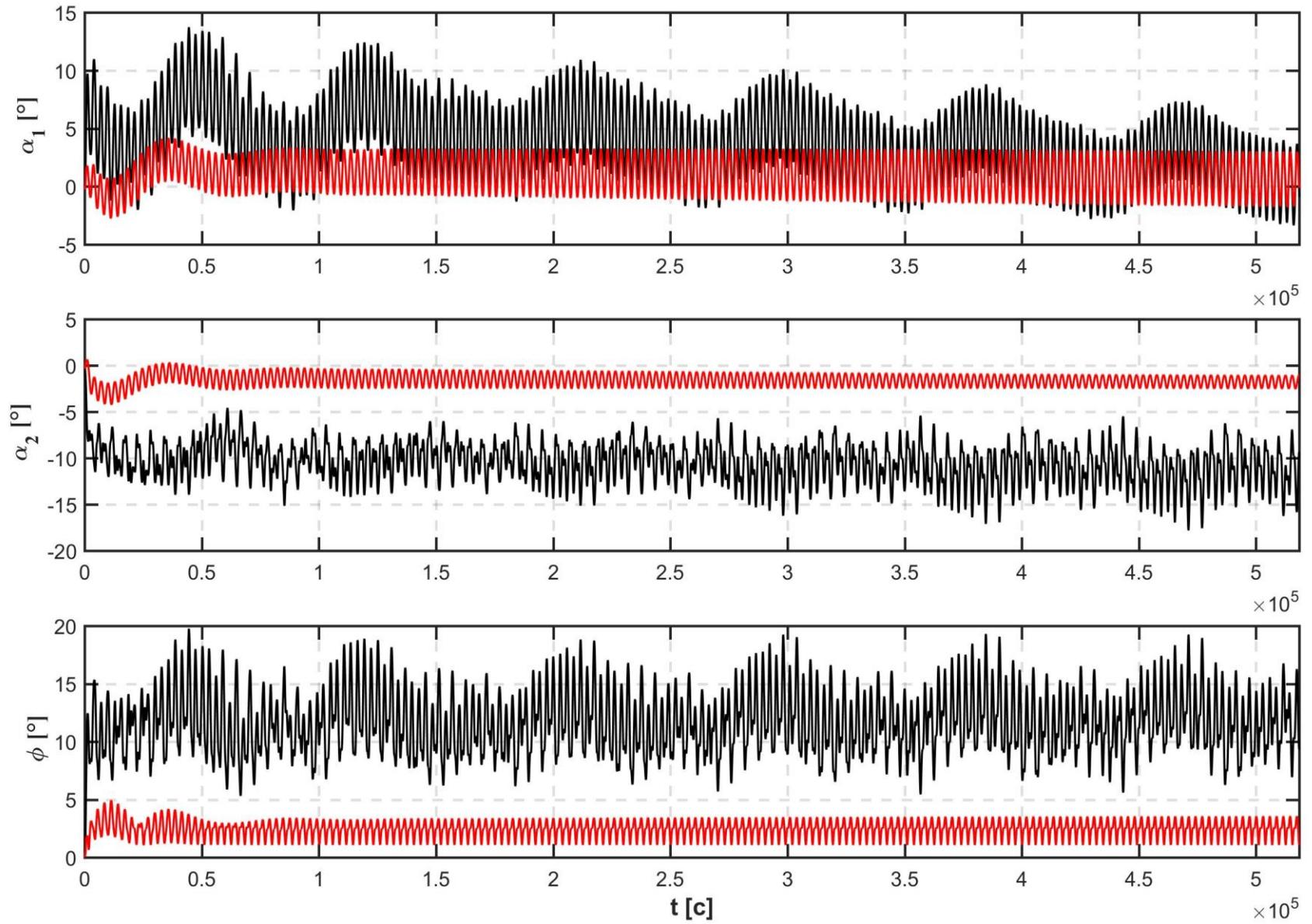


Рис. 2. Графики углов ориентации спутника относительно направления на Солнце: черные линии – при управлении (6), (9), красные линии – при управлении (7), (9).

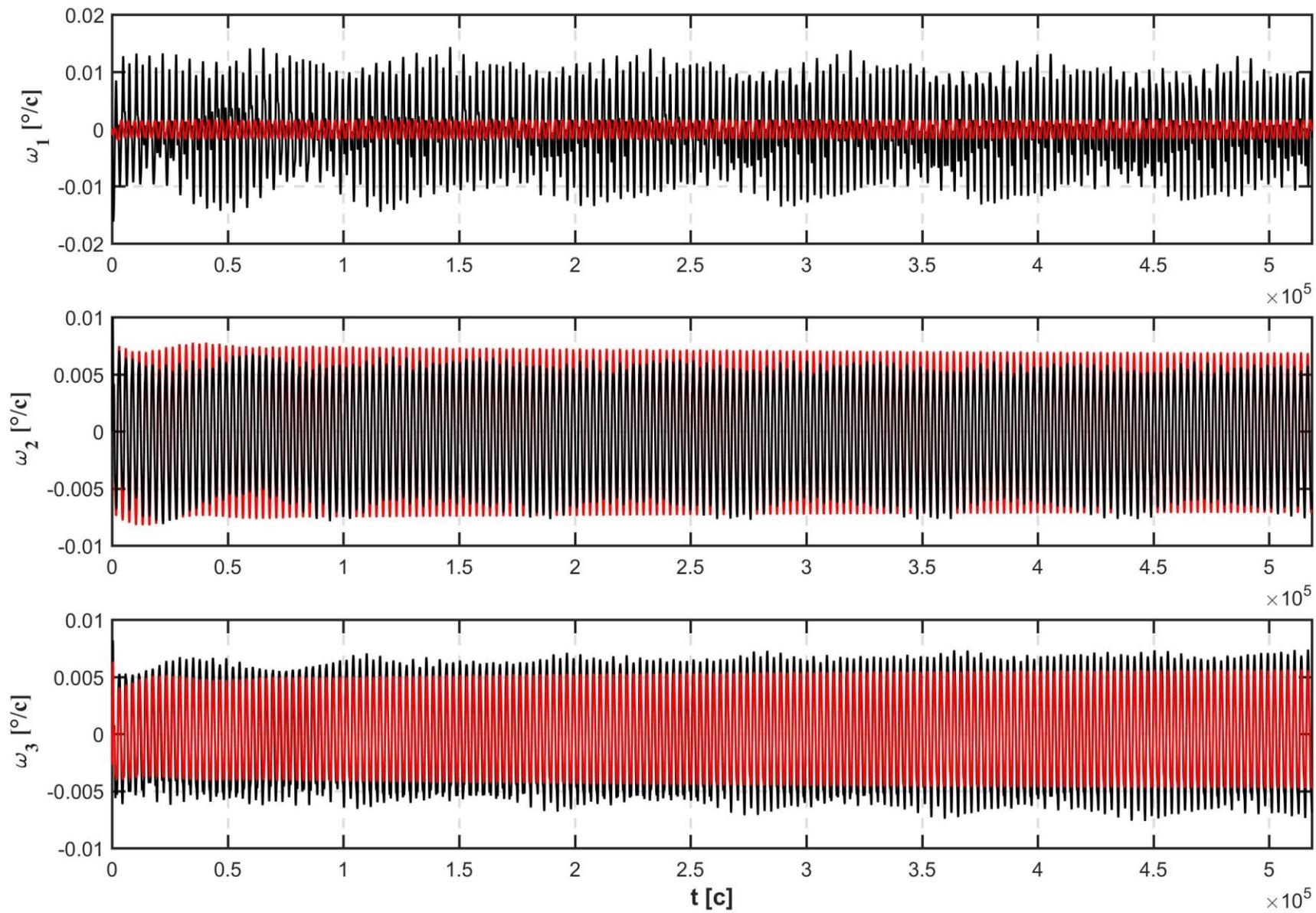


Рис. 3. Графики компонент угловой скорости спутника: черные линии – при управлении (6), (9), красные линии – при управлении (7), (9).

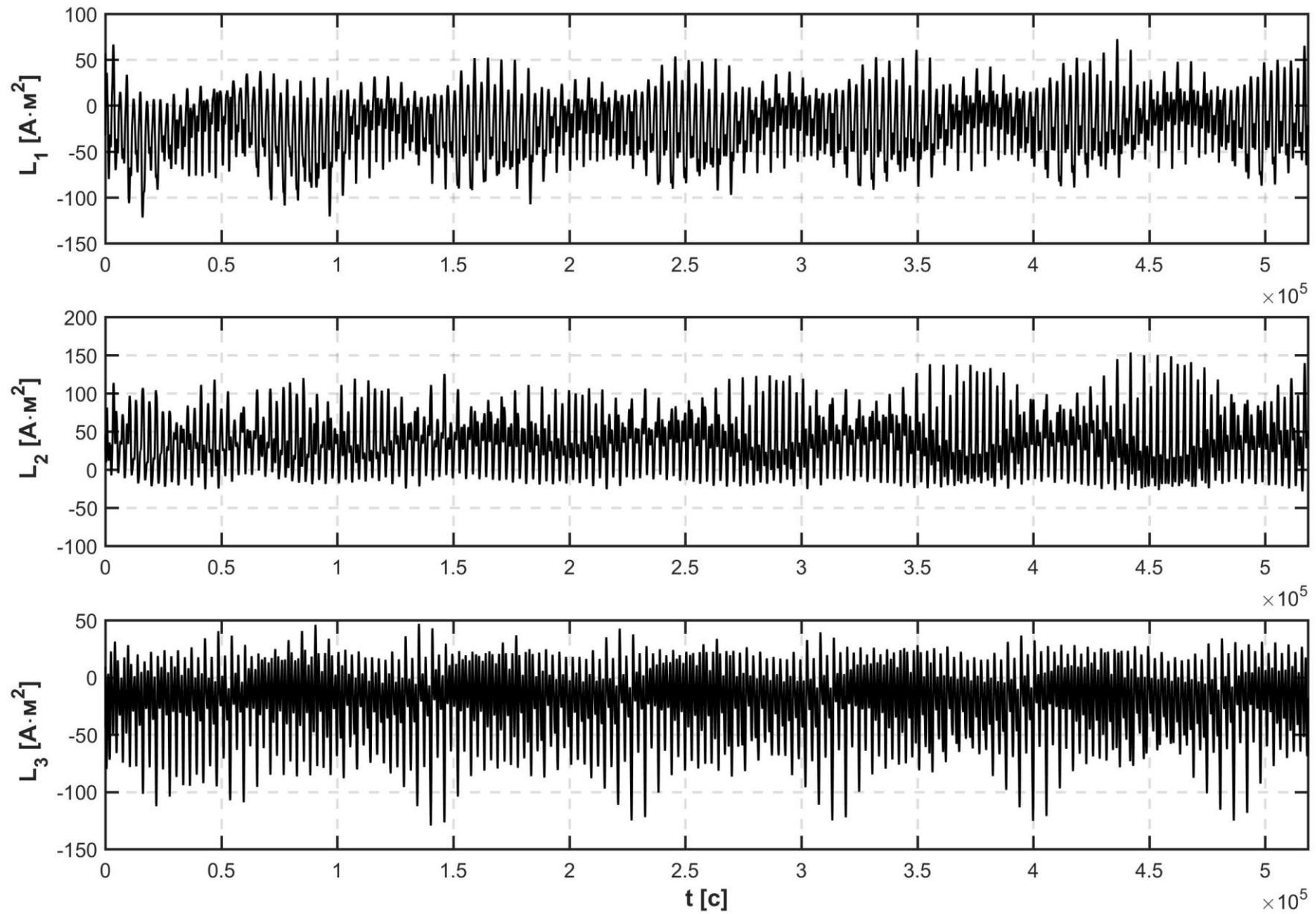


Рис. 4. Графики компонент магнитного момента системы электромагнитов при использовании управления (6), (9).

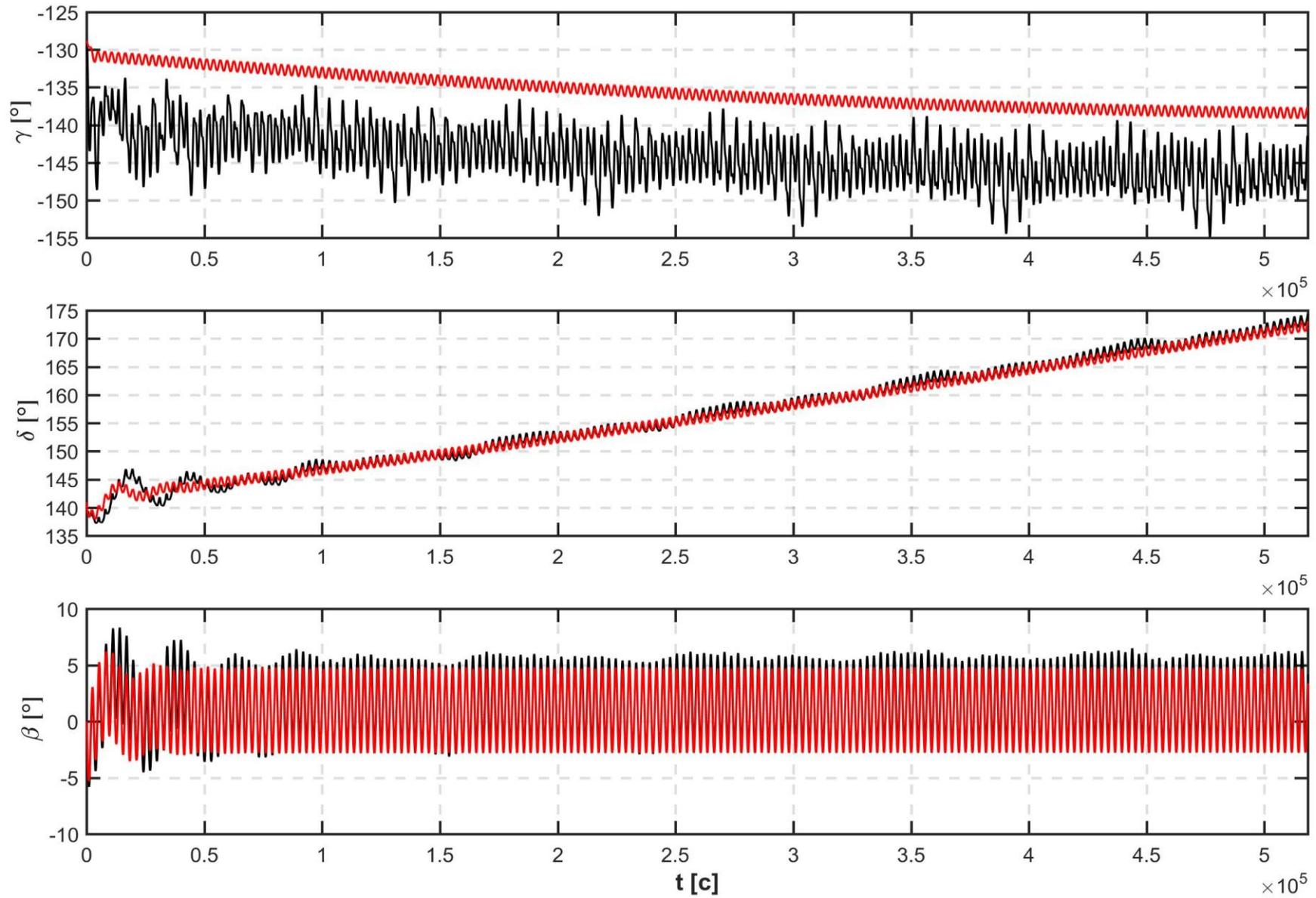


Рис. 5. Графики углов ориентации спутника относительно системы  $CZ_1Z_2Z_3$ :  
 черные линии – при управлении (6), (10), красные линии – при управлении (7), (10).

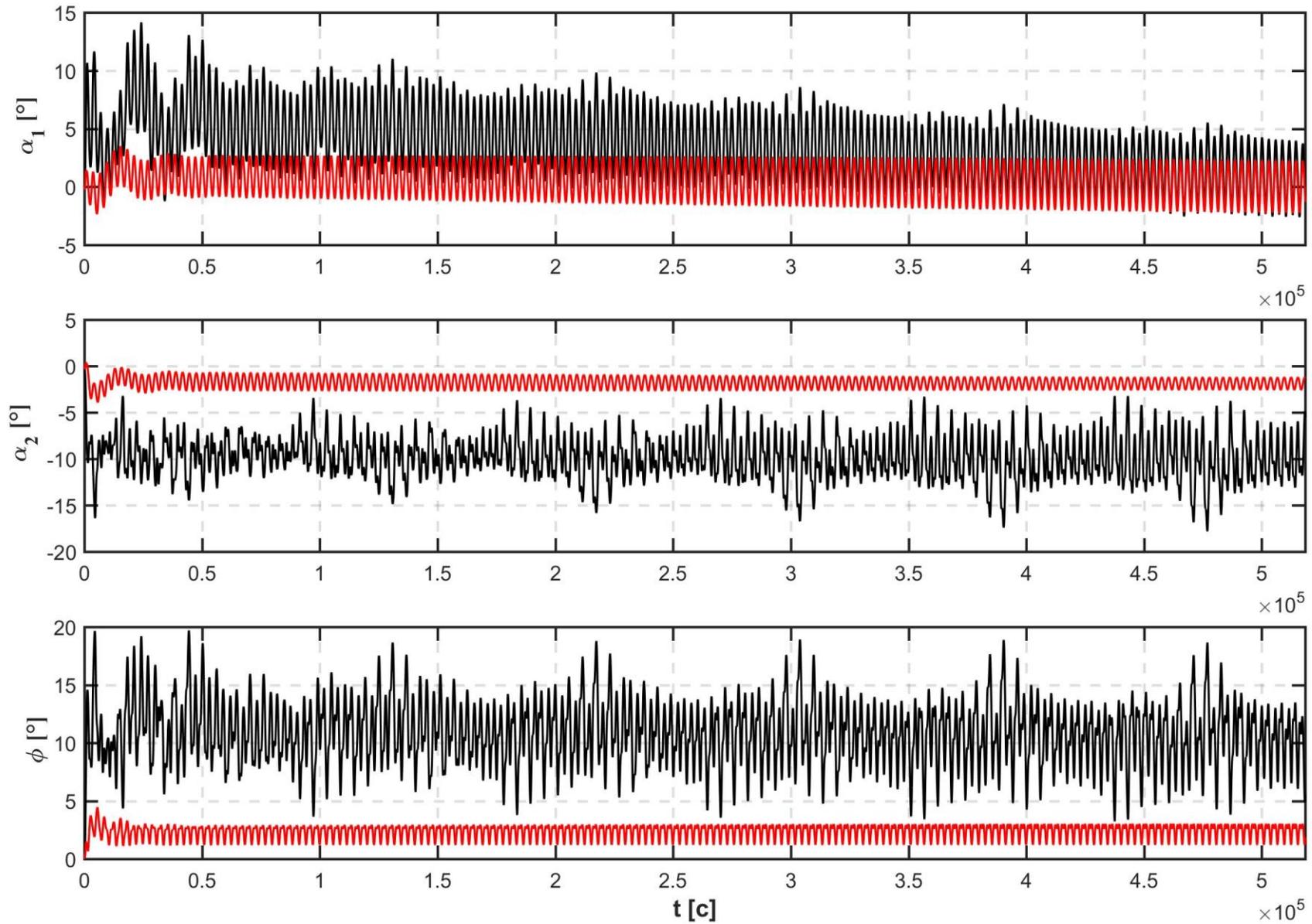


Рис. 6. Графики углов ориентации спутника относительно направления на Солнце: черные линии – при управлении (6), (10), красные линии – при управлении (7), (10).

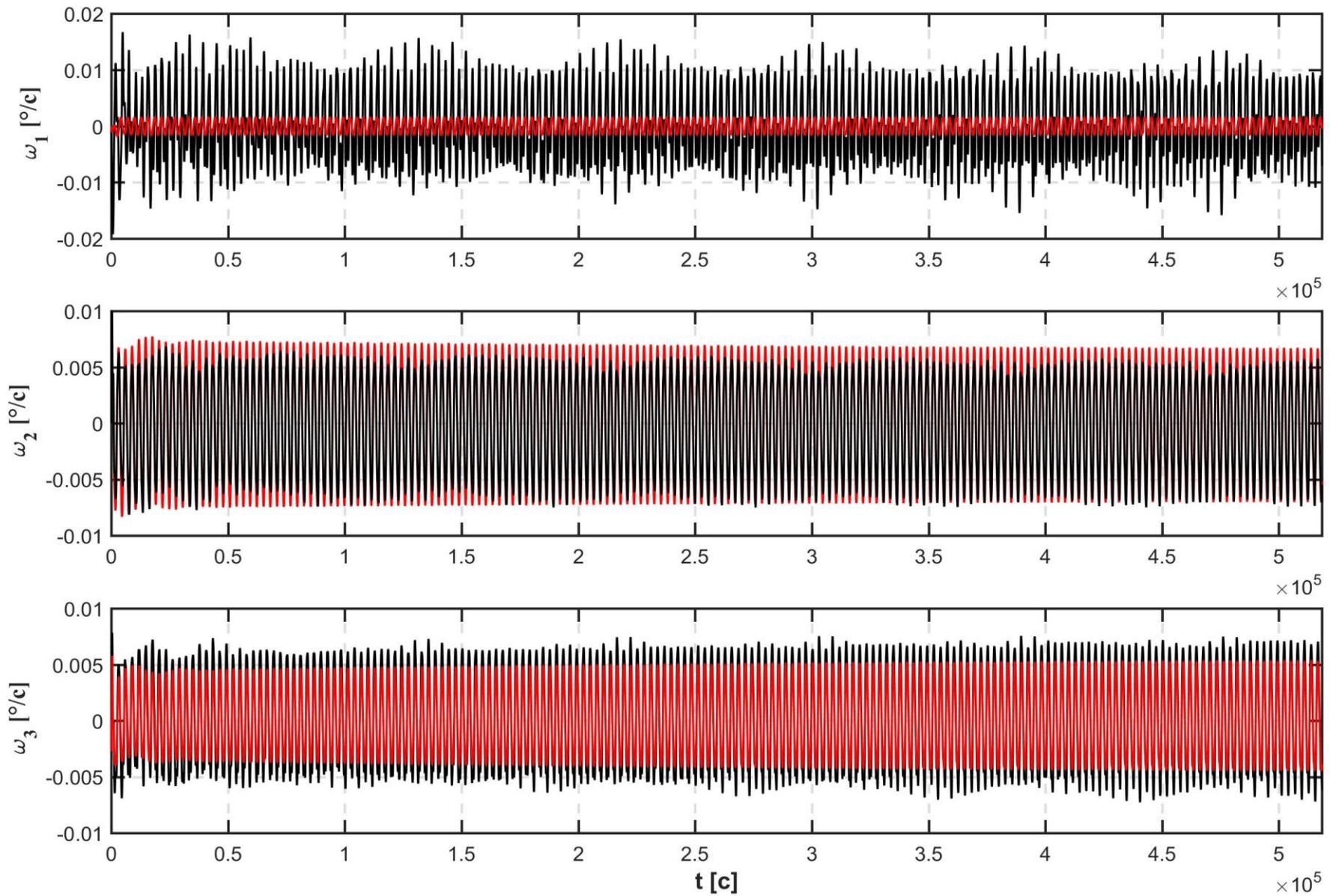


Рис. 7. Графики компонент угловой скорости спутника: черные линии – при управлении (6), (10), красные линии – при управлении (7), (10).

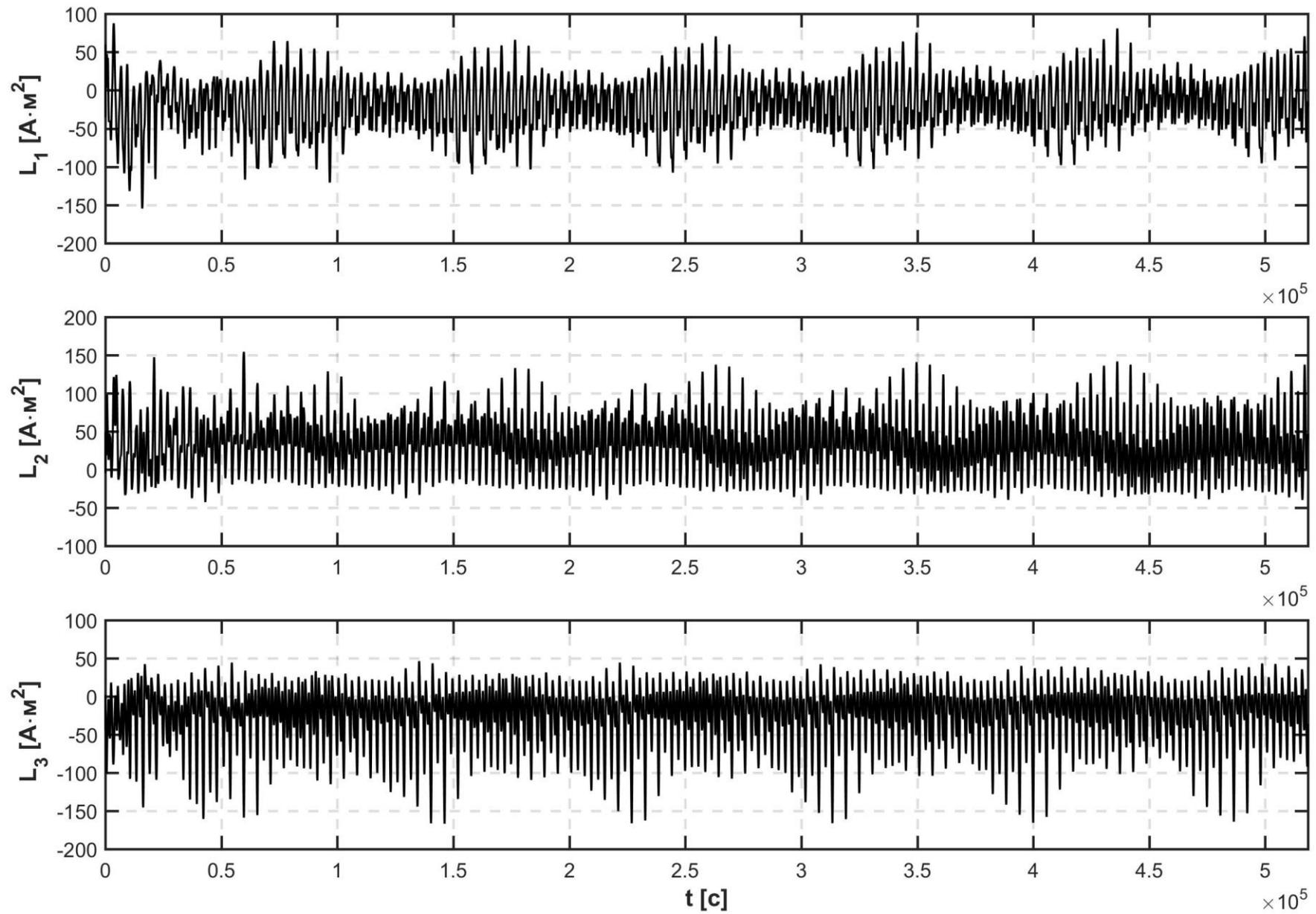


Рис. 8. Графики компонент магнитного момента системы электромагнитов при использовании управления (6), (10).

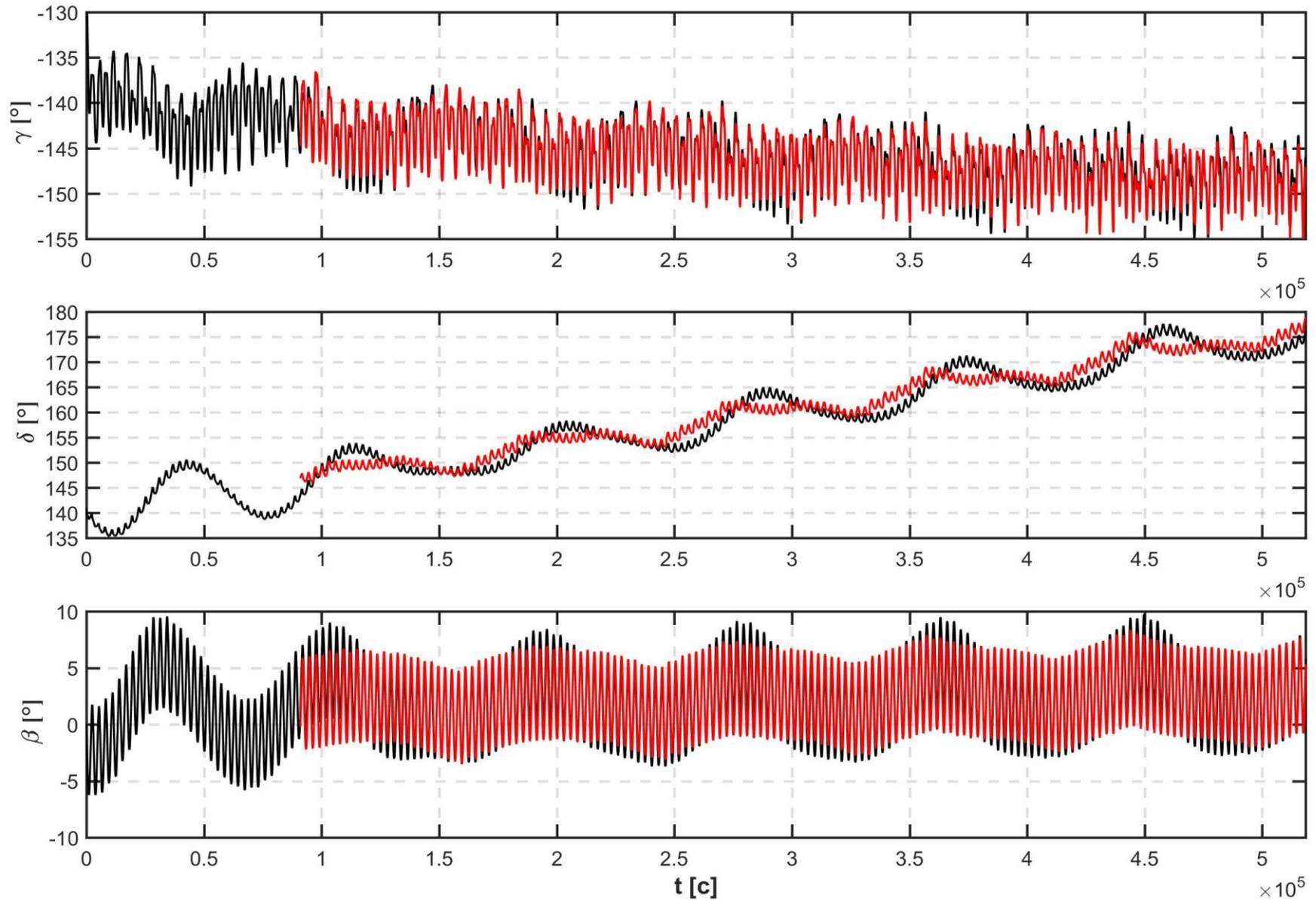


Рис. 9. Аппроксимация вращательного движения спутника при управлении (6), (9) набором периодических решений: черные линии – решение систем (2), красные линии – решения краевой задачи (2'), (11).

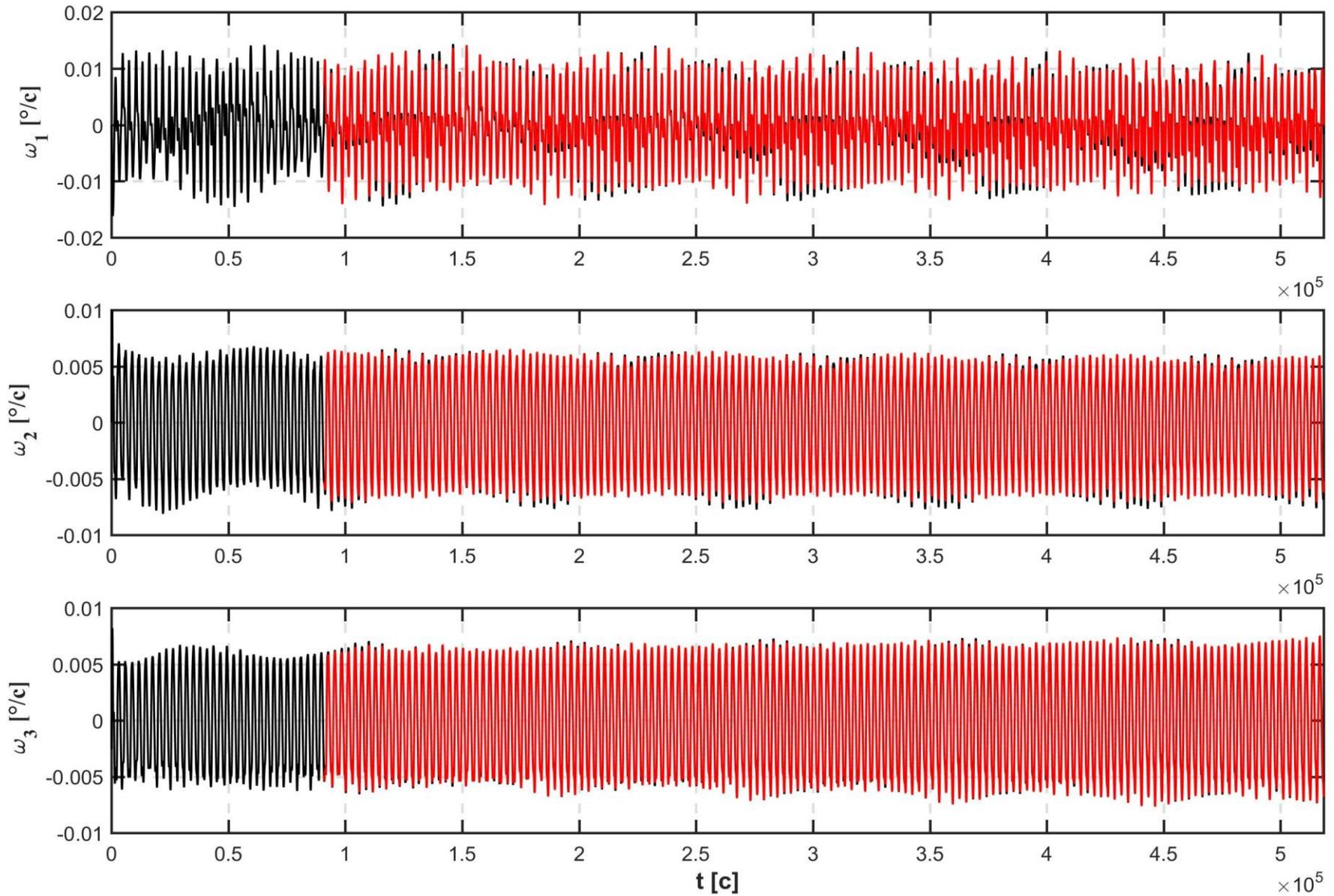


Рис. 10. Аппроксимация вращательного движения спутника при управлении (6), (9) набором периодических решений: черные линии – решение систем (2), красные линии – решения краевой задачи (2'), (11).

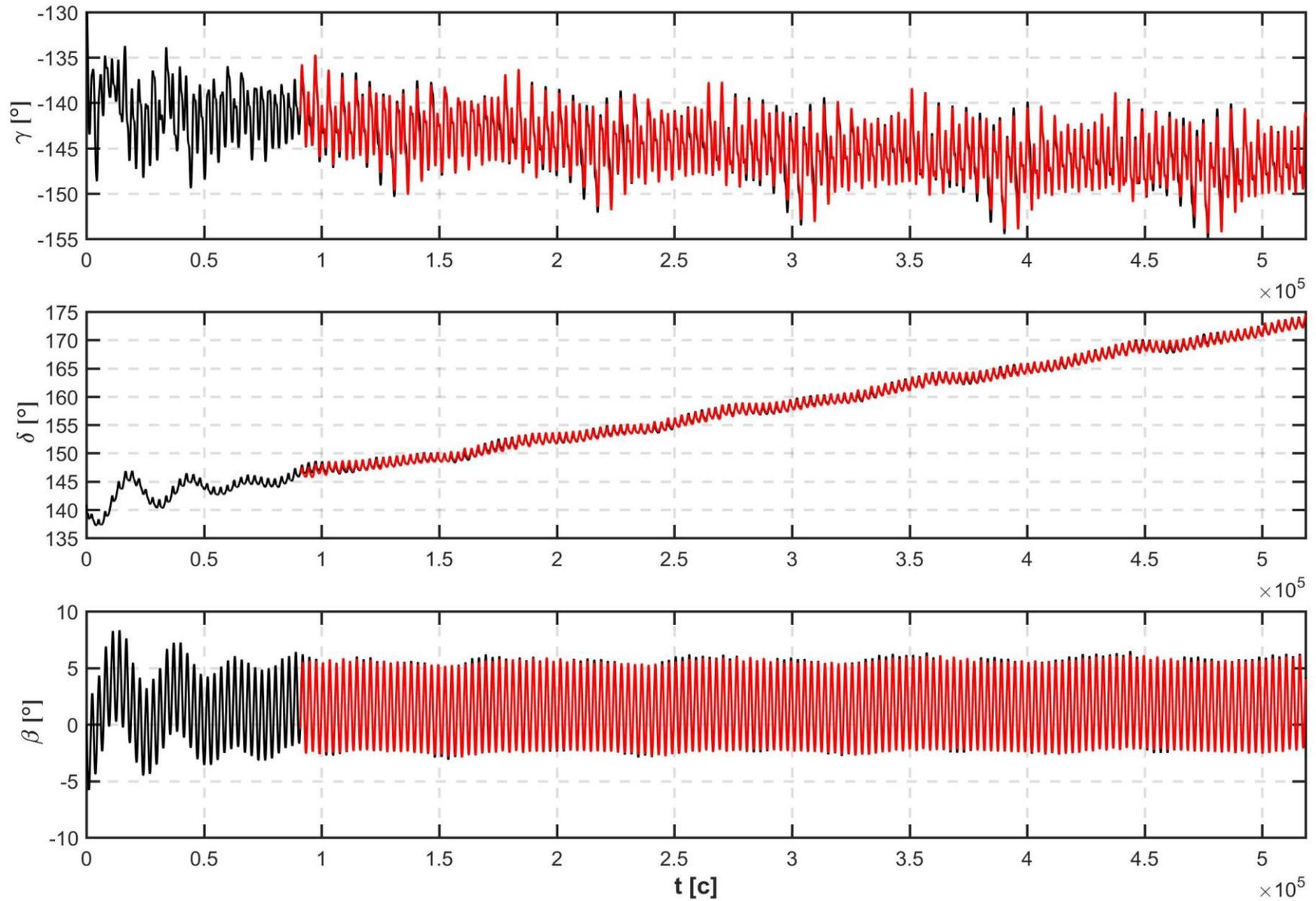


Рис. 11. Аппроксимация вращательного движения спутника при управлении (6), (10) набором периодических решений: черные линии – решение систем (2), красные линии – решения краевой задачи (2'), (11).

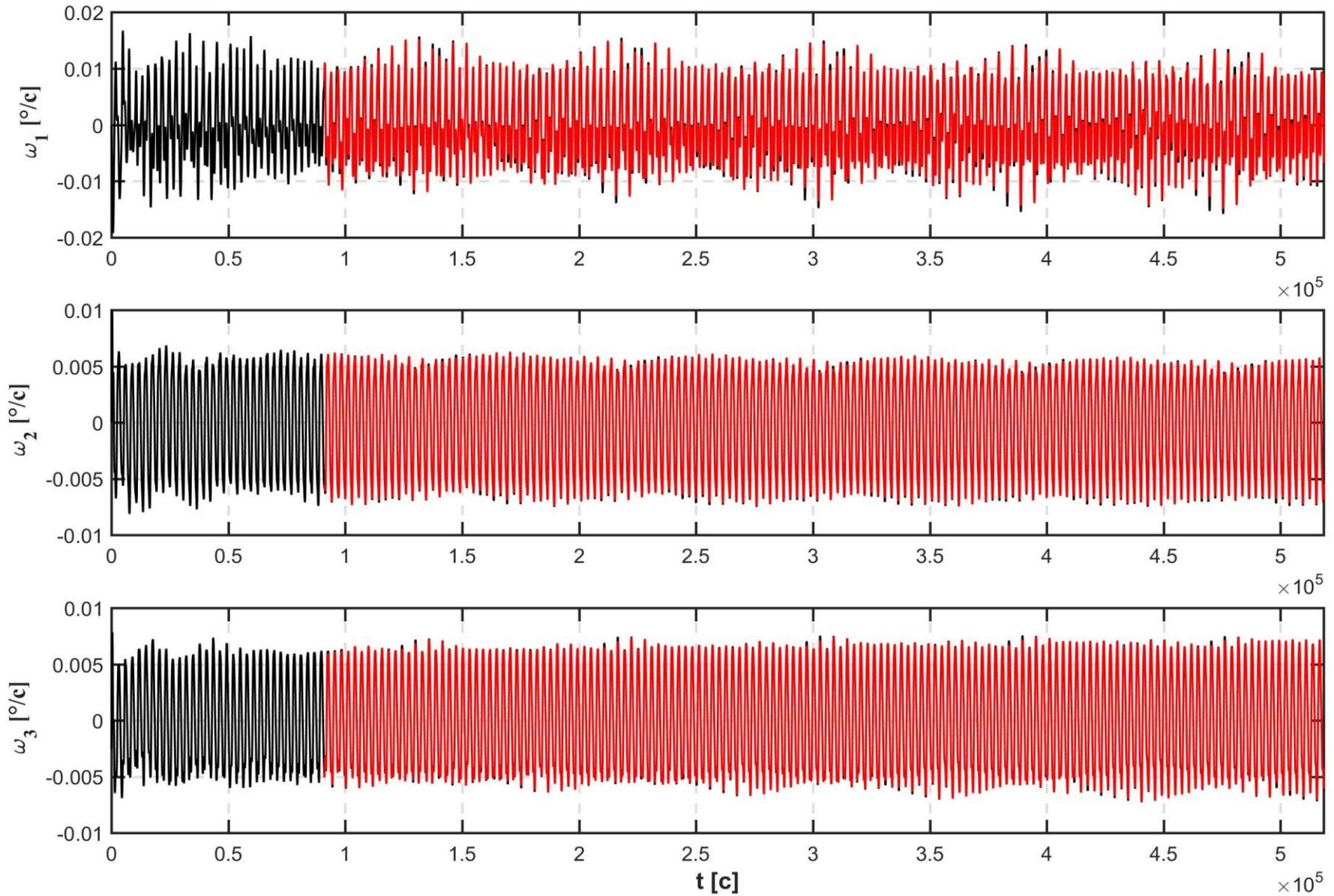


Рис. 12. Аппроксимация вращательного движения спутника при управлении (6), (10) набором периодических решений: черные линии – решение систем (2), красные линии – решения краевой задачи (2'), (11).

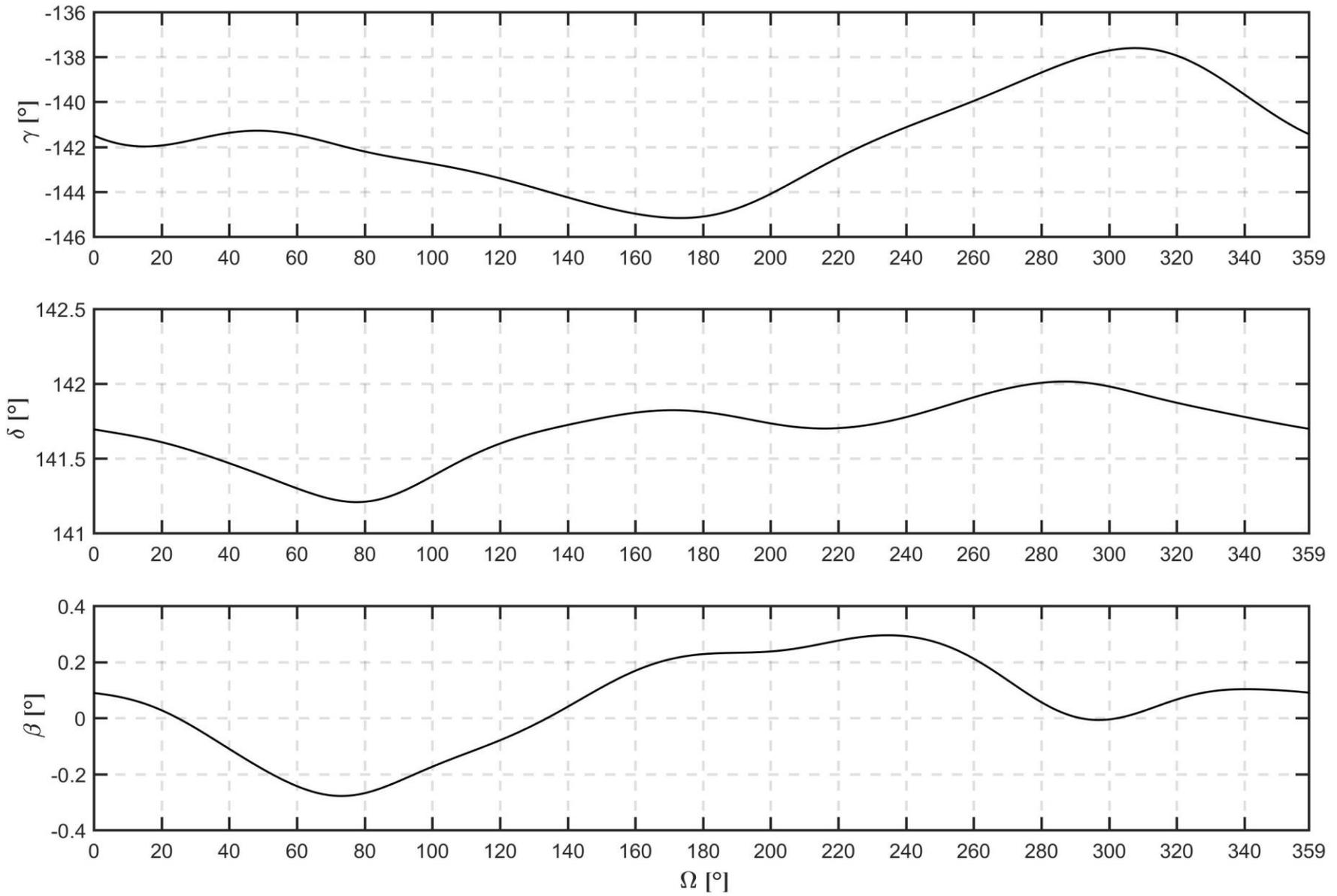


Рис. 13. Начальные условия решений краевой задачи (2'), (6), (10), (11) по углам  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  при  $\psi = 128.95^\circ$ .

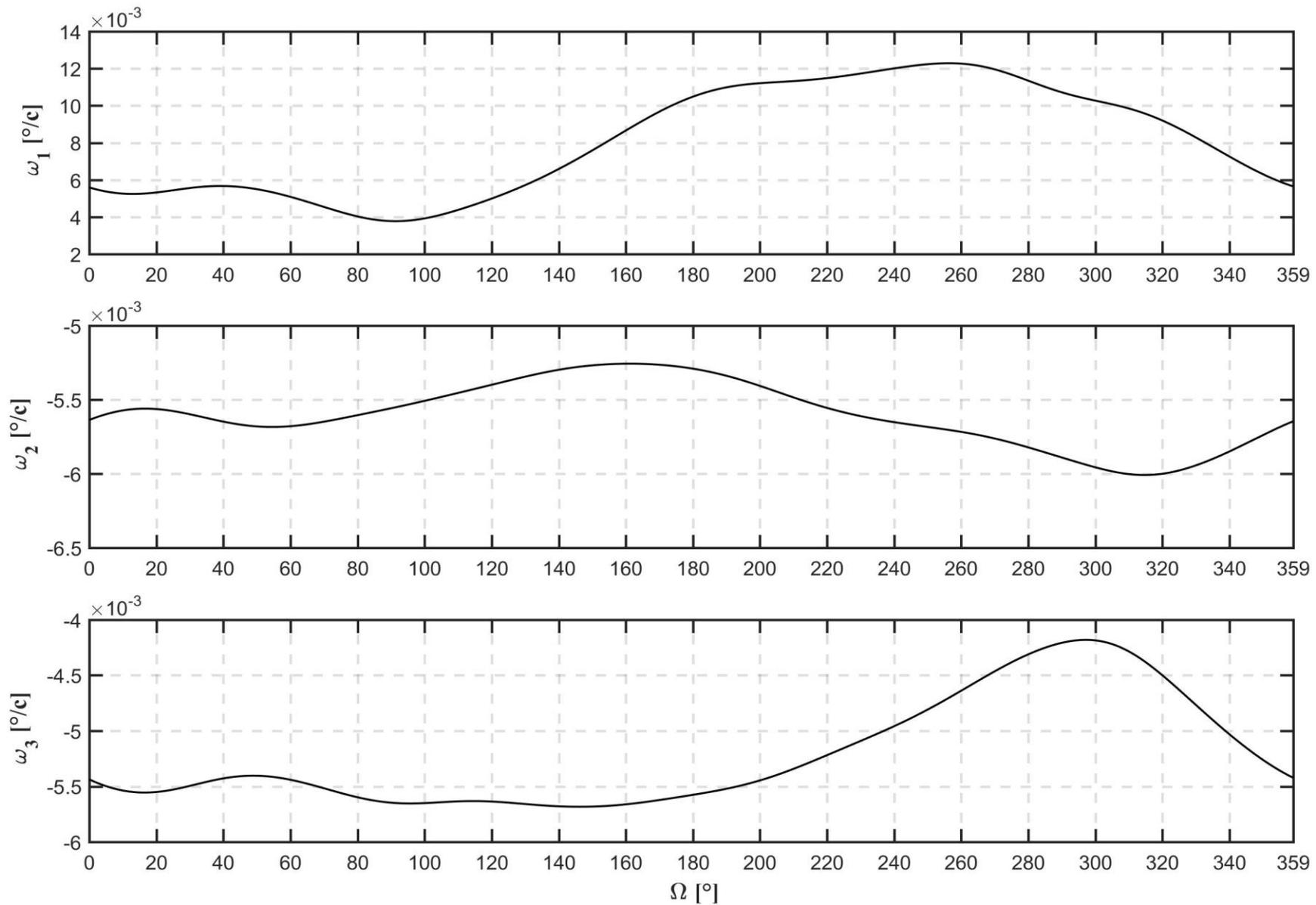


Рис. 14. Начальные условия решений краевой задачи (2'), (6), (10), (11) по компонентам угловой скорости при  $\psi = 128.95^\circ$ .

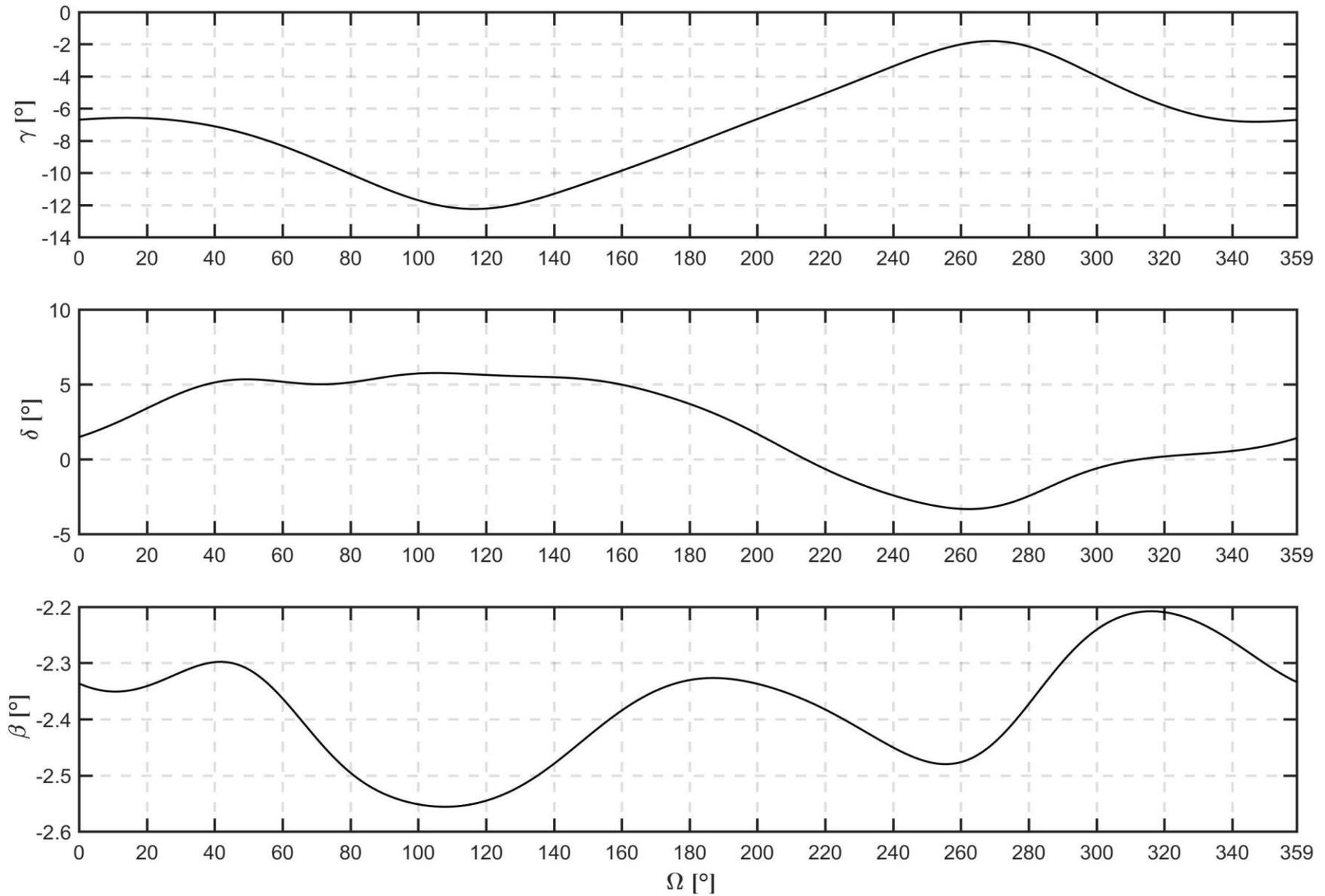


Рис. 15. Начальные условия решений краевой задачи (2'), (6), (10), (11) по углам  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  при  $\psi = 1.75^\circ$ .

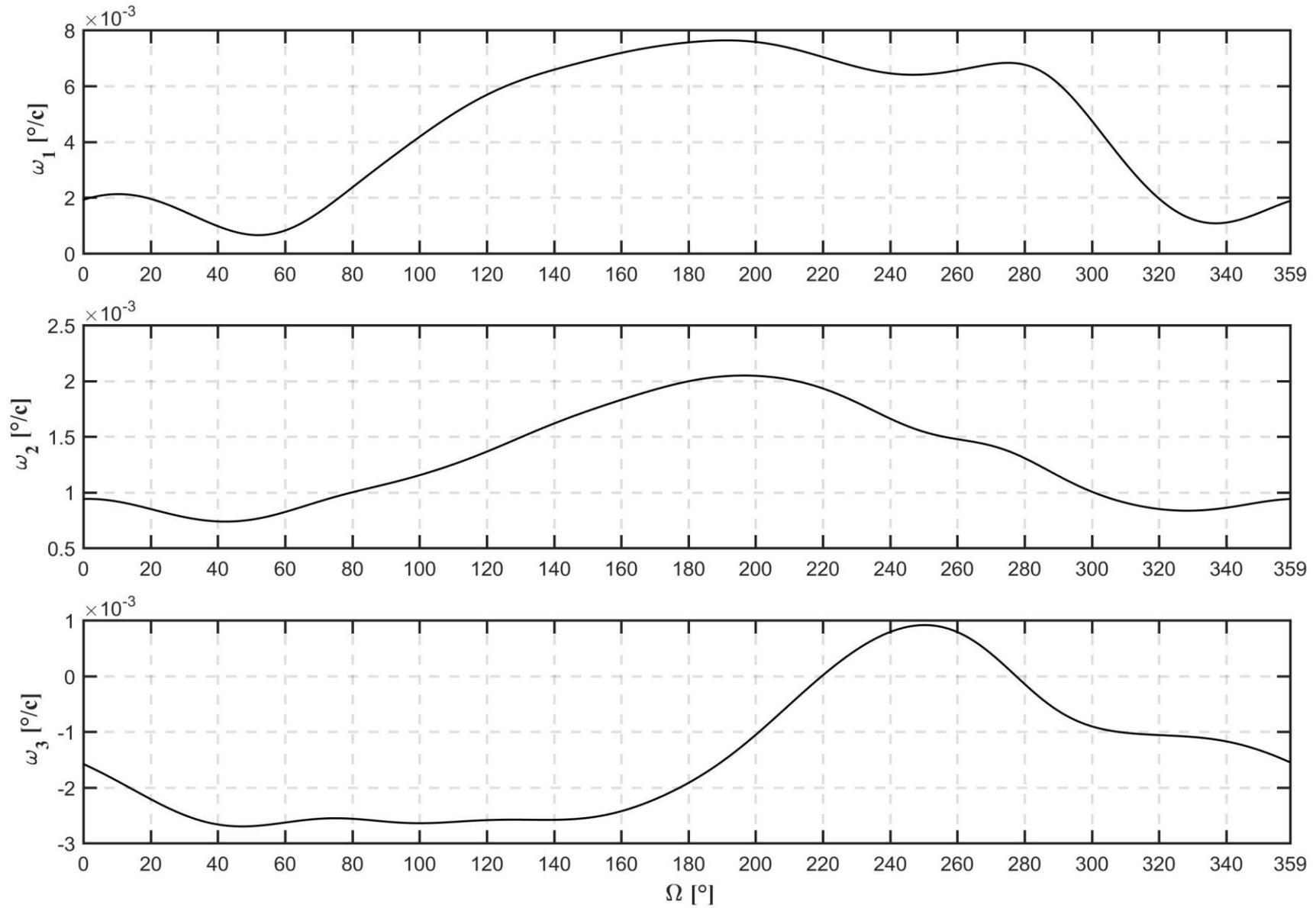


Рис. 16. Начальные условия решений краевой задачи (2'), (6), (10), (11) по компонентам угловой скорости при  $\psi = 1.75^\circ$ .

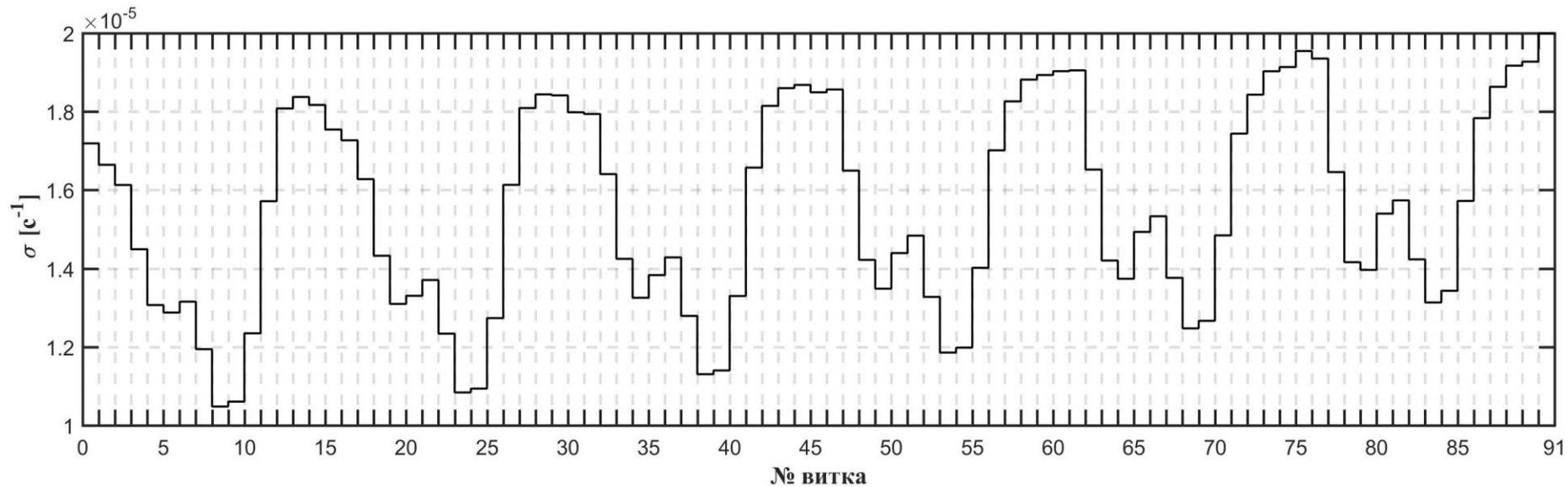


Рис. 17. Степень устойчивости решений краевой задачи (2'), (6), (9), (11).

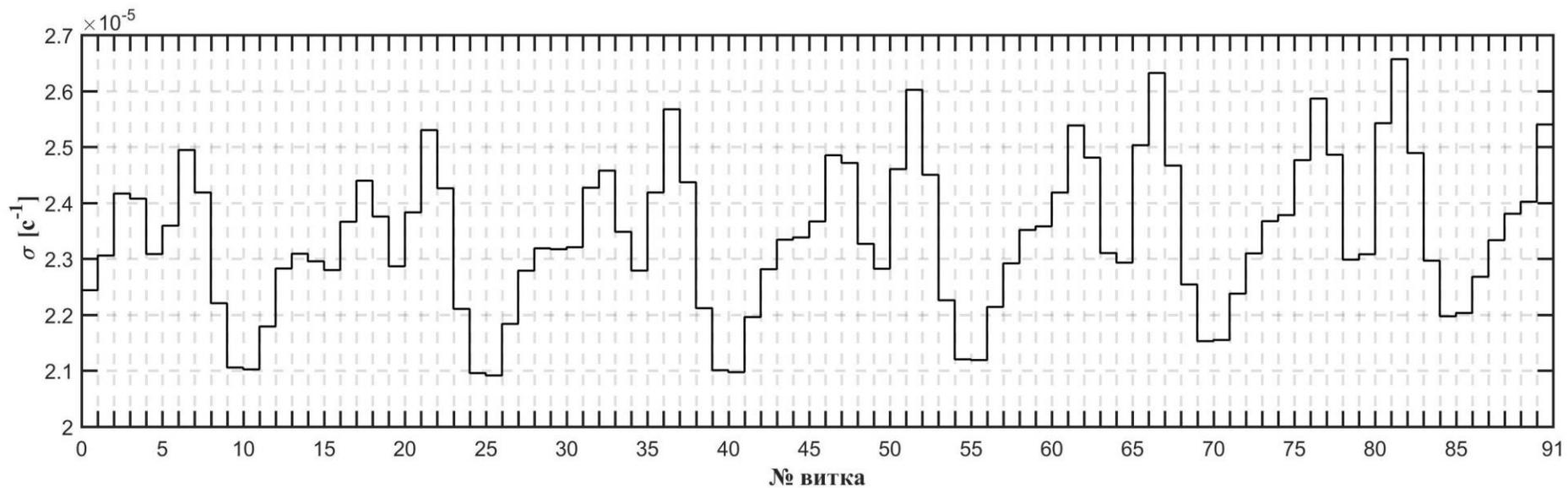


Рис. 18. Степень устойчивости решений краевой задачи (2'), (6), (10), (11).