[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru/) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru/)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints/default.asp) • [Препринт № 56 за 2017 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-56)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Волков Ю.А., **Воронин Ф.Н.**,
Иноземцева К.К., **Марков М.Б.**,
Сысенко А.В.

Модель электрических и термомеханических эффектов в пучке электронов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Модель электрических и термомеханических эффектов в пучке электронов / Ю.А.Волков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 56. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2017-56](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-56)
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-56

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Ю.А. Волков, Ф.Н. Воронин, К.К. Иноземцева,
М.Б. Марков, А.В. Сысенко

Модель электрических и термомеханических эффектов в пучке электронов

Москва — 2017

Волков Ю.А., Воронин Ф.Н., Иноземцева К.К., Марков М.Б., Сысенко А.В.

Модель электрических и термомеханических эффектов в пучке электронов

Разработана физико-математическая модель термомеханических эффектов, сопровождающих рассеяние электронов в преграде. Учитывается генерация объемного заряда и электромагнитного поля электронами пучка в преграде. Построены выражения для плотности силы Лоренца, действующей на ионизованное вещество, и для его джоулева нагрева в электромагнитном поле. Приведены оценки влияния электромагнитного поля на термомеханические процессы.

Ключевые слова: электрон, сила Лоренца, джоулев нагрев, термомеханика

The Model of Electrical and Thermomechanical Effects in the Electron Beam

Volkov Y.A., Voronin F.N., Inozemtseva K.K., Markov M.B., Sysenko A.V.

The physical and mathematical model of thermomechanical effects which accompanies electron scattering in barrier is carried out. Model has taken into account bulk charge and electromagnetic field generation by beam’s electrons in barrier. The expressions for Lorentz force density, acting on ionized substance, and its Joule heating in the electromagnetic field are constructed. The estimations of electromagnetic field influence on thermomechanical processes are represented.

Key words: electron, Lorentz force, Joule heating, thermomechanics

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 17-01-00301-а, 15-01-03027-а.

Оглавление

Введение 3
1 Постановка задачи 5
2 Предварительные оценки 15
Заключение 16
Библиографический список 17

Введение

Исследование взаимодействия ионизирующего излучения с веществом является актуальной задачей как фундаментальной, так и прикладной науки [1]. Результаты исследований применяются для определения свойств материалов, в том числе перспективных, исследования поведения вещества в экстремальных условиях, создания радиационной защиты [2] и т.д.

Важным приложением данных исследований является обеспечение стойкости спутников к ионизирующим излучениям космического пространства. Электроны и протоны радиационных поясов, галактические и солнечные лучи являются причиной разрушений защитных покрытий спутников, электрических наводок в радиоэлектронном оборудовании, сбоев микроэлектроники [3] и т.д.

Наиболее распространенными источниками ионизирующего излучения высокой интенсивности и проникающей способности являются сильноточные электронные пучки [4]. В частности, они применяются для создания объемного энерговыделения в преградах [1,5]. Потоки релятивистских электронов используются также для генерации и последующего исследования тормозного рентгеновского излучения высокой проникающей способности [6].

Взаимодействие электронного пучка с твердотельной преградой сопровождается радиационными, электромагнитными и термомеханическими эффектами. Они являются результатом переноса и рассеяния электронов.

Основными столкновительными эффектами, посредством которых пучок взаимодействует с преградой, являются упругое рассеяние, тормозное излучение, ударная ионизация и возбуждение [7-10]. Самым эффективным каналом передачи энергии от электронов к веществу является ударная ионизация, при которой в непрерывный спектр, помимо падающего первичного электрона, попадает атомарный вторичный электрон. Дифференциальное сечение ударной ионизации обратно пропорционально переданной энергии, поэтому наиболее вероятны столкновения с малой передачей импульса [11-23]. В результате в рассеивающей среде образуется большое количество медленных вторичных электронов так называемого ионизационного спектра. Медленные электроны деградируют к равновесному распределению с передачей энергии частицам рассеивающей среды [24]. Возникает радиационная электропроводность – основной радиационный эффект объемной ионизации. В полупроводниковых приборах он определяет все основные каналы радиационного воздействия [26].

Рассеяние вторичных электронов приводит к возбуждению колебаний кристаллической решетки, в результате чего температура преграды в области интенсивного электронного рассеяния повышается [27-29]. Это приводит к соответствующему увеличению давления. Пусть размер преграды превосходит длину, на которой электрон теряет начальную кинетическую энергию, или сопоставим с ней. Тогда в преграде возникает градиент давления, развивается механический импульс давления [30]. Испарение поверхностного слоя сопровождается развитием ударной волны. Распространение волн в веществе определяет распределение механических нагрузок. Неоднородные тепловые и механические поля, образующиеся как следствие рассеяния электронов, являются источниками термомеханических эффектов, например, деформации, плавления, испарения преграды [31]. Следует отметить, что энергия от электронов к преграде передается за счет всех столкновительных процессов. Их сечения резко возрастают на низких значениях энергии, поэтому именно ударная ионизация, трансформирующая пучковый электрон с высокой энергией в множество медленных вторичных электронов, является наиболее эффективным каналом энерговыделения.

Движение электронов создает плотность тока. Следствием является генерация электромагнитного поля. В преграде плотность тока неоднородна, поэтому возникает объемное распределение плотности заряда [32,33]. Нестационарное электромагнитное поле, являющееся следствием переноса электронов, и распределение плотности заряда вызывают электромагнитные эффекты: электрический ток проводимости в объеме преграды, электрический пробой и т.д.

Следует отдельно рассмотреть такой столкновительный эффект, как тормозное рассеяние [9,10]. Большинство существующих сильноточных ускорителей генерируют электроны с энергией до 10 МэВ [3]. Следствием торможения таких электронов в поле ядра атома рассеивающего вещества является излучение фотонов с энергией порядка 2 МэВ. Длина пробега фотона почти на два порядка превосходит пробег породившего его электрона. В результате радиация проникает на большую глубину, под ее воздействием оказывается существенно бóльший объем вещества преграды, чем определенный пробегом электронов. Фотоны тормозного излучения испытывают комптоновское рассеяние, фотопоглощение, образуют электрон-позитронные пары [34-37]. В результате тормозные фотоны превращаются обратно в поток заряженных частиц, взаимодействие которых с преградой рассмотрено выше.

Радиационные, электромагнитные и термомеханические поля влияют друг на друга. Перераспределение плотности при разрядке механических напряжений меняет рассеивающие свойства вещества. Ионизация под действием радиационного нагрева увеличивает электропроводность материаловв, которая снижает электрическое поле. Некомпенсированный объемный заряд и электрическое поле создают пондеромоторную силу, вызывающую, наряду с градиентом давления, движение вещества. Джоулев нагрев проводящего вещества в электрическом поле приводит к дополнительному энерговыделению.

Математическое моделирование является эффективным средством исследования взаимодействия излучения с веществом. С одной стороны, эффективность определяется возможностью решать классические уравнения математической физики на современных суперкомпьютерах. С другой стороны, экспериментальные исследования при некоторых наборах параметров воздействующего излучения и преград не реализуемы.

Сотрудниками ИПМ им. М.В. Келдыша РАН разработан комплекс программ РЭМП (Радиационное и ЭлектроМагнитное Поле) для исследования эффектов, сопровождающих взаимодействие заряженных частиц и фотонов со сложными техническими объектами. Комплекс включает вычислительные модули и пользовательский интерфейс, связанные единым протоколом обмена данными. Рассеяние свободных частиц падающего излучения в материалах преграды моделируется классическим уравнением переноса в квазистационарном приближении. Оно решается методом Монте-Карло. Используется прямое моделирование столкновений заряженных частиц. Это позволяет рассматривать эффекты на масштабах менее длины пробега электрона, учитывая микроструктурные элементы конструкций. Распространение излучения в газовых средах и в вакууме описывается классическими кинетическими уравнениями, учитывающими как рассеяние, так и влияние на движение заряженных частиц внешнего и самосогласованного электромагнитного поля, которое моделируется уравнениями Максвелла. Вычислительные модули объединены в программный скрипт с газодинамическим кодом MARPLE-3D, что позволяет учитывать динамику материалов под действием излучения. Радиационная проводимость активных зон полупроводниковых приборов моделируется квантовыми кинетическими уравнениями для электронов проводимости и дырок валентной зоны. Их источник определяется энерговыделением свободных частиц. Интеграл столкновений в квантовых уравнениях описывает их рассеяние на фононах и примесях. Численное решение как квантовых, так и классических уравнений осуществляется статистическим методом частиц, сочетающим стохастическое моделирование рассеяния носителей заряда с решением уравнений их движения в электромагнитном поле между столкновениями [38-39].

Комплекс программ ориентирован на суперкомпьютер с гетерогенной архитектурой, эксплуатируется на гетерогенном вычислительном кластере ГВК К-100 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Может функционировать как единое приложение, так и в режиме запуска отдельных модулей. В первом случае наблюдается дисбаланс требуемых вычислительных ресурсов: максимальное расчетное время требуется модулю, реализующему метод Монте-Карло. Дисбаланс эффективно устраняется решением уравнения переноса на графических ускорителях.

Данная работа посвящена развитию скрипта, объединяющего вычислительные модули программных комплексов РЭМП и MARPLE3D, в направлении моделирования термомеханического и электромагнитного полей радиационного происхождения в условиях их взаимного влияния.

1 Постановка задачи

Кинетическое уравнение, описывающее перенос и рассеяние быстрых электронов в твердотельной преграде, имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_e}{\partial t}+\operatorname{div}(\boldsymbol{\upsilon} f_e)+e\operatorname{div}_p\left[\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{H}]\right)f_e\right]+\sigma_e^t\upsilon f_e=c\int d\mathbf{p}'\sigma_{ph-e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')f_{ph}(\mathbf{p}')+\\+\int d\mathbf{p}'\sigma_{e\text{-}e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\upsilon' f_e(\mathbf{p}')+\int d\mathbf{p}'\sigma_{p-e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\upsilon' f_p(\mathbf{p}')+Q_e,\end{gathered}\tag{1}$$

где $f_e = f_e(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$, $f_p = f_p(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$, $f_{ph} = f_{ph}(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ – функции распределения электронов, позитронов и фотонов, соответственно, в фазовом пространстве координат $\mathbf{r}$ и импульсов $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\upsilon}$ – вектор скорости, c – скорость света, e – заряд электрона, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t,\mathbf{r})$ – векторы напряженности электрического и магнитного поля, $\mathbf{p'}$ – импульс частицы до столкновения, div_p – оператор дивергенции в импульсном пространстве, σ_e^t – полное сечение поглощения электронов, σ_{ph-e}, σ_{e-e}, σ_{p-e} – дифференциальные сечения рассеяния фотонов, электронов и позитронов с образованием электронов, $Q_e = Q_e(t,\mathbf{r},\mathbf{p})$ – источник электронов.

Кинетические уравнения для позитронов и фотонов, образующихся в результате каскадных процессов, имеют вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_p}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\upsilon} f_p) - e\,\mathrm{div}_p\left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{H}]\right) f_p\right] + \sigma_p^t \upsilon f_p = \\ &= c\int d\mathbf{p'}\,\sigma_{ph-p}(\mathbf{p},\mathbf{p'}) f_{ph}(\mathbf{p'}) + \int d\mathbf{p'}\,\sigma_{p-p}(\mathbf{p},\mathbf{p'})\upsilon' f_p(\mathbf{p'}),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_{ph}}{\partial t} + c\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\Omega} f_e) + c\sigma_{ph}^t f_e = c\int d\mathbf{p'}\,\sigma_{ph-ph}(\mathbf{p},\mathbf{p'}) f_{ph}(\mathbf{p'}) + \\ &+\int d\mathbf{p'}\,\sigma_{e\text{-}ph}(\mathbf{p},\mathbf{p'})\upsilon' f_e(\mathbf{p'}) + \int d\mathbf{p'}\,\sigma_{p-ph}(\mathbf{p},\mathbf{p'})\upsilon' f_p(\mathbf{p'}),\end{aligned} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – единичный вектор направления скорости фотона; σ_{ph}^t – полное сечение поглощения фотонов; σ_p^t – полное сечение поглощения позитронов; σ_{ph-p}, σ_{e-p}, σ_{p-p} – дифференциальные сечения рассеяния фотонов, электронов и позитронов с образованием позитронов; σ_{ph-ph}, σ_{e-ph}, σ_{p-ph} – дифференциальные сечения рассеяния фотонов, электронов и позитронов с образованием фотонов.

Уравнения (1), (2), (3) рассматриваются в пространстве финитных обобщенных функций [40-42]. Методы решения рассмотрены в работах [38, 42-47]. Вычислительные модули, реализующие численное решение уравнений в общем и в нескольких частных случаях [38], включены в состав комплекса РЭМП.

Рассмотрим следующие математические конструкции:

$$Q_\varepsilon^e(t,\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{p}\int d\mathbf{r}'\varepsilon W\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\Delta\right)\left[\sigma_e^t \upsilon f_e(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}) - \int d\mathbf{p'}\,\sigma_e(\mathbf{p},\mathbf{p'})\upsilon' f_e(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}')\right], \tag{4}$$

$$Q_\varepsilon^p(t,\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{p}\int d\mathbf{r}'\varepsilon W\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\Delta\right)\left[\sigma_p^t \upsilon f_p(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}) - \int d\mathbf{p'}\,\sigma_p(\mathbf{p},\mathbf{p'})\upsilon' f_p(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}')\right], \tag{5}$$

$$Q_\varepsilon^{ph}(t,\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{p}\int d\mathbf{r}'\varepsilon W\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,\Delta\right)\left[\sigma_{ph}^t \upsilon f_{ph}(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}) - \int d\mathbf{p'}\,\sigma_{ph}(\mathbf{p},\mathbf{p'})\upsilon' f_{ph}(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}')\right], \tag{6}$$

где бесконечно дифференцируемая функция $W\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,\Delta\right)$, $\mathbf{r}'\in\mathbb{R}_{\mathbf{r}}^{3}$, $\Delta>0$ удовлетворяет условиям $\int_{\mathbb{R}_{\mathbf{r}}^{3}}W\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,\Delta\right)d\mathbf{r}'=1$, $\lim\limits_{\Delta\to 0}\int_{\mathbb{R}_{\mathbf{r}}^{3}}d\mathbf{r}W\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,\Delta\right)\varphi\left(\mathbf{r},\mathbf{p}\right)=\varphi\left(\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)$ для любой бесконечно дифференцируемой функции из основного пространства, а $\varepsilon=\varepsilon\left(p\right)$ – энергия частицы. Дифференциальные сечения рассеяния электронов, протонов и фотонов в (4), (5), (6) связаны со слагаемыми интегралов столкновений в уравнениях (1), (2), (3) следующим образом:

$$\sigma_{e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')=\sigma_{e-e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')+\sigma_{e-ph}(\mathbf{p},\mathbf{p}'),$$

$$\sigma_{p}(\mathbf{p},\mathbf{p}')=\sigma_{p-e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')+\sigma_{p-ph}(\mathbf{p},\mathbf{p}')+\sigma_{p-p}(\mathbf{p},\mathbf{p}'),$$

$$\sigma_{ph}(\mathbf{p},\mathbf{p}')=\sigma_{ph-e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')+\sigma_{ph-ph}(\mathbf{p},\mathbf{p}')+\sigma_{ph-p}(\mathbf{p},\mathbf{p}').$$

Выражения (4), (5), (6) определяют плотность мощности энергии, передаваемой рассеивающей среде электронами, позитронами и фотонами, соответственно. Тогда величина, традиционно называемая энерговыделением, выражается следующим образом:

$$Q^{\varepsilon}=Q_{\varepsilon}^{e}+Q_{\varepsilon}^{p}+Q_{\varepsilon}^{ph}. \tag{7}$$

Анализ процесса передачи энергии, рассмотренный выше, указывает на то, что в большинстве актуальных случаев имеет место соотношение $Q_{\varepsilon}^{e}\gg Q_{\varepsilon}^{p}+Q_{\varepsilon}^{ph}$.

Также рассмотрим конструкции

$$\mathbf{j}_{ext}\left(t,\mathbf{r}\right)\equiv e\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{r}'\boldsymbol{\upsilon}W\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,\Delta\right)\left[f_{e}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)-f_{p}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)\right], \tag{8}$$

$$q_{ext}\left(t,\mathbf{r}\right)\equiv e\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{r}'W\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,\Delta\right)\left[f_{e}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)-f_{p}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)\right], \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}^{p}\left(t,\mathbf{r}\right)\equiv e\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{r}'\mathbf{p}W\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,\Delta\right)\Big[\sigma_{e}^{t}\upsilon f_{e}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)+\cdot\\ -\int d\mathbf{p}'\sigma_{e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\upsilon' f_{e}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}'\right)+\sigma_{p}^{t}\upsilon f_{p}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)-\int d\mathbf{p}'\sigma_{p}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\upsilon' f_{p}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}'\right)+\\ +\sigma_{ph}^{t}\upsilon f_{ph}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)-\int d\mathbf{p}'\sigma_{ph}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\upsilon' f_{ph}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}'\right)\Big],\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}Q^{\rho}\left(t,\mathbf{r}\right)\equiv\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{r}'mW\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|,\Delta\right)\Big[\sigma_{e}^{t}\upsilon f_{e}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)-\\ -\int d\mathbf{p}'\sigma_{e}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\upsilon' f_{e}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}'\right)+\sigma_{p}^{t}\upsilon f_{p}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}\right)-\int d\mathbf{p}'\sigma_{p}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\upsilon' f_{p}\left(t,\mathbf{r}',\mathbf{p}'\right)\Big],\end{gathered} \tag{11}$$

где m – масса электрона.

Формулы (8), (9) выражают плотность заряда и стороннего электрического тока. Формулы (10), (11) выражают плотности мощности передачи излучением преграде импульса и массы. Вектор $\mathbf{Q}^p$ имеет компоненты Q_i^p, $i=1,2,3$.

Выделение энергии в преграде приводит к ее нагреву. В зависимости от соотношения выделенной энергии и теплоты сублимации вещество преграды нагревается, плавится или испаряется. В актуальных ситуациях имеют место все случаи. Динамика вещества в этих областях моделируется уравнениями газодинамики, гидродинамики и пластичности, соответственно. Но априорно выделить в преграде области применимости этих уравнений на практике невозможно. Это связано не только с нестационарностью и неоднородностью энерговыделения, но и с конечностью времени деградации ионизационного спектра. Поэтому динамику преграды целесообразно рассматривать в идеальной гидродинамической модели Эйлера [48]. Она основана на уравнениях движения сжимаемой однокомпонентной среды, которая выражает фундаментальные законы сохранения массы, импульса и энергии. Детальные свойства и состояние вещества при таком подходе описываются сложными табличными уравнениями состояния [49-52]. В классическом виде уравнения Эйлера имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = Q^{\rho}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho v_i v_k + p\delta_{ik}\right) = Q_i^p, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\right) + \mathrm{div}\left(\mathbf{v}\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+\mathbf{v}p\right) = Q^{\varepsilon}, \tag{14}$$

где ρ – плотность вещества преграды, p – давление, T – температура, u – внутренняя энергия, $\mathbf{v}$ – вектор удельной скорости вещества преграды с компонентами v_i. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Электроны вызывают в преграде не только энерговыделение, но и электромагнитные эффекты – образование плотности некомпенсированного электрического заряда $q_{ext}(t,\mathbf{r})$ и электрического тока $\mathbf{j}_{ext}(t,\mathbf{r})$. Электрический ток генерирует электромагнитное поле. Оно создает пондеромоторную силу, приводящую в движение заряженную среду. В результате баланс импульса (13) и энергии (14) вещества в ионизованной преграде должен быть преобразован в соответствующее соотношение для вещества в совокупности с электромагнитным полем [53]. Внешний приток энергии при этом дополняется работой стороннего тока $-\mathbf{j}_{ext}\mathbf{E}$. Появится новый источник импульса – сила Лоренца, действующая на быстрые электроны $-\left(q_{ext}\mathbf{E}+\left[\mathbf{j}_{ext}\times\mathbf{B}\right]/c\right)$. В дальнейшем, будем считать, что скорость вещества мала по сравнению со скоростью света, и пренебрегать членами порядка $\frac{v}{c}$. Тогда, считая материалы немагнитными, получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{v}=Q^{m}, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i+g_i\right)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho v_i v_k+\left(p-p_{str}+\frac{1}{8\pi}\mathbf{ED}+\frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}\right)\delta_{ik}-\right.\\ \left.-\frac{1}{4\pi}\left(E_iD_k+H_iB_k\right)\right]+Q_i^{p}-\left(q_{ext}E_i+\frac{1}{c}\left[\mathbf{j}_{ext}\times\mathbf{B}\right]_i\right),\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+\frac{E^2}{8\pi}+\frac{B^2}{8\pi}\right)=\\ =-\mathrm{div}\left(\mathbf{v}\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+\mathbf{S}+\mathbf{v}\left(p-p_{str}-\frac{\mathbf{EP}}{2}\right)\right)+Q^{\varepsilon}-\mathbf{j}_{ext}\mathbf{E},\end{gathered} \tag{17}$$

где векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ с компонентами E_i, P_i, B_i, D_i – напряженность электрического поля, поляризация, магнитная индукция и электрическое смещение, $\mathbf{S}$ – вектор Пойнтинга, g_i – вектор плотности импульса электромагнитного поля, p_{str} – стрикционное давление, c – скорость света. Напряженность электрического поля и электрическое смещение, а также индукция и напряженность магнитного поля связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \tag{18}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}, \tag{19}$$

где диэлектрическая проницаемость ε зависит только от термодинамических параметров. Стрикционное давление p_{str} обусловлено зависимостью поляризации от термодинамических параметров и имеет вид [53]:

$$p_{str}=\frac{E^2}{8\pi}\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}. \tag{20}$$

Исходя из формы записи закона сохранения энергии (17), согласно термодинамическим соотношениям для диэлектриков [53], внутренняя энергия вещества u равна сумме независящей u_0 и зависящей от электрического поля компонент:

$$u = u_0 + \frac{\mathbf{EP}}{2\rho} + \frac{E^2}{8\pi\rho} T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}. \tag{21}$$

Рассмотрим уравнения Максвелла [54] для электромагнитного поля:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}_{ext} + \mathbf{j}^* + q\mathbf{v}\right), \tag{22}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{23}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\left(q + q_{ext}\right), \tag{24}$$

где q – плотность заряда ионизованного вещества, $\mathbf{j}^*$ – плотность тока электронов проводимости. Последнее уравнение Максвелла (24) выражает закон Кулона. В составе задачи Коши для уравнений (22-24) оно эквивалентно уравнению непрерывности заряда:

$$\frac{\partial\left(q + q_{ext}\right)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\mathbf{j}_{ext} + \mathbf{j}^* + q\mathbf{v}\right) = 0.$$

Следствием уравнений Максвелла (22-24) является теорема Пойнтинга, которую можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{S} - \mathbf{jE}, \tag{25}$$

где $\mathbf{j}$ – плотность полного тока, соответственно равная

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^* + q\mathbf{v} + \mathbf{j}_{ext}. \tag{26}$$

Умножим (16) на v_i и просуммируем по индексу i:

$$v_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i + g_i\right) = v_i Q_i^p - v_i\left(q_{ext}E_i + \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}_{ext}\times\mathbf{B}\right]_i\right) -$$
$$-v_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho v_i v_k + \left(p - p_{str} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{ED} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}\right)\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(E_i D_k + H_i B_k\right)\right). \tag{27}$$

Перегруппируем члены в (27):

$$v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -v^2\frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_k - \rho v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{v^2}{2}\right) - v_i\left(q_{ext}E_i + \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}_{ext}\times\mathbf{B}\right]_i\right)$$
$$-v_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(p - p_{str} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{ED} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}\right)\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(E_i D_k + H_i B_k\right)\right) + v_i Q_i^p - v_i\frac{\partial g_i}{\partial t}. \tag{28}$$

Из (28) с учетом (15) следует уравнение баланса кинетической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v^2}{2}\right) = -v_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(p - p_{str} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{ED} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}\right)\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(E_i D_k + H_i B_k\right)\right) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(v_k\rho\frac{v^2}{2}\right) - v_i\frac{\partial g_i}{\partial t} - v_i\left(q_{ext}E_i + \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}_{ext}\times\mathbf{B}\right]_i\right) + v_i Q_i^p. \tag{29}$$

Соотношения (21), (25), (29) определяют закон сохранения внутренней энергии, который можно использовать вместо (17):

$$\rho\frac{d}{dt}\left(u_0 + T\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\frac{E^2}{8\pi}\right) = -(p - p_{str})\mathrm{div}\mathbf{v} + \zeta + Q^\varepsilon - v_i Q_i^p + \left(\mathbf{j} - \mathbf{j}_{ext}\right)\mathbf{E} + v_i\frac{\partial g_i}{\partial t} +$$
$$+v_i\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\frac{1}{8\pi}\mathbf{ED} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}\right)\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(E_i D_k + H_i B_k\right)\right) + v_i\left(q_{ext}E_i + \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}_{ext}\times\mathbf{B}\right]_i\right), \tag{30}$$

здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla$ – полная производная,

$$\zeta = \frac{\mathbf{E}}{2}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} - \frac{\mathbf{P}}{2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{31}$$

Вывод уравнения (30) предполагал, что диэлектрическая проницаемость вещества однозначно определяется термодинамическими параметрами. Это означает, что диэлектрическая проницаемость меняется только в результате локально равновесных и обратимых процессов. Существуют актуальные ситуации, когда при взаимодействии потоков частиц с веществом могут происходить неравновесные и необратимые изменения диэлектрической проницаемости. Уравнения динамики вещества (16), (17) имеют общую форму законов сохранения. Поэтому справедливость этих уравнений определяется применимостью термодинамических соотношений для вещества (например, (21)). Если времена релаксации процессов, связанных с изменением диэлектрической проницаемости, малы по сравнению с характерным макроскопическим временем, уравнения (15), (16), (17) остаются верными. Выражение теоремы Пойнтинга в форме (25) не изменится, следовательно, останется верным уравнение (30). Вид связи электрического смещения и напряженности электрического поля (18) также не измениться, но появиться явная зависимость диэлектрической проницаемости от времени и пространственных координат.

Выражение (30) можно переписать в более простом виде, если воспользоваться законом сохранения импульса (см., например, [55]) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{4\pi}\left(E_i D_k + H_i B_k\right) - \left(\frac{1}{8\pi}\mathbf{ED} + \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB}\right)\delta_{ik}\right) - \\ -\frac{\partial g_i}{\partial t} = \left(q + q_{ext}\right)E_i + \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right]_i + \frac{1}{8\pi}\left(\left(\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i} - \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_i}\right) + \left(\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} - \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i}\right)\right). \tag{32}$$

Подставляя (32) в (30), с учетом (18), (19) и (26), получим

$$\rho\frac{d}{dt}\left(u_0 + T\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\frac{E^2}{8\pi}\right) = -(p - p_{str})\mathrm{div}\mathbf{v} + \frac{E^2}{8\pi}\frac{d\varepsilon}{dt} + Q^{\varepsilon} - \mathbf{v}\mathbf{Q}^{p} + \mathbf{j}^{*}\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{c}\left[\mathbf{j}^{*}\times\mathbf{B}\right]. \tag{33}$$

Используя (32), можно также получить другую форму закона сохранения импульса системы вещества и поля (16).

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\left(p - p_{str}\right) + q\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\left(\mathbf{j} - \mathbf{j}_{ext}\right)\times\mathbf{B}\right] + \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i} - \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_i}\right). \tag{34}$$

Отметим, что во всех приведенных выкладках при определении плотности импульса и тензора потока импульса электромагнитного поля использовался подход Минковского [55].

Уравнения (22), (23), (24) дополняются выражением для плотности тока электронов проводимости:

$$\mathbf{j}^{*} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right), \tag{35}$$

где σ – сумма термической и радиационной проводимости.

Выражение для термической проводимости можно получить из закона Видемана-Франца, связывающего электронную электро- и теплопроводность. Для электронной теплопроводности λ воспользуемся приближением [49]:

$$\lambda = 4ac\theta^3 l/3, \tag{36}$$

где $a = \pi^2/15c^3\hbar^3$.

$$l = \left(\lambda_S{}^2 + \lambda_H{}^2\right)^{1/2} / \theta^3 \,[\text{см}], \tag{37}$$

здесь λ_S – коэффициент теплопроводности для идеальной невырожденной плазмы, λ_H – коэффициент для случая сильного вырождения:

$$\lambda_S = 1{,}17 \cdot 10^{-3} \frac{e_1\theta^{5/2}}{Z_{eff} L_1}, \tag{38}$$

$$\lambda_H = 3{,}10 \cdot 10^{-4} \frac{e_2\theta\theta_F^{3/2}}{Z_{eff} L_2}. \tag{39}$$

Множители e_1 и e_2 связаны с учетом поправок на неидеальность плазмы. Все числовые множители соответствуют тому, что температура вещества θ и температура Ферми θ_F выражаются в атомных единицах. Кулоновские логарифмы электрон-ионных столкновений можно вычислять по формулам

$$L_2 = 0.5 \ln\left[\left(\frac{2\pi Z_{eff}}{3}\right)^{2/3}\left(1.5 + \frac{3}{\varGamma}\right)^{1/2}\right], \tag{40}$$

$$L_1 = 0.5 \ln\left(1 + 9\frac{Z_{eff} Z_0}{\varGamma^2}\left(\max\left\{1, \left[\frac{Z_{eff}}{3\varGamma\left(1+Z_0\right)}\right]^{1/2}\right\}\right)^2\right), \tag{41}$$

где $\varGamma$ – параметр неидеальности:

$$\varGamma = \frac{Z_{eff} Z_0}{r_0} \min\left(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta_F}\right). \tag{42}$$

Для эффективного заряда используется приближение

$$Z_{eff} = \max\{1, Z_0 + 0.5 / Z_0\}, \tag{43}$$

здесь Z_0 – средний заряд иона по модели Хартри-Фока-Слэтера [49].

Уравнения (1), (2), (3), (15), (16) (или (34)), (17) (или (30), или (33)), (22), (23), (24), (35) вместе с табличными уравнениями состояния, граничными и начальными условиями составляют математическую модель взаимодействия излучения и потоков частиц с веществом. Рассмотрим неполяризуемый материал. Тогда (16), (17), с учетом (32), можно переписать в более простом виде:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = -\mathrm{grad}p + \mathbf{F}_l + \mathbf{Q}^p, \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\frac{v^2}{2} + u_0\right)\right) = -\mathrm{div}\left(\mathbf{v}\rho\left(\frac{v^2}{2} + u_0\right) + \mathbf{v}p\right) + A + Q^\varepsilon, \tag{45}$$

где $\mathbf{F}_l$ – сила Лоренца, действующая на ионизованное вещество, A – суммарная мощность плотности работы электромагнитного поля.

$$\mathbf{F}_l = q\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{j}^* \times \mathbf{B}\right], \tag{46}$$

$$A = q\mathbf{E}\mathbf{v} + \mathbf{j}^*\mathbf{E} = (\mathbf{j} - \mathbf{j}_{ext})\mathbf{E}. \tag{47}$$

Определим энергию поля, электронов, позитронов и фотонов расходуемую на нагрев вещества A_H, как

$$A_H = A - \mathbf{F}_l\mathbf{v} + Q^\varepsilon - \mathbf{v}\mathbf{Q}^p = \mathbf{j}^*\mathbf{E} - \frac{1}{c}\left(\mathbf{v}\left[\mathbf{j}^* \times \mathbf{B}\right]\right) + Q^\varepsilon - \mathbf{v}\mathbf{Q}^p. \tag{48}$$

Выражения (46), (47), (48) определяют влияние электромагнитного поля на ионизованное вещество. Подставляя (24), (35) в (46) и (48), после преобразований получим выражения для силы Лоренца и плотности мощности нагрева

$$\mathbf{F}_l = \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right)\left(\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{D}}{4\pi} - q_{ext}\right) + \frac{\sigma}{c}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] + \frac{\sigma}{c^2}\left(\mathbf{v}B^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v}\mathbf{B})\right),$$

$$A_H = \sigma E^2 - 2\frac{\sigma}{c}\left(\mathbf{v}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\right) - \frac{\sigma}{c^2}\left(v^2B^2 - (\mathbf{v}\mathbf{B})^2\right) + Q^\varepsilon - \mathbf{v}\mathbf{Q}^p.$$

2 Предварительные оценки

Рассмотрим приближенные оценки формирующих в материале ударную волну градиента давления и силы Лоренца, образующихся при рассеянии потока электронов.

В рамках одномерной оценки предполагается, что электроны имеют одинаковые энергии. Размер поля электронов совпадает с их тормозным путем.

Введем обозначения:

N_e – поток электронов (1/см^2);

λ_e – тормозной путь электрона (см);

ε_e – энергия падающего электрона падающего электрона;

τ – длительность импульса;

G – коэффициент Грюнайзена.

Сначала рассмотрим градиент давления вещества, формирующийся при падении электронов на мишень. Плотность мощности энерговыделения (Дж/(с см^3)) при постоянном источнике оценим величиной $N_e\varepsilon_e/(\lambda_e\tau)$, а градиент плотности мощности энерговыделения – $N_\gamma\varepsilon_e/(\lambda_\gamma^2\tau)$. Интегрируя по времени, получим градиент внутренней энергии на момент окончания импульса. Градиент давления приближенно пропорционален градиенту внутренней энергии и равен $N_e\varepsilon_e G/\lambda_e^2$. Коэффициентом пропорциональности между давлением и плотностью внутренней энергией является коэффициент Грюнайзена.

Рассмотрим оценку плотности силы Лоренца в потоке фотонов. Плотность тока электронов отдачи приближенно равна eN_e/τ. Тогда $eN_e/\tau\lambda_e$ – дивергенция плотности тока. Плотность заряда равна интегралу по времени от дивергенции плотности тока $-eN_e/\lambda_e$. В отсутствии радиационной проводимости напряженность электрического поля по порядку величины равна $4\pi j\tau$, отсюда $E \cong 4\pi eN_e$.

Тогда сила Лоренца оценивается величиной $4\pi(eN_e)^2/\lambda_e$.

Далее оценим какое количество частиц должно быть в первичном потоке, чтобы сила Лоренца была приближенно равна градиенту давления $4\pi\lambda_e e^2 N_e = \varepsilon_e G$, или, что тоже самое $4\pi eN_e = \varepsilon_e G/(\lambda_e e)$.

Зададимся данными о пучке электронов, соответствующем условиям эксперимента на ускорителе КАЛЬМАР, эксплуатируемом в НИЦ «Курчатовский институт». Пусть $\varepsilon_e = 200$ кэВ, а N_e сооветствует 1 кДж/см^2 [56-57]. Тогда $\lambda_e = 4\cdot10^{-2}$ см, $N_e = 3\cdot10^{16}$ 1/см^2. При таких исходных данных левая часть превосходит правую на 4 порядка.

Ситуация кардинально меняется, если учесть снижение электрического поля за счет радиационной проводимости. Рассмотрим оценку этой величины в соответствии с [58] $\sigma = 10^{-3}D$, где σ – проводимость в 1/с, а D – мощность поглощенной дозы в рад /с. Мощность дозы в рад /с можно оценить по формуле $D_e = \varepsilon_e N_e/(100\rho\lambda_e\tau)$, где ρ – плотность вещества, рассеивающего частицы.

Оценивая проводимость в потоке электронов ускорителя КАЛЬМАР, получим $\sigma_e \sim 10^{13}$ 1/с.

Для соотношения проводимости и длительности импульса имеет место неравенство $\sigma_e \tau_e = 1.5 \cdot 10^6 \gg 1$. При таком соотношении оценка напряженности электрического поля проводиться в стационарном приближении $\sigma E - j = 0$, откуда $E = eN_e / (\sigma_e \tau_e)$.

С такой оценкой напряженности электрического поля сравнение объемной силы Лоренца и градиента давления дает обратное соотношение. Градиент давления существенно превосходит объемную силу Лоренца.

Сравним энерговыделение частиц с джоулевым нагревом. Мощность плотности джоулева нагрева $\sigma_e E^2 = \sigma_e (eN_e / \sigma_e \tau_e)^2$ сравнивается с мощностью плотности энерговыделения $N_\gamma \varepsilon_e / (\lambda_\gamma \tau)$. Это, как и при анализе импульсных соотношений, приводит к сравнению величин $eN_e / (\sigma_e \tau_e)$ и $\varepsilon_e / (\lambda_e e)$.

Таким образом, простых оценок для однозначного вывода о значимости влияния электромагнитного поля на импульс сплошной среды недостаточно.

Отметим следующее обстоятельство. Величина $\varepsilon_e / (\lambda_e e)$ может интерпретироваться как напряженность электрического поля, необходимая для того, чтобы остановить электрон с энергией ε_e на длине его пробега.

Оценим величины Q^m и $\mathbf{Q}^p$. Для электронов $Q^m = mN_e / (\lambda_e \tau_e)$. Эта величина сравнивается с $\tau_e N_e \varepsilon_e G / \lambda_e^3$. Очевидно, $mN_e / (\lambda_e \tau_e) \ll \tau_e N_e \varepsilon_e G / \lambda_e^3$. Передача импульса $|\mathbf{Q}|^p = mvN_e / (\lambda_e \tau_e)$ сравнивается с градиентом давления $N_e \varepsilon_e G / \lambda_e^2$ и также оказывается малой. Передача массы и импульса от потока частиц к преграде введены в уравнения Эйлера для того, чтобы впоследствии их можно было использовать для моделирования взаимодействия с преградой не только фотонов и электронов, но и тяжелых заряженных частиц.

Заключение

Рассмотрены радиационные, термомеханические и электромагнитные процессы взаимодействия пучка электронов с твердотельной преградой.

Перенос электронов и генерируемых при их рассеянии фотонов и позитронов описан кинетическими уравнениями. Интегралы столкновений моделируют комптоновское рассеяние и фотопоглощение фотонов, образование электрон-позитронных пар, а также тормозное излучение электронов и позитронов, ударную ионизацию, возбуждение молекул и упругое рассеяние. Электромагнитное поле, генерируемое заряженными частицами, описано уравнениями Максвелла. Исключить деление расчетной области энерговыделения на твердую, жидкую и газообразную зоны позволило использование модели идеальной двухтемпературной магнитной гидродинамики. Модель основана на уравнениях неразрывности, сохранения импульса, полной энергии. Решения кинетических уравнений построены в пространстве финитных обобщенных функций. Плотность мощности энерговыделения представлена как линейный функционал функций распределения позитронов и электронов. Для замыкания системы используются уравнения состояния, в которых температуры ионов и электронов являются промежуточными величинами.

Построены соотношения, позволяющие моделировать передачу энергии между нагретым веществом преграды и электромагнитным полем. Приведены соотношения для объемной силы Лоренца и джоулева нагрева для правых частей газодинамических уравнений.

В результате построена физико-математическая модель, позволяющая моделировать электромагнитные и термомеханические эффекты радиационного происхождения с учетом их взаимного влияния.

Библиографический список

1. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом. М.: Физматлит, 2003, 288 с.

2. Федоров В.К., Сергеев Н.П., Кондрашин А.А. Контроль и испытания в проектировании и производстве радиоэлектронных средств. М.: Техносфера, 2005, 502 с.

3. Чумаков А.И. Действие космической радиации на интегральные схемы. М.: Радио и связь, 2004, 319 с.

4. Иващенко Д.М., Федоров А.А. Российские ускорители электронов, использующиеся в качестве моделирующих установок // Вопросы атомной науки и техники, серия «Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру», 2002, вып. 3, С. 120-128.

5. Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков. / под ред. Рудакова Л.И. М.: Энергоатомиздат, 1990, 279 с.

6. M.E. Zhukovskiy, S.V. Podolyako, I.A. Tarakanov, R.V. Uskov, A.M. Chlenov and V.F. Zinchenko. Researching the spectrum of bremsstrahlung generated by the RIUS-5 electron accelerator. // Mathematica Montisnigri, v. XXXV. 2016. p. 54-67.

7. Мотт Н., Мэсси Г. Теория атомных столкновений. М.: МИР, 1969, 446 с.

8. Мэсси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. М.: МИР, 1958, 605 с.

9. Davies H., Bethe H.A., Maximon L.C. Theory of bremsstrahlung and pair production. Integral cross section for pair production // Phys. Rev. 1954. v. 93, p. 788-795.

10. Tsai Y.S. Pair production and bremsstrahlung of charged leptons // Rev. Mod. Phys. 1974. v. 46, p. 815-851.

11. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц в веществе. М.: Энергоиздат, 1991, 200 с.

12. Савинский А.К. Взаимодействие электронов с ткане-эквивалентными средами. М.: Энергоатомиздат, 1984, 112 с.

13. Gryzinski M. Classic Theory of Electronic and Ionic Inelastic Collisions // Physical Review, 1959, v. 115, N2, p. 374-383.

14. Экспериментальная ядерная физика. / под ред. Сегре Э., Т.1.¬ М.: Иностранная литература, 1958, 658 с.

15. Kim Yong-Ki, Irikura Karl K. Electron-Impact lonization Cross Sections for Polyatomic Molecules, Radicals, and Ions. / Atomic and Molecular Data and Their Applications, edited by Berrington K.A. Bell K. L. American Institute of Physics, 2000, p.220-241.

16. Bernshtam V.A., Ralchenko Yu.V., Maron Y. Empirical formula for cross section of direct electron-impact ionization of ions // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 2000, 33, p. 5025-5032.

17. Kim Y.-K., Rudd M.E. Theory for Ionization of Molecules by Electrons // Phys. Rev. 1994, A 50, p. 3954-3967.

18. Hwang W., Kim Y.-K., Rudd M.E. J. New Model for Electron-Impact Ionization Cross Sections of Atmospheric Molecules // Chem. Phys. 1996. №104. p. 2956-2966.

19. Kim Y.-K., Hwang W., Weinberger N. M. Electron-impact ionization cross sections of atmospheric molecules // J. Chem. Phys. 1997. №106. p. 1026-1033.

20. Fisher V.I., Bernshtam V.A., Ralchenko Yu.V., Maron Y., Goldgirsh A. Electron-impact-excitation cross sections of lithiumlike ions // Phys. Rev. A. 1997. v.56. №5. p. 3726-3733.

21. Vainshtein L.A., Bray I. Theoretical Electron- Impact Excitation, Ionization and Recombination Rate Coefficients and Level Population Densities for Scandium-Like Ion // International Journal of Pure and Applied Physics, 2007, v. 3, № 1, p. 75-82.

22. Kim Y.-K., Rudd M.E. Electron-Impact Total Ionization Cross Sections of Hydrocarbon Ions // J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. 2002. №107, p. 63-67.

23. Montenegro M., Eissner W., Nahar S. N., Pradhan A.K. Relativistic and correlation effects in electron impact excitation of forbidden transitions of OII. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2006. №39. p. 1863-1877.

24. Марков М.Б., Паротькин С.В. Кинетическая модель радиационной проводимости газа // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. №4. С. 41-56.

25. Березин А.В., Волков Ю.А., Марков М.Б., Тараканов И.А. Модель радиационно-индуцированной проводимости кремния // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. №6. С. 18-32.

26. Березин А.В., Волков Ю.А., Марков М.Б., Тараканов И.А. Радиационно-индуцированная проводимость кремния // MATHEMATICA MONTISNIGRI. 2015. v. XXXIII. С. 69-87.

27. Анисимов С.И., Имас Я.А., Романов Г.С. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970, 272 с.

28. Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А. Динамические задачи нелинейных многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука, Физматлит, 1998, 462 с.

29. Бакулин В.Н., Волков В.А., Острик А.В. Расчет распределения зарядов и радиационно-наведенной проводимости в многослойной гетерогенной преграде под действием излучения // Физика импульсных разрядов в конденсированных средах. – Николаев: ИИПТ НАН Украины, 1995.

30. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966, 688 с.

31. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987, 464 с.

32. Тамм, И.Е. Основы теории электричества : Учеб. пособие для ун-тов / И.Е. Тамм. – 3-е изд., совершенно перераб. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1946, 661 с.

33. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Теория поля. М.: Физматлит, 2006, 534 с.

34. Гайтлер Л. Квантовая теория излучения. М.: Иностранная литература, 1956, 492 с.

35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980, 273 с.

36. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969, 623 с.

37. Мухин К.Н. Введение в ядерную физику. М.: Атомиздат, 1965, 720 с.

38. Березин А.В., Воронцов А.С., Жуковский М.Е., Марков М.Б., Паротькин С.В. Метод частиц для электронов в рассеивающей среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. №9. С. 1566-1578.

39. Березин А.В., Волков Ю.А., Казымов Ш.А., Марков М.Б., Тараканов И.А. Моделирование радиационной проводимости статистическим методом частиц // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. №9. 20 с.

40. Braun W., Hepp K. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles // Commun. math. Phys. 1977. v. 56. №2. p. 101-113.

41. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1984, 328 с.

42. Марков М.Б. Приближение однородного рассеяния электронов на траекториях // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. №10. С. 132-142.

43. Березин А.В., Воронцов А.С., Марков М.Б., Паротькин С.В., Захаров С.В. Моделирование предпробойной стадии газового разряда // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 3, С. 105-118.

44. Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Зинченко В.Ф., Марков М.Б., Членов А.М. Моделирование пучка ускорителя ЛИУ-

10 на параллельном компьютере // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. №2. С. 29-44.

45. Березин А.В., Крюков А.А., Плющенков Б.Д. Метод вычисления электромагнитного поля с заданным волновым фронтом // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. №3. С. 109-126.

46. Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Марков М.Б. Моделирование электромагнитных полей радиационного происхождения на многопроцессорных вычислительных системах // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 3. С. 98-114.

47. Марков М.Б., Паротькин С.В., Сысенко А.В. Метод частиц для модели электромагнитного поля потока электронов в газе // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. №5. С. 35-54.

48. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986, 736 с.

49. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В. Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физико-математическая литература, 2000, 400 с.

50. Синько Г.В. Использование метода самосогласованного поля для расчета термодинамических функций электронов в простых веществах // ТВТ. 1983. Т. 2. С. 1041-1052.

51. Perrot F. Gradient correction to the statistical electronic free energy at non-zero temperatures: Application to equation-of-state calculations // Phys. Rev. A. 1979. v. 20. p. 586-594.

52. Rozsnyai B.F. Shock Hugoniots based on the self-consistent average atom (SCAA) model. Theory and experiments. (Second revision) // HEDP. 2012. v. 8. p. 88-100.

53. Жакин А.И. Электрогидродинамика // Успехи физ. наук. 2012. Т. 182. Вып. 5. С. 495-520.

54 Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982, 624 с.

55. Макаров В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные волны с отрицательной групповой скоростью и тензор энергии импульса // Успехи физических наук, 2011, т.181. №12, с.1357-1368.

56. Демидов Б.А., Ивкин М.В., Ивонин И.А., Петров В.А., Ефремов В.П., Фортов В.Е., Килер Н. Определение профиля энерговыделения мощного электронного пучка в аэрогеле // Журнал технической физики, 1997, Т. 67, № 11, С. 26-32.

57. Демидов Б.А., Ефремов В.П., Ивкин М.В., Мещеряков А.Н., Петров В.А. Воздействие мощных потоков энергии на вакуумную резину // Журнал технической физики, 2003, Т. 73, вып. 6, С. 130-135.

58. Садовничий Д.Н., Тютнев А.П., Хатипов С.А., Милицин Ю.А. Радиационная электропроводность резин и метод ее прогнозирования // Химия высоких энергий. 1998. Т. 32. №1. С. 7-13.