



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Вашковьяк М.А.**

Конструктивно-  
аналитическое решение  
задачи о вековой эволюции  
полярных спутниковых  
орбит

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Вашковьяк М.А. Конструктивно-аналитическое решение задачи о вековой эволюции полярных спутниковых орбит // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 3. 32 с.  
doi:[10.20948/prepr-2017-3](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-3)

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-3>

***Публикации по материалам препринта***

М.А. Вашковьяк, Конструктивно-аналитическое решение задачи о вековой эволюции полярных спутниковых орбит. Это препринт Произведения, принятого для публикации в «Астрономическом вестнике» @ 2017 г. М.А.Вашковьяк.

(M.A. Vashkov'yak, Constructive-analytical solution of the problem of the secular evolution of polar satellite orbits. This a preprint of the Work accepted for publication in "Solar System Research" © Pleiades Publishing, Inc., 2017)

URL: <http://pleiades.online/>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**М.А. Вашковьяк**

**Конструктивно-аналитическое решение  
задачи о вековой эволюции  
полярных спутниковых орбит**

**Москва — 2017**

## **Вашковьяк М.А.**

Конструктивно-аналитическое решение задачи о вековой эволюции полярных спутниковых орбит

Рассматривается двукратно-осредненная задача Хилла с учетом сжатия центрального тела. Эта задача имеет ряд интегрируемых случаев, качественному исследованию которых посвящены работы многих ученых, начиная с М.Л. Лидова и И. Козаи. Однако, в силу сложности интегралов, строгого аналитического решения в этих случаях получить не удастся.

Настоящая работа посвящена исследованию случая, когда экваториальная плоскость центрального тела совпадает с плоскостью его орбитального движения относительно возмущающего тела, а сам спутник движется по полярной орбите. Выполнено более детальное качественное исследование и предложено приближенное конструктивно-аналитическое решение эволюционной системы в виде явных зависимостей от времени эксцентриситета и аргумента перицентра спутниковой орбиты. Оценка методической точности для полярных орбит ИСЛ получена путем сравнения с численным решением системы.

**Ключевые слова:** полярные спутниковые орбиты, вековые возмущения.

## **Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak**

Constructive-analytical solution of the problem on secular evolution of polar satellite orbits

Double-averaged Hill's problem taking into account the oblateness of the central body is considering. This problem has a row of integrable cases, which are investigated qualitatively in the works of many scientists, since M.L. Lidov and Y. Kozai. However, it is not possible to get strict analytical solution in these cases because the integrals are complicated. The present work is devoted to investigation of case, when the equatorial plane of the central body is coincided with his orbital plane relatively perturbing body and the satellite moves on a polar orbit. More detailed qualitative investigation is executed and approximate constructive-analytical solution of the evolutionary system is offered as obvious dependences of eccentricity and argument of pericenter of satellite orbit versus time. The estimation of methodical accuracy is got by comparing to the numerical solution of the evolutionary system for polar lunar artificial satellite orbits.

**Key words:** polar satellite orbits, secular perturbations.

## 1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача о совместном влиянии сжатия центрального тела и притяжения удаленной возмущающей точки, движущейся по почти круговой орбите, на вековую эволюцию орбиты спутника пренебрежимо малой массы. Полная возмущающая функция от двух указанных факторов в двукратно-осредненной постановке заменена ее вековой частью. Будучи в общем случае неинтегрируемой, данная задача, тем не менее, имеет ряд интегрируемых случаев и частных решений, которые могут служить моделями в различных астрономических приложениях. Подробная классификация и качественное исследование этих случаев содержится в работе (Лидов, Ярская, 1974). Краткое изложение ее результатов содержится также в статье (Lidov, 1974). Далее будет использоваться соответствующая нумерация этих случаев (от I до VII), введенная в вышеуказанных статьях.

Интегрируемый случай I, когда в двукратно-осредненной задаче учитывается лишь притяжение от внешней точки, исследован в основополагающих работах (Лидов, 1961; Kozai, 1962). Результаты этих работ вместе с многочисленными и многоплановыми астрономическими проявлениями эффекта Лидова-Козаи детально описаны в монографии (Shevchenko, 2017).

В работах (Lidov, 1962; Лидов, 1963) был использован один из интегрируемых случаев V, когда плоскость орбиты возмущающей точки ортогональна экваториальной плоскости планеты. Он был привлечен для объяснения реального существования главных спутников Урана, экваториальные орбиты которых (при гипотетическом отсутствии его сжатия) неизбежно должны были бы в процессе их эволюции пересечься с поверхностью планеты в силу вековых солнечных возмущений.

Другой интегрируемый случай, когда экваториальная плоскость центрального тела совпадает с плоскостью его орбитального движения относительно возмущающей точки (так называемый компланарный случай III), нашел применение в анализе эволюции орбит искусственных спутников Луны, возмущаемых притяжением Земли (Kozai, 1963), в частности, спутников, движущихся по полярной орбите (Uphoff, 1976). В этих работах, так же как и в работе (Kudielka, 1997), особое внимание уделено так называемым «замороженным» (равновесным или стационарным) орбитам с постоянными значениями элементов спутниковой орбиты. В работе (Вашковьяк, 1998) проведено исследование устойчивости таких орбит.

Ранее были также исследованы круговые спутниковые орбиты (случай VII). В работах (Sekiguchi, 1961; Allan, Cook, 1964) описана эволюция орбитальной плоскости, а в работе (Вашковьяк, 1974) проведен и анализ устойчивости орбит относительно эксцентриситета.

Некоторые интегрируемые случаи находят свое применение и в задачах проектирования долгоживущих орбит спутников планет (Прохоренко, 2010).

Конечно, интегрируемые случаи рассматриваемой двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты могут служить лишь первым приближением, а также качественным ориентиром при решении какой-либо реальной небесно-механической задачи. Известные методы теории возмущений используют более полные физические модели эволюции орбит. Так, в работах (Oesterwinter, 1970; Brumberg et al., 1971), наряду с учетом многих дополнительных возмущений в движении ИСЛ, в отличие от интегрируемого случая III, естественно, предполагается и некомпланарность плоскостей экватора Луны и ее орбиты.

Данная работа посвящена исследованию эволюции полярных спутниковых орбит как частного решения интегрируемого случая III. Из-за сложности квадратур не удастся получить строгого аналитического решения даже в известных специальных функциях. Наряду с более детальным качественным исследованием и вычислением некоторых количественных характеристик, здесь предложен приближенный метод построения конструктивно-аналитического решения эволюционной системы двух дифференциальных уравнений, описывающих изменение эксцентриситета и аргумента перицентра спутниковой орбиты. Метод предусматривает аппроксимацию иррациональной части подынтегральной функции, приводящую к эллиптическим интегралам, обращение которых позволяет получить решение в эллиптических функциях. Для оценки модельной и методической точности используется сравнение с численным решением более полной (неинтегрируемой) эволюционной системы, в которой учитывается относительно малый наклон орбиты возмущающей точки к экваториальной плоскости центрального тела. Сравнительные расчеты выполнены для ряда полярных орбит ИСЛ, возмущаемых притяжением Земли и в меньшей степени – Солнца.

## 2. Постановка задачи

Вековая эволюция спутниковой орбиты в рассматриваемом интегрируемом случае III описывается системой уравнений в кеплеровских элементах, которая может быть получена из уравнений работы (Лидов, Ярская, 1974). С использованием, вместо введенного в этой работе элемента  $\varepsilon$ , эксцентриситета  $e = \sqrt{1 - \varepsilon}$ , вместо  $\beta$  - параметра  $\gamma = -5\beta/2$ , вместо  $n$  - независимой переменной  $\tau = n/20$ , эта система принимает следующий вид (Вашковьяк, 1996)

$$\frac{de}{d\tau} = 10e \sin^2 i \sqrt{1 - e^2} \sin 2\omega,$$

$$\frac{di}{d\tau} = -\frac{10e^2 \sin i \cos i}{\sqrt{1 - e^2}} \sin 2\omega,$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \left[ e^2 - 1 + 5 \cos^2 i + 5(\sin^2 i - e^2) \cos 2\omega \right] + 4\gamma (1 - e^2)^{-2} (5 \cos^2 i - 1), \quad (1)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = 2 \cos i \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2) - 4\gamma (1 - e^2)^{-2} \right].$$

Здесь  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  - стандартные обозначения кеплеровских угловых экваториальных элементов, а постоянный параметр  $\gamma$  и независимая переменная  $\tau$  определяются формулами

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad \alpha = -\frac{3}{8} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 c_{20}, \quad \beta = \frac{3a^3}{16\mu} \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{a_j^3}, \quad \tau = \beta n (t - t_0). \quad (2)$$

Используемый в данной работе параметр  $\beta$  был введен нами ранее, а формула для него записана при естественном обобщении задачи на произвольное число  $N$  возмущающих точек, обращающихся по экваториальным орбитам относительно центральной и при дополнительном несущественном предположении об эксцентриситетах этих орбит ( $e_j = 0$ ). Так что,  $\mu, \mu_j$  - произведения гравитационной постоянной на массы, соответственно, планеты и  $j$ -й возмущающей точки,  $a_0, a_j, a$  - соответственно: средний экваториальный радиус планеты, большая полуось орбиты  $j$ -й возмущающей точки и орбиты

спутника (естественно, в осредненной модели задачи большая полуось  $a$  постоянна). Остальные величины:  $c_{20}$  – коэффициент при второй зональной гармонике гравитационного поля планеты,  $n = \sqrt{\mu/a^3}$  – среднее движение спутника,  $t_0$  и  $t$  – начальный и текущий момент времени, соответственно.

Первые интегралы эволюционной системы (1) имеют вид (Лидов, Ярская, 1974):

$$(1-e^2)\cos^2 i = c_1, \quad e^2 \left( \frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega \right) + \frac{2}{5} \gamma (1-e^2)^{-3/2} \left( \cos^2 i - \frac{1}{3} \right) = c_2, \quad (3)$$

а долгота восходящего узла  $\Omega$ , не входящая в правые части уравнений (1), после нахождения зависимостей  $e(\tau)$ ,  $i(\tau)$ ,  $\omega(\tau)$  определяется квадратурой

$$\Omega(\tau) = \Omega_0 + 2 \int_0^\tau \cos i(\zeta) \left\{ \begin{array}{l} [1-e^2(\zeta)]^{-1/2} [5e^2(\zeta)\cos 2\omega(\zeta) - 3e^2(\zeta) - 2] - \\ -4\gamma [1-e^2(\zeta)]^{-2} \end{array} \right\} d\zeta. \quad (4)$$

Использование первых интегралов позволяет исключить переменные  $i$  и  $\omega$  из первого уравнения (1), и рассматривать лишь одно уравнение для эксцентриситета при различных допустимых значениях постоянных  $c_1$  и  $c_2$ . После нахождения его решения зависимости от времени наклона  $i$  и аргумента широты перигея  $\omega$  определяются из уравнений (3), причем, в силу симметрии, достаточно получить зависимость  $\omega(t)$  лишь для  $0 \leq \omega \leq 90^\circ$ .

Замена  $z = e^2$  сводит задачу к обращению квадратуры

$$\tau = \frac{\text{sign}(\sin 2\omega_0)}{8\sqrt{6}} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z, \gamma, c_1, c_2)}}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 f(z, \gamma, c_1, c_2) &= f_1(z, \gamma, c_1, c_2) f_2(z, \gamma, c_1, c_2), \\
 f_1(z, \gamma, c_1, c_2) &= -z^2 + \left[ 1 - \frac{5}{3}(c_1 + c_2) \right] z + \frac{5}{3}c_2 + \frac{2}{9}\gamma(1 - z - 3c_1)(1 - z)^{-3/2}, \\
 f_2(z, \gamma, c_1, c_2) &= z - \frac{5}{2}c_2 - \frac{1}{3}\gamma(1 - z - 3c_1)(1 - z)^{-5/2},
 \end{aligned} \tag{6}$$

причем функции  $f, f_1, f_2$ , кроме своих аргументов, зависят и от трех постоянных - параметра задачи  $\gamma$  и интегральных констант  $c_1, c_2$ .

Целью данной работы является исследование эволюции полярных орбит с наклоном  $i = 90^\circ$  ( $c_1 = 0$ ), в том числе, построение приближенного аналитического решения эволюционной системы на основе более полного качественного анализа.

*Замечание:* При  $c_1 \neq 0$  и  $\gamma = 0$  качественное исследование двукратно осредненной задачи Хилла (без учета пренебрежимо малого влияния сжатия планеты) проведено в уже упоминавшихся работах (Лидов, 1961; Kozai, 1962), а ее общее решение получено в работах (Вашковьяк, 1999; Kinoshita, Nakai, 1999; 2007). В этом случае функция  $f(z)$  является полиномом третьей степени, а зависимости всех четырех элементов от времени описываются с помощью эллиптических функций и интегралов. В частности, при  $c_1 \approx 0$  ( $i \approx 90^\circ$ ) проявляется эффект Лидова-Козаи, когда эволюционирующая спутниковая орбита независимо от начальных значений ее элементов неизбежно (за конечное время) пересекается с поверхностью центральной планеты конечного радиуса. В общем случае детальное исследование условий пересечения содержится в работе (Прохоренко, 2007).

### 3. Качественные особенности эволюции полярных спутниковых орбит ( $i = 90^\circ$ , $c_1 = 0$ )

Впервые данное частное решение описано в работе (Лидов, Ярская, 1974; Lidov, 1974), где приведены упрощенные эволюционные уравнения и выражение для первого интеграла, выявлены условия существования особых точек, описаны их типы и приведена качественная картина поведения интегральных кривых. Во избежание недоразумений, следует отметить, что авторам этих статей, конечно, была известна неточность, которая, к сожалению, оказалась не исправленной после корректур. А именно, фрагменты  $b$  и  $c$  рис. 2 этих работ должны быть поменяны местами (но с сохранением подписей!).

В работе (Прохоренко, 2010, стр. 184, табл. 4 (1)) как дополнение к описанному исследованию приведены уравнения, определяющие равновесные и экстремальные значения переменной  $\varepsilon = 1 - e^2 = 1 - z$ , однозначно связанной с эксцентриситетом.

Для связности изложения в этом и следующем разделе будет повторен ряд формул вышеупомянутых работ, независимо полученных в несколько других обозначениях, уже использованных нами ранее, а также будут описаны дополнительные детали качественных особенностей эволюции орбит.

При  $c_1 = 0$  эволюционная система (1) допускает частное решение  $i = i_0 = 90^\circ$ ,  $\Omega = \Omega_0 = \text{const}$  и принимает более простой вид

$$\frac{dz}{d\tau} = 20z\sqrt{1-z}\sin 2\omega, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = 4\left[\sqrt{1-z}(2-5\sin^2\omega) - \gamma(1-z)^{-2}\right]. \quad (7)$$

Второй из интегралов в формулах (3) также упрощается и принимает форму

$$z\left(\frac{2}{5} - \sin^2\omega\right) - \frac{2}{15}\gamma(1-z)^{-3/2} = c_2, \quad (8)$$

а в формулах (6)

$$\begin{aligned} f_1(z, \gamma, c_1 = 0, c_2) &= (1-z)g_1(z, \gamma, c_2), \\ g_1(z, \gamma, c_2) &= z + \frac{5}{3}c_2 + \frac{2}{9}\gamma(1-z)^{-3/2}, \\ f_2(z, \gamma, c_1 = 0, c_2) &= g_2(z, \gamma, c_2) = z - \frac{5}{2}c_2 - \frac{1}{3}\gamma(1-z)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Постоянная  $c_2$  определяется начальными значениями  $z_0 = e_0^2$ ,  $\omega_0$  и, конечно параметром  $\gamma$

$$c_2(\gamma, e_0, \omega_0) = e_0^2\left(\frac{2}{5} - \sin^2\omega_0\right) - \frac{2}{15}\gamma(1-e_0^2)^{-3/2}. \quad (10)$$

В данной работе будет рассматриваться только случай положительных значений параметра  $\gamma$  ( $c_{20} < 0$ ), соответствующий большинству из известных реально существующих астрономических объектов.

В плоскости  $(\omega, e)$  или  $(\omega, z)$  эволюция полярных орбит описывается семейством фазовых траекторий, отвечающих различным значениям постоянной интеграла  $c_2$ . Для  $0 \leq \gamma < 2$  существуют особые (равновесные) значения

$$\omega^* = 0; \quad e^* = \sqrt{1 - (\gamma/2)^{2/5}}. \quad (11)$$

Равновесному значению  $e^*$  отвечает постоянная интеграла

$$c_2^*(\gamma) = c_2(\gamma, e_0 = e^*, \omega_0 = 0) = \frac{2}{15} \left[ 3 - 5 \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2/5} \right], \quad (12)$$

которая является предельно возможным при фиксированном значении параметра  $\gamma < 2$ . Бифуркационное значение  $\gamma = 2$  [ $c_2^*(2) = -4/15$ ] соответствует зарождению (исчезновению) особых точек. Для  $\gamma > 2$  особых точек не существует. В окрестности стационарных точек (11) располагается семейство замкнутых фазовых траекторий, ограниченных предельной траекторией (сепаратрисой), разделяющей области либрации и циркуляции аргумента перицентра  $\omega$ . В фазовой плоскости сепаратриса определяется уравнением

$$\omega(e, \gamma) = \arcsin \sqrt{\frac{2}{5} \left[ 1 - \frac{\gamma}{3e^2} \left[ (1 - e^2)^{-3/2} - 1 \right] \right]}, \quad (13)$$

которое получается из интеграла (8) при

$$c_2 = c_2^{(s)}(\gamma) = -2\gamma/15. \quad (14)$$

При  $\sin \omega = 0$  и фиксированном значении параметра  $\gamma < 2$  находится максимальное «сепаратрисное» значение  $z^{(s)} = e^{(s)2}$  как корня уравнения

$$z^{(s)} + \frac{1}{3} \gamma \left[ 1 - (1 - z^{(s)})^{-3/2} \right] = 0. \quad (15)$$

При  $e = 0$  находится и соответствующее «сепаратрисное» значение

$$\omega^{(s)}(0, \gamma) = \arcsin \sqrt{(2 - \gamma)/5}. \quad (16)$$

Когда  $\gamma = 2$ ,  $c_2^{(s)}(2) = c_2^*(2) = -\frac{4}{15}$ ,  $\omega^{(s)} = 0$ .

Условие  $d\omega/d\tau = 0$  дает уравнение кривой вертикальных касательных ко всем либрационным траекториям семейства

$$2 - 5\sin^2 \omega - \gamma(1-z)^{-5/2} = 0. \quad (17)$$

Исключая  $\sin^2 \omega$  из (17) и (8), получим уравнение для нахождения величины  $z^{(l)}$

$$z^{(l)} - 3c_2(1-z^{(l)})^{5/2} / \gamma - 2/5 = 0. \quad (18)$$

После численного решения этого уравнения, подставляя  $z^{(l)}$  в (17), получим величину  $\omega^{(l)}$ , соответствующую максимальному значению аргумента перицентра.

В плоскости параметров  $(\gamma, c_2)$  открытое множество возможных значений постоянной  $c_2$  для определяется неравенствами

$$-\infty < c_2 < c_2^*(\gamma), \gamma \leq 2; \quad -\infty < c_2 < c_2^{(s)}(\gamma), \gamma > 2.$$

На рис. 1 соответствующая верхняя граница показана жирными линиями, стыкующимися в точке А с координатами  $(2, -4/15)$ . При  $\gamma < 2$  тонкая прямая  $c_2^{(s)}(\gamma)$  отделяет область  $L$ , где изменение аргумента перицентра  $\omega$  носит либрационный характер, от областей  $C(+)$  и  $C(-)$ , где  $\omega$  изменяется циркуляционно. Тонкая кривая, разделяющая области  $C(+)$  и  $C(-)$  соответствует нулевому значению дискриминанта  $D$  некоторого квадратного уравнения, которое будет описано в одном из последующих разделов.

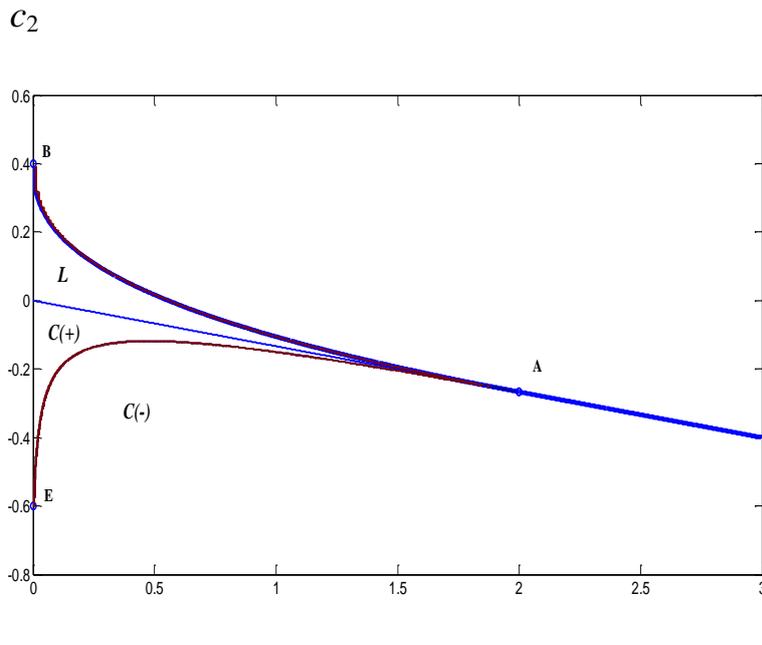


Рис. 1. Области либрации и циркуляции аргумента перицентра в плоскости параметров задачи

Отметим, что при  $\gamma = 0$  точки В, Е и прямая ВЕ соответствуют граничным точкам и основанию ( $c_1 = 0$ ) криволинейного треугольника, построенного в плоскости параметров ( $c_2, c_1$ ) в работах (Лидов, 1961, 1963; Lidov, 1962). Кривая АВ отвечает устойчивой равновесной точке (11), а прямая, уходящая из точки А в область  $\gamma > 2$ , продолжая «сепаратрисную» прямую (14), отвечает траекториям с  $e = 0$ .

Для иллюстрации сказанного выше приведем пример семейства фазовых траекторий. Средства построения линий уровня функции двух переменных (как впрочем, и другие стандартные численные процедуры, используемые в данной работе), как правило, содержатся в любой программно-математической системе, в частности, в системе MatLab.

На рис. 2 показано семейство фазовых траекторий для  $\gamma = 0.2$  и различных допустимых значений постоянной интеграла  $c_2$ . Три из этих траекторий, показанных жирными линиями и на которых нанесены величины  $c_2 = 0.05$ ,  $-0.1$  и  $-0.4$ , отвечают областям  $L$ ,  $C(+)$  и  $C(-)$ , соответственно, а направление стрелок соответствует увеличению независимой переменной  $\tau$  и физического времени  $t$ . Жирной линией также показана и сепаратриса, отвечающая предельному решению с бесконечным периодом и с максимальным значением эксцентриситета  $e^{(s)} \approx 0.91$ . Штриховой линией нанесена кривая вертикальных касательных (17), проходящая через две особые точки данного семейства, отмеченные кружками.

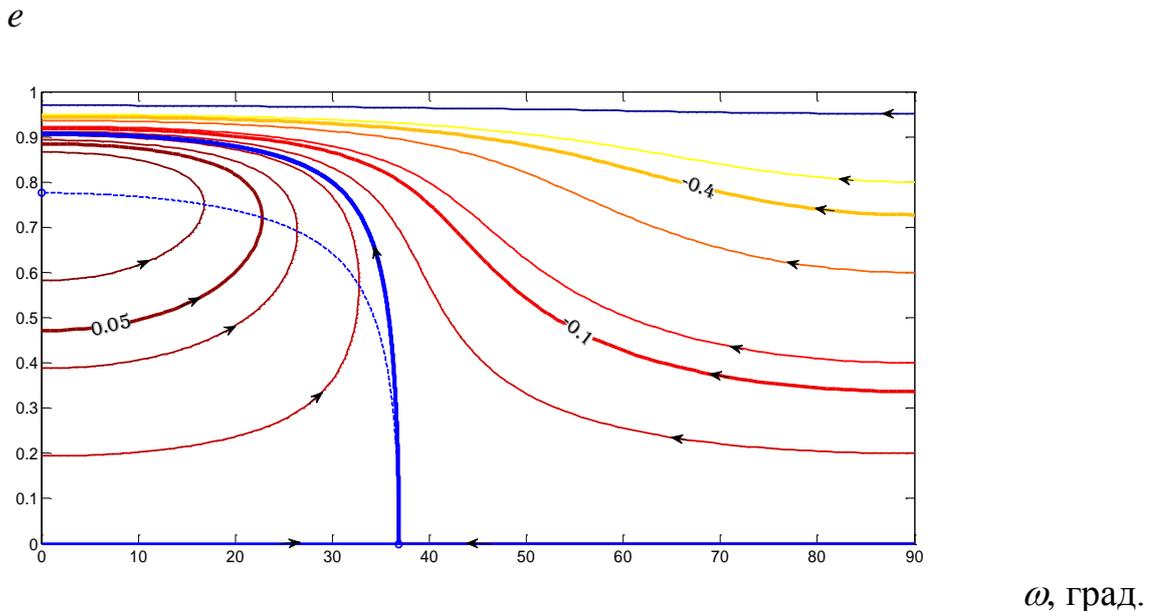


Рис. 2. Семейство фазовых траекторий в плоскости ( $\omega - e$ ) для  $\gamma = 0.2$

#### 4. Диапазоны изменения эксцентриситета и характерные периоды эволюции полярных орбит

Оценки диапазонов колебаний эксцентриситета как для либрационной, так и циркуляционной областей, могут быть получены путем решения некоторых уравнений. Они следуют из интеграла  $c_2$  при значениях  $\omega = 0$  или  $90^\circ$  и имеют различный вид для различных интервалов значений параметров  $\gamma$  и  $c_2$ .

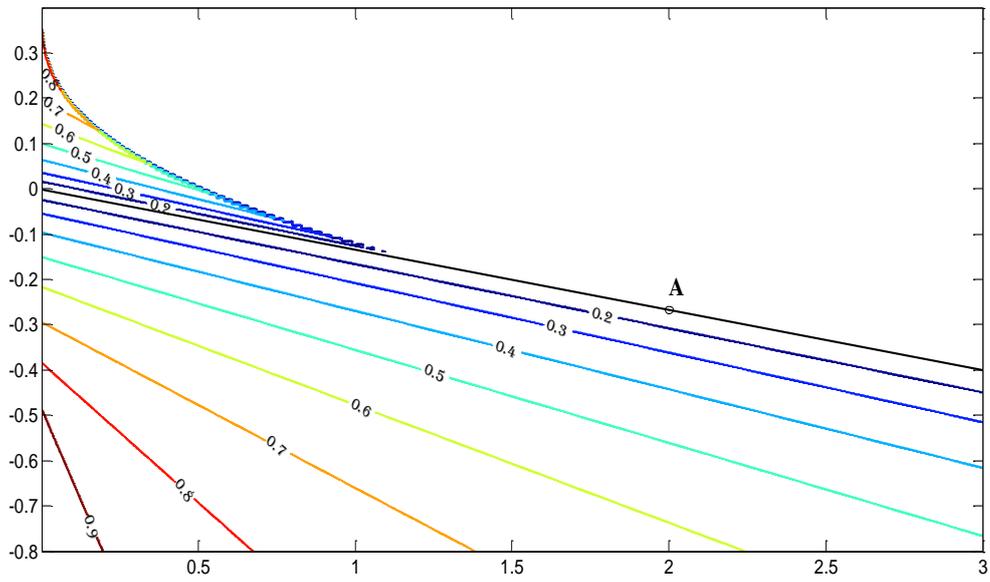
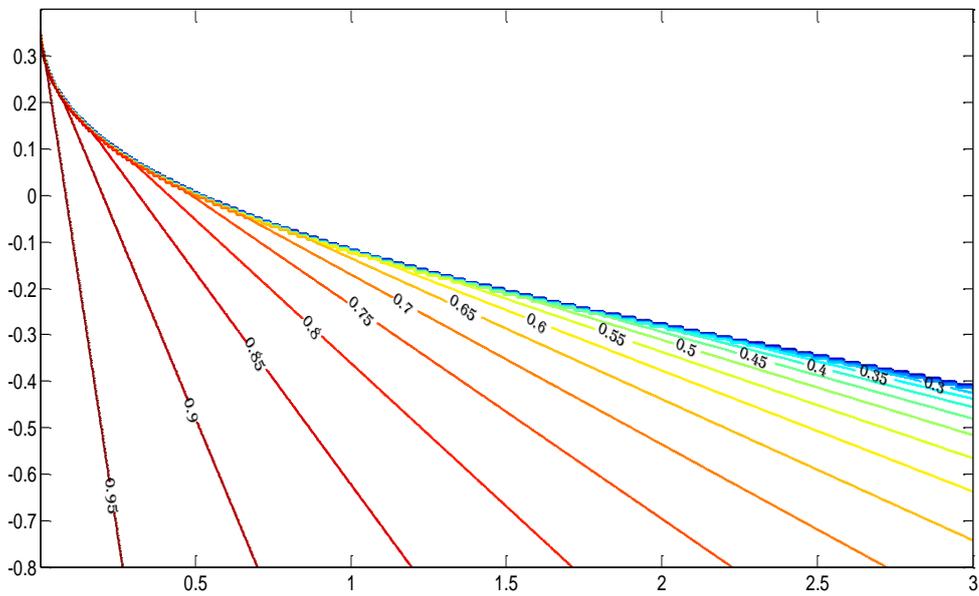
При  $0 < \gamma < 2$  и  $c_2 < c_2^{(s)}(\gamma)$  экстремальные значения переменной  $z = e^2$  для области циркуляции  $\omega$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} g_1(z_{\min}, \gamma, c_2) &= z_{\min} + \frac{2}{9}\gamma(1 - z_{\min})^{-3/2} + \frac{5}{3}c_2 = 0, & \omega = 90^\circ, \\ g_2(z_{\max}, \gamma, c_2) &= z_{\max} - \frac{1}{3}\gamma(1 - z_{\max})^{-3/2} - \frac{5}{2}c_2 = 0, & \omega = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

каждое из которых имеет один положительный корень в интервале ( $0 < z < 1$ ). В этом же диапазоне значений  $\gamma$ , но при  $c_2 > c_2^{(s)}(\gamma)$  для области либрации  $\omega$  экстремальные значения  $z$  определяются двумя корнями одного уравнения, совпадающего по форме со вторым из уравнений (19). Эти корни находятся, соответственно, в интервалах ( $0 < z_{\min} < z^*$ ) и ( $z^* < z_{\max} < z^{(s)}$ ). При  $\gamma > 2$  аргумент перицентра может изменяться лишь циркуляционно, а экстремальные значения  $z$  определяются теми же уравнениями (19).

На рис. 3 и 4 приведены результаты численного решения уравнений (19). В плоскости параметров ( $\gamma, c_2$ ) показаны изолинии, соответственно, минимальных и максимальных значений эксцентриситета. Жирная прямая на рис. 3 соответствует зависимости (14). Из этих рисунков можно приближенно определить экстремальные значения эксцентриситета, в частности, для траектории, отмеченной на рис. 2 числовым значением  $c_2 = -0.1$ . Путем графической интерполяции находятся величины  $e_{\min} \approx 0.34$ ,  $e_{\max} \approx 0.92$ , приближенно соответствующие экстремальным значениям  $e$  на рис. 2.

Численное решение уравнения (8) и последующая подстановка в (17) дает возможность построения изолиний  $\omega^{(l)}(\gamma, c_2) = \text{const}$ . Эта процедура дает семейство, похожее на  $e_{\min}(\gamma, c_2) = \text{const}$  показанное в узкой области  $L$  (рис. 3). Все изолинии  $\omega^{(l)}$ , начинаясь в точке А, оканчиваются на границе области при  $\gamma = 0$ , а сами постоянные значения ограничены диапазоном  $0 \leq \omega^{(l)} \leq \arcsin \sqrt{2/5}$ . Ввиду небольшой информативности данного семейства, его графического изображения здесь не дается.

$c_2$ Рис.3. Изолинии  $e_{\min}(\gamma, c_2) = \text{const}$  $\gamma$  $c_2$ Рис. 4. Изолинии  $e_{\max}(\gamma, c_2) = \text{const}$  $\gamma$

Вместе с оценкой диапазонов изменения эксцентриситета представляют интерес и динамические характеристики эволюции, в частности, периоды либрации и циркуляции аргумента перицентра. Подразумеваемая возможность численного нахождения определенного интеграла, например, методом Гаусса, введем обозначение

$$J(\gamma, c_2) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{f(z, \gamma, c_2)}}, \quad (20)$$

где функция  $f(z)$  определена формулами (6) при  $c_1 = 0$ . Тогда, согласно (5), безразмерные периоды изменения эксцентриситета и аргумента перицентра (по  $\tau$ ) можно записать в виде

$$T_e^{(\tau)}(\gamma, c_2) = \frac{J(\gamma, c_2)}{4\sqrt{6}},$$

$$T_\omega^{(\tau)}(\gamma, c_2) = \begin{cases} T_e^{(\tau)}(\gamma, c_2), & c_2 > c_2^{(s)} \left( \text{либрация } \omega \right) \\ 2T_e^{(\tau)}(\gamma, c_2), & c_2 < c_2^{(s)} \left( \text{циркуляция } \omega \text{ от } 0 \text{ до } 360^\circ \right). \end{cases} \quad (21)$$

Периоды либрации и циркуляции  $\omega$  вблизи особой точки и вблизи нулевого значения  $z$  могут быть найдены аналитически.

В окрестности устойчивой равновесной точки период малых колебаний  $e$  и  $\omega$  может быть получен из решения уравнений (7), линеаризованных относительно  $e - e^*$  и  $\omega$ . Его зависимость от параметра  $\gamma$  определяется формулой

$$T_e^{(\tau)}(\gamma) = \frac{\pi}{10\sqrt{2}} \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2/5} \right]^{-1/2}. \quad (22)$$

Период циркуляции аргумента перицентра может быть получен из второго уравнения (7) при  $z \rightarrow 0$  или

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -4(\gamma - 2 + 5\sin^2 \omega). \quad (23)$$

Вычисление модуля определенного интеграла  $\tau = \frac{1}{4} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\vartheta}{2 - \gamma - 5\sin^2 \vartheta}$  в пределах от  $0$  до  $360^\circ$  дает при  $\gamma > 2$  следующую формулу

$$T_\omega^{(\tau)}(\gamma) = \frac{\pi}{2\sqrt{(\gamma-2)(\gamma+3)}}. \quad (24)$$

На рис. 5 сплошными кривыми показаны аналитические зависимости от  $\gamma$  безразмерных периодов либрации  $T_e^{(\tau)}$  ( $\gamma < 2$ ,  $c_2 \approx c_2^*$ ) и циркуляции  $T_\omega^{(\tau)}$  ( $\gamma > 2$ ,  $c_2 \approx c_2^{(s)}$ ), штриховая вертикальная асимптота отвечает  $\gamma = 2$ , а кружочками отмечены значения, полученные численно. На рис. 6 показаны изолинии  $T_e^{(\tau)}(\gamma, c_2) = \text{const}$  в плоскости параметров  $(\gamma, c_2)$ .

$$T_e^{(\tau)}, T_\omega^{(\tau)}$$

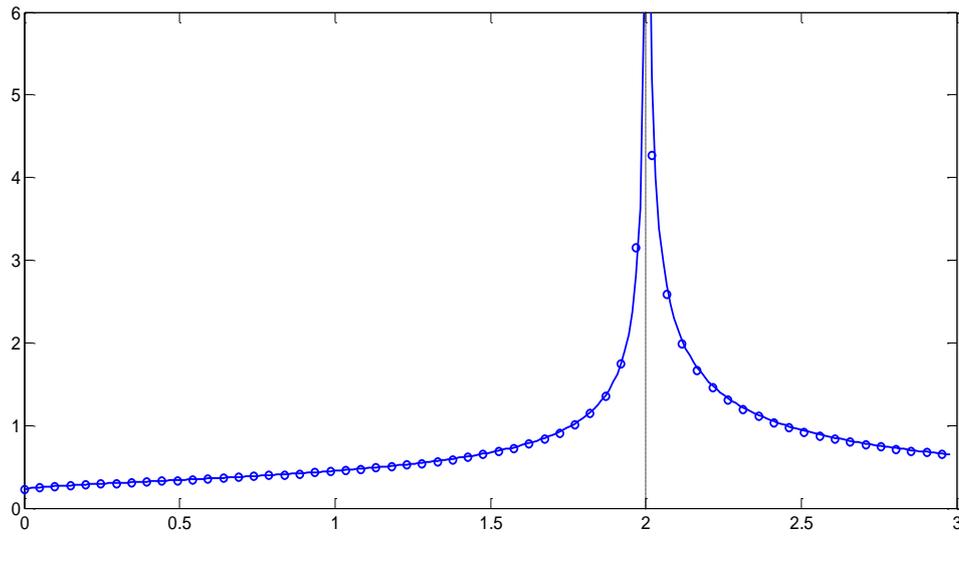


Рис. 5. Безразмерные периоды либрации  $T_e^{(\tau)}$  ( $\gamma < 2$ ) и циркуляции  $T_\omega^{(\tau)}$  ( $\gamma > 2$ ) в зависимости от  $\gamma$ .

$$T_e^{(\tau)}$$

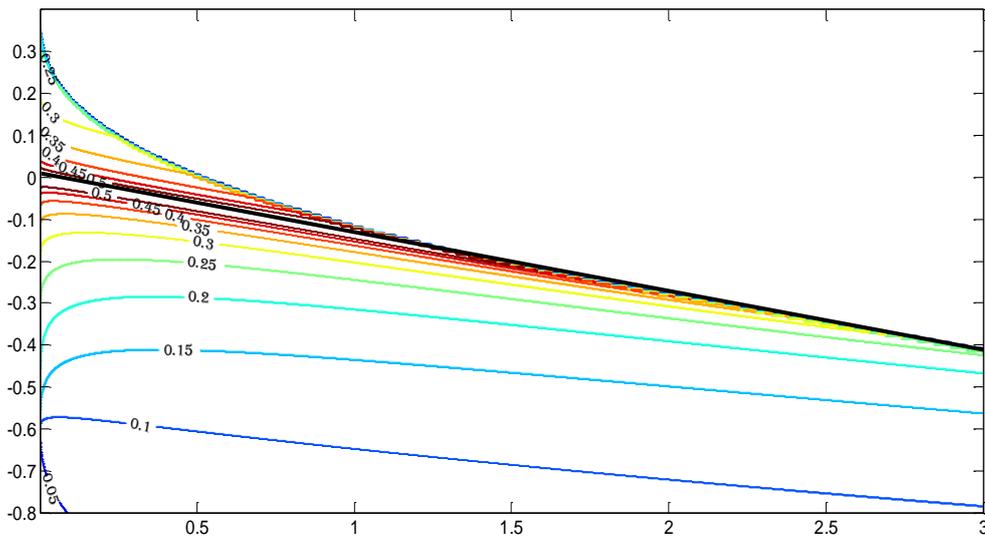


Рис. 6. Изолинии  $T_e^{(\tau)}(\gamma, c_2) = \text{const}$

Для перехода к физическому времени  $t$ , согласно (2), служат соотношения

$$t = \frac{\tau}{n\beta}, \quad T_{e,\omega}^{(t)} = \frac{T_{e,\omega}^{(\tau)}}{n\beta}. \quad (25)$$

*Замечание:* Линеаризация уравнений (7) при  $z \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \omega^{(s)}$  дает для корней  $\lambda_{1,2}$  характеристического уравнения выражение

$$\lambda_{1,2} = \pm 8\sqrt{(2-\gamma)(3+\gamma)},$$

соответствующее седловому типу этой особой точки при  $\gamma < 2$ .

Изолинии, приведенные на рис. 3, 4, 6, вместе с формулой (25) дают возможность для конкретных значений параметров  $\gamma$  и  $c_2$  приближенно (грубо) оценить главные характеристики эволюционирующей орбиты – экстремальные значения эксцентриситета и период его изменения. Ниже в табл. 1 эти характеристики, полученные с использованием численного решения соответствующих уравнений, приводятся для  $\gamma = 0.2$  и трех значений  $c_2$ , отвечающих трем различным областям на рис. 1.

Табл. 1

Экстремальные значения эксцентриситета и период его изменения для  $\gamma = 0.2$  и параметра  $c_2$ , принадлежащих различным областям

Область	$c_2$	$e_{min}$	$e^*$	$e_{max}$	$e^{(s)}$	$T_e^{(\tau)}$
$L$	0.05	0.4714	0.7758	0.8846	0.9067	0.3518
$C(+)$	- 0.1	0.3368	-	0.9194	-	0.3390
$C(-)$	- 0.4	0.7274	-	0.9447	-	0.1561

Значения  $e_{min}$ ,  $e_{max}$ ,  $T_e^{(\tau)}$  приближенно могут быть найдены графической интерполяцией с использованием рисунков 3, 4 и 6, соответственно. Кроме того, экстремальные и особые значения эксцентриситета могут быть получены и из рис. 2. Для постоянной  $c_2 = 0.05$  (область  $L$ ) численное решение дает для амплитуды либрации аргумента перицентра значение  $\omega^{(l)} \approx 22^\circ.7$  и соответствующее значение  $e^{(l)} \approx 0.72$ . На рисунке - это приближенные координаты точки пересечения штриховой и жирной либрационной кривых.

В следующих разделах будет описан способ приближенного нахождения решения эволюционной системы (7) с существенным использованием результатов ее качественного исследования и возможности строгого вычисления основных количественных характеристик эволюции элементов орбиты.

## 5. Аппроксимация иррациональной части подынтегральной функции и обращение интеграла

Зависимость  $\tau$  от  $z$  определяется формулами (5), (6) в которых при  $c_1 = 0$  выражения для функций  $f_1$  и  $f_2$  принимают более простой вид (9). В данном случае одним из мыслимых путей нахождения интеграла (5) могло бы стать разложение иррациональных слагаемых этих функций в ряды по степеням  $z$ . Однако, чтобы интеграл (5) приводился к эллиптическому (или, хотя бы, к ультраэллиптическому), максимальная степень таких разложений должна быть невысокой (3 или 4). Тем самым было бы введено ограничение по эксцентриситету (или по  $z$ ) на корректность нахождения интеграла и на применимость его обращения. Это обстоятельство в дальнейшем будет проиллюстрировано численным примером.

В данной работе предлагается иной приближенный способ решения задачи. Для реального движения функция  $f$  в подынтегральном выражении (5) должна быть неотрицательной, а как показывает качественный анализ системы (7), переменная  $z$  изменяется в ограниченных пределах  $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$ . Представим функцию  $f$  следующем виде

$$f(z, \gamma, c_2) = g(z, \gamma, c_2)(z - z_{\min})(z_{\max} - z), \quad (27)$$

а следующие очевидные равенства служат и определением, и способом вычисления функции  $g(z, \gamma, c_2)$

$$g(z, \gamma, c_2) = (1 - z) \frac{g_1(z, \gamma, c_2) g_2(z, \gamma, c_2)}{(z - z_{\min})(z_{\max} - z)} = \frac{f(z, \gamma, c_2)}{(z - z_{\min})(z_{\max} - z)}. \quad (28)$$

Из этого равенства, где  $g_1$  и  $g_2$  определены формулами (9), можно получить выражения для функции  $g$  при специальных значениях ее аргумента:

$$g(0, \gamma, c_2) = - \frac{g_1(0, \gamma, c_2) g_2(0, \gamma, c_2)}{z_{\min} z_{\max}} = \frac{2}{3z_{\min} z_{\max}} \left( \frac{1}{3} \gamma + \frac{5}{2} c_2 \right)^2, \quad (29)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_{\min}} g(z, \gamma, c_2) = \frac{5}{2} \left[ \frac{\gamma}{3} (1 - z_{\min})^{-5/2} + 1 \right] \frac{z_{\min} (1 - z_{\min})}{z_{\max} - z_{\min}}, \quad (30)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_{\max}} g(z, \gamma, c_2) = \frac{5}{3} \left[ \frac{\gamma}{2} (1 - z_{\max})^{-5/2} - 1 \right] \frac{z_{\max} (1 - z_{\max})}{z_{\max} - z_{\min}}. \quad (31)$$

Далее будет использован методический прием, упрощающий функцию  $g$  (а следовательно, и  $f$ ) до такой степени, что интеграл (5) при  $c_1 = 0$  может быть приведен к эллиптическому виду. В произведении (27) экстремальные значения переменной  $z$  известны из численного решения соответствующих уравнений вида (19). Произведение двух сомножителей  $(z - z_{\min})(z_{\max} - z)$ , в основном определяющее поведение функции  $f$  в диапазоне  $0 \leq z < 1$ , в дальнейшем для краткости будем условно называть «ядром». Оставляя для упрощения записи в дальнейших формулах лишь аргументы функций, заметим, что функция  $g(z)$  получается делением исходной функции  $f(z)$  на «ядро», согласно формуле (28). Для приведения интеграла (5) при  $c_1 = 0$  к эллиптическому виду применим аппроксимацию функции  $g(z)$  квадратичным полиномом

$$P(z) = p_1 z^2 + p_2 z + p_3 \approx g(z), \quad (32)$$

в котором коэффициенты  $p_1, p_2, p_3$  определяются по способу наименьших квадратов (подобная процедура в среде MatLab также относится к классу стандартных). Корни полинома  $P(z)$  определяются простейшими формулами

$$z_1 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 + \sqrt{D}), \quad z_2 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 - \sqrt{D}), \quad D = p_2^2 - 4p_1 p_3. \quad (33)$$

Обращаясь к рис. 1, укажем, что тонкая кривая, ранее упоминавшаяся при его описании, соответствует нулевым значениям дискриминанта  $D$ , причем  $D > 0$  в областях  $L, C(+)$  и  $D < 0$  в области  $C(-)$ . Полином четвертой степени

$$Q(z) = P(z)(z - z_{\min})(z_{\max} - z) \approx f(z) \quad (34)$$

будет аппроксимирующим для функции  $f(z)$  и представим в следующем виде

$$Q(z) = p_1 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z_4 - z), \quad (35)$$

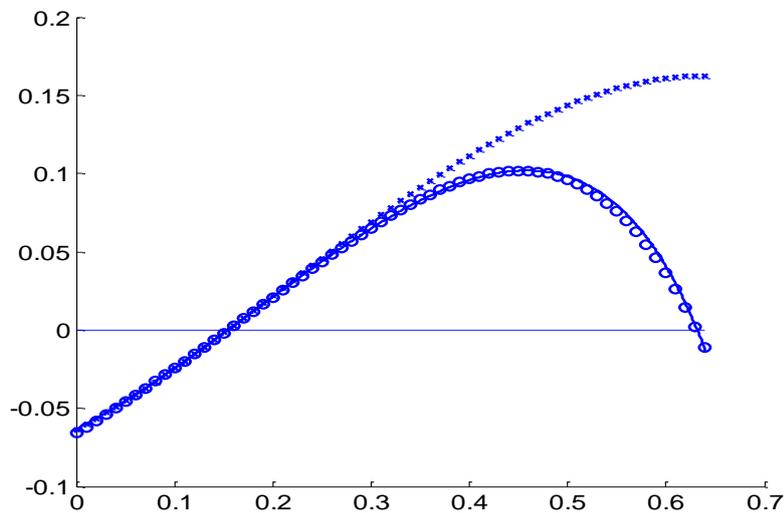
где  $z_3 = z_{\min}$ ,  $z_4 = z_{\max}$ .

Так как по своему физическому смыслу переменная  $z = e^2$  удовлетворяет неравенствам  $0 \leq z < 1$ , то и аппроксимацию естественно строить лишь на этом же множестве значений. Однако, конкретные вычисления показывают, что из-за особенности функции  $f(z)$  при  $z = 1$  для успеха аппроксимации его верхняя граница должна быть отодвинута влево до некоторой положительной величины  $z_a$ , которая тем самым будет играть роль методической константы. В

дальнейших расчетах данной работы принято  $z_a = 0.5$ . Кроме того, отметим положительность коэффициентов  $p_1, p_2, p_3$  во всех проведенных тестовых расчетах.

На рис. 7 сплошной линией показана зависимость  $f(z)$ , кружками – ее аппроксимация  $Q(z)$ . Крестиками показана соответствующая зависимость  $\Phi(z)$ , полученная путем разложения иррациональных слагаемых в произведении функций  $g_1(z)$  и  $g_2(z)$  с точностью до  $z^3$  включительно. Корректность этих разложений ограничивается величиной  $z \approx 0.3$ . Данная иллюстрация приведена для орбиты ИСЛ с параметрами:  $a = 3500$  км ( $\gamma \approx 0.8121$ ),  $e_0 = 0.4$ ,  $i_0 = 90^\circ$ ,  $\omega_0 = 80^\circ$  ( $c_2 \approx -0.2318$ ), а возмущающими телами являются Земля и Солнце.

$f(z), Q(z), \Phi(z)$



$z$

Рис. 7. Зависимости от  $z$  функций  $f(z)$  – сплошная кривая,  $Q(z)$  – кружки,  $\Phi(z)$  – крестики.

Таким образом, при фиксированных значениях параметров задачи  $\gamma$  и  $c_2$  искомое аналитическое решение для его построения (конструирования) требует проведения ряда предварительных вычислений как экстремальных значений эксцентриситета, так и коэффициентов аппроксимирующего полинома. После этого обращением квадратуры (5) находится общее решение задачи при  $c_1 = 0$  в виде зависимостей элементов  $e$  и  $\omega$  от времени. Это обращение выполняется по-разному для различных областей значений параметров  $\gamma$  и  $c_2$ . Далее приводятся формулы для нахождения  $e(\tau)$   $\omega(\tau)$  и некоторых промежуточных величин, полученные с использованием справочного руководства (Градштейн, Рыжик, 1962).

### 5.1. Решение для областей $L$ и $C(+)$

В рассматриваемом случае  $D > 0$ , все четыре корня полинома  $P(z)$  действительны и вместе с переменной  $z$  удовлетворяют неравенствам

$$z_2 < z_1 < z_3 < z < z_4, \quad (36)$$

а экстремальные значения  $z$  определяются очевидными формулами

$$z_3 = e_{\min}^2, \quad z_4 = e_{\max}^2. \quad (37)$$

Зависимость эксцентриситета от  $\tau$  определяется формулами

$$\begin{aligned} e(\tau) &= \sqrt{\frac{z_1(z_4 - z_3)\operatorname{sn}^2 u - z_3(z_4 - z_1)}{(z_4 - z_3)\operatorname{sn}^2 u - z_4 + z_1}}, \quad k^2 = \frac{(z_4 - z_3)(z_1 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}, \\ u &= 4\operatorname{sign}(\sin 2\omega_0) \sqrt{6(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)\tau + F(\varphi_0, k^2)}, \\ \sin^2 \varphi_0 &= \frac{(z_4 - z_1)(z_0 - z_3)}{(z_4 - z_3)(z_0 - z_1)}, \quad z_0 = e_0^2, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\operatorname{sn} u$  и  $F(\varphi_0, k^2)$  – соответственно, эллиптический синус Якоби и неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ .

В диапазоне изменения переменной  $z$  модуль  $k$  остается меньшим единицы. Он обращается в нуль при  $z_3 = z_4$ , т.е. на линии ВА рис.1, на которой  $c_2(\gamma) = c_2^*(\gamma)$ , что соответствует устойчивой особой точке в плоскости  $(\omega, e)$ , а также при  $z_1 = z_2$ , когда  $D = 0$ , т.е., на линии ЕА. Значение  $k = 1$  достигается при  $z_1 = z_3 = 0$ , т.е. на прямой  $c_2(\gamma) = c_2^{(s)}(\gamma)$ , разделяющей области  $L$  и  $C(+)$ , соответствующей сепаратрисе в плоскости  $(\omega, e)$ .

Зависимость  $\omega(\tau)$  находится с помощью интеграла (8) и следующей из него общей формулы

$$\omega(\tau) = \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{1}{e^2(\tau)} \left\{ \frac{2}{15} \gamma [1 - e^2(\tau)]^{-3/2} + c_2 \right\}}. \quad (39)$$

## 5.2. Решение для области C(-)

В рассматриваемом случае  $D < 0$ , полином  $P(z)$  имеет два комплексно-сопряженных корня

$$z_1 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 + i\sqrt{-D}), \quad z_2 = \frac{1}{2p_1}(-p_2 - i\sqrt{-D}), \quad i = \sqrt{-1} \quad (40)$$

(очевидно, что здесь невозможно спутать мнимую единицу с наклоном орбиты  $i$ ) и два действительных корня (37), причем  $z_3 < z < z_4$ . Зависимость эксцентриситета от  $\tau$  определяется формулами

$$e(\tau) = \sqrt{\frac{pz_3 + qz_4 + (pz_3 - qz_4)\operatorname{сн}u}{p + q + (p - q)\operatorname{сн}u}}, \quad \sigma^2 = \frac{(z_4 - z_3)^2 - (p - q)^2}{4pq},$$

$$u = 8\operatorname{sign}(\sin 2\omega_0)\sqrt{6p_1pq\tau} + F(\varphi_0, \sigma^2), \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{p(z_0 - z_3)}{q(z_4 - z_0)}, \quad (41)$$

$$p = \sqrt{(m_1 - z_4)^2 + m_2^2}, \quad q = \sqrt{(m_1 - z_3)^2 + m_2^2}, \quad m_1 = -\frac{p_2}{2p_1}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{-D}}{2p_1},$$

где  $\operatorname{сн}u$  и  $F(\varphi_0, \sigma^2)$  – соответственно, эллиптический косинус Якоби и неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $\sigma$ .

В диапазоне изменения переменной  $z$  модуль  $\sigma$  остается меньшим единицы. Он обращается в нуль либо при  $p = q$ , т.е. при  $D = 0$  (кривая ЕА на рис. 1), либо при  $z_3 = z_4$ , т.е. на прямой  $c_2(\gamma) = c_2^{(s)}(\gamma)$ , уходящей вправо вниз от точки А. В этом случае в плоскости  $(\omega, e)$  нет особых точек.

Зависимость  $\omega(\tau)$ , как и в случае 5.1, находится с помощью формулы (39).

Ниже приводится таблица, с неравенствами, определяющими тип и расположение корней полинома  $P(z)$ . Кроме этого, в ней приводятся знаки дискриминанта, диапазоны и предельные значения модулей эллиптических функций, входящих в решение.

Расположение корней полинома  $P(z)$  в различных множествах плоскости ( $\gamma, c_2$ )

Множество	Корни полинома $P(z)$	Дискриминант	Модули эллиптических функций
Линия ВА $c_2(\gamma) = c_2^*(\gamma)$	$z_2 < z_1 < 0 < z_3 = z = z_4$	$D > 0$	$k = 0$
Область $L$	$z_2 < z_1 < 0 < z_3 < z < z_4$	$D > 0$	$0 < k < 1$
Линия $c_2(\gamma) = c_2^{(s)}(\gamma)$ в области $0 < \gamma < 2$	$z_2 < z_1 = 0 = z_3 < z < z_4$	$D > 0$	$k = 1$
Область $C(+)$	$z_2 < z_1 < 0 < z_3 < z < z_4$	$D > 0$	$0 < k < 1$
Линия ЕА	$z_2 = z_1 < 0 < z_3 < z < z_4$	$D = 0$	$k = \sigma = 0$
Область $C(-)$	$z_1, z_2$ комплексно-сопряженные, $0 < z_3 < z < z_4$	$D < 0$	$0 < \sigma < 1$
Линия $c_2 = c_2^{(s)}(\gamma)$ в области $\gamma > 2$	$z_1, z_2$ комплексно-сопряженные, $0 < z_3 = z = z_4$	$D < 0$	$\sigma = 0$

Заметим, что в строках, соответствующих областям  $L$  и  $C(+)$ , неравенства каждого столбца совпадают, а в самой бифуркационной точке А (2, -4/15) все четыре корня  $z_1, z_2, z_3, z_4$  обращаются в нуль.

## 6. Сравнение предложенного решения с численным

В данном разделе в качестве численного примера рассмотрена эволюция ряда орбит искусственных спутников Луны (ИСЛ) под действием вековых возмущений, вызванных притяжением Земли и Солнца, которое, впрочем, оказывает на два порядка меньшее влияние. В предложенном конструктивно-аналитическом решении считается, что плоскости экватора Луны и ее орбиты совпадают между собой и лежат в плоскости эклиптики. При получении сравнительного решения выполняется численное интегрирование более

строгой по сравнению с системой (1) эволюционной системы, учитывающей средний наклон к эклиптике  $I$  «не эволюционирующей» лунной орбиты. Эта система в экваториальных кеплеровских элементах взята из работы (Вашковьяк и др., 2015), в которой следует принять  $\gamma_0 = \gamma$ ,  $\gamma_{k \neq 0} = 0$ ,  $I = 5^\circ.15$ .

Как и в предыдущем разделе, большая полуось спутниковой орбиты выбрана равной 3500 км, что соответствует значению  $\gamma \approx 0.8121$  и орбитальному периоду обращения спутника примерно 5 ч. 10 мин. В качестве остальных начальных элементов приняты  $e_0 = 0.4$ ,  $i_0 = 90^\circ$  и несколько различных значений  $\omega_0$ .

Построенное приближенное решение эволюционной задачи при различных значениях параметров  $\gamma$  и  $c_2$  показало достаточно удовлетворительное согласие с результатами численного интегрирования строгой системы. Ниже продемонстрированы результаты сравнительных расчетов, выполненных двумя названными методами.

На рис. 8 а) и б) показаны результаты расчетов с  $\omega_0 = 80^\circ$ , постоянная интеграла  $c_2 \approx -0.2318$ , ( $D < 0$ ,  $\sigma^2 \approx 0.004$ ), что соответствует области  $C(-)$ .

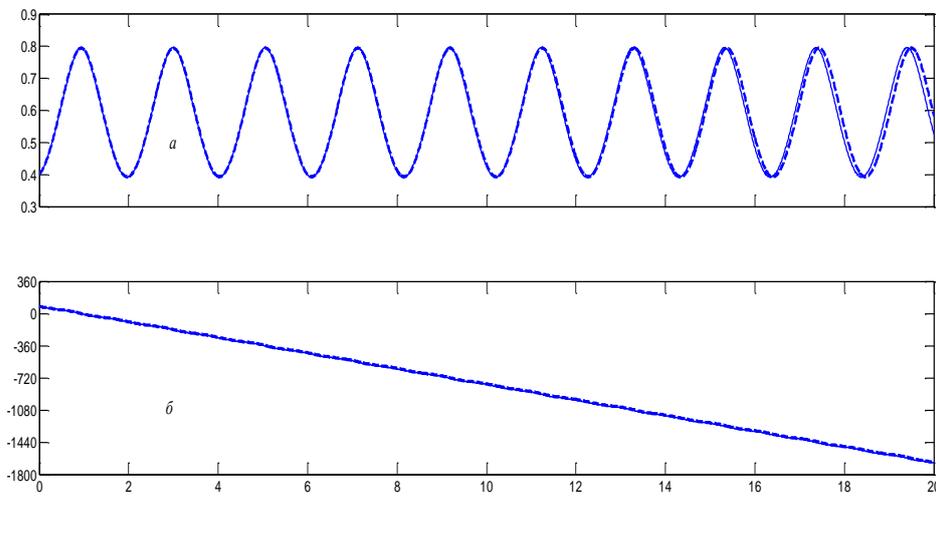
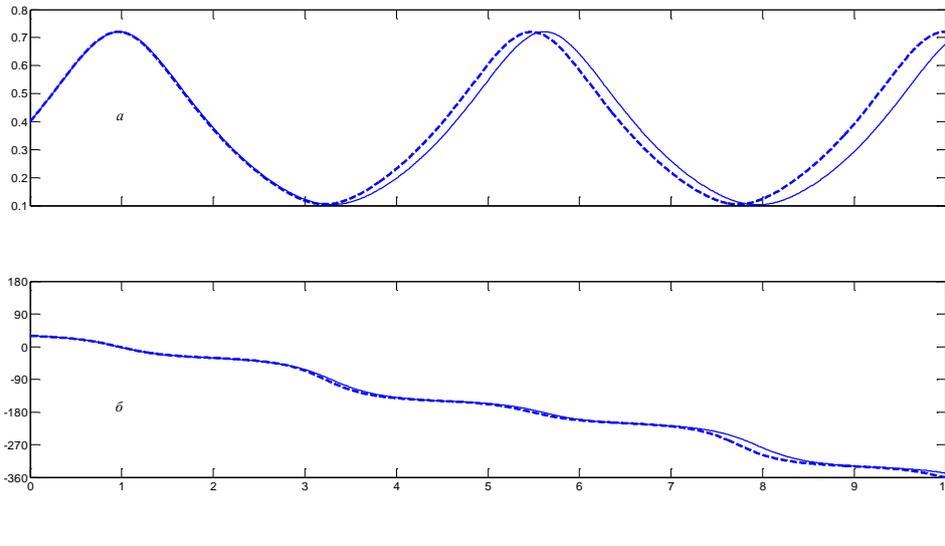


Рис. 8. Зависимости элементов от времени для  $\omega_0 = 80^\circ$   
 а) – эксцентриситета, б) - аргумента перигенра.

Сплошными кривыми показаны зависимости элементов от времени, полученные численным интегрированием эволюционной системы, а штриховыми – предложенным методом. Значения  $\omega$  на фрагментах (б) этих рисунков даны в градусах. Сравнение проведено на двадцатилетнем интервале времени, что составляет десятки тысяч орбитальных периодов обращения

спутника и заведомо превышает орбитальные периоды возмущающих тел, а также характерные периоды изменения эксцентриситета.

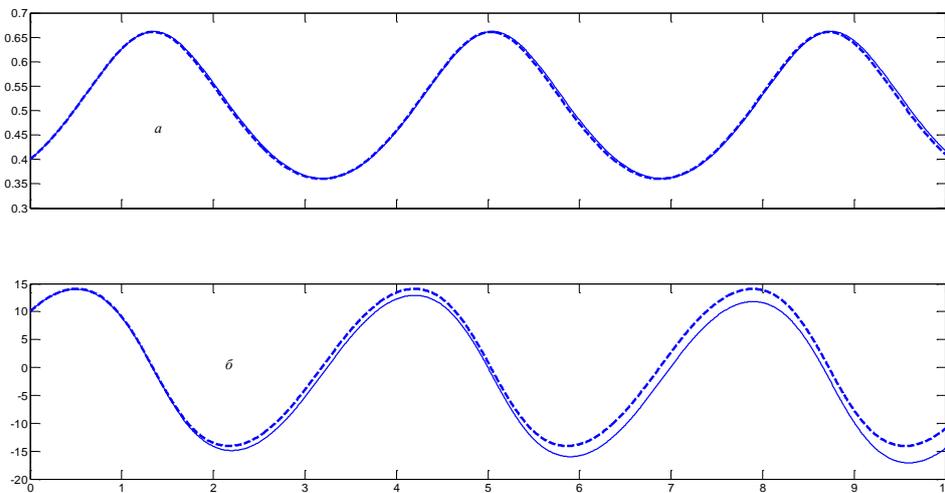
На рис. 9 *a)* и *б)* показаны результаты расчетов с  $\omega_0 = 30^\circ$ , постоянная интеграла  $c_2 \approx -0.1166$ , ( $D > 0$ ,  $k^2 \approx 0.75$ ), что соответствует области  $C(+)$ .



$t$ , ГОДЫ

Рис. 9. То же, что и на рис. 8, но на десятилетнем интервале времени и для  $\omega_0 = 30^\circ$ .

На рис. 10 *a)* и *б)* показаны результаты расчетов с  $\omega_0 = 10^\circ$ , постоянная интеграла  $c_2 \approx -0.0815$ , ( $D > 0$ ,  $k^2 \approx 0.43$ ), что соответствует области  $L$ .



$t$ , ГОДЫ

Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но для  $\omega_0 = 10^\circ$ .

Вышеприведенные примеры применения предложенного метода решения модельной задачи позволяют оценить ее погрешность относительно неинтегрируемой задачи (в реальной ситуации  $I \neq 0$ ) величиной порядка 10%. Укажем, что в проведенных тестовых расчетах, при задании в правых частях эволюционной системы  $I = 0$  результаты согласуются существенно лучше. А именно, сплошные и штриховые кривые на данных интервалах времени в масштабах рисунков оказываются практически неразличимыми визуально, что попутно свидетельствует о правильности полученных формул. Поэтому замена функции  $f(z)$  аппроксимирующим полиномом  $P(z)$  представляется вполне корректной и обуславливающей приемлемую методическую погрешность решения модельной эволюционной задачи.

## 7. Об устойчивости полярных орбит относительно наклона

Выявленные особенности эволюции полярных орбит, ее количественные характеристики, а также само конструктивно-аналитическое решение эволюционной системы, очевидно, справедливы лишь тогда, когда на рассматриваемом интервале времени наклонение  $i$  спутниковой орбиты остается близким к  $90^\circ$ . И хотя в интегрируемом частном случае модельной задачи ( $I = 0$ ) это условие выполнено  $i(t) = i_0 = 90^\circ$ , но реальное отличие плоскости движения возмущающего тела от экваториальной, вообще говоря, способно изменять величину  $i$  заметным образом. Однако, можно ожидать, что при малом значении параметра

$$s = \sin I \quad (42)$$

спутниковая орбита будет, тем не менее, оставаться близкой к полярной. Данное утверждение подтверждается рассмотрением эволюционной системы, использованной в сравнительных расчетах предыдущего раздела. При отбрасывании малых величин  $\sim s^2$  линейаризация этой системы и относительно переменной

$$\delta = i - \pi/2 \quad (43)$$

приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{de}{d\tau} = 10e\sqrt{1-e^2} \left[ \sin 2\omega - 2s (\sin \Omega \cos 2\omega - \delta \cos \Omega \sin 2\omega) \right], \quad (44)$$

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ -10se^2 \cos\Omega \sin 2\omega + 2\delta \left[ 5e^2 \sin 2\omega - s \sin\Omega (2 + 3e^2 + 5e^2 \cos 2\omega) \right] \right\}, \quad (45)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \begin{array}{l} -4\gamma(1-e^2)^{-3/2} + 2(1-e^2)(5\cos 2\omega - 1) + \\ + 20s(1-e^2) \sin\Omega \sin 2\omega - \\ - 2s\delta \cos\Omega \left[ 8 - 3e^2 + 5(e^2 - 2) \cos 2\omega \right] \end{array} \right\}, \quad (46)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \begin{array}{l} 2s(5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2) \cos\Omega - \\ - 2\delta \left[ -4\gamma(1-e^2)^{-3/2} + 5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2 + \right. \\ \left. + 5se^2 \sin\Omega \sin 2\omega \right] \end{array} \right\}. \quad (47)$$

При малых значениях  $s$  и  $\delta$  задача нахождения зависимости от времени переменных  $\delta$  и  $\Omega$  в первом приближении сводится к решению двух дифференциальных уравнений первого порядка (одно из них линейно относительно  $\delta$ ). Их правые части содержат как  $\sin\Omega$ ,  $\cos\Omega$ , так и  $e(\tau)$ ,  $\omega(\tau)$  - периодические функции независимой переменной, известные из решения эволюционной системы при  $s = \delta = 0$ . Наиболее просто зависимости  $\delta(\tau)$ ,  $\Omega(\tau)$  находятся в случаях постоянства эксцентриситета, когда  $e = 0$  при любом  $\omega$  или когда  $e = e^*$  при  $\omega = 0$ .

Если  $e = 0$ , из уравнений (45), (47) следуют приближенные зависимости

$$\begin{aligned} \delta(\tau) &= \delta_0 \exp \left\{ \frac{4s}{\Omega'_0} \left[ \cos\Omega(\tau) - \cos\Omega_0 \right] \right\}, \\ \Omega(\tau) &= \Omega_0 + \Omega'_0 \tau, \quad \Omega'_0 = 4 \left[ (1 + 2\gamma) \delta_0 - s \cos\Omega_0 \right], \end{aligned} \quad (48)$$

где  $\delta_0$  и  $\Omega_0$  - начальные значения переменных при  $\tau = 0$ .

Если  $e = e^*$  и  $\omega = 0$ , из этих же уравнений следует

$$\delta(\tau) = \delta_0 \exp \left\{ \frac{s}{5\delta_0 - s \cos \Omega_0} \left[ 5 \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2/5} - 4 \right] [\cos \Omega(\tau) - \cos \Omega_0] \right\},$$

$$\Omega(\tau) = \Omega_0 + \Omega'_0 \tau, \quad \Omega'_0 = 4 \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{1/5} (5\delta_0 - s \cos \Omega_0).$$
(49)

Таким образом, в обоих частных случаях  $\Omega(\tau)$  изменяется линейно со временем, а  $\delta(\tau)$  является ограниченной функцией. Конечно, для большей убедительности требуется исследование устойчивости полярных орбит относительно наклона в случае произвольных эксцентриситетов, отличных от постоянных значений 0 и  $e^*$ .

В случае  $I = 5^\circ.15$  численное интегрирование полной эволюционной системы, выполненное на интервале 500 лет, показало, что для трех вариантов начальных условий, принятых в предыдущем разделе, наклонение спутниковой орбиты отличается от  $90^\circ$  на величину, не большую примерно  $4^\circ$ . Интересно отметить, что для диапазона начальных значений аргумента перигея  $20^\circ < \omega_0 < 50^\circ$  наклонение может превышать  $90^\circ$  на относительно коротких интервалах. Эти кратковременные, так называемые «флипы» - переходы орбиты от прямой к обратной и наоборот, можно видеть на нижеследующем рис. 11 ( $\omega_0 = 30^\circ$ ).

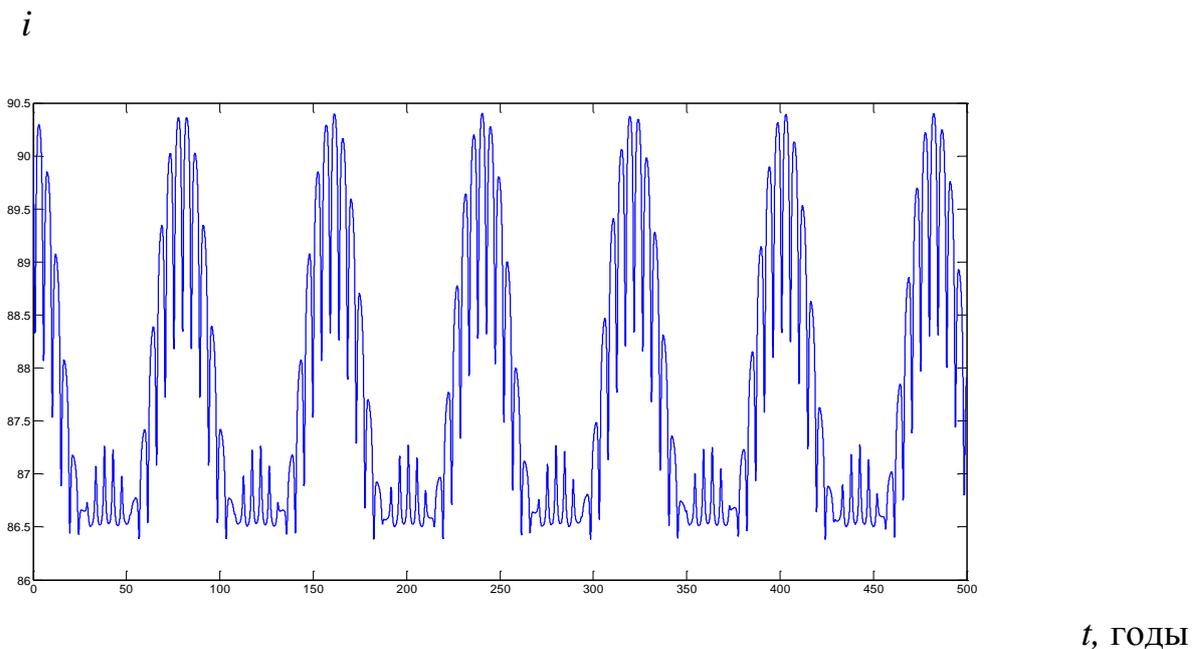


Рис. 11. Зависимость наклона от времени для  $\omega_0 = 30^\circ$ .

Здесь на долгопериодическое изменение наклонения, связанное с движением узла ( $T_\Omega \approx 85$  лет), накладываются колебания более короткого периода ( $T_e \approx 4.5$  года), связанные с изменением эксцентриситета (рис. 8).

## 8. Заключительные замечания

В данной работе предложен метод построения приближенного аналитического решения интегрируемой задачи о вековой (долгопериодической) эволюции класса полярных спутниковых орбит. Физическая модель включает в себя главные возмущающие факторы от сжатия центральной планеты и от удаленной притягивающей точки, а соответствующая эволюционная система получена осреднением полной возмущающей функции по всем быстрым переменным. С использованием известного первого интеграла системы описаны ее качественные особенности и определены основные количественные характеристики эволюции.

Решение эволюционной системы, предложенное в данной работе, по сути дела, является конструктивно-аналитическим, поскольку для его построения необходимо использовать предварительно определенные экстремальные значения эксцентриситета эволюционирующей орбиты. Эти значения находятся численным методом как решения строгих уравнений. Выполняемое в дальнейшем приведение квадратуры (5) при  $c_1 = 0$  к эллиптическому виду основано на представлении функции  $f(z)$  в виде произведения  $(z - z_{\min})(z_{\max} - z)$  - так называемого «ядра» и функции  $g(z)$  с ее последующей аппроксимацией квадратичным полиномом. На заданном интервале аппроксимации его дискриминант определяет тип корней аппроксимирующего полинома и различный вид аналитических зависимостей эксцентриситета от времени, а аргумент перицентра находится из известного первого интеграла эволюционной системы.

На примере нескольких полярных орбит ИСЛ показано удовлетворительное совпадение результатов расчетов, выполненных предложенным методом и методом численного интегрирования более строгой эволюционной системы, в которой учитывалось отклонение плоскости орбит возмущающих тел (Земли и Солнца) от плоскости лунного экватора. Относительная стабильность наклонения рассматриваемых орбит на длительных интервалах времени обуславливает корректность использования качественных особенностей эволюции и ее количественных характеристик, а также правомерность применения полученного аналитического решения к некоторым спутниковым задачам. Развитием данной работы могло бы стать применение предложенного конструктивно-аналитического подхода к общему компланарному случаю рассматриваемой эволюционной задачи при  $c_1 \neq 0$ .

## Библиографический список

*Вашковьяк М.А.* Об устойчивости круговых орбит спутников при совместном влиянии возмущений от внешнего тела и нецентральности гравитационного поля планеты // Космические исследования. 1974. Т. 12. №. 6. С. 834-847. (*Vashkov'yak M.A.* Stability of Circular Satellite Orbits for Combined Action of Perturbations from an External Body and from the Noncentrality of the Planetary Gravitational Field // Cosmic Research. 1974. V. 12. No 6. P. 757-770).

*Вашковьяк М.А.* О специальных частных решениях двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты // Письма в Астрон. журн. 1996. Т. 22. № 3. С. 231-240. (*Vashkov'yak M. A.* On the Special Particular Solutions of a Double-Averaged Hill's Problem with Allowance for Flattering of the Central Planet // Astronomy Letters. 1996. V. 22. No 2. P. 207-216).

*Вашковьяк М.А.* Об устойчивости стационарных решений двукратно осредненной задачи Хилла с учетом сжатия центральной планеты // Письма в Астрон. журн. 1998. Т.24. № 10. С. 791-800. (*Vashkov'yak M. A.* On the Stability of Stationary Solutions of the Double-Averaged Hill's Problem with an Oblate Central Planet // Astronomy Letters. 1998. V. 24. No 5. P. 682-691).

*Вашковьяк М.А.* Об эволюции орбит далеких спутников Урана // Письма в Астрон. журн. 1999. Т.25. № 7. С. 554-560. (*Vashkov'yak M. A.* Evolution of the Orbits of Distant Satellites of Uranus // Astronomy Letters. 1999. V. 25. No 7. P. 476-481).

*Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В.* Об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения ее массивных спутников и Солнца // Астрон. Вест. 2015. Т. 49. № 4. С. 283-299. (*Vashkov'yak M. A., Vashkov'yak S. N., Emel'yanov N.V.* On the Evolution of Satellite Orbits under the Action of the Planet's Oblateness and Attraction by Its Massive Satellites and the Sun // Solar System Research. 2015. V.49. No 4. P. 247-262).

*Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, переработанное при участии Ю.В. Геронимуса и М.Ю. Цейтлина. М.: ФМ. 1962. 1100 С.

*Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. Вып. 8. С. 5-45.

*Лидов М.Л.* О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // В кн. «Проблемы движения искусственных небесных тел». С. 119-134. Изд. АН СССР. М. 1963.

*Лидов М.Л., Ярская М.В.* Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральнойности поля планеты // Космические исследования. 1974. Т. 12. № 2. С.155-170. (*Lidov M. L., Yarskaya M. V.* Integrable Cases in the Problem of the Evolution of a Satellite Orbit under the Joint Effect of an Outside Body and of the Noncentrality of the Planetary Field // *Cosmic Research*, 1974. V. 12. No 2. P. 139-152).

*Прохоренко В.И.* Об условиях пересечения орбиты спутника с поверхностью центрального тела конечного радиуса в двукратно осредненной ограниченной задаче трех тел // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 259. С. 156-173.

*Прохоренко В.И.* Планетоцентрическая гравитационная сфера доминирующего влияния возмущений от сжатия планеты над возмущениями от внешних тел // Космические исследования. 2010. Т.48. № 2. С. 178-191 (*Prokhorenko V. I.* Planetocentric Gravitational Sphere of the Dominating Influence of Perturbations from Planet Oblateness over Perturbations from External Bodies // *Cosmic Research*. 2010. V. 48. No 2. P. 174-187).

*Allan R.R., Cook G.E.* The Long-Period Motion of the Plane of a Distant Circular Orbit // *Proc. R. Soc. Lond.* 1964. A **280**. No 1380. P. 97-109.

*Brumberg V.A., Evdokimova L.S & Kochina N.G.* Analytical Methods for the Orbits of Artificial Satellites of the Moon // *Celest. Mech.* 1971. V. 3. P. 197-221.

*Kinoshita H. and Nakai. H.* Analytical Solution of the Kozai Resonance and Its Application // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1999. V.75. P. 125-147.

*Kinoshita H. and Nakai. H.* General Solution of the Kozai Mechanism // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2007. V.98. P. 67-74.

*Kozai Y.* Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Eccentricity // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591 - 598.

*Kozai Y.* Motion of Lunar orbiter // *Publ. Astron Soc. Japan.* 1963. V. 15. No 3. P. 301-312.

*Kudielka V.W.* Equilibria Bifurcations of Satellite Orbits // In The Dynamical Behavior of our Planetary System (R. Dvorak and J. Henrard Eds.). P. 243-255. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. 1997.

*Lidov M.L.* The Evolution of Orbits of Artificial Satellites of Planets under the Action of Gravitational Perturbations of External Bodies. // Planet. Space Sci. 1962. Vol. 9. P. 719-759).

*Lidov M.L.* On the Approximated Analysis of the Orbit Evolution of Artificial Satellites // In Dynamics of Satellites (M. Roy Ed.). P. 168-179. Springer-Verlag. Berlin. Göttingen. Heidelberg 1963. Symposium Paris. May 28-30. 1962.

*Lidov M.L.* Integrable Cases of Satellite problem with the Third Body and the Oblate Planet // In The Stability of the Solar System and Small Stellar Systems (Y. Kozai Ed.) P.117-124. 1974. IAU.

*Qesterwinter C.* The Motion of a Lunar Satellite // Celest. Mech. 1970. V. 1. P. 368-436.

*Sekiguchi N.* On the Libration of the Orbital Plane of a Stationary Artificial Satellite with a Circular Orbit // Publ. Astron. Soc. Japan. 1961. **13**. No 2. P. 207-211.

*Shevchenko I.I.* The Lidov-Kozai Effect – Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy. Springer International Publishing Switzerland 2017. Printed by Printforce, the Netherlands. 200 P.

*Uphoff. C.* Stabilizing Influence of Earth Perturbations on Polar Lunar Orbiters // AIAA Pap. 1976. No 843. P. 1-6.

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Постановка задачи.....	5
3. Качественные особенности эволюции полярных спутниковых орбит ( $i = 90^\circ$ , $c_1 = 0$ ).....	8
4. Диапазоны изменения эксцентриситета и характерные периоды эволюции полярных орбит .....	12
5. Аппроксимация иррациональной части подынтегральной функции и обращение интеграла .....	17
5.1. Решение для областей $L$ и $C(+)$ .....	20
5.2. Решение для области $C(-)$ .....	21
6. Сравнение предложенного решения с численным .....	22
7. Об устойчивости полярных орбит относительно наклона .....	25
8. Заключительные замечания .....	28
Библиографический список.....	29