



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 29 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Турчанинов В.И.

Основные моменты задачи  
активной защиты от шума

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Турчанинов В.И. Основные моменты задачи активной защиты от шума // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 29. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-29](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-29)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-29>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**В.И. Турчанинов**

**Основные моменты задачи  
активной защиты от шума**

**Москва — 2017**

***В.И. Турчанинов***

**Основные моменты задачи активной защиты от шума**

На простом примере рассматриваются математическая модель В.С. Рябен'кого и принципиальные вопросы аппроксимации и устойчивости, возникающие на пути создания физических приборов защиты от внешнего шума в реальном времени.

***Ключевые слова:*** активная защита от шума в реальном времени, активное экранирование, метод разностных потенциалов, МРП, текущая акустическая разведка, ТАР, активное подавление шума

***Victor Igorevich Turchaninov***

**Main topics of active shielding**

A simple example deals with a mathematical model of the V. S. Ryaben'kii and fundamental questions of approximation and stability can occur during the creation of physical devices protection from external noise in real time.

***Keywords:*** active noise protection in real time, active shielding, difference potential method, DPM, current acoustic exploring, Active Noise Control, ANC

*Вербное воскресенье*

*Вчера был дождь,  
Была гроза,  
А утром я открыл глаза –  
Небо голубое,  
Солнце золотое,  
Счастье-то какое!*

Турчанинова Е.С. 23 апреля 2016 г.

Рассматривается задача защиты в реальном времени акустического поля, порожденного желательными источниками, от шума нежелательных источников. Она состоит в следующем: пусть источники звука, расположенные в заданной подобласти, создают желательный звук, а источники, расположенные вне неё, создают нежелательный шум. Для наглядности будем говорить о задаче защиты разговора в комнате с открытым окном от уличного шума с помощью дополнительных источников звука, которые осуществляют активную защиту и расположены вблизи границы защищаемой комнаты, т.е. в окне.

В части 6 монографии [1] (см. также [2]) построена математическая модель технических устройств для защиты акустического поля желательных источников в заданной подобласти от влияния нежелательных источников в ходе однократно в реальном времени протекающего акустического процесса.

В этой математической модели текущее управление дополнительными источниками звука, обеспечивающими ослабление шума в заданное число раз, основано на обработке только практически доступной текущей информации. Используется только знание суммарного акустического давления в окрестности границы («в окне») всех источников звука (желательных, шумящих и осуществляющих экранирование), а также знание коэффициентов дифференциального уравнения акустики, то есть состояния акустической среды, которое в окне доступно непосредственному наблюдению.

Доступность управляющей информации является, очевидно, необходимым условием возможности реализации математической модели в виде практически действующего устройства.

Дополнительную информацию, учитывающую форму области, условия на внешней границе составной области (например – информацию о расположении и форме зданий, форме комнаты и условиях на их границах), акустические

свойства среды вне окна и всю другую информацию, достаточную для текущего управления подавлением шума, устройство автоматически получает и обрабатывает, используя осуществляемую синхронно ходу процесса разведку.

Однако конструктивная реализация изложенного подхода затруднена. Дело в том, что интерпретация разностной схемы в качестве математической модели реального процесса имеет основание только при достаточно мелкой сетке. Поэтому воспроизводство этой разностной модели реального процесса в виде физической конструкции потребовало бы такого же количества микрофонов и управляющих микродинамиков, каково число приграничных точек мелкой сетки.

Для конструктивной реализации установки для защиты желаемого поля в реальном времени придется приближённо заменить первоначальный алгоритм метода разностных потенциалов (МРП) и текущей акустической разведки (ТАР) каким-либо алгоритмом, который использует лишь небольшое число микрофонов и небольшое число дополнительных управляющих источников звука. Из системы многочисленных микрофонов можно использовать лишь их малую часть, а данные остальных микрофонов получать из данных оставленных микрофонов путем специальной интерполяции, нацеленной, в том числе, на построение устойчивого алгоритма. Количество экранирующих источников также можно уменьшить, поскольку экранирующее воздействие дополнительных источников звука уже на небольшом расстоянии от сеточной границы практически будет мало отличаться от того, как если бы несколько соседних источников звука были соединены в один суммарный.

Содержание настоящей публикации состоит в обсуждении общих подходов к требуемой экономной аппроксимации и общих способов численного обоснования и изучения свойств подлежащей созданию установки, защищающей в реальном времени желательное акустическое поле в заданной подобласти от влияния внешних источников.

Для обозримости и прозрачности это делается с помощью рассмотрения удобного характерного примера.

### **Модельная задача**

Рассмотрим задачу защиты от уличного шума, проникающего в комнату через открытое окно. Различают два способа её решения: пассивный (статический), с помощью звуконепроницаемой перегородки, например, стеклопакета, и активный (динамический), с помощью расположенных в окне динамиков. При динамическом способе управлению подлежит источник звука, исходящий от динамиков. Целью управления является противодействие уличному шуму, причём такое, что разговор в комнате не искажается. Для подходящего управления было бы желательно знать в окне как проходящий звук с улицы, так и проходящий комнатный звук. На практике можно вполне обойтись измерением звукового поля на некотором расстоянии от окна: как снаружи него, так и с его внутренней стороны.

Характерная схема защиты от шума изображена на рисунке 1.

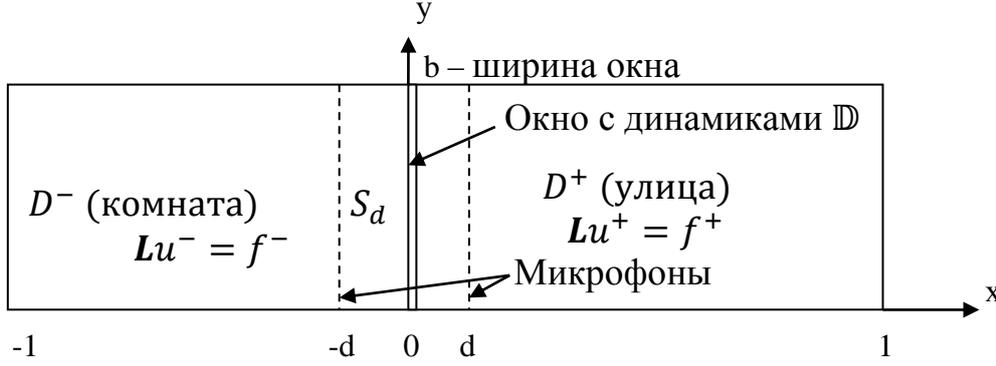


Рис. 1. Схема защиты от шума

На нем отмечены: речь в комнате  $D^-$  – звуковое поле  $u^-(x, y, t)$ , возбуждаемое источником  $f^-(x, y, t)$ , и шум на улице  $D^+$  – поле  $u^+(x, y, t)$ , создаваемое источником  $f^+(x, y, t)$ . Разумеется,  $f^-(x, y, t) = 0$  при  $x \geq 0$  и  $f^+(x, y, t) = 0$  при  $x \leq 0$ . Время  $t \geq 0$ .

На рисунке 1 изображён также прибор защиты от шума. Он состоит из микрофонов и динамиков. Микрофоны выбраны на таком расстоянии  $d$  от окна, что  $f^-(x, y, t) = f^+(x, y, t) = 0$  в полосе  $S_d: -d \leq x \leq d$  при любых  $t$  и  $y$ . Динамики располагаются вдоль оси  $y$  в два ряда. На рисунке это отмечено двойной линией. Через двойное  $\mathbb{D}$  обозначим множество динамиков.

Численные эксперименты мы будем проводить для разностных задач, связанных с дифференциальной краевой задачей в области  $D = D^\pm = D^- \cup D^+$  с границей  $\partial D$ :

$$Lu = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = f(x, y, t), \quad (1)$$

$$lu = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial n} \right) u \Big|_{(x,y) \in \partial D} = 0, \quad n - \text{внутренняя нормаль к } \partial D, \quad (2)^1$$

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

относительно функции  $u(x, y, t)$ .

Решение  $u(x, y, t)$  этой задачи можно интерпретировать как звуковое давление в точке  $(x, y, t)$ . Мы выбрали этот пример, а не какую-либо задачу для системы дифференциальных уравнений акустики в трехмерном пространстве, чтобы избежать громоздкости при постановке и проведении численных экспериментов.

<sup>1</sup> Условие (2) – это локальное условие прозрачности, способствующее поглощению сигнала, падающего на границу области, и позволяющее избежать эффекта многократного эха.

Вычислительную модель реального физического процесса распространения звука зададим с помощью разностной схемы (4)-(6). Эта схема – классическая явная схема типа «крест» для волнового уравнения на равномерной сетке с шагом  $h$  по пространственным переменным  $x$  и  $y$  и с шагом  $\tau$  по времени  $t$

$$L_h u_h = \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)_\tau - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)_h - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_h \right) u_h = f_h, \quad (4)$$

где  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)_h u_{h,ijk} = \frac{u_{h,i-1jk} - 2u_{h,ijk} + u_{h,i+1jk}}{h^2}$  и т.п.,

$$l_h u_h = \frac{u_{h,ijk+1}}{\tau} - \frac{(h-\tau)u_{h,ijk} + \tau u_{h,i-1jk}}{\tau h} \Big|_{ih=+1} = 0 \text{ и т.п.}, \quad (5)$$

$$u_{h,ijk} \Big|_{k=0;1} = 0, \quad (6)$$

где  $i, j, k$  – целочисленные индексы;  $u_{h,ijk}$  соответствуют значению  $u(ih, jh, k\tau)$ .

При чтении формул (4)-(6) полезно иметь ввиду соответствие

$$ijk \leftrightarrow (x, y, t) = (x_i, y_j, t_k) = (ih, jh, k\tau).$$

Индексы  $ijk$  служат также для нумерации уравнений (4)-(6) в соответствии со своими «центральными» слагаемыми<sup>2</sup>. При решении уравнений (4)-(6)  $ijk$ -тое уравнение используется для того, чтобы в момент времени  $t = t_{k+1}$  найти неизвестное  $u_{h,ijk+1}$  по известным к моменту времени  $t \leq t_k$  значениям  $u_h$ .

### Управление и цель управления

В общем случае целью управления является получение звукового поля с определенными желательными свойствами путем воздействия динамиками на внешнее звуковое поле. Само воздействие на поле от внешних источников заключается добавлением к нему поля от динамиков. Выбор воздействия осуществляется на основе информации, накопленной к текущему моменту времени. Наличие алгоритма (программы) выбора воздействия означает, что имеется зависимость воздействия от накопленной информации. Предъявление такой зависимости является центральной теоретической проблемой. Что касается накопленной информации, то она собирается микрофонами и на текущий момент состоит из значений суммарного звукового поля на линиях приёмников во все предыдущие времена и в настоящее время<sup>3</sup>. Этих значений в совокупности с уже определённым в прошлом управлением достаточно, чтобы

<sup>2</sup> Для уравнений (4)  $ijk$  таковы, что  $|i| < I, I = \frac{1}{h}; j = 0, 1, \dots, J; J = \frac{b}{h}; k = 2, 3, 4, \dots$ . Уравнения (5) – продолжение поля за горизонтальные границы области  $D^\pm$  – имеют номера  $ijk$  с  $|i| < I; j = -1, J + 1; k = 2, 3, 4, \dots$ . Для уравнений (5) на вертикальных границах области  $D^\pm$  имеем  $|i| = I$ .

<sup>3</sup> если допустить, что выбор и осуществление управления происходят мгновенно. На практике это оправдано в связи с огромной разницей в скоростях электрического и звукового сигнала. В рассмотренных далее примерах имеется достаточный запас времени для принятия решения и передачи управляющего сигнала, пропорциональный времени пробега звука от микрофонов до динамиков, независимый от шага расчётной сетки.

вычислить<sup>4</sup> суммарное звуковое поле, заключенное между линиями приёмников, вплоть до текущего момента времени<sup>5</sup>.

Источник  $f_h$  в задаче защиты от шума состоит из трех слагаемых:

$$f_h = f_h^- + f_h^+ + g_h \quad (7)$$

– разговора в комнате  $f_h^-$ , шума на улице  $f_h^+$  и функции  $g_h$ , создаваемой динамиками. Сначала не будем налагать на функцию  $g_h$  никаких ограничений.

*Определение 1.* Пусть задано звуковое поле  $z_h$ , порождённое источником вида (7):  $f_h = f_h^- + f_h^+ + g_h$ . Назовём поле  $z_h$  **целью управления**, а функцию  $g_h$  – **управлением**.

Целевое поле  $u_h = z_h$  и управление  $g_h$  взаимно-однозначно связаны между собой уравнениями (4)-(7), поэтому задать  $z_h$  – это всё равно что задать  $g_h$ .

При определении управления на функцию  $g_h$  никаких ограничений не налагалось. Но такие ограничения есть, и они связаны с расстановкой динамиков. С одной стороны, можно поставить динамики в окне между линиями микрофонов. Расположим динамики в два ряда с шагом  $h$  на множестве точек  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_h = \{(x, y) | x = 0, h; y = 0, h, 2h, \dots, Jh\}$ ,  $J = b/h$ , т.е. на двойной<sup>6</sup> линии рисунка 1. Иное расположение динамиков будет рассмотрено в примере 3. С другой стороны, для того чтобы воспроизвести функцию  $g_h$ , динамики нужны там, где  $g_h$  когда-нибудь отличается от нуля. Обозначим эти места через  $\mathfrak{D}(g_h)$ . По определению  $\mathfrak{D}(g_h) = \{(x, y) = (ih, jh) | \exists k g_{h,ijk} \neq 0\}$ . Для воспроизведения динамиками прибора функции  $g_h$  необходимо, чтобы

$$\mathfrak{D}(g_h) \subseteq \mathbb{D}. \quad (8)$$

*Определение 2.* Назовём цель управления  $z_h$  **допустимой**, если соответствующее ей управление  $g_h$  можно воспроизвести динамиками прибора, то есть, если выполняется соотношение (8):  $\mathfrak{D}(g_h) \subseteq \mathbb{D}$ .

Всякие звуковые поля могут служить целью, но только допустимые поля можно получать из внешнего поля, по-разному управляя динамиками.

Специфика задачи защиты от шума заключается в том, что функции  $f_h^-$ ,  $f_h^+$  и  $g_h$  **разделены** по пространству, то есть каждая из них может быть отлична от нуля в своих попарно непересекающихся пространственных областях:

<sup>4</sup> решая внутри прибора краевую задачу вида (4)-(6) с известными данными на линиях приёма.

<sup>5</sup> и даже на один шаг по времени вперёд во всех внутренних точках прибора, исключая точки, занятые динамиками.

<sup>6</sup> Такой набор динамиков не случаен – в общем случае это минимальный набор, необходимый для организации полноценного управления. Исключение даёт пример 5.

$$\begin{cases} f_{h,ijk}^- \neq 0 \Rightarrow ih \leq -d, \\ f_{h,ijk}^+ \neq 0 \Rightarrow ih \geq d, \\ g_{h,ijk} \neq 0 \Rightarrow (ih, jh) \in \mathbb{D} \Rightarrow |ih| < d. \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) следует, например, что

$$f_{h,ijk}^- + f_{h,ijk}^+ + g_{h,ijk} = \begin{cases} f_{h,ijk}^-, & ih \leq -d, \\ f_{h,ijk}^+, & ih \geq d, \\ g_{h,ijk}, & -d < ih < d. \end{cases} \quad (10)$$

В отличие от функций  $f_h^-$  и  $f_h^+$ , которые заданы извне и не зависят от нашей воли, управление – функция  $g_h$  – может быть любой, какой захотим, на множестве динамиков  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_h$  и обязательно нулевой вне динамиков. Причём  $\mathbb{D} \subset S_d$ .

В частности, по целевому полю  $z_h$  можно вычислить соответствующее ему управление  $g_h$ :

$$g_{h,ijk} = \begin{cases} L_h z_h, & (ih, jh) \in \mathbb{D}, \\ 0, & (ih, jh) \notin \mathbb{D}. \end{cases} \quad (11)$$

Действительно, согласно (4)  $f_h = L_h z_h$ . А также  $f_{h,ijk} = f_{h,ijk}^- + f_{h,ijk}^+ + g_{h,ijk} = g_{h,ijk}$  при  $(ih, jh) \in \mathbb{D}$ , так как на множестве динамиков  $f_{h,ijk}^- = f_{h,ijk}^+ = 0$ . Отсюда следует справедливость первой строки равенства (11). Вторая строка (11) справедлива в силу того, что функция  $z_h$  – допустимая, так что соответствующая функция  $g_h$  обращается вне динамиков в ноль.

Выясним, чего не хватает для построения алгоритма управления.

### Анализ. Уравнения управления

Введём обозначения:

$Z_{d,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{z_{h,ijk} \mid -d \leq ih \leq d, j \text{ – любое}\}$  – часть  $k$ -го (текущего) слоя поля  $z_h$ , находящаяся между линиями приёмников – в полосе  $S_d$ ;

$Z_{d,[0,k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k' \leq k} Z_{d,k'}$  – таблица значений поля  $z_h$  в полосе  $S_d$  вплоть до  $k$ -го момента времени  $t = t_k = k\tau$  включительно.

Мы уже отмечали, что для существования алгоритма выбора воздействия необходимо иметь зависимость воздействия от накопленной информации. Величина воздействия задаётся величиной  $g_{h,ijk}$  на множестве динамиков  $(ih, jh) \in \mathbb{D}$ , а накопленная информация состоит в том, что в полосе  $S_d$  известно поле  $z_h$  вплоть до  $k$ -го момента времени. Таким образом, необходимо иметь зависимость  $g_{h,ijk} = g_{h,ijk}(Z_{d,[0,k]})$  при  $(ih, jh) \in \mathbb{D}$ .

Вспомним равенство (11) на множестве динамиков  $(ih, jh) \in \mathbb{D}$ . Его решение относительно  $z_{h,ijk+1}$  даёт линейную зависимость  $z_{h,ijk+1} = z_{h,ijk+1}(g_{h,ijk}, Z_{d,[0,k]})$ .

Проследивая две предыдущие зависимости, мы вправе ожидать, что имеется зависимость  $z_{h,ijk+1} = z_{h,ijk+1}(Z_{d,[0,k]})$ . Запишем её в виде системы уравнений:

$$P_{h,ijk}(z_{h,ijk+1}, Z_{d,[0,k]}) = 0, \quad (ih, jh) \in \mathbb{D}, \quad (12)$$

однозначно разрешимой относительно  $\{z_{h,ijk+1} | (ih, jh) \in \mathbb{D}\}$ .

Более гибко зависимость  $z_{h,ijk+1}$  от  $Z_{d,[0,k]}$  можно выразить в параметрической<sup>7</sup> форме<sup>8</sup>:

$$\Phi_{h,ijk}(z_{h,ijk+1}, Z_{d,[0,k]}, A_{[0,k]}) = 0, \quad (ih, jh) \in \mathbb{D}, \quad (13)$$

$$\Psi_k(A_{k+1}, Z_{d,[0,k]}, A_{[0,k]}) = 0, \quad (14)$$

где  $A_k$  – какой-нибудь подходящий набор параметров,  $A_{[0,k]} = \bigcup_{k' \leq k} A_{k'}$ . От системы (13), (14) требуется однозначная разрешимость относительно  $\{z_{h,ijk+1} | (ih, jh) \in \mathbb{D}\}$  и  $A_{k+1}$ .

*Подведём итог.* Если наш прибор можно построить, то существуют уравнения вида (13), (14), называемые в дальнейшем **уравнениями управления**, единственным решением которых является допустимое целевое поле  $z_h$  на множестве динамиков вместе с каким-нибудь подходящим набором параметров.

Обратно, для рассматриваемой разностной модели распространения звука имеет место теорема 1.

**Теорема 1.** Предположим, что нам известны уравнения управления. Тогда существует алгоритм управления нашим прибором, следуя которому мы получим допустимое целевое поле во всём пространстве.

Для доказательства теоремы приведём алгоритм управления с течением времени. Назовём его базовым.

### Базовый алгоритм

Алгоритм представляет собой цикл по номеру  $k$  временного слоя  $t = t_k = kt$ .

Будем следить в полосе  $S_d$  за сеточными функциями  $z_{h,ijk}$ , то есть перед переходом от  $k$ -го слоя к  $k + 1$ -му слою таблица  $Z_{d,[0,k]}$  известна. А также известен набор параметров  $A_{[1,k]}$ .

<sup>7</sup> Приём введения параметров – рабочих ячеек в программировании – настолько часто встречается, что про него часто забывают.

<sup>8</sup> Задание системы вида (12) равносильно заданию системы (13), (14). Действительно, система (13), (14) является частным случаем (12) при  $A_k = \emptyset$ . Обратно, систему вида (12) можно получить из системы (13), (14), исключая из неё (индукцией по  $k$ ) параметры  $A_k$ .

Сначала, при  $k \leq 1$ , таблица  $Z_{d,[0,k]}$  обнуляется:  $Z_{d,k}|_{k=0,1} = 0$  – согласно начальным условиям (6). А также задаются параметры  $A_{[0,k]}|_{k=1}$  согласно своим первоначальным значениям.

Переход от  $k$ -го слоя к  $k + 1$ -му слою при  $k > 1$  состоит из пяти шагов:

Шаг 1. Вычисление  $z_{h,ijk+1}$  во всех внутренних точках полосы  $S_d$ , исключая точки, занятые динамиками, по волновым уравнениям (4) с нулевой правой частью (9).

Шаг 2. Вычисление  $z_{h,ijk+1}$  во всех точках, занятых динамиками, а также параметров  $A_k$  по уравнениям управления (13), (14).

Шаг 3. Вычисление управления  $g_{h,ijk}$  по (11). Соответственно сигналим динамиками в момент времени  $t = t_k$ .

Шаг 4. Вычисление  $z_{h,ijk+1}$  на горизонтальных границах полосы  $S_d$  при  $j = -1; J + 1 - I_d < i < I_d$  по уравнениям (5).

Шаг 5. Измерение поля  $z_{h,ijk+1}$  на линиях микрофонов в момент времени  $t = t_{k+1} = (k + 1)\tau$ .

Индукцией по  $k$  проверяется, что на  $k$ -м временном слое  $t = t_k = k\tau$  наблюдается именно поле  $\{z_{h,ijk}\}$ , и его часть в полосе  $S_d$  правильно вычисляется базовым алгоритмом.

Шаг 2 приводит к вычислению правильного поля  $z_{h,ijk+1}$  во всех точках, занятых динамиками, по предположению теоремы. Поэтому на шаге 3 по формуле (11) вычисляется управление  $g_{h,ijk}$ , соответствующее полю  $\{z_{h,ijk}\}$ . Остальные шаги приводят к вычислению правильного поля  $z_{h,ijk+1}$  в силу уравнений (4)-(7). Что и требовалось доказать.

Базовый алгоритм дословно применим к управлению нашим реальным физическим прибором, а не только к управлению его математической моделью (4)-(7). При этом всё, что нужно для вычисления управления, – это уметь измерять звуковое поле на линиях микрофонов и уметь вычислять звуковое поле в области прибора  $S_d$ . Вне прибора поле вычислять не надо – его вычислит сама природа по известным только ей уравнениям. Базовый алгоритм с привлечением природы останется точным, потому что он точен для широкого класса разностных схем, как это показано в [1] (см. также [2]), в частности, для любой разностной схемы, как угодно близкой к “уравнениям природы”.

Для вычисления управления недостаточно знать поле вплоть до настоящего момента времени, в чём можно убедиться из сравнения двух допустимых целевых полей, совпадающих в прошлом и настоящем, а в будущем различных, здесь нужны дополнительные соображения. Они воплощаются в виде уравнений управления.

Укажем смысл уравнения управления в нульмерном случае. Нульмерным аналогом волнового уравнения – уравнения движения сплошной среды – может служить уравнение

движения одной её частицы – материальной точки. Чтобы знать движение частицы, надо дополнительно задать силу (либо ускорение), то есть фактически задать её *уравнение движения*. Оно играет роль *уравнения управления*.

Опишем характерные алгоритмы защиты от шума.

**Пример 1.** Мечта о полной очистке. Индивидуальный алгоритм.

Идеально было бы полностью очистить комнату и улицу от посторонних звуков. Этому идеалу удовлетворяет задание следующего целевого поля:

$$z_h = \begin{cases} u_h^-, & i \leq 0 \\ u_h^+, & i \geq 1, \end{cases} \quad (15)$$

где  $u_h^-$  и  $u_h^+$  – поля, порождённые источниками  $f_h^-$  и  $f_h^+$  соответственно.

Докажем, что поле  $z_h$  в (15) – допустимое. Для этого надо проверить, что поле  $u_h = z_h$  удовлетворяет уравнениям (4)-(6) со специальной правой частью вида (7) с условием  $\mathfrak{D}(g_h) \subseteq \mathbb{D}$ .

Сначала рассмотрим уравнения (4):  $(L_h u_h)_{ijk} = f_{h,ijk}$ , в трёх областях, заданных условиями  $i < 0$ ,  $i > 1$  и  $0 \leq i \leq 1$ . Первые две области характеризуются тем, что в них шаблон уравнений (4) не задевает разрыва функции  $u_h = z_h$ . Поэтому в первой области при подстановке  $u_h = z_h$  и  $f_h = f_h^- + f_h^+ + g_h$  в уравнение (4) получится равенство  $(L_h u_h^-)_{ijk} = f_{h,ijk}^-$ , которое справедливо в силу определения поля  $u_h^-$ . Аналогично доказывается справедливость уравнений (4) для  $u_h = z_h$  во второй области:  $i > 1$ . В третьей области, при  $0 \leq i \leq 1$ , справедливость уравнений (4) вытекает из (11) и равенств  $f_{h,ijk}^- = f_{h,ijk}^+ = 0$ .

Осталось рассмотреть уравнения (5) и (6). Они однородные, и их шаблон не задевает разрыва функции  $u_h = z_h$ . Поэтому они верны в силу выполнения уравнений (5) и (6) как для поля  $u_h^-$ , так и для поля  $u_h^+$ . Проверка закончена. Что и требовалось проверить.

Если бы управление  $g_{h,ijk}$  ко времени  $t = t_k = k\tau$  было известно, то, воспроизводя его динамиками в момент  $t = t_k$ , мы бы воспроизвели целевое поле  $z_h$ . Трудность состоит в том, что для целевого поля (15) не существует универсальный, то есть независимый от обстановки, алгоритм вычисления управления. Обусловлено это тем, что в полосе  $0 < x < d$  поле  $z_h$  полностью заполнено шумом – полем  $u_h^+$  – и потому блокируются все волны поля  $u_h^-$ , выходящие через окно на улицу, в том числе та часть поля  $u_h^-$ , которая затем вернулась бы назад в комнату. Как следствие, эта часть поля  $u_h^-$  не может быть восстановлена лишь по приоконным данным<sup>9</sup>.

Но если известно всё об окружающей среде: геометрия, уравнения звукового поля, краевые условия – то индивидуальный алгоритм существует.

<sup>9</sup> Смотри также более общую теорему 2 дополнения 1.

Это базовый алгоритм с параметрами  $A_k = A_k^- \cup A_k^+$ , где  $A_k^- = (u_{h,ijk}^-)_{i>0}$  и  $A_k^+ = (u_{h,ijk}^+)_{i<1}$ . Параметры  $A_k$  выбраны с таким расчётом, чтобы вместе с  $Z_{d,k}$  они составляли при  $t = t_k$  два поля:  $u_h^-$  в области  $-d \leq ih \leq 1$  и  $u_h^+$  в области  $-1 \leq ih \leq d$ , то есть  $Z_{d,k} \cup A_k = (u_{h,ijk+1}^-)_{i \geq -d/h} \cup (u_{h,ijk+1}^+)_{i \leq d/h}$ . Уравнения управления в данном случае – это те уравнения разностной схемы (4)-(6) с  $f_h = 0$ , по которым вычисляются  $(u_{h,ijk+1}^-)_{i > -d/h}$  и  $(u_{h,ijk+1}^+)_{i < d/h}$ .

Приведенный алгоритм имеет скорее теоретическую, чем практическую ценность, потому что он основан на полной информации об окружающей среде, получить которую кажется маловероятным. Возможно, полная информация избыточна, и тогда остаётся открытым вопрос о предварительном получении информации, достаточной для построения индивидуального алгоритма, путём физических экспериментов. Частично этот вопрос рассматривается при обсуждении формулы (28) в связи с акустическим исследованием приоконной среды.

В примерах 2-5 даны алгоритмы, достигающие соответствующей заданной цели независимо от окружения. Достаточно вставить такой прибор в любое окно, разделяющее любые два помещения, и прибор будет очищать от шума так, как заявлено.

### Пример 2. $\varepsilon$ -защита.

В общем случае полная защита от шума не удаётся. А уменьшить его в  $\varepsilon^{-1}$  раз ( $\varepsilon$  – параметр) возможно, если поискать ответ среди линейных комбинаций функций  $u_h^-$  и  $u_h^+$  из примера 1. Такое, впервые найденное в [1], однопараметрическое семейство искомых комбинаций существует:

$$z_h = \begin{cases} u_h^- + \varepsilon u_h^+, & i \leq 0 \\ \varepsilon^{-1} u_h^- + u_h^+, & i \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Так же, как в примере 1, доказывается, что поле  $z_h$  в (16) – допустимое.

Строки определения (16) – функции  $z_h^- \stackrel{\text{def}}{=} u_h^- + \varepsilon u_h^+$  и  $z_h^+ \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1} u_h^- + u_h^+$  – линейно зависимы:  $z_h^+ = \varepsilon^{-1} z_h^-$ . Это позволяет выразить  $z_h^-$  через  $z_h$ :

$$z_h^- = z_h^-(z_h) = \begin{cases} z_h, & i \leq 0 \\ \varepsilon z_h, & i \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

Функция  $z_h^-$  по линейности удовлетворяет уравнениям (4) с нулевой, согласно (9), правой частью в полосе  $S_d$ . В частности, на множестве динамиком имеем уравнения

$$(L_h z_h^-(z_h))_{ijk} = 0, \quad (ih, jh) \in \mathbb{D}, \quad (18)$$

которые являются искомыми уравнениями управления ( $A_k = \emptyset$ ).

Ввиду особого значения примера 2 отметим, что для непрерывного поля  $z$  – аналога поля  $z_h$  – нижеследующие уравнения<sup>10</sup>:

$$\begin{aligned} z(-0, y, t) &= \varepsilon z(+0, y, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} z(-0, y, t) &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} z(+0, y, t), \end{aligned} \quad (19)$$

совместно с односторонними однородными волновыми уравнениями для поля  $z$  при  $x = 0$  являются непрерывным аналогом уравнений управления (18).<sup>11</sup>

Действительно, из уравнений (19) следует, что отображение  $z$  в  $z^-$ :  $z^- = \begin{cases} z, & x \leq 0 \\ \varepsilon z, & x > 0 \end{cases}$  склеивает значения  $z$  и  $\frac{\partial}{\partial x} z$  на разрыве  $x = 0$ . Односторонние вторые производные  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} z$  при  $x = 0$  склеиваются в силу уравнений  $Lz = 0$ . Таким образом, на разрыве получается непрерывно-дифференцируемая функция  $z^-$ , удовлетворяющая уравнению  $Lz^- = 0$ , которое является аналогом (18). Что и требовалось показать.

**Пример 3.**  $\varepsilon$ -защита для объёмных динамиков.

**В случае объёмных динамиков** конструкцию целевого поля  $z_h$  примера 2 можно обобщить. Для этого сначала расширим, моделируя «объём», множество динамиков  $\mathbb{D}_h$  до полосы шириной  $2\sigma$ , определив его по формуле  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_\sigma = \{(x, y) = (ih, jh) \mid |i| \leq I_\sigma; 0 \leq j \leq J\}$ , где  $J = b/h$ ,  $I_\sigma = \sigma/h$  – целое. Затем зададим поле

$$z_h = (1 + (\varepsilon^{-1} - 1)\chi_h)z_h^-, \quad (20)$$

$$\text{где } \chi_h = \chi_{h,ij} = \begin{cases} 0, & i \leq -I_\sigma, \\ \eta_{ij}, & |i| < I_\sigma \\ 1, & i \geq I_\sigma. \end{cases}$$

$\eta_{ij}$  в основном произвольны<sup>12</sup> при всех внутренних значениях  $j$ :  $0 \leq j \leq J$ , а значения  $\eta_{ij}$  при крайних  $j$  берутся с ближайших внутренних точек:  $\eta_{ij} = \eta_{ij'}$  при  $|j - j'| = 1, j = -1, J + 1$ .

Как и в примере 1, проверяется, что поле  $z_h$  в (20) – допустимое (рассматривая уравнения (4)-(6) в трёх областях, заданных условиями  $i < -I_\sigma$ ,  $i > I_\sigma$  и  $-I_\sigma \leq i \leq I_\sigma$ ).

Напомним, что функция  $z_h^-$  удовлетворяет уравнению (4) с правой частью, равной нулю в полосе  $S_d$ . Поэтому, выражая  $z_h^-$  через  $z_h$  из (20) получим уравнения

$$L_h((1 + (\varepsilon^{-1} - 1)\chi_h)^{-1}z_h) = 0, \quad (ih, jh) \in \mathbb{D}_\sigma, \quad (21)$$

которые являются искомыми уравнениями управления ( $A_k = \emptyset$ ).

<sup>10</sup> в (19) подразумевается взятие односторонних производных и односторонних предельных значений на поверхности  $x = 0$ .

<sup>11</sup> Более подробно непрерывный аналог рассмотрен в дополнении 3.

<sup>12</sup> Лишь бы коэффициент при  $z_h^-$  в (20) не обращался в ноль, что заведомо выполняется, если  $\eta_{ij} \geq 0$ .

**Пример 4.** Глухая стенка.

Наряду с примерами 2 и 3, имеются варианты шумоподавления, имитирующие какую-нибудь глухую стенку, расположенную в окне. Причём, возможно, не с реальными, а с идеальными изоляционными свойствами, моделируя, например, тишайшее бесконечное пространство за окном.

Рассмотрим простейший вариант моделирования пассивной защиты от шума, задавая в окне локальные условия прозрачности. В этом варианте динамики образуют множество  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_h$ .

Пусть функции  $u_h = z_h^-$  и  $u_h = z_h^+$  – решения разностной краевой задачи (4)-(6) в замкнутых областях  $D^-$  и  $D^+$ , заданных неравенствами  $x = ih \leq 0$  и  $x = ih \geq 0$ , и правыми частями  $f_h = f_h^-$  и  $f_h = f_h^+$  соответственно. Подчеркнём, что в окне  $x = ih = 0$  задаются локальные условия прозрачности (такие же, как в (5))

$$l_h u_h|_{ih=-0} = 0 \text{ в } D^- \text{ для } u_h = z_h^-, \quad (22)$$

$$l_h u_h|_{ih=+0} = 0 \text{ в } D^+ \text{ для } u_h = z_h^+. \quad (23)$$

Зададим поле

$$z_h = \begin{cases} z_h^-, & i \leq 0 \\ z_h^+, & i \geq 1. \end{cases} \quad (24)$$

Как обычно, проверяется, что поле  $z_h$  – допустимое.

Введём в базовый алгоритм параметры  $A_k = (z_{h,ijk}^+)_{i=0}$ , которые вместе с  $Z_{d,k}$  составляют в полосе  $S_d$  поля  $z_h^-$  и  $z_h^+$  при  $t = t_k$ . Зная же поля  $z_h^-$  и  $z_h^+$  при  $t \leq t_k$ , можно вычислить величины  $(z_{h,ijk+1}^-)_{i=0}$ ,  $A_{k+1} = (z_{h,ijk+1}^+)_{i=0}$  и  $(z_{h,ijk+1}^+)_{i=1}$ , решая соответствующие им уравнения (22), (23) и (4) с  $f_h = 0$ . Следовательно, по определению, они являются уравнениями управления.

**Пример 5.** Полупроницаемая мембрана.

Управление примера 4 изолирует друг от друга звуки в комнате и на улице, целенаправленно воздействуя на два поля – комнатное и уличное – с помощью двух рядов управляющих динамиков. Если же ограничиться защитой только комнатного поля, а уличное поле оставить такое, какое получится, то можно обойтись только одним рядом динамиков. Для этого немного подправим пример 4, а именно, заменим уравнения (23) на уравнения непрерывности целевого поля в окне:

$$(z_h^- - z_h^+) |_{ih=0} = 0, \quad (25)$$

а всё остальное, вплоть до определения  $z_h$  по формуле (24), оставим прежним.

Как обычно, проверяется, что поле  $z_h$  – допустимое.

Положим  $A_k = \emptyset$ . Уравнениями управления являются: уравнения (22) для вычисления величин  $(z_{h,ijk+1}^-)_{i=0}$ , уравнения (25) для вычисления  $(z_{h,ijk+1}^+)_{i=0}$  и уравнения (4) при  $i = 1$  с  $f_h = 0$  для вычисления  $(z_{h,ijk+1}^+)_{i=1}$ .

Из последних уравнений и формулы (11) при  $i = 1$  для управления  $g_h$  следует, что  $(g_{h,ijk})_{i=1} = 0$ . То есть фактически используется только один ряд динамиков с  $i = 0$ .

Качественное поведение поля под рассмотренным управлением заключается в следующем: волны с улицы отражаются в окне (с изменением знака), а волны из комнаты проходят через окно на улицу.<sup>13</sup>

Действительно, для «уличной» волны источники  $f_h^- = 0$  и  $f_h^+ \neq 0$  и тогда  $z_h^- \equiv 0$ . В частности,  $z_h^-|_{ih=0} = 0$  и, по непрерывности целевого поля в окне,  $z_h^+|_{ih=0} = 0$ . Приведенное краевое условие («неподвижная стенка») действует на волну как отражатель (с изменением знака).

Для «комнатной» волны источники  $f_h^- \neq 0$  и  $f_h^+ = 0$ . Поле  $z_h^-$  проникает через окно на улицу в соответствии с условиями прозрачности (22). При этом часть волны  $z_h^-$  отражается от линии  $ih = 0$  ввиду несовершенства условий (22), а проникшая на улицу волна как-то (не будем уточнять) распространяется по улице, не попадая в дальнейшем в комнату (отражаясь от «неподвижной стенки»).

В рассмотренном примере мы обошлись только одним рядом динамиков, а вот уменьшить количество микрофонов с двух рядов до одного вряд ли удастся, потому что для разделения волн, приходящих с двух сторон, надо иметь информацию о каждой из них. Здесь можно было бы решить задачу защиты тишины, убирая внутренние микрофоны, но тогда устойчивость неочевидна.

### Реальные и идеальные динамики

На практике желательно обойтись небольшим числом динамиков, расставляя их с большим шагом. Пусть в реальном приборе динамики, которые в наших экспериментах предполагаются точечными, располагаются в два ряда с шагом  $H$  на множестве точек  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_H = \{(x, y) | x = 0, h; y = 0, H, 2H, \dots, J_b H\}$ . Расстояние между двумя рядами динамиков положим равным  $h$ . Параметры  $h$ ,  $H$  и  $b$  подобраны таким образом, чтобы  $J_H = H/h$  и  $J_b = b/H$  были целыми. По замыслу шаг  $h$  мал настолько, чтобы обеспечить близость решения разностной задачи к дифференциальной. Величина  $H$  отвечает техническим возможностям нашего прибора. Представляется, что для реального прибора  $H \gg h$ , хотя в теории допускается их равенство. Динамики, расположенные с шагом  $H$ , назовем реальными, а динамики с шагом  $h$  – идеальными. Соответственно, можно говорить о реальном поле и идеальном поле, о реальном управлении и идеальном управлении, о реальных микрофонах и идеальных микрофонах.

Будем считать, что реальные микрофоны измеряют наблюдаемое физическое реальное поле  $z_H$ . Поле  $z_H$  возбуждается всеми источниками:  $f_h^-$ ,  $f_h^+$  и  $g_H$  – комнатными, уличными, и также реальным управлением  $g_H$ .

<sup>13</sup> Отметим, что качественное поведение становится точным в одномерной модели (36), (37) при  $\tau = h = 1$ .

Напомним, что в рамках рассматриваемой модели поле  $z_H$  удовлетворяет уравнениям (4)-(6) с правой частью  $f_h = f_h^- + f_h^+ + g_H$ .

Ранее мы рассматривали исключительно идеальный случай. Реальный случай управления получим как результат аппроксимации идеального.

### Аппроксимация

Схема подавления шума с идеальным управлением даёт тождественно точный результат, поэтому при аппроксимации будем исходить именно из неё, то есть в области прибора будем всё время поддерживать приближение к идеальному полю. При этом реальное управление определяется по идеальному управлению. Что касается аппроксимации идеального поля  $z_h$ , то она основана на формуле перехода от реального поля к идеальному (27).

Для того чтобы **построить реальное управление**, зная идеальное управление, представим себе, что каждый реальный динамик слеплен из ближайших к нему идеальных динамиков. Исходя из этого представления, определим управление  $g_H$  реальным динамиком в точке  $(x, y') = (ih, j'h) \in \mathbb{D}_H$  как сумму амплитуд ближайших к нему идеальных динамиков:

$$g_{Hij'k} = \sum_j c_{j'j} g_{hijk}, \quad |j'h - jh| \leq H/2, \quad (26)$$

где  $c_{j'j} = 1$ , если  $|j'h - jh| < H/2$  и  $c_{j'j} = 1/2$ , если  $|j'h - jh| = H/2$ . Естественно, в точках, где нет реальных динамиков, управление  $g_H$  равно нулю.

В формуле (26) индекс  $j'$  кратен отношению  $J_H = H/h$ , так что  $y' = j'h$  является ординатой реального микрофона. Коэффициент  $c_{j'j}$  равен  $1/2$  в случае, когда идеальный динамик имеет несколько (в двумерном случае – двух) реальных ближайших соседей. Тогда его вклад в управление распределим между соседями поровну.

$c_{j'j}$  – это доля идеального динамика, расположенного в точке  $(x, y) = (ih, jh)$ , отнесённая к реальному динамику, расположенному в точке  $(x, y') = (ih, j'h)$ .

Каждый идеальный динамик полностью распределяется между реальными динамиками. Это значит, что  $\sum_{j'} c_{j'j} = 1$ , то есть строки матрицы  $(c_{j'j})$  образуют разбиение единицы множества  $\{j | j = 0, 1, \dots, J; J = b/h\}$ . Возможно, применение «гладкого» разбиения единицы будет полезно, например, для сглаживания – с целью борьбы с высокочастотным треском прибора и, как следствие, его более стабильной работы.

**Вычисление идеального поля  $z_h$**  на каждом временном слое начинается с того, что реальные микрофоны измеряют реальное поле  $z_H$ . Из информационных соображений – сколько чисел на входе, столько чисел на выходе – расставим микрофоны на отрезках  $x = \pm d$  с шагом  $H$ , так чтобы на каждый динамик приходился один микрофон.

В наших экспериментах равенство двух количеств: микрофонов и динамиков – оказалось вполне разумно. В общем случае их равенство необязательно, например, можно увеличить количество микрофонов и использовать «лишние» микрофоны для многих целей: увеличение надёжности, контроль устойчивости, анализ и построение оптимальных аппроксимаций входных полей и т.д. и т.п.

Далее требуется интерполяция измеренных величин на линии микрофонов. Непосредственная интерполяция нехороша из-за близости особенностей звукового поля, создаваемого динамиками. Выделим эти особенности. Для этого выразим поле  $z_h$  через реальное поле  $z_H$  и поля  $w_H$  и  $w_h$ , порождённые источниками  $g_H$  и  $g_h$  соответственно. Имеем формулу перехода от реального поля к идеальному в области  $D^\pm$ :

$$z_h = z_H - w_H + w_h, \quad (27)$$

являющуюся следствием равенства возбуждающих их источников:

$$f_h^- + f_h^+ + g_h = (f_h^- + f_h^+ + g_H) - g_H + g_h.$$

Способ определения  $z_h$  при  $x = \pm d$  подсказывается правой частью тождества (27). После измерения реального поля  $z_H$  он состоит из выделения особенностей, интерполяции и пересчёта реального поля на идеальное. Остановимся на этом подробнее.

Поля  $w_H$  и  $w_h$  неизвестны, но в окрестности окна их можно заменить с достаточной точностью на вычислимые поля  $\tilde{w}_H$  и  $\tilde{w}_h$ , являющиеся решениями краевой задачи (4)-(6) в какой-нибудь вспомогательной ограниченной окрестности окна, например в прямоугольнике  $\tilde{D}: |x| \leq x_{\tilde{D}}$  ( $x_{\tilde{D}}$  – параметр-ограничитель), и правыми частями  $g_H$  и  $g_h$  соответственно. В результате замены получим

$$z_h \approx \tilde{z}_h = z_H - \tilde{w}_H + \tilde{w}_h. \quad (28)$$

Ошибка приближения (28) имеет, во-первых, первый порядок малости по переменной  $H - h$ , потому что приближённое равенство (28) превращается в точное при  $H = h$ .

Во-вторых, в приближении (28) учитываются все особенности, находящиеся вблизи окна, вследствие того, что вблизи окна поля в (28) удовлетворяют уравнениям исходной краевой задачи, а также того, что вблизи окна учитываются все источники звука (в наших экспериментах они были нулевыми). Подчеркнём, что на свободной границе области  $\tilde{D}$ , то есть на вертикалях  $|x| = x_{\tilde{D}}$ , поля  $\tilde{w}_H$  и  $\tilde{w}_h$  удовлетворяют краевому условию (5) – локальному условию прозрачности. Их влияние на результат см. в табл. 3 и 4.

По-существу, в наших экспериментах предполагается, что и коэффициенты уравнения звукового поля и их правые части в окрестности окна  $\tilde{D}$  известны. Отметим, что без знания особенностей или хотя бы характера их поведения вблизи окна трудно рассчитывать на эффективность или даже работоспособность нашего прибора, например, когда через окно пролетает пчелиный рой, нарушая показания микрофонов случайным образом.

Насколько точно нужно знать уравнения звукового поля в  $\tilde{D}$ , и насколько малой должна быть область  $\tilde{D}$  для качественной работы нашего прибора – это вопрос открытый. Решать его лучше в условиях, более приближенных к физической реальности, то есть в трёхмерном случае, в котором имеется больше возможностей для рассеяния и затухания звуковых волн, в том числе из-за наличия лакун.

Отметим, что знать уравнения звукового поля вблизи окна необязательно, достаточно уметь определять на линиях микрофонов звуковые поля, возбуждаемые динамиками, как реальными, так и идеальными. Для этого нужно замерить фундаментальное решение и

использовать его для перехода от реального поля к идеальному. Более определённо: в рамках модели (4)-(6)

$$\tilde{w}_{h,ijk} = \sum_{\substack{(i'h,j'h) \in \mathbb{D}_h \\ 0 \leq k' \leq k}} g_{h,i'j'k'} E_{h,ijk}^{i'j'k'}, \quad (29)$$

где  $E_{h,ijk}^{i'j'k'}$  – решение (фундаментальное) системы (4)-(6) с правой частью  $f_h$ , равной 1 в пространственно-временной точке  $(x', y', t') = (i'h, j'h, k'\tau)$  и равной 0 в остальных точках. В силу независимости коэффициентов задачи (4)-(6) от времени имеет место равенство  $E_{h,ijk}^{i'j'k'} = E_{h,ijk-k'}^{i'j'0}$ , которое позволяет существенно снизить количество замеров фундаментального решения. Определение  $\tilde{w}_{h,ijk}$  через фундаментальное решение можно использовать даже в тех случаях, когда изменяется внешняя обстановка, лишь бы вблизи окна она менялась слабо.

В отличие от поля  $z_H$  поле  $z_H - \tilde{w}_H$  не имеет особенностей вблизи окна, поэтому на границе полосы приёма будем его интерполировать по  $y$  с крупной сетки на мелкую. К результату интерполяции достаточно прибавить  $\tilde{w}_h$ , чтобы из (28) получить на границе приёма искомую аппроксимацию поля  $z_h$ :

$$z_h|_{x=\pm d} \approx \tilde{z}_h|_{x=\pm d} = \mathbf{i}(z_H - \tilde{w}_H)|_{x=\pm d} + \tilde{w}_h|_{x=\pm d}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{i}$  – оператор интерполяции.

Алгоритм построения реального управления получим из базового алгоритма, переходя от реального поля  $z_H$  к идеальному полю  $z_h$ . Точная формула перехода, выражающая основную идею сведения реального к идеальному, даётся равенством (27), а также его конструктивной численной реализацией – аппроксимацией (30).

При этом **реальный алгоритм** получается из базового алгоритма путём его модификации на шагах 3 и 5 с добавлением воображаемых звуковых полей  $\tilde{w}_h = \tilde{w}_{h,ijk}$  и  $\tilde{w}_H = \tilde{w}_{H,ijk}$  в области  $\tilde{D}$ :  $|x| \leq x_{\tilde{D}}$ .

Шаг 3 состоит теперь из вычисления идеального управления  $g_{h,ijk}$  по (11) и по нему реального управления  $g_H$  согласно (26), и затем пересчёта полей  $\tilde{w}_h$  и  $\tilde{w}_H$  на  $(k + 1)$ -й слой.

Сигналим реальными, естественно, динамиками в момент времени  $t = t_k$ .

Шаг 5 состоит из измерения поля  $z_{H,ijk+1}$  реальными микрофонами в момент времени  $t = t_{k+1} = (k + 1)\tau$  и последующего пересчёта измеренных величин на все точки линий приёма по формуле (30).

Вычислительные затраты реального алгоритма относительно невелики. Связано это с несколькими моментами.

1. Полоса между линиями микрофонов, где вычисляется  $z_h$ , – узкая.
2. Уравнения управления в примерах 2-4 связывают три слоя целевого поля, а не все предыдущие слои. Но даже в случае многослойной связи в стационарных средах уравнениям управления можно придать вид свёртки по времени, и тогда можно постараться быстро её вычислять, как это предложено, например, в [4], [5].
3. В трёхмерном случае лучше поставить для полей  $\tilde{w}_H$  и  $\tilde{w}_h$  точные (вместо локальных) условия прозрачности (или, что то же самое, точные неотражающие искусственные граничные условия). Тогда и искусственные отражения от границы

области  $\tilde{D}$  отсутствуют (см. комментарии к таблице 3), и область  $\tilde{D}$  можно взять небольшой, соразмерной с окном, и вычисление полей  $\tilde{w}_H$  и  $\tilde{w}_h$  можно эффективно организовать (см., например, [1],[3]).

4. В конечном итоге реальный алгоритм линейно преобразует входные данные в управление. Если  $H \gg h$ , то, предварительно вычислив это преобразование, можно рассчитывать на значительное уменьшение вычислительных затрат алгоритма. В стационарных средах преобразование данных в управление имеет вид свёртки по времени, на чём также можно сэкономить (см. [4], [5]).

### Численный эксперимент

Когда динамики расположены с мелким шагом  $H = h$ , описанное управление даёт точный теоретический результат. Численный эксперимент подтверждает это с точностью до ошибок округления. Это был один из способов проверки, как теории, так и программной реализации.

В ходе экспериментов рассмотрим вопросы сходимости и устойчивости и продемонстрируем возможности прибора по задержке звуковых частот.

#### Описание эксперимента (см. Рис. 1):

обозначения, значения по умолчанию, комментарии.

Эксперимент проводился для целевых полей примеров 2 и 4.

$\mathcal{D} = \{(x, y) : x \leq -0.75\}$  – область наблюдения.  $\mathcal{D}$  выбрана поодаль от источников звука.  $\mathcal{D}$  – область, где сравниваются разговор и шум.

$\|u_h\|_{\mathcal{D}} = \left\| \|u_{h_{ijk}}\|_{\mathcal{D}} \right\|_{\mathcal{D}} = \max_{(i,h,j,h) \in \mathcal{D}} |u_{h_{ijk}}|$  при фиксированном  $t = k\tau$  – равномерная норма в  $\mathcal{D}$ .

$E(t) = \|z_H - z_h^-\|_{\mathcal{D}} / \|z_h^-\|_{\mathcal{D}}$  – относительное отклонение наблюдаемого реального поля  $z_H$  от теоретически желательного (искомого) идеального поля  $z_h^-$  в области наблюдения  $\mathcal{D}$ .

$b = 1/32$  – ширина окна.

$\Omega$  – относительная частота – количество колебаний, приходящееся на ширину окна.

$\Lambda = b/\Omega$  – длина волны.

$s_{\Omega}(t)$  – функция источника. В экспериментах будут использоваться источники звука, которые плавно переходят<sup>14</sup> из состояния покоя в состояние гармонических колебаний  $s_{\Omega}(t) = const \cdot \sin \pi \left( \frac{2\Omega}{b} t - 1 \right)$  с частотой  $\frac{\Omega}{b}$ .

<sup>14</sup> переход реализован на отрезке  $\frac{b}{2\Omega} \leq t \leq \frac{3b}{4\Omega}$  (соответственно,  $0 \leq \xi \leq 1/2$ ) функцией  $s_{\Omega}(t) = 4\xi^2[3 - 4\xi + (60/\pi - 15)(2\xi - 1)^2]$ , где  $\xi = \frac{2\Omega}{b} t - 1$ .

Разговор в комнате возбуждается в точке  $(x, y) = (-0.5, 0)$  источником  $s_{\Omega}(t)$ . Шум на улице создаётся в точке  $(x, y) = (0.5, 0)$  источником  $9.7s_{\Omega'}(t)$ , где  $\Omega' = \Omega/1.03$ .

Амплитуды источников подобраны таким образом, чтобы в зоне наблюдения шум был сопоставим с полезным звуком.

$d = 1/128$  – расстояние от окна до линии микрофонов.

$N$  – количество пар динамиков,  $N$  – количество микрофонов с каждой стороны окна, а также

$N$  – количество узлов интерполяции.

$H = b/(N - 1)$  – шаг расстановки динамиков (и микрофонов), а также шаг крупной сетки. Используется только на линиях микрофонов и динамиков.

$h = b/24$  – шаг мелкой сетки. Он выбран так, чтобы на каждую волну приходилось не менее 10 точек.

$\tau = h/1.5$  – шаг по времени. При  $\tau \leq h/\sqrt{2}$  разностная схема (4) устойчива.

$x_{\bar{D}} = 1/2$  – граница прямоугольника  $\bar{D}: |x| \leq x_{\bar{D}}$ , предназначенного для выделения особенностей, создаваемых динамиками. Увеличение  $x_{\bar{D}}$  приводит при вычислении полей  $\tilde{w}_H$  и  $\tilde{w}_h$  к уменьшению доли отраженных от границы  $\bar{D}$  волн, являющихся чисто паразитными.

$\varepsilon = 1/8$  – коэффициент шумоподавления. Существенно используется в варианте с линейной комбинацией (пример 2) и отсутствует в варианте с имитацией глухой стенки (пример 4).

$i$  – оператор интерполяции. Проверялись два способа интерполяции – кубическими сплайнами и интерполяционным многочленом. Применение последнего отмечено в таблицах буквой  $i$  вслед за указанием количества  $N$  узлов интерполяции. Оба варианта интерполяции приводят к сопоставимым по точности результатам. Оба варианта имеют свои недостатки: кубические сплайны недостаточно гладкие, а применение интерполяционного многочлена большого порядка приводит к излишнему высокочастотному треску.

## Результаты экспериментов и их обсуждение

Таблица 1

Отношение шума к разговору в  $\mathcal{D}$

$t \backslash \Omega$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
10	0.3	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7
100	3.3	1.7	1.1	0.9	0.9	0.9	1.1	1.3

В таблице 1 дано отношение  $\|u_h^+\|_{\mathcal{D}}/\|u_h^-\|_{\mathcal{D}}$  амплитуд уличного шума к разговору в области наблюдения  $\mathcal{D}$  при  $t = 10$  и  $t = 100$ . Из неё видно, что в зоне наблюдения шум сопоставим с разговором, особенно при  $t = 100$ , к чему мы стремились, подбирая амплитуды источников.

Таблица 2

$E(t)$  (в %) в зависимости от  $\Omega$  при  $x_{\bar{D}} = 1/2$ ,  $N = 2$

$\varepsilon$	$t \setminus \Omega$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
-	10	.12	.10	.64	3.0	9.7	22	42	66
-	100	.001	.005	.60	3.1	9.7	22	40	66
1/8	10	.10	.099	.56	2.6	8.4	19	35	54
1/8	100	.002	.045	.51	2.5	8.1	19	33	53

Таблица 2 показывает, что при уменьшении частоты  $\Omega$  точность очистки от шума стремительно ухудшается.

Таблица 3

$E(t)$  (в %) в зависимости от  $N$  при  $x_{\bar{D}} = 1/2$ ,  $\Omega = 2.4$

$\varepsilon$	$t \setminus N$	2	3	4	5	7	9	9	9i
-	10	66	8.4	3.3	1.9	.89	.69	$x_{\bar{D}} = 2/3$	$x_{\bar{D}} = 2/3$
-	100	66	8.6	3.3	1.8	.81	.38		
1/8	10	54	7.6	3.4	2.1	1.4	3.6	.93	1.9
1/8	100	53	14.	19.	24.	28.	3E11	.31	.31

Таблица 3 показывает, что при увеличении количества динамиков глубина очистки от шума значительно улучшается, если не считать результаты, представленные в последней строке таблицы. В ней аномальное поведение  $E(100)$  в зависимости от  $N$  связано с переизбытком паразитных отраженных от границы  $\bar{D}$  волн полей  $\tilde{w}_H$  и  $\tilde{w}_h$ . Если их уменьшить, увеличивая  $x_{\bar{D}}$  с  $1/2$  до  $2/3$ , то всё становится на свои места (смотри два последних столбца таблицы 3, а также пять последних столбцов таблицы 4). В трёхмерном случае от отражённых волн можно избавиться, например, благодаря наличию лакун [3].

Таблица 4

$E(t)$  (в %) в зависимости от различных параметров

По умолчанию  $\varepsilon = 1/8$ ,  $x_{\bar{D}} = 2/3$ ,  $\Omega = 2.4$

	$x_{\bar{D}} = 1/2$	$x_{\bar{D}} = 1/2$	$x_{\bar{D}} = 1$	$h=h$	$h=2h$	$h=h/2$	$d = 1/16$
$t \setminus N$	4	4i	4i	4i	4i	4i	4i
10	3.4	2.8	2.9	2.9	2.3	2.7	2.3
100	19.	21.	2.2	2.2	2.2	1.9	2.2

Таблица 4 демонстрирует, что  $E(t)$  слабо зависит от параметров  $h$ ,  $d$  и  $x_{\bar{D}}$  (лишь бы при изменении  $x_{\bar{D}}$  паразитные отраженные волны были достаточно малы). Слабая зависимость  $E(t)$  от параметра  $d$  важна, потому что по техническим соображениям  $d$  должно быть невелико. Слабая зависимость  $E(t)$  от  $h$  позволяет ограничиться экспериментами с шагом  $h = b/24$ , заданным по умолчанию.

### Обсуждение свойств аппроксимации

Обратим внимание, что в рассмотренных примерах расстояние  $H$  между динамиками и длины  $\Lambda$  задерживаемых ими волн близки по величине. При этом погашение шума весьма значительно. Например, согласно таблице 2 при  $\Omega = 1.4$  волна с длиной  $\Lambda = H/1.4$  уменьшается более чем в 100 раз. Нельзя пройти мимо того, что во многих важных для практики 3-D случаях сетка динамиков с шагом  $H$  может задерживать волны меньшей длины, скажем длины  $\Lambda = H/5$ . Это возможно, если волновое поле имеет фронт и, следовательно, имеются две быстрые переменные – по времени и по нормали к фронту, и две медленные переменные – вдоль фронта. А качественная интерполяция по медленным переменным возможна на крупной сетке. На этом мы ограничимся, так как оптимизация, связанная с наличием быстрых и медленных переменных, заслуживает отдельного исследования.

Качественное объяснение асимптотической устойчивости. Над окном пробегают волны. Под действием динамиков гасится волна с улицы. Но некоторые её остатки в совокупности с собственным шумом динамиков прорываются внутрь комнаты. И уходят прочь от окна, уходят вглубь и где-то там рассеиваются, уступая место следующим порциям.

Был соблазн воспользоваться тем, что, по идее,  $z_h$  – гладкая функция на линиях  $x = \pm d$  и поэтому можно интерполировать именно её, то есть вместо формулы (30) воспользоваться формулой  $z_h|_{x=\pm d} \approx i(z_H - \tilde{w}_H + \tilde{w}_h)_{x=\pm d}$ . Выигрыш состоял бы в том, что тогда надо считать одно поле, а именно, разность  $\tilde{w}_h - \tilde{w}_H$  вместо каждого поля этой разности. Но такой вариант расчёта неустойчив. Например, он приводит к тому, что  $E(10) = 7E + 79$  при  $\varepsilon = 1/8$ ,  $x_{\bar{D}} = 1$ ,  $\Omega = 1.0$ ,  $N = 4i$ . Наше объяснение неустойчивости заключается в том, что по последней формуле организуется обратная связь между значениями интерполируемой функции  $z_h$  в близких по пространству и времени точках. Это приводит к явлению самовозбуждения. Наоборот, в формуле (30) близкая обратная связь отсутствует, потому что интерполируется внешнее поле, немного гладко возмущённое.

### Два динамика

Таблица 5

$E(t)$  (в %) при  $\Omega = 1.4$ ,  $x_{\bar{D}} = 1/2$ ,  $N = 1$

$\varepsilon$	$t \setminus N$	1
-	10	1.1
-	100	2.5
1/8	10	1.0
1/8	100	3.4

Таблица 5 показывает, что уже одной парой динамиков достигается очистка от довольно высокочастотного шума.

Примером активного подавления шума малым количеством динамиков служит система, встроенная в автомобиль Honda Accord. Прочитируем обзор [10]: «В "штате" IX поколения предусмотрена активная система подавления шумов ANC (Active Noise Control). Похоже действует». Вопросы эффективности остались за кадром. Поэтому, помимо проведения намеченных численных исследований, можно приступить к физическим экспериментам с малым количеством динамиков.

### Обобщения

В теории, по существу, используется лишь линейность и конечность скорости распространения сигнала, в том числе разностного, а также то, что уравнения полей имеют вид многослойных разностных схем. Поэтому рассмотренная методика распространяется на волновые процессы в сложных средах. При этом нужно внести небольшие изменения. Перечислим наиболее значимые из них.

«Комната» может быть любой областью.<sup>15</sup> В частности, «комната» может состоять из попарно несвязных клеток. Любопытно, что тогда  $\varepsilon$ -защита (пример 2) позволит вести переговоры между клетками, практически не замечая шума вне клеток.

Динамики должны выбираться так, чтобы они разделяли «комнату» и «улицу». Иначе говоря, шаблон, приложенный в любом месте, не может одновременно пересекать и «комнату» и «улицу» в свободных от динамиков точках. При этом выборе динамиков остаются верными доказательства допустимости рассмотренных целевых полей.

Наконец, формула (28) пересчёта реального поля на идеальное, как и рекомендации по её применению, имеют общий характер.

### Комментарии

Здесь мы покажем мотивы, рассуждения, которые приводят к решению данной задачи, и приведём элементарные соображения по этому поводу.

О защите от шума я узнал от В.С. Рябенского. Тогда я не вникал в подробности, но на ум пришли два соображения.

Первое связано с тем, что взаимодействие каждого тела с окружающей средой проходит через его границу. Поэтому с точки зрения данного тела для него ничего не изменится, если внешнюю среду заменить на границе на воздействие среды (на поведение среды на границе тела). Отсюда напрашивается вывод о существовании прибора защиты, который действует должным образом на границе и только на границе. Для начала этого

---

<sup>15</sup> Напомним, что в нашей модели «комната» определяется неравенством  $i \leq 0$ , а «улица» – неравенством  $i \geq 1$ .

достаточно. Но не всё так просто, здесь важны детали, на которые обращается внимание в тексте статьи. Подробности можно найти в [6].

Второе связано с конструкцией прибора защиты, вставленного в обычное бытовое окно. На первых порах прибор мыслится как сетка динамиков. Чтобы гасить волны в слышимом диапазоне частот, шаг сетки должен быть достаточно мелким, меньше, чем половина длины самой короткой слышимой волны (порядка 1-2 см). Такая сетка показалась мне слишком частой и, как следствие, прибор показался дорогим.

Во всякой задаче, в том числе в нашей, есть цель, средства и алгоритм достижения цели. Остановимся на этом подробнее.

Чёткая постановка задачи включает в себя понятие цели управления: это поле, которое желательно получить. Сначала я думал, что цель – это поле, которое можно получить из исходного поля, воздействуя на него имеющимися динамиками (у нас это допустимое поле). Но В.С. Рябенский настоял, что целью может быть любое поле. Подумав, я согласился, цель – это тот идеал, пусть и недостижимый, к которому надо стремиться. Какой идеал – зависит от назначения прибора. Отметим, что цель определяется для любого внешнего источника. Кстати, точное разделение звукового поля на внутреннее и внешнее определяется по месту источников звука – внутри, либо вне «комнаты». Среди целевых полей выделяются допустимые поля. Но не каждое из них достижимо (см. дополнение 1). Что касается уравнений управления, то в любом случае их решение является неотъемлемой частью алгоритма управления. Подчеркнём, что уравнения (11) служат для вычисления управления по его цели, а сама цель находится из уравнений управления (13)-(14).

Наиболее привлекательны приборы, которые достигают поставленной цели в любой окружающей акустической среде, базируясь лишь на собственных измерениях звука в реальном времени. Такие приборы мы называли универсальными. Остальные приборы требуют дополнительную акустическую информацию, которую, скорее всего, трудно получить.

Открытый В.С. Рябенским метод примера 2 предоставляет универсальный метод уменьшения шума в комнате в произвольное, какое захотим, число раз. Наличие большого множителя  $\varepsilon^{-1}$  в (16) предъявляет повышенные требования к вопросам аппроксимации и устойчивости. Выяснить возможности устойчивой аппроксимации, которая нужна при создании физических приборов защиты, является основным назначением настоящей работы.

То, что математические модели процесса управления звуком строятся на базе разностных схем<sup>16</sup>, имеет свои преимущества, как то: конечность даёт свободу и обоснованность промежуточных выкладок, формулы вычисления управления получаются непосредственно и, наконец, среди множества представленных моделей можно выбрать подходящую с нужной для практики точностью.

---

<sup>16</sup> Дифференциальная модель, аналог примера 2, рассмотрена в дополнении 3.

Идея построения реального управления состоит в сведении реальной задачи к идеальной (математически точной) модели. Для этого достаточно получить идеальные измерения из реальных путём интерполяции, разумеется, с учётом особенностей. Причём особенности вычисляются в той же модели, которая выбрана в качестве идеальной. Численные эксперименты показывают, что при этом можно добиться устойчивого эффективного управления.

При описании метода В.С. Рябенского (примеры 1-3 и дополнения 1-2) выяснилось, что предложенное изложение применимо для других (см., например, [7]-[9]) известных методик активного подавления шума, основанных на моделировании пассивной защиты (примеры 4-5).

### Благодарности

Особую благодарность автор выражает В.С. Рябенскому, внесшему чрезвычайно большой вклад в данную работу. Математическая модель, впервые предложенная в [1], первоначальная рукопись по численному эксперименту, написанное им введение, многократная деловая критика и предложения по улучшению статьи составляют неполный перечень его творческого участия в данной работе.

Автор благодарит Е.Б. Савенкова за ценные замечания и Е.С. Турчанинову за помощь в написании данной статьи.

### Дополнение 1. Обобщение примеров 1 и 2.

Уже в самой постановке задачи защиты от шума участвуют два поля: разговор в комнате и шум на улице (см. *Рис. 1*). Естественно желание выразить целевое поле через них. Ввиду линейности рассматриваемых задач разумно ограничиться линейным случаем, то есть в рамках разностной схемы рассмотреть следующее целевое поле:

$$z_h = \begin{cases} a_{11}u_h^- + a_{12}u_h^+, & i \leq 0 \\ a_{21}u_h^- + a_{22}u_h^+, & i \geq 1, \end{cases} \quad (31)$$

где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  – постоянные коэффициенты. Напомним, что поля  $u_h^-$  и  $u_h^+$  суть разностные аналоги разговора в комнате и шума на улице соответственно, порождённые источниками  $f_h^-$  и  $f_h^+$ .

Упражнение 1. Докажите, вычисляя  $L_h z_h$ , что при условии  $f_h^- \neq 0$  и  $f_h^+ \neq 0$  поле  $z_h$  в (31) – допустимое тогда и только тогда когда  $a_{11} = a_{22} = 1$ .

Далее будем рассматривать только допустимые  $z_h$ . В силу упражнения 1

$$z_h = \begin{cases} u_h^- + \varepsilon u_h^+, & i \leq 0 \\ \varepsilon^- u_h^- + u_h^+, & i \geq 1, \end{cases} \quad (32)$$

где  $\varepsilon = a_{12}$ ,  $\varepsilon^- = a_{21}$ .

Упражнение 2. Предположим, что уравнения звукового поля всюду известны и совпадают с нашими модельными уравнениями (4)-(6). Как и в примере 1, постройте индивидуальный

алгоритм достижения целевого поля  $z_h$  (32), для чего положите  $A_k = (u_{h,ijk+1}^-)_{i \geq -d/h} \cup (u_{h,ijk+1}^+)_{i \leq d/h}$ .

Рассмотрим *универсальный*, то есть независимый от окружающей среды, алгоритм достижения цели  $z_h$ . Тогда максимум, что известно к моменту времени  $t = t_k$  – это поле  $z_h$  внутри прибора при  $t \leq t_k$ , так как вне прибора среда может быть любой и потому поле  $z_h$  там не определить. Будем считать, в согласии с примечаниями 3 и 4 на стр.6, что этот максимум при  $t = t_k$  известен.

**Теорема 2.** Для существования универсального алгоритма достижения целевого поля  $z_h$  (32) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varepsilon \varepsilon^- = 1. \quad (33)$$

*Доказательство.*

*Достаточность.* При условии (33) задание целевого поля (32) совпадает с заданием  $z_h$  (16) и требуемый алгоритм его получения приведен в примере 2.

*Необходимость.*

*Определение.* Пару допустимых целевых полей назовём близкими, если они одинаковы в области  $S_d$  вплоть до некоторого момента времени  $t = t_{k^*} = k^* \tau$  включительно, но имеют разные управления при  $t = t_{k^*}$ . Предполагается, что для близких полей уравнения в области  $S_d$  известны и совпадают между собой (о приборе известно всё), а вне  $S_d$  уравнения могут быть различны (прибор располагается в разных средах).<sup>17</sup>

Сравним действие одного и того же универсального алгоритма на каждое поле из двух близких целевых полей. Для них в момент  $t = t_{k^*}$  данные для получения двух **разных** управлений **совпадают**, что невозможно без привлечения какой-либо дополнительной информации. Следовательно, существование близких полей подтверждает несостоятельность любого универсального алгоритма.

Для завершения доказательства осталось предъявить два близких поля.

Поставим в глубине улицы какой-нибудь пассивный отражатель и возбудим поле комнатным источником  $f_h^- \neq 0$ . Определим отражённую волну  $\eta_h$  как все те изменения в звуковом поле, которые связаны с установкой отражателя. Иначе говоря, отражённая волна равна разности

$$\eta_h = \psi_h - \varphi_h \quad (34)$$

двух полей  $\psi_h$  и  $\varphi_h$ , возбуждённых источником  $f_h^-$ , в среде с отражателем и, соответственно, без него.

Заметим, что поодаль от отражателя (на расстоянии, большем чем  $h$ ) оба поля  $\psi_h$  и  $\varphi_h$  удовлетворяют волновому уравнению (4) с одной и той же правой

<sup>17</sup> Существование близких полей означает, что зависимость управления при  $t = t_{k^*}$  от целевого поля в области  $S_d$  при  $t \leq t_{k^*}$ , вообще говоря, многозначна. Можно сказать иначе: для вычисления управления при  $t = t_{k^*}$  недостаточно информации о целевом поле в области  $S_d$  при  $t \leq t_{k^*}$ .

частью  $f_h = f_h^-$ . Поэтому поодаль от отражателя, в частности, в комнате,  $L_h \eta_h = 0$ .<sup>18</sup>

Рассмотрим следующие пары полей:  $(u_h^-, u_h^+) = (\psi_h, 0)$  в среде с отражателем и  $(u_h^-, u_h^+) = (\varphi_h, \varepsilon^- \eta_h)$  в среде без отражателя<sup>19</sup>. Подставляя их в (32), получим два целевых поля:

$$\hat{z}_h = \begin{cases} \psi_h, & i \leq 0 \\ \varepsilon^- \psi_h, & i \geq 1 \end{cases} \text{ и } \check{z}_h = \begin{cases} \psi_h + (\varepsilon \varepsilon^- - 1) \eta_h, & i \leq 0 \\ \varepsilon^- \psi_h, & i \geq 1 \end{cases}. \quad (35)$$

Пусть  $\varepsilon \varepsilon^- \neq 1$ . Проверим, что поля  $\hat{z}_h$  и  $\check{z}_h$  являются близкими.

Волна  $\eta_h$  в зависимости от времени ведёт себя следующим образом: она возникает на улице, движется по ней вплоть до времени  $t = t_{k^*}$  и в момент  $t = t_{k^*+1}$  достигает окна  $i = 0$ . В соответствии с таким поведением  $\eta_h$  из (35) видно, что при  $t \leq t_{k^*}$  поля  $\hat{z}_h$  и  $\check{z}_h$  совпадают между собой, а при  $t = t_{k^*+1}$  они различаются в окне  $i = 0$ . Но тогда из формулы (11) следует, что при  $t = t_{k^*}$  управления для полей  $\hat{z}_h$  и  $\check{z}_h$  также различаются в окне  $i = 0$ . Таким образом, оба свойства близости выполнены. На этом проверка близости и вместе с тем доказательство теоремы 2 заканчиваются.

Сложность разделения сигналов обусловлена тем, что поле  $\eta_h$  допускает двойственное толкование: оно либо часть разговора, либо часть уличного шума, и вопрос о его происхождении получает своё решение на месте отражателя. Если место отражателя занято чёрным ящиком, то попробуй разберись, что к чему. Например, теорему 2 можно усилить, если в ней добавить условие о том, что целевое поле (32) известно в настоящем и прошлом не только внутри прибора  $S_d$ , но и во всей комнате. Более того, можно считать, что в настоящем известно всё и везде, кроме чёрного ящика на улице.

Простой пример близких целевых полей приведён в дополнении 2.

### Дополнение 2. Одномерная модель.

Рассмотрим на прямой одномерную разностную модель распространения звука. В обозначениях (4)-(6) имеем:

$$L_h u_h = \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)_\tau - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)_h \right) u_h = f_h, \quad (36)$$

$$u_{h,ik} \Big|_{k=0;1} = 0, \quad (37)$$

где  $-\infty < i < \infty$ ,  $k \geq 0$ . По сравнению с задачей (4)-(6) здесь для простоты внешние боковые стенки отодвинуты на бесконечность. При чтении формул полезно иметь ввиду соответствие:  $ik \leftrightarrow (x, t) = (x_i, t_k) = (ih, k\tau)$ .

<sup>18</sup> Действительно,  $L_h \eta_h = L_h(\psi_h - \varphi_h) = L_h \psi_h - L_h \varphi_h = f_h^- - f_h^- = 0$ .

<sup>19</sup> Равенство  $u_h^+ = \varepsilon^- \eta_h$  корректно, так как было доказано, что источник звука для поля  $\eta_h$  (равный  $L_h \eta_h$ ) находится вне комнаты, то есть на улице.

В дальнейшем будем считать, что  $\tau = h = 1$ . Тогда  $L_h u_h$  в (36) выглядит совсем просто:

$$(L_h u_h)_{ik} = u_{h,ik+1} + u_{h,ik-1} - u_{h,i+1k} - u_{h,i-1k}.$$

Приступая к иллюстрации теоремы 2, введём вспомогательные сеточные функции  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$  и  $\gamma_h$ , ненулевые значения которых задаются следующим образом:

$$\alpha_{h,ik} = 1, \text{ если } k - k_0 = i - i_0, 1 < k < k_0,$$

$$\beta_{h,ik} = 1, \text{ если } k - k_0 = i - i_0, k \geq k_0,$$

$$\gamma_{h,ik} = 1, \text{ если } k - k_0 = i_0 - i, k > k_0,$$

где  $x_{i_0} = i_0 h$  – место расположения отражателя;  $t_{k_0} = k_0 \tau$  – время первого попадания «комнатного» сигнала на отражатель.<sup>20</sup>

Упражнение 3. В плоскости  $(x, t)$  нарисуйте три множества точек  $(x_i, t_k) = (ih, k\tau)$ , в которых функции  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$  и  $\gamma_h$ , соответственно, отличны от нуля. Рисунок напоминает букву Y, нарисованную точками, с развилкой в точке  $(i_0, k_0)$ . О чём говорит символ  $\gamma \alpha \beta$ ?

Построим два близких поля, следуя доказательству теоремы 2.

В качестве отражателя возьмём абсолютно неподвижную стенку в точке  $x_{i_0} = i_0 h$ . Тогда уравнениями распространения звука в среде с отражателем служат: уравнения (36) при  $i \neq i_0$ , уравнения  $u_{h,ik} = 0$  при  $i = i_0$ , и начальные условия (37).

Определим два поля  $\varphi_h = \alpha_h + \beta_h$  и  $\psi_h = \alpha_h - \gamma_h$  и положим  $f_h^- = L_h \varphi_h$ .

Тогда непосредственно проверяется следующее.

Во-первых,

$$f_{h,ik}^- = \begin{cases} 1, \text{ если } (i, k) = (2 - k_0 + i_0, 1), \\ -1, \text{ если } (i, k) = (1 - k_0 + i_0, 2), \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (38)$$

Во-вторых, источник  $f_h^-$  возбуждает поле  $\psi_h$  в среде с отражателем и, соответственно, поле  $\varphi_h$  в среде без отражателя.

В-третьих, отражённая волна (34)  $\eta_h = \psi_h - \varphi_h = -\gamma_h - \beta_h$  удовлетворяет уравнениям (36), (37) со следующей правой частью:

$$(L_h \eta_h)_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i, k) = (i_0, k_0 + 1), \\ -1, \text{ если } (i, k) = (i_0, k_0 - 1), \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (39)$$

что позволяет интерпретировать  $\eta_h$  как уличный шум в среде без отражателя, так как  $i_0 > d/h$  по построению.

Из предыдущего следует, что пары полей:  $(u_h^-, u_h^+) = (\psi_h, 0)$  в среде с отражателем и  $(u_h^-, u_h^+) = (\varphi_h, \varepsilon^- \eta_h)$  в среде без отражателя, действительно состоят из разговора в комнате (поле  $u_h^-$ ) и шума на улице (поле  $u_h^+$ ).

<sup>20</sup> Выберем  $i_0 > d/h$  и  $k_0 > (i_0 h + d)/\tau + 2$ . Тогда отражатель будет находиться на улице, источник  $f_h^-$  (38) – внутри комнаты, и оба – вне нашего прибора.

Подставляя эти пары в (32), получим целевые поля  $\hat{z}_h$  и  $\check{z}_h$  (35). Рассмотрим их разность:

$$\hat{z}_h - \check{z}_h = \begin{cases} (1 - \varepsilon\varepsilon^-)\eta_h, & i \leq 0 \\ 0, & i \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} (\varepsilon\varepsilon^- - 1)\gamma_h, & i \leq 0 \\ 0, & i \geq 1 \end{cases}. \quad (40)$$

Из (40) видно, что поля  $\hat{z}_h$  и  $\check{z}_h$  совпадают вплоть до  $k^*$  шага по времени, где  $k^* = k_0 + i_0 - 1$ . Различие между  $\hat{z}_h$  и  $\check{z}_h$  наступает лишь при  $k = k^* + 1$  в точке  $i = 0$ . Вычисление разности соответствующих управлений по формуле (11) при  $k = k^*$ ,  $i = 0$  показывает, что искомая разность равна  $\varepsilon\varepsilon^- - 1$ .

Подчеркнём, что при  $t \leq t_{k^*}$  построенные в примере поля  $\hat{z}_h$  и  $\check{z}_h$  совпадают между собой всюду. Их различие заключается в происхождении волны  $\varepsilon^- \eta_h$ , являющейся частью целевого поля (как  $\hat{z}_h$  так и  $\check{z}_h$ ) на улице: либо она является отражением комнатной волны, либо она возбуждена уличным источником.

**Дополнение 3.** Непрерывный аналог уравнений управления примера 2.

Для всестороннего рассмотрения уравнений управления (18) приведём нестрогий вывод их непрерывного аналога.

Сначала построим непрерывное целевое поле в случае объёмных динамик, являющееся **аналогом примера 3**. Пусть  $z^-$  – поле, порождаемое источником  $f = f^- + \varepsilon f^+$ . По линейности  $z^- = u^- + \varepsilon u^+$ . По аналогии с (20) зададим

$$z(x, y, t) = (1 + (\varepsilon^{-1} - 1)\lambda(x/\sigma))z^-(x, y, t), \quad (41)$$

где  $\lambda(\xi)$  – неубывающая дважды непрерывно-дифференцируемая функция, такая, что  $\lambda(\xi) = 0$  при  $\xi \leq -1$  и  $\lambda(\xi) = 1$  при  $\xi \geq 1$ <sup>21</sup>;  $\sigma$  – параметр – полуширина полосы  $|x| \leq \sigma$  динамик,  $\sigma < d$ . Как обычно, проверяется, что поле  $z$  – допустимое (рассматривая уравнения (1)-(3) в трёх областях, заданных условиями  $x < -\sigma$ ,  $x > \sigma$  и  $|x| \leq \sigma$ ).

**Непрерывный аналог примера 2.** Функция  $z$  специально построена так, чтобы при  $x \leq -\sigma$  она совпала с функцией  $z^-$ , а при  $x \geq \sigma$  – с функцией  $z^+ = \varepsilon^{-1}z^-$ . В пределе, когда  $\sigma \searrow +0$ , получим из (41) допустимое целевое поле (аналог (16)):

$$z = \begin{cases} z^-, & x \leq 0 \\ \varepsilon^{-1}z^-, & x > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Обратно, выразим  $z^-$  через  $z$ :

$$z^- = \begin{cases} z, & x \leq 0 \\ \varepsilon z, & x > 0. \end{cases} \quad (43)$$

<sup>21</sup> Например, можно определить  $\lambda(\xi) = \frac{1}{16}(8 + 15\xi - 10\xi^3 + 3\xi^5)$  при  $|\xi| \leq 1$ . Проверка показывает, что для неё  $\lambda(-1) = 0$ ,  $\lambda(1) = 1$ ,  $\lambda'(-1) = \lambda''(-1) = \lambda'(1) = \lambda''(1) = 0$ , то есть её различные куски действительно склеиваются в точках  $\xi = \pm 1$  вместе с двумя первыми производными. Функция  $\lambda(\xi)$  – возрастающая, так как  $\lambda'(\xi) = \frac{15}{16}(1 - \xi^2)^2 \geq 0$ .

Переходя в (43) к лево(право)стороннему пределу при  $x \rightarrow 0$ , получим равенство  $z(-0, y, t) = \varepsilon z(+0, y, t)$ . Дифференцируя тождество (43) по  $x$ , мы получим два равенства:  $\frac{\partial}{\partial x} z^- = \frac{\partial}{\partial x} z$  при  $x \leq 0$  и  $\frac{\partial}{\partial x} z^- = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} z$  при  $x > 0$ . Переходя в них к пределу при  $x \rightarrow 0$ , получим, вместе с предыдущим результатом, следующие уравнения для функции  $z$ :

$$\begin{aligned} z(-0, y, t) &= \varepsilon z(+0, y, t), \\ \frac{\partial}{\partial x} z(-0, y, t) &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} z(+0, y, t), \end{aligned} \quad (44)$$

в которых подразумевается взятие односторонних производных и односторонних предельных значений на поверхности  $x = 0$ .

Формула (42) взаимно-однозначно связывает поля  $z$  и  $z^-$ :  $z \leftrightarrow z^-$ . Сопоставим их.

**Краевая задача для  $z^-$ .** Функция  $z^-$  всюду непрерывно-дифференцируема некоторое достаточное количество раз<sup>22</sup>; удовлетворяет волновому уравнению  $Lz^- = f^- + \varepsilon f^+$  и начальным и краевым условиям (2)-(3).

Перечислим свойства функции  $z$  исходя из свойств функции  $z^-$ .

**Краевая задача для  $z$ .** Функция  $z$  обладает такими же дифференциальными свойствами, как  $z^-$  всюду, кроме поверхности  $x = 0$ , на которой она имеет разрывы первого рода как самой функции, так и её производных по  $x$ , и на которой выполняются условия (44); удовлетворяет волновому уравнению  $Lz = f^- + f^+$  всюду, в том числе на поверхности  $x = 0$ , на которой берутся односторонние вторые производные по  $x$ ; удовлетворяет начальным и краевым условиям (2)-(3).

Обратно, перейдём, согласно (43), от функции  $z$  к функции  $z^-$ . Заметим для начала, что в силу (43) соответствующее отображение  $z$  в  $z^-$  склеивает значения  $z$  и  $\frac{\partial}{\partial x} z$  на разрыве  $x = 0$ . Односторонние вторые производные  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} z$  при  $x = 0$  склеиваются в силу уравнений  $Lz = 0$ . Таким образом, на разрыве получается непрерывно-дифференцируемая функция  $z^-$ , удовлетворяющая уравнению  $Lz^- = 0$ . В остальных местах соответствие  $z \leftrightarrow z^-$  гладкое, поэтому в них перенос свойств  $z$  на  $z^-$  сомнений не вызывает.

Построенное соответствие с сопоставлением свойств гладкости показывает, что рассмотренные краевые задачи для полей  $z$  и  $z^-$  эквивалентны. Но поле  $z^-$  является решением краевой задачи (1)-(3), существование и единственность которой не вызывает сомнений. Следовательно, поле  $z$  тоже существует и единственно.

Уравнения (44) в совокупности с односторонними волновыми уравнениями для поля  $z$  при  $x = 0$  являются непрерывным аналогом уравнений управления (18).

<sup>22</sup> возможно, за исключением точек, в которых расположены источники

**Задача.** Как изменятся уравнения (44), если окно криволинейно? Достаточно ли заменить  $\frac{\partial}{\partial x}$  в (44) на производную по нормали к окну, направленной в сторону улицы?

**Дополнение 4.** Проверка того, что поле  $z$  дополнения 3 – допустимое.

Сначала рассмотрим уравнения (1):  $\mathbf{L}u = f$ , в трёх областях, заданных условиями  $x < -\sigma$ ,  $x > \sigma$  и  $|x| \leq \sigma$ . Подставим  $u = z$  в левую часть уравнения (1) и вычислим её.

При  $x < -\sigma$  имеем  $\mathbf{L}z = \mathbf{L}z^- = \mathbf{L}(u^- + \varepsilon u^+) = \mathbf{L}u^- + \varepsilon \mathbf{L}u^+ = f^- + \varepsilon f^+ = f^-$ .

При  $x > \sigma$  имеем

$\mathbf{L}z = \mathbf{L}(\varepsilon^{-1}z^-) = \mathbf{L}(\varepsilon^{-1}u^- + u^+) = \varepsilon^{-1}\mathbf{L}u^- + \mathbf{L}u^+ = \varepsilon^{-1}f^- + f^+ = f^+$ .

При  $|x| \leq \sigma$  имеем  $\mathbf{L}z = g$  по определению управления  $g$ .

Во всех трёх случаях правая часть совпадает суммой  $f^- + f^+ + g$  трёх источников вследствие их разделённости по пространству. Следовательно, всюду  $\mathbf{L}z = f^- + f^+ + g$ .

Проверим выполнение условий (2) для  $u = z$ . Для этого обозначим через  $m$  множитель при  $z^-$  в (17):  $m = m(x) = 1 + (\varepsilon^{-1} - 1)\lambda(x/\sigma)$ . На нижней границе области  $D^\pm$ , т.е. при  $y = 0$ , имеем  $lz = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right)(m(x)z^-) = m(x)lz^- = ml(u^- + \varepsilon u^+) = m(lu^- + \varepsilon lu^+) = 0$ . Проверка выполнения граничных условий (2) на остальных сторонах прямоугольника  $D^\pm$  также проводится без затруднений. И, наконец, нулевые начальные условия (3) переносятся по линейности с функций  $u^-$  и  $u^+$  на функцию  $z$ . Проверка закончена.

**Дополнение 5.** Явная формула управления в примере 2.

Хотя это необязательно, упростим формулу управления (11), пользуясь (18). Для этого заметим, что выражения (4) для  $L_h z_h$  и  $L_h z_h^-$  при  $i=0$  отличаются друг от друга только в одном слагаемом, а именно, в слагаемом, содержащем  $z_{h,1jk}$ . Обозначая через  $X$  общую часть, имеем:

$(L_h z_h^-)_{0jk} = X - \varepsilon h^{-2} z_{h,1jk} = 0$  — по уравнению (18) при  $i=0$  и

$(L_h z_h)_{0jk} = X - h^{-2} z_{h,1jk} = g_{h,0jk}$  — (11) при  $i=0$ .

Аналогично при  $i=1$  и с использованием функции  $z_h^+$ , равной  $\varepsilon^{-1}z_h^-$ , имеем

$(L_h z_h^+)_{1jk} = Y - \varepsilon^{-1} h^{-2} z_{h,0jk} = 0$  и  $(L_h z_h)_{1jk} = Y - h^{-2} z_{h,0jk} = g_{h,1jk}$ .

Отсюда, исключая  $X$  и  $Y$ , получим явные формулы для управления

$$g_{h,ijk} = \begin{cases} (\varepsilon - 1)h^{-2}z_{h,1jk}, & i = 0 \\ (\varepsilon^{-1} - 1)h^{-2}z_{h,0jk}, & i = 1 \\ 0, & i \notin \{0,1\}. \end{cases}$$

## Список литературы

- [1] Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов и его приложения. Москва, Физматлит, 2010.
- [2] Рябенский В. С. Математическая модель устройств подавления внешнего шума в подобласти пространства. Математическое моделирование, 2012, т.24, № 8, с.3–31 URL: <http://www.mathnet.ru/rus/mm3298>
- [3] Рябенский В.С., Турчанинов В.И., Цынков С.В. Использование лагун решений 3D-волнового уравнения для вычисления решения задачи Коши на больших временах. Математическое моделирование, 1999, т.11, №12, с.113-126. URL: <http://www.mathnet.ru/rus/mm1196>
- [4] Плющенко Б.Д., Турчанинов В.И. Пошаговая свёртка // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 24. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-24>
- [5] Турчанинов В.И. Рекуррентное вычисление свёртки с заданным ядром и экспоненциальная аппроксимация // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2009. — № 79. — 18 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-79>
- [6] Рябенский В.С. Активная защита акустического поля желательных источников от внешнего шума в реальном времени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. №27. 15с. doi: <http://doi.org/10.20948/prepr-2016-27> URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-27>  
English source text: [doi:10.20948/prepr-2016-27-e](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-27-e)  
URL: [http://keldysh.ru/papers/2016/prep2016\\_27\\_eng.pdf](http://keldysh.ru/papers/2016/prep2016_27_eng.pdf)
- [7] Федорюк М.В. Об активном гашении колебаний упругих сред. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **16**:4 (1976), 1065–1068  
<http://www.mathnet.ru/links/b00b6e60e1a76400d101781fd20a267a/zvmmf6132.pdf>
- [8] Зверев А.Я. Технологии снижения шума в салоне самолета. Сборник трудов 1-й Всероссийской акустической конференции, 2014  
<http://radio-technica.ru/wp-content/uploads/2014/10/Секция-ШВ-Шумы-и-вибрации.pdf>
- [9] Коротин П.И., Потапов О.А., Соков А.М., Фикс Г.Е., Фикс И.Ш., Циберев А.В. Экспериментальные исследования активного гашения звукового поля на дискретных частотах. Сборник трудов 1-й Всероссийской акустической конференции, 2014  
<http://radio-technica.ru/wp-content/uploads/2014/10/Секция-ШВ-Шумы-и-вибрации.pdf>
- [10] Тест-драйвы и обзоры Honda Accord 2013: Американский японец.  
<http://www.autonavigator.ru/guides/test-drive/Honda/accord/21507.html>