



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 19 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Галанин М.П., Сорокин Д.Л.

Расчёт квазистационарных
электромагнитных полей в
областях, содержащих
несвязные проводящие
подобласти

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галанин М.П., Сорокин Д.Л. Расчёт квазистационарных электромагнитных полей в областях, содержащих несвязные проводящие подобласти // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 19. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2017-19](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-19)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-19>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

М.П. Галанин, Д.Л. Сорокин

Расчёт квазистационарных электромагнитных полей
в областях, содержащих несвязные проводящие
подобласти

Москва — 2017

Галанин М.П, Сорокин Д.Л.

Расчёт квазистационарных электромагнитных полей в областях, содержащих несвязные проводящие подобласти

Рассмотрены методы численного решения системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении в области с многосвязной проводящей подобластью. Исследованы случаи, когда ядро оператора задачи не является тривиальным. Проанализированы методы нахождения нормального решения системы линейных алгебраических уравнений. Разработана методика введения «фиктивного якоря» как метода, альтернативного поиску нормального решения системы линейных алгебраических уравнений. Создана программа, позволяющая моделировать электромагнитное поле в устройствах сложной геометрической формы, приведены результаты вычислительных экспериментов. Рассмотрение проведено на примере расчёта процесса электродинамического ускорения в канале ускорителя типа рельсотрон.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла; псевдообратная матрица; нормальное решение; электродинамический ускоритель; рельсотрон; рельс подмагничивания; «фиктивный якорь».

Mikhail Pavlovich Galanin, Dmitry Leonidovich Sorokin

Modelling Of Quasi-Stationary Electromagnetic Fields In Regions With Disconnected Conductive Subregions

Methods for a numerical solution of Maxwell's equations in the quasi-stationary approximation in a domain with multiply connected conducting subdomains were discussed. The case of nontrivial operator kernel was explored. The methods of finding the normal solution for the linear algebraic equations system were analyzed. The method of introducing a «fictional projectile» was offered as alternative for searching a normal solution of linear algebraic equations method. The program that allows simulating electromagnetic fields in a complex geometrical form of the accelerator was developed, results of computational experiments were presented. The study was carried out at the example of calculation of electrodynamic acceleration process in the railgun channel.

Key words: Maxwell's equations; pseudo-inverse matrix; normal solution; electrodynamic accelerator; railgun; augmenting turn; «fictional projectile».

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-03073).

1. Введение

Необходимость рассчитывать пространственно многомерные электромагнитные поля возникает при решении широкого круга задач науки и техники (магнитогидродинамические генераторы энергии, электродинамические ускорители макротел, астрофизические объекты и т.д.) [1]. Часто объект исследования состоит из нескольких проводящих элементов, не имеющих между собой непосредственного электрического контакта. При этом в области могут присутствовать как проводящие, так и не проводящие электрический ток подобласти.

Целью данной работы является разработка методов расчёта электромагнитных полей в областях, содержащих несвязные проводящие подобласти.

В работе рассматриваются сравнительно медленные процессы, характерное время которых много больше времени прохождения светом характерного пространственного масштаба. Проводимость материалов, по которым течет электрический ток, считается достаточно высокой, так что в них выполнены условия применимости магнитогидродинамического (в данном случае квазистационарного) приближения уравнений Максвелла. Еще одной особенностью постановки рассматриваемой задачи является тот факт, что главный интерес представляют процессы, протекающие в проводящих частях.

Как показано в [1], для описания указанных явлений можно использовать квазистационарное приближение уравнений Максвелла, хотя его применимость во всей области не обеспечена параметрами материалов. При этом оказывается, что решение используемой системы не является единственным. В проводящей подобласти и электрическое, и магнитное поля определяются единственным образом, а в непроводящей единственным является только магнитное поле. Система уравнений квазистационарного приближения в [1] модифицирована так, что единственность решения модифицированной системы в расчётной области обеспечивается в случае, если проводящая подобласть вместе с частью границы определенного вида является односвязной. Если же это не так, то возникают дополнительные проблемы с обеспечением единственности решения.

Численному решению этих проблем и посвящена данная работа.

Изложение ведется на примере электродинамических ускорителей макротел типа рельсотрон [1]. Расчётные области с несвязными проводящими подобластями, в частности, возникают при моделировании электромагнитного поля в канале рельсотрона с рельсами подмагничивания.

Во втором разделе описаны устройство электродинамического ускорителя типа рельсотрон, его математическая и численная модели, постановка задачи.

Третий раздел посвящён анализу ядра оператора задачи.

В четвёртом разделе проведён анализ существующих методов поиска нормального решения систем линейных алгебраических уравнений.

В пятом разделе предложен способ решения задачи путём изменения геометрии расчётной области. Обоснована корректность применения метода. Приведены результаты численного моделирования.

2. Постановка задачи

2.1. Устройство электродинамического ускорителя типа рельсотрон

Схема простейшего ускорителя типа рельсотрон представлена на рис. 2.1. К токопроводящим рельсам подключается источник питания. Между рельсами находится подвижный якорь, который замыкает цепь, вследствие чего по рельсам и якорю начинает протекать электрический ток. Вокруг рельсов возникает магнитное поле. Вследствие взаимодействия этого поля и электрического поля в якорю возникает сила Лоренца (Ампера), выталкивающая якорь из канала ускорителя [2].

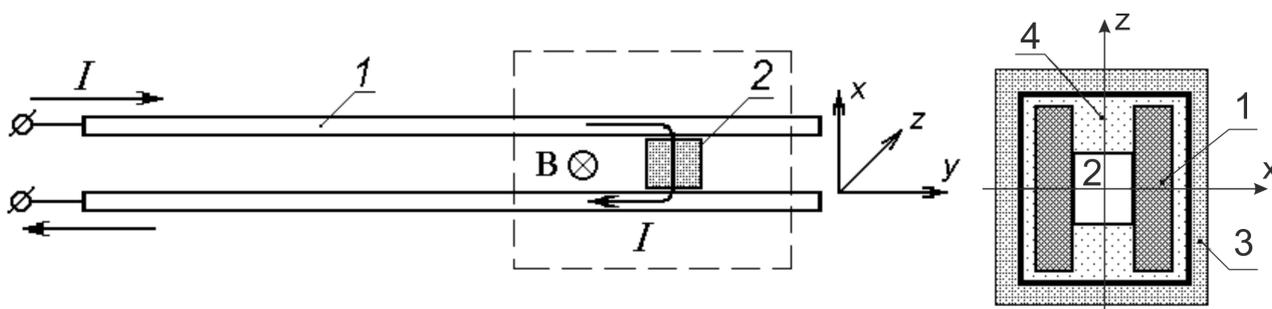


Рис. 2.1. Принципиальная схема рельсотрона: 1 — направляющий и токоподводящий рельс, 2 — ускоряемое тело (якорь или иная токовая арматура), 3 — силовой бандаж канала, 4 — изолятор

Конструкция ускорителя может быть усложнена введением рельсов подмагничивания, усложнением формы якоря, объединением нескольких ускорителей в один многорельсовый и т.п.

2.2. Математическая модель

Электромагнитные поля можно описать моделью, содержащей систему уравнений Максвелла, уравнение неразрывности для заряда и закон Ома, а также соответствующие начальные и граничные условия.

При исследовании сред с высокой электрической проводимостью описание полей можно существенно упростить, используя систему уравнений Максвелла в магнитогидродинамическом (МГД) приближении [1]. В этом приближении пренебрегают током смещения $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ по сравнению с током проводимости \mathbf{j} , а также опускают одно уравнение исходной полной системы уравнений Максвелла. Электрическая проводимость рельсов и якоря достаточно высока, поэтому для расчётов будем использовать систему уравнений Максвелла

в МГД-приближении (2.1).

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}, & (\mathbf{r}, t) \in G \times (0, T), \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E} - [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]) = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь и далее \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля в системе координат, в которой вещество покоится, причём $\mathbf{E} = \mathbf{E}^* + [\mathbf{u} \times \mathbf{H}]$, \mathbf{E}^* — вектор напряженности электрического поля в неподвижной (лабораторной) системе координат, \mathbf{u} — вектор скорости движения вещества, \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля, \mathbf{j} — вектор плотности тока, σ — удельная проводимость, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, t — время.

Система уравнений (2.1) и все дальнейшие формулы записаны в безразмерном виде. Предполагается, что магнитная проницаемость μ не зависит от температуры, а также величины и направления магнитного поля и является константой $\mu \equiv 1$. В результате $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, где \mathbf{B} — вектор магнитной индукции.

Приведем постановку задачи [4] для определения электромагнитных полей внутри области после введения векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= [\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}] - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{A}, \end{aligned}$$

где векторный потенциал \mathbf{A} есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} 4\pi\sigma \{ [\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}] - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{A} \} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \theta(\sigma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}|_{t=0, \mathbf{r} \in G_1} = 0, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\tau|_{\mathbf{r} \in \Gamma_2} = \Psi_\tau(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{A}_\tau|_{\mathbf{r} \in \Gamma_1} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{A}|_{\mathbf{r} \in \gamma_{12}} = 0, \\ \mathbf{A}_n|_{\mathbf{r} \in \Gamma_{22}} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь G — рассматриваемая пространственная область ($G = G_1 \cup G_2$), $G_1 = \{\mathbf{r} \in G : \sigma > 0\}$, $G_2 = \{\mathbf{r} \in G : \sigma = 0\}$, ∂G_1 и ∂G_2 — границы G_1 и G_2 соответственно, $\partial G_{12} = \partial G_1 \cap \partial G_2$, Γ_1 — часть общей границы ∂G , на которой задано условие для \mathbf{E}_τ^* , что эквивалентно условию для \mathbf{A}_τ , Γ_2 — часть ∂G , на которой задано условие для \mathbf{H}_τ (Ψ_τ — известная вектор-функция), $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \partial G_2$, $\Gamma_{22} = \Gamma_2 \cap \partial G_2$, $\gamma_{12} = \partial G_{12} \cup \Gamma_{12}$. В записи (2.2) использованы смешанные эйлерово-лагранжевы (СЭЛ) переменные: $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}, \nabla)$, где $\partial/\partial t$ — производная при фиксированных эйлеровых переменных, D/Dt — при фиксированных СЭЛ-переменных, \mathbf{v} — скорость движения точек пространственной области (в нашем случае \mathbf{v} — скорость движения якоря как целого, не зависящая от координат пространственной точки). Индекс n указывает на нормальную по отношению

γ_{12} может привести к неединственности решения задачи, т.е. ядро оператора задачи будет непустым. При этом вектор напряжённости магнитного поля \mathbf{H} определён единственным образом и в проводнике, и в диэлектрике. Проблема выделения единственного решения возникает только в диэлектрической части при определении вектора напряжённости электрического поля \mathbf{E} . Более того, известно, что размерность ядра оператора \mathcal{M} равна количеству компонент связности проводящей подобласти и поверхности γ_{12} .

3. Поиск ядра оператора задачи

Большинство способов выделения единственного решения задачи в случае несвязности G_1 и границы γ_{12} базируются на выделении нормального решения на основе знания ядра оператора \mathcal{M} . Для численного нахождения ядра существует несколько подходов [9, 10]. Приведём два из них.

Первый состоит в нахождении базисных векторов ядра оператора \mathcal{M} , как решений соответствующей однородной системы уравнений.

Учитывая единственность решения в проводнике, получим задачу с нулевыми граничными условиями первого и второго рода:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = 0 & \text{в } G_1, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 & \text{в } G_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 & \text{на } \gamma_{12}, \\ \mathbf{A}_\tau = 0 & \text{на } \Gamma_1, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\tau = 0 & \text{на } \Gamma_2, \\ \mathbf{A}_n = 0 & \text{на } \Gamma_{22}. \end{cases} \quad (3.1)$$

С учетом того, что ядро оператора rot согласно [7, 8] в многосвязной области состоит из градиентов многозначных функций, а единственность $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ следует из единственности магнитного поля, решение \mathbf{A} в подобласти G_1 с несвязной границей γ_{12} представимо в виде градиента некоторой функции $\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi$. Тогда задача (3.1) в выбранной для примера расчётной области, представленной на рис. 3.1, преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 & \text{в } G_2, \\ \varphi = 0 & \text{на } \gamma_{121}, \\ \varphi = 1 & \text{на } \gamma_{122}, \\ (\operatorname{grad} \varphi)_n = 0 & \text{на } \Gamma_{22}. \end{cases} \quad (3.2)$$

На первом компоненте связности границы γ_{12} (обозначим его γ_{121}) задается нулевой потенциал, на втором (обозначим его γ_{122}) — единичный потенциал [6, 7].

Решить задачу (3.2) требуется только один раз в начале решения всей нестационарной задачи после выбора расчётной области и задания сетки. Результат её решения для выбранной расчётной области (рис. 3.1), представлен

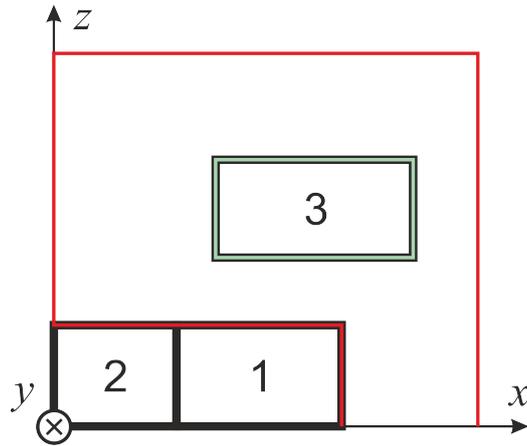
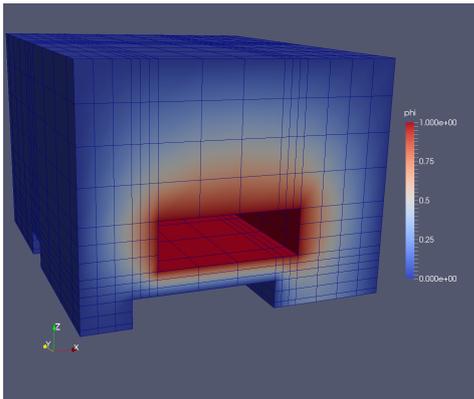
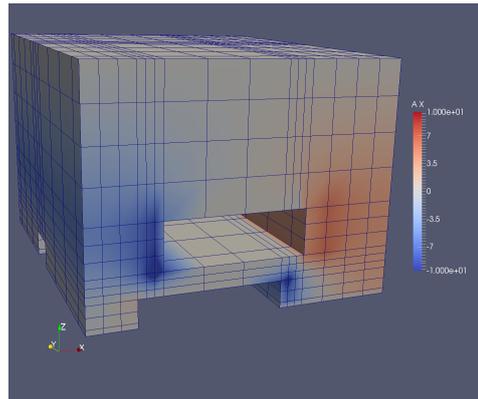


Рис. 3.1. Расчётная область (сечение четверти трёхмерной области плоскостью $y = const$). 1 — направляющий рельс, 2 — якорь, 3 — рельс подмагничивания. Красным цветом показана граница γ_{121} , зелёным — γ_{122}

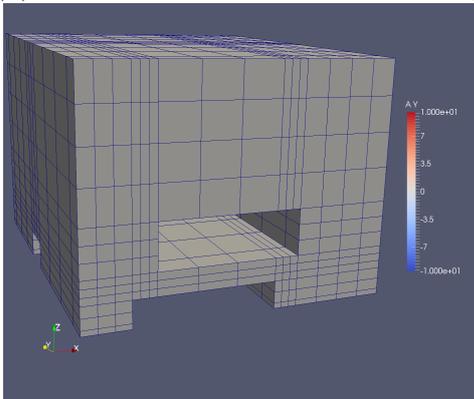
на рис. 3.2а. Соответствующий вспомогательному потенциалу φ векторный потенциал $\mathbf{A} = -\text{grad } \varphi$ представлен на рис. 3.2б – 3.2г.



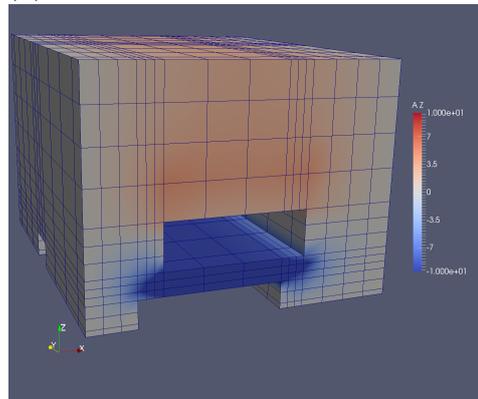
(а) Вспомогательный потенциал φ



(б) Координата A_x потенциала \mathbf{A}



(в) Координата A_y потенциала \mathbf{A}



(г) Координата A_z потенциала \mathbf{A}

Рис. 3.2. Базисный вектор ядра оператора

Второй заключается в анализе системы линейных алгебраических уравнений (2.3) и нахождении собственных векторов матрицы M , соответствующей

щих минимальному собственному значению (в данном случае — нулевому).

Полученные векторы будут иметь ненулевые компоненты только в диэлектрике [10].

4. Методы решения задачи в случае многосвязной области

Из физических соображений ясно, что рассматриваемый процесс имеет однозначные характеристики, а следовательно, и постановка математической задачи, используемая при моделировании процесса, должна давать единственное решение. Для получения единственного решения системы с вырожденной матрицей необходимо [1, 9, 11] искать нормальное решение задачи, т.е. решение, обладающее минимальной нормой. Это решение принадлежит пространству, ортогональному ядру оператора M [9, 12].

Для нахождения нормального решения системы с матрицей M существует ряд подходов [9, 10]:

- 1) вычисление нормальной матрицы;
- 2) построение матрицы, позволяющей найти нормальное решение, но не являющейся нормальной;
- 3) поиск одного из решений системы линейных алгебраических уравнений и построение на его основе нормального решения;
- 4) использование итерационного метода для решения уравнений с вырожденным оператором.

4.1. Вычисление нормальной матрицы

В случае, если не удастся получить решение системы линейных алгебраических уравнений из-за ее вырожденности, построим преобразованную матрицу системы, дающую единственное нормальное решение. Для построения такой матрицы к системе из N уравнений $MA = f$ (в случае m собственных векторов A_j , соответствующих нулевому собственному значению матрицы M) добавляются m строк $(A, A_j) = 0$, где A_j — собственный вектор ($j = 1..m$). Добавленные строки представляют собой условие ортогональности решения ядру оператора M . Норма A_j здесь не играет роли, примем ее равной единице. В результате получаем неквадратную матрицу M_0 , содержащую $(N + m)$ строк и N столбцов. Для приведения матрицы M_0 к квадратному виду размером $N \times N$ домножим полученную систему на транспонированную матрицу M_0^T [13] и получим нормальную (в терминах [12, 13]) систему

$$M_0^T M_0 A = M_0^T f$$

или систему

$$\left(M^T M + \sum_{j=1}^m A_j A_j^T \right) A = M_0^T f$$

с симметричной квадратной матрицей размером $N \times N$. Отметим, что данная система обладает сильнозаполненной матрицей, что может усложнить ее решение используемыми итерационными методами. Кроме того, для реализации данного метода необходимо знать собственные векторы $\{A_j\}$, $j = 1..m$, соответствующие нулевому собственному значению, т.е. ядро оператора M .

Заметим, что положительную определенность преобразованной матрицы легко показать, используя отношение Релея [9, 12]. Минимальное собственное значение

$$\begin{aligned} \lambda_{min} &= \min_{A: \|A\| \neq 0} \frac{(M_0^T M_0 A, A)}{(A, A)} = \min_{A: \|A\| \neq 0} \frac{\left(\left(M^T M + \sum_{j=1}^m A_j A_j^T \right) A, A \right)}{(A, A)} = \\ &= \min_{A: \|A\| \neq 0} \frac{(M^T M A, A) + \sum_{j=1}^m (A_j A_j^T A, A)}{(A, A)} = \min_{A: \|A\| \neq 0} \frac{\|MA\|^2 + \sum_{j=1}^m (A_j, A)^2}{(A, A)} > 0. \end{aligned}$$

4.2. Поиск решения, ортогонального ядру

Для получения матрицы, дающей нормальное решение, менее сложного вида можно другим способом потребовать ортогональности решения системы $MA = f$ векторам A_j . Рассмотрим систему с матрицей M_0 (неквдратной матрицей, состоящей из $(N+m)$ строк, N столбцов, полученной после добавления в систему строк $(A, A_j) = 0$, $j = 1..m$). Домножим систему $M_0 A = f_0$ на матрицу E_0^T (здесь E_0 — матрица из $(N+m)$ строк, N столбцов, составленная из матрицы с единичной диагональю (E) с добавленными строками A_j^T , f_0 — вектор длины $(N+m)$, составленный из f путём добавления m нулевых элементов). Тогда получим систему

$$E_0^T M_0 A = E_0^T f_0$$

или

$$\left(M + \sum_{j=1}^m A_j A_j^T \right) A = f$$

с симметричной квадратной матрицей (если M — симметрична). Для получения единственного решения в данном случае достаточно, чтобы матрица M была неотрицательно определенной. Минимальное собственное значение

в данном случае имеет оценку:

$$\lambda_{min} = \min_{A: \|A\| \neq 0} \frac{(M + \sum_{j=1}^m A_j A_j^T)A, A)}{(A, A)} = \min_{A: \|A\| \neq 0} \frac{(MA, A) + \sum_{j=1}^m (A_j, A)^2}{(A, A)} > 0.$$

Если у матрицы M нулевое собственное значение кратное и ему соответствуют вектора $\{A_j\}$, $j = 1..m$, то для матрицы M нулевому собственному значению соответствует любая линейная комбинация векторов A_j , а для матриц $(M + A_j A_j^T)$ и $(M^T M + A_j A_j^T)$ нулевому собственному значению соответствует линейная комбинация векторов, ортогональная вектору A_j . Это свойство может быть использовано, например, для получения ортогонального базиса ядра оператора M путём последовательного добавления к матрице слагаемых вида $A_j A_j^T$ и нахождения некоторого вектора A_{j+1} , принадлежащего ядру нового оператора. Если размерность ядра оператора M равна m , то после добавления $(m-k)$ строк и преобразования у матриц $\left(M + \sum_{j=1}^{m-k} A_j A_j^T\right)$ и $\left(M^T M + \sum_{j=1}^{m-k} A_j A_j^T\right)$ будет k собственных векторов, соответствующих нулевому собственному значению.

4.3. Ортогонализация имеющегося решения

В ряде случаев удастся получить какое-либо из решений системы $MA = f$ (обозначим это решение A^*). Тогда для построения нормального решения необходимо спроецировать полученное решение на пространство, ортогональное ядру оператора M , домножением на проекционные матрицы $(E - A_j A_j^T)$,

$$A = \prod_{j=1}^m (E - A_j A_j^T) A^*$$

(E — матрица с единичной диагональю, здесь норма $\|A_j\|$ должна быть равна единице). Такая проекция является решением нормальной системы

$$(M^T M + \sum_{j=1}^m A_j A_j^T)A = M^T f.$$

Для получения одного из решений системы $MA = f$ с вырожденной неотрицательно определенной матрицей M можно использовать различные способы. Например, в случае единственного собственного вектора A_0 , соответствующего нулевому собственному значению, возможно потребовать равенства нулю одного из компонентов решения. В этом случае решение системы

$MA = f$ представимо в виде $A = A_{\text{норм.}} + cA_0$, где $A_{\text{норм.}}$ — нормальное решение, c — некоторая постоянная. Следовательно, возможно выбрать коэффициент c , обнуляющий j -й компонент вектора A , то есть обеспечить равенство $(A, e_j) = 0$, здесь e_j — координатный вектор с единственным ненулевым компонентом в строке j , соответствующей ненулевому компоненту вектора A_0 . Тогда матрица системы, построенной с учетом требования $(A, e_j) = 0$,

$$(M + \alpha e_j e_j^T)A = f,$$

где α — положительная постоянная (обеспечивающая выполнение требования $(A, e_j) = 0$) положительно определена (минимальное собственное значение

$$\lambda_{\min} = \frac{((M + \alpha e_j e_j^T)A_1, A_1)}{(A_1, A_1)} = \frac{(MA_1, A_1) + \alpha(A_1, e_j)^2}{(A_1, A_1)} > 0,$$

здесь A_1 — собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению λ_{\min}).

4.4. Итерационные методы для уравнений с вырожденным оператором

В [9] описаны итерационные методы нахождения нормального решения систем линейных алгебраических уравнений. Эти методы не требуют дополнительных знаний о ядре оператора задачи и позволяют решать системы линейных алгебраических уравнений с произвольной матрицей (в том числе и не являющейся самосопряжённой), однако дальнейшее описание методов будет приведено для случая систем с самосопряжёнными матрицами.

Пусть M — самосопряжённый линейный оператор; $\ker M$ — ядро оператора M , т.е. множество элементов A , для которых $MA = 0$; $\text{im } M$ — образ оператора M , т.е. множество всех ненулевых элементов вида MA .

Для решения поставленной задачи будем использовать неявную двухслойную схему:

$$B \frac{A_{k+1} - A_k}{\tau_{k+1}} + MA_k = f, \quad k = 0..(n-1). \quad (4.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f &= \bar{f} + \tilde{f}, & \bar{f} &\in \text{im } M, & \tilde{f} &\in \ker M, \\ A &= \bar{A} + \tilde{A}, & \bar{A} &\in \text{im } M, & \tilde{A} &\in \ker M. \end{aligned}$$

К итерационному процессу предъявим следующие требования:

- 1) итерации проводятся по схеме (4.1), приближение $A_n \in \text{im } M$, в то время как промежуточные приближения A_k могут не принадлежать $\text{im } M$;
- 2) структуры пространств $\ker M$ и $\text{im } M$ не используются.

В [9] показано, что для нахождения нормального решения необходимо наложить ряд ограничений на оператор B , начальное приближение A_0 и шаги τ_k .

Условие 1.

$$B : \begin{cases} BA \in \ker M, & \text{если } A \in \ker M, \\ BA \in \text{im } M, & \text{если } A \in \text{im } M. \end{cases} \quad (4.2)$$

Условие 2.

$$A_0 \in \text{im } M, \text{ т.е. } A_0 = MA'_0, A_0 \neq 0, \text{ где } A'_0 \text{ — произвольный вектор.} \quad (4.3)$$

Условие 3.

$$\tau_k : \begin{cases} \sum_{j=1}^n \tau_j = 0, & f \notin \ker M, \\ \text{произвольный,} & f \perp \ker M. \end{cases} \quad (4.4)$$

Условия (4.2) — (4.4) позволяют выделить из итерационного приближения A_n его проекцию на $\text{im } M$. Если известно, что $\sum_{j=1}^n \tau_j \|B^{-1} \tilde{f}\|$ мала, то мала норма $\|\tilde{A}_n\|$ и условие 3 можно опустить. Также можно отказаться от условия 3, если известна структура пространства $\ker M$. В этом случае можно ограничиться рассмотрением случая $f \perp \ker M$.

Поставим задачу выбора параметров τ_k для схемы (4.1) из условия минимума $\|\tilde{z}_{k+1}\|$, где $\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}_{k+1} - \bar{A}$, \bar{A} — нормальное решение. Тогда

$$\tau_{k+1} = \frac{(M\omega_k, r_k)}{(M\omega_k, M\omega_k)}, \quad k = 0..n-2,$$

где поправка ω_k находится из уравнения $B\omega_k = r_k$, $r_k = MA_k - f$ — невязка. При этом будет иметь место следующая оценка скорости сходимости

$$\|\tilde{z}_{k+1}\|_D \leq \rho_0^k \|\tilde{z}_0\|_D,$$

где $\|A\|_D^2 = (DA, A)$ — энергетическая норма, $D = M^*M$, M^* — оператор, сопряжённый к M , $\rho_0 = \min_{\tau} \|E - \tau MB^{-1}\|_{\text{im } M}$, $\|B\|_{\text{im } M} = \max\{\|BA\|_M : A \in \text{im } M, \|A\|_M = 1\}$.

Для того чтобы $A_n \in \text{im } M$, необходимо выполнить условие (4.4). С этой целью выбираем τ_n следующим образом:

$$\tau_n = - \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j.$$

Оценка нормы невязки на n шаге запишется следующим образом:

$$\|z_n\|_D \leq \|E - \tau_n MB^{-1}\|_{\text{im } M} \|\tilde{z}_{n-1}\|_D. \quad (4.5)$$

Подставим в (4.5) $\tilde{z}_{k+1} = \bar{A}_{k+1} - \bar{A}$ и учтём, что согласно (4.3) $\bar{A}_0 = A_0$, тогда

$$\|A_n - \bar{A}\|_D \leq \|E - \tau_n MB^{-1}\|_{\text{im } M} \rho_0^{n-1} \|A_0 - \bar{A}\|_D.$$

При выборе оператора B необходимо учесть условие (4.2) и требование низкой вычислительной сложности операции применения обратного оператора B^{-1} к вектору A . В простейшем случае в качестве оператора B можно выбрать единичный оператор.

5. Метод введения «фиктивного якоря»

Для реализации большинства методов поиска нормального решения системы линейных алгебраических уравнений требуется найти ядро оператора задачи, т.е. решить вспомогательную задачу, после чего изменить матрицу системы линейных алгебраических уравнений с учётом знания о ядре.

Итерационные методы поиска нормального решения (4.1) имеют крайне низкую скорость сходимости при решении системы $MA = f$ и поэтому неприменимы для решения нестационарной задачи.

Альтернативным способом решения задачи является введение дополнительных элементов, превращающих многосвязную область в односвязную, но слабо влияющих на электромагнитное поле в исследуемой области.

Пусть каждый дополнительный элемент (называемый в дальнейшем «фиктивным якорем») соединяет одну компоненту связности (один рельс подмагничивания) с идеальным кожухом. Расчёт электромагнитного поля в элементе происходит с учётом конвективных слагаемых (как и в основном якорю):

$$4\pi\sigma \left\{ [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}] - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{A} \right\} = \text{rot rot } \mathbf{A}.$$

Полный ток, протекающий по «фиктивному якорю», должен быть равен нулю, что соответствует протеканию электрического тока по рельсам подмагничивания от одного торца расчётной области к другому. С математической точки зрения это обеспечивается заданием условия $\mathbf{A}_\tau = 0$ на боковой поверхности расчётной области. Отметим, что модель идеального кожуха также требует задания $\mathbf{A}_\tau = 0$, т.е. введение «фиктивного якоря» не усложняет процедуру задания граничных условий. Кроме того, данный способ не требует дополнительных вычислительных затрат и не усложняет алгоритм решением вспомогательных задач. Для его реализации достаточно внести соответствующие изменения в геометрию расчётной области.

Для демонстрации работы метода проведём расчёт электромагнитного поля в ускорителе, представленном на рис. 5.1а. В силу симметрии устройства моделирование можно провести для четверти ускорителя и выбрать расчётную область, представленную на рис. 5.1б.

При попытке решить задачу без использования метода «фиктивного якоря» и методов выделения нормального решения получим вырожденную матрицу M . Решить систему линейных алгебраических уравнений (для определённости при 113 257 неизвестных) методом сопряжённых градиентов, например, не удаётся (за 1000 итераций требуемая точность не достигается). После

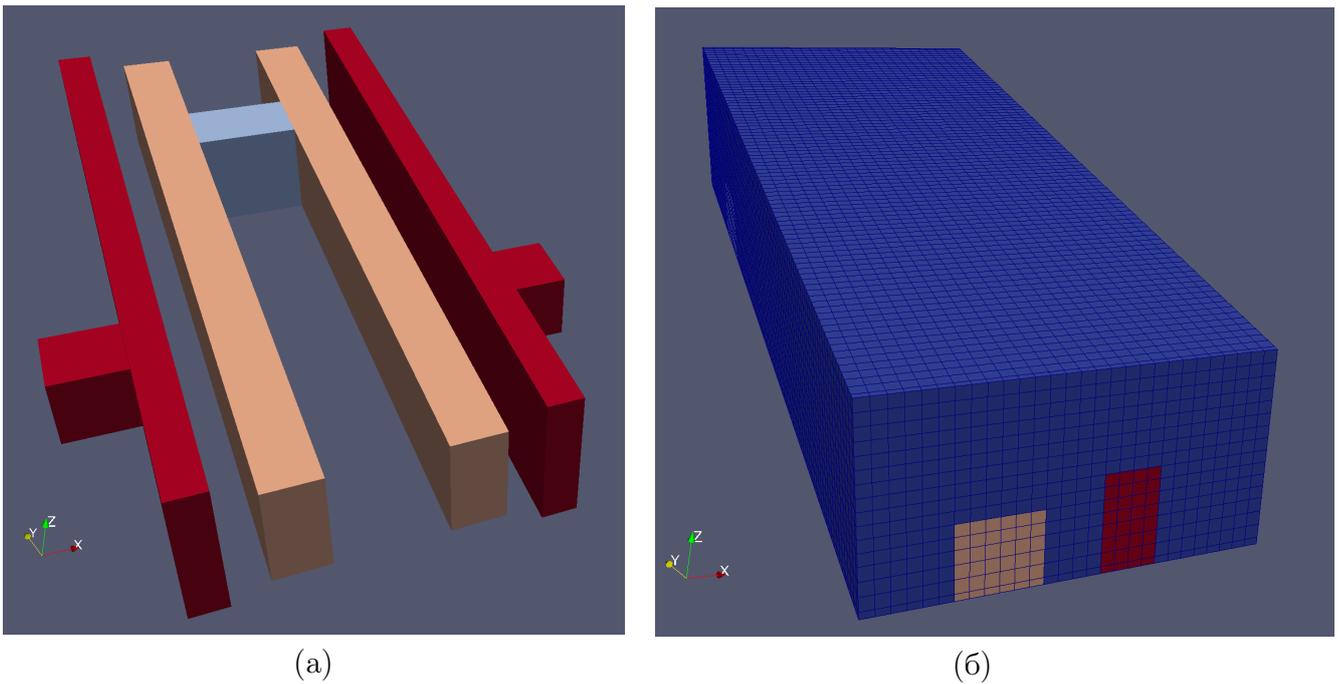


Рис. 5.1. Геометрия устройства после введения «фиктивного якоря» (а) и расчётная область (б): оранжевым цветом показаны основные рельсы, красным — рельсы подмагничивания и «фиктивные» якоря, голубым — основной якорь, синим — диэлектрик

введения «фиктивного якоря» метод сходится за 43 итерации, при этом достигается норма невязки 10^{-13} .

5.1. Исследование влияния размеров расчётной области на результат расчёта

Во время ускорения тел в рельсотроне наиболее сложные и интересные явления происходят в окрестности якоря, характерная протяженность которой сравнима с поперечным размером канала. По этой причине при моделировании целесообразно ограничить рассматриваемое пространство и вести описание полей в области, жестко связанной со скользящим якорем [5].

При таком подходе возникает проблема постановки граничных условий на торцах расчётной области, позволяющих учесть полные токи, протекающие через торцевые сечения рельсов. Одним из способов её решения является задание на торцах области в качестве граничных условий тангенциальных компонент вектора напряженности магнитного поля Ψ_τ , соответствующих полю вокруг бесконечных проводников с необходимыми токами. Электромагнитное поле, необходимое для определения Ψ_τ , является решением соответствующей пространственно-двумерной задачи [4].

Модель имеет явные недостатки. В частности, картина течения тока около границ по y рассматриваемой подвижной области не соответствует картине, имеющейся в исходном ускорителе [4]. Для того чтобы краевые эффекты не оказывали существенного влияния на процессы, протекающие в окрестности

якоря, характерный продольный размер расчётной области должен быть существенно больше характерных размеров якоря (в частности, калибра ствола ускорителя). При уменьшении длины расчётной области (размера в направлении вылета тела) наблюдается уменьшение силы, действующей на якорь и, как следствие, уменьшение скорости вылета макротела из канала рельсотрона. Об этом свидетельствуют результаты серии расчётов ускорителя без рельсов подмагничивания (рис. 5.2а).

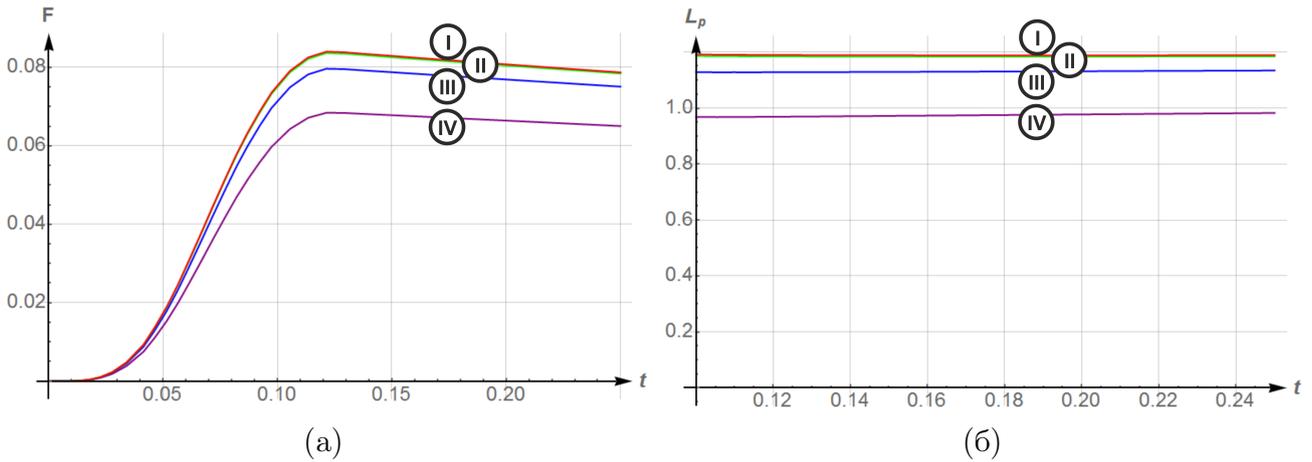


Рис. 5.2. Зависимости силы Лоренца (а) и погонной индуктивности (б) от времени при расчёте ускорителя без рельсов подмагничивания. Разными цветами показаны результаты расчётов с разной длиной расчётной области: красным (I) — 8 калибров за якорем, зелёным (II) — 4 калибра за якорем, синим (III) — 2 калибра за якорем, фиолетовым (IV) — 1 калибр за якорем

В процессе ускорения величина погонной индуктивности ускорителя L_p , определяемая соотношением

$$F_{\text{Л}} = \frac{L_p I^2}{2},$$

является константой. Согласно результатам вычислительных экспериментов, чем длиннее расчётная область, тем лучше выполняется критерий постоянства погонной индуктивности (рис. 5.2б). Отметим, что удаление границы $y = 0$ расчётной области от якоря более чем на 8 калибров не оказывает существенного влияния на качество результата, но существенно увеличивает вычислительную сложность.

5.2. Исследование влияния положения «фиктивного якоря» на результат расчёта

«Фиктивный якорь» должен находиться на достаточном расстоянии от основного якоря, чтобы не оказывать влияния на магнитное поле в окрестности основного якоря. В демонстрационном расчёте он удалён на 4 калибра.

Для выявления степени влияния положения фиктивного якоря на результат ускорения проведён ряд вычислительных экспериментов, которые показали, что приближение «фиктивного якоря» к основному якорю приводит к уменьшению (правда, незначительному) погонной индуктивности (рис. 5.3). Заметим, что положение «фиктивного якоря» относительно основного якоря влияет на интегральные характеристики ускорения меньше, чем изменение размеров расчётной области в направлении y . Это доказывает корректность данной методики.

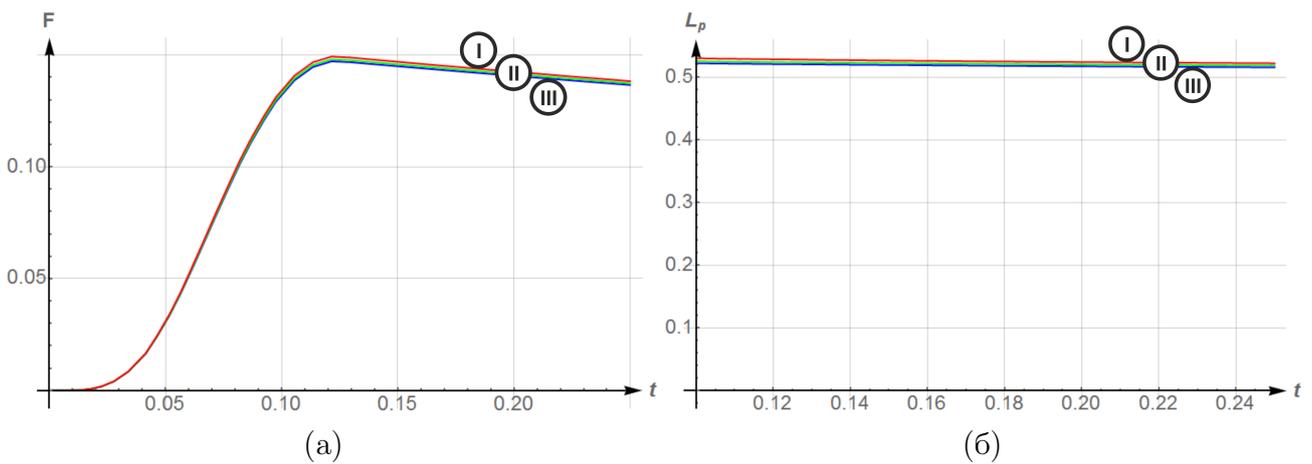


Рис. 5.3. Зависимости силы Лоренца (а) и погонной индуктивности (б) от времени при расчёте ускорителя, представленного на рис. 5.1а. Разными цветами показаны результаты расчётов с разным расположением «фиктивного якоря», красным (I) — на удалении 4 калибров, зелёным (II) — 2 калибров, синим (III) — 1 калибра от основного якоря

5.3. Исследование влияния электрической проводимости «фиктивного якоря» на результат расчёта

При применении метода «фиктивного якоря» существует возможность варьировать не только положение и размеры дополнительного элемента, но и его проводимость. Вычислительные эксперименты показали, что изменение проводимости «фиктивного якоря» слабо влияет на обусловленность матрицы.

Вычислив величину погонной индуктивности (считая, что полный ток в направляющем рельсе и рельсе подмагничивания один и тот же), можем сделать вывод, что она не зависит от проводимости «фиктивного якоря» (рис. 5.4б).

5.4. Сравнение результатов, полученных методом «фиктивного якоря» и методом поиска нормального решения системы линейных алгебраических уравнений

Для сравнения методов выбран электродинамический ускоритель, геометрия которого представлена на рис. 5.5а. В силу того, что для нахождения нор-

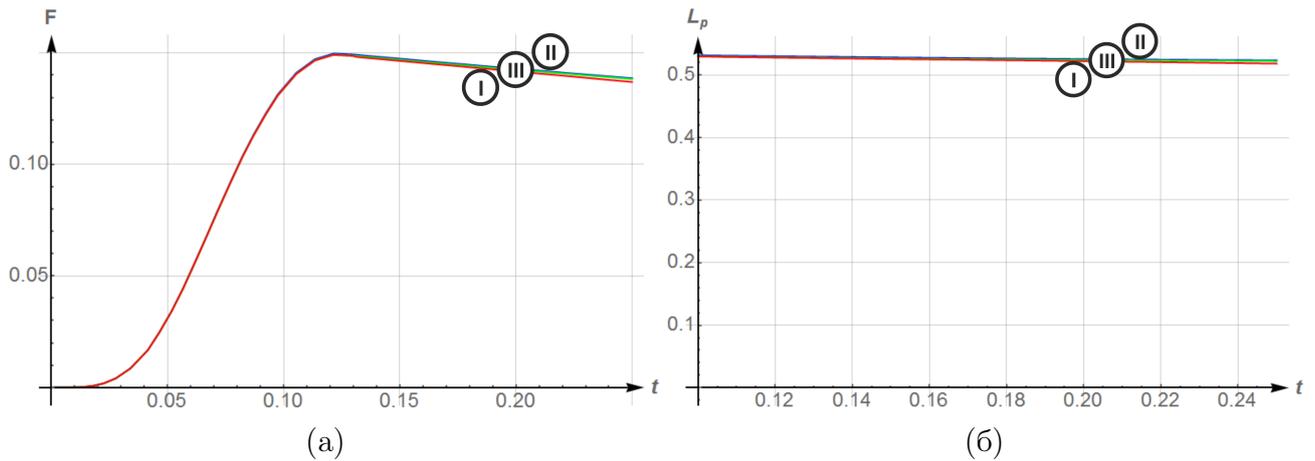
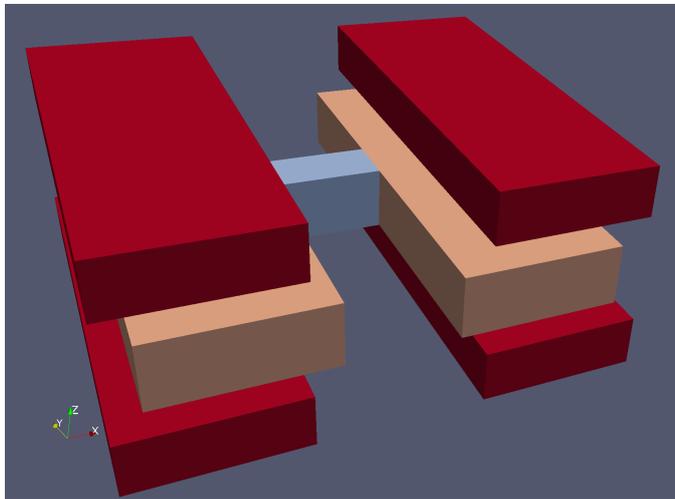
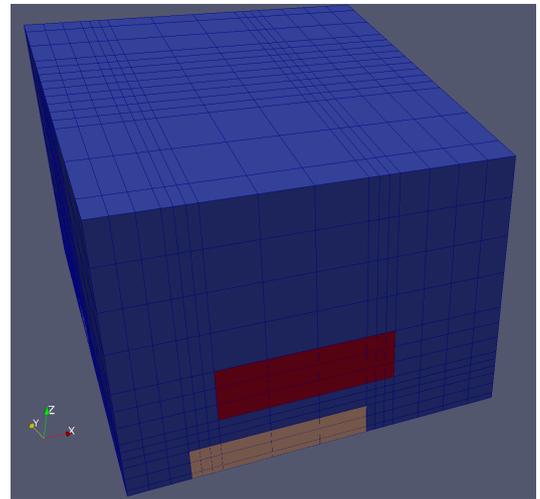


Рис. 5.4. Зависимости силы Лоренца (а) и погонной индуктивности (б) от времени при расчёте ускорителя, представленного на рис. 5.1а. Разными цветами показаны результаты расчётов с разным значением проводимости «фиктивного якоря»: красным (I) — $\frac{\sigma}{10}$, синим (II) — σ , зелёным (III) — 10σ . σ — проводимость рельса подмагничивания

мального решения требуется решать системы линейных алгебраических уравнений с сильно заполненными матрицами (при проведении вычислительных экспериментов доля ненулевых элементов в матрицах составляла около 30%), в области была введена сетка со сгущением (рис. 5.5б). Это позволило сократить число неизвестных.



(a)



(б)

Рис. 5.5. Геометрия устройства (а) и расчётная область для применения метода поиска нормального решения (б): оранжевым цветом показаны основные рельсы, красным — рельсы подмагничивания, голубым — основной якорь, синим — диэлектрик

Результаты расчётов, представленные на рис. 5.6, свидетельствуют, что оба применённых метода приводят к одинаковому результату.

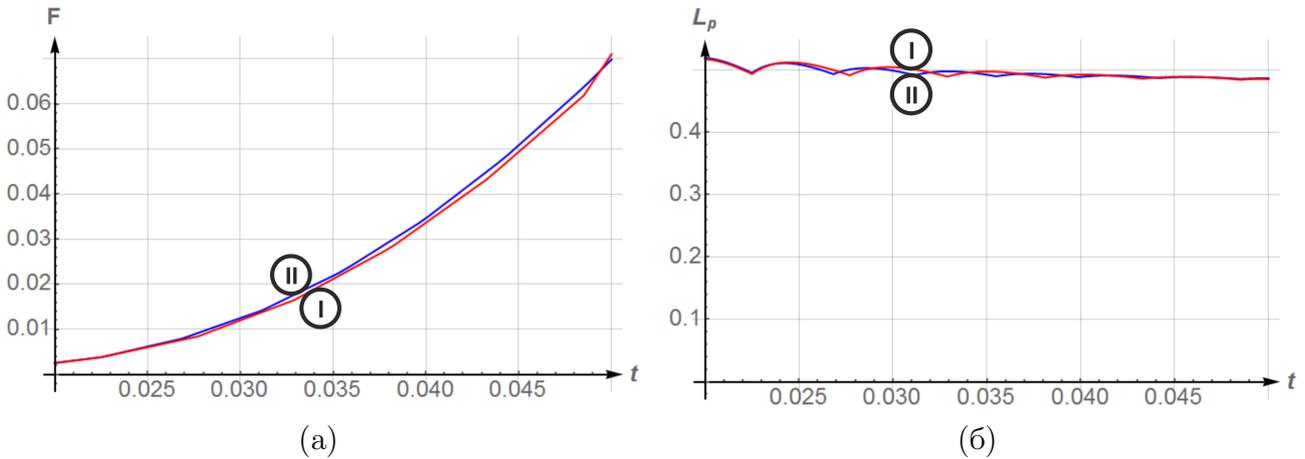


Рис. 5.6. Зависимости силы Лоренца (а) и погонной индуктивности (б) от времени при расчёте процесса ускорения разными методами: красным (I) — методом «фиктивного якоря», синим (II) — методом поиска нормального решения

5.5. Сравнение результатов расчётов ускорения макротел в классическом рельсотроне и ускорителе с рельсами подмагничивания

Зададим одинаковый полный ток (который обозначим I) в основном рельсе и в рельсе подмагничивания. Для оценки результата проведём расчёт ускорителя без рельса подмагничивания, задав полный ток в рельсах равным I .

На рис. 5.7 стрелками изображён вектор напряжённости магнитного поля. Можно заметить, что модуль вектора напряжённости магнитного поля в канале ускорителя с рельсом подмагничивания существенно больше (почти в 2 раза), чем модуль вектора напряжённости в канале классического ускорителя.

На рис. 5.8 приведены результаты расчётов ускорения макротела в канале рельсотрона с подмагничиванием (ток и в основном рельсе, и в рельсе подмагничивания равен I) и без подмагничивания. Стоит отметить, что результаты ускорения в устройстве с рельсом подмагничивания сходны с результатом ускорения в классическом ускорителе при протекании в нём тока $\sqrt{2}I$. Этот результат можно объяснить тем, что $\mathbf{F}_L \sim \mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Плотность тока в якоре зависит от тока в основном рельсе, а напряжённость магнитного поля за счёт наличия рельса подмагничивания возрастает почти в 2 раза.

В случае отсутствия рельса подмагничивания (рис. 5.7а) ток в основном рельсе протекает и по внутренней части рельса, и по внешней. При добавлении рельса подмагничивания ток начинает преимущественно протекать по внутренней части основного рельса (рис. 5.7б). Когда ток в цепи начинает медленно спадать, распределение тока в рельсе становится равномерным и рельс подмагничивания начинает работать только как источник дополнительного магнитного поля.

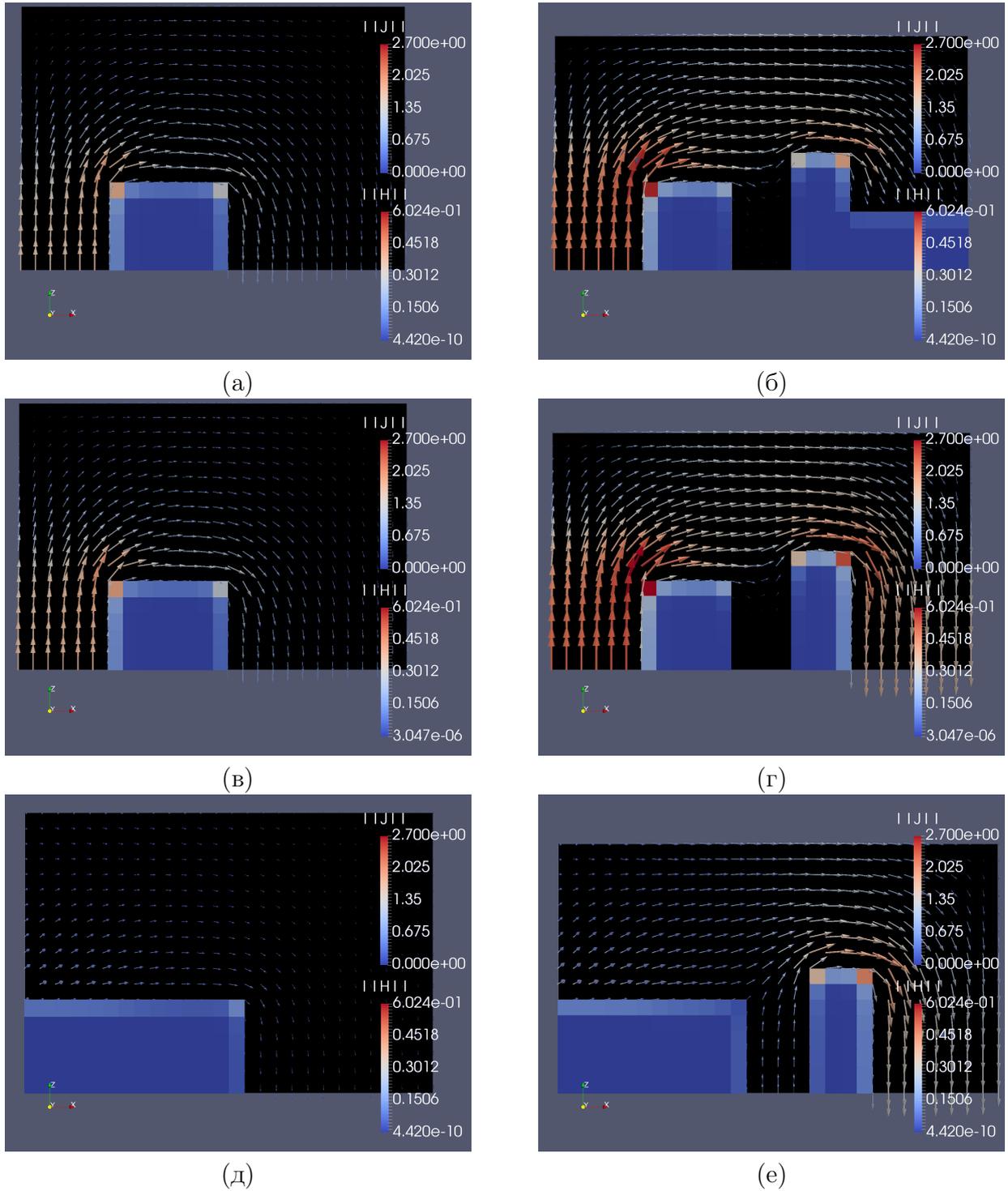


Рис. 5.7. Распределения вектора напряжённости магнитного поля (стрелки) и плотности тока в сечениях ускорителя $y = const$ (цветом в ячейках сетки) в момент времени $t = 0,018$ (а, в, д) без подмагничивания, (б, г, е) при наличии рельса подмагничивания. Сечения (а, б) находятся на расстоянии четырёх калибров от якоря (в месте введения «фиктивного якоря»). Сечения (в, г) находятся на расстоянии двух калибров от якоря (между основным якорем и «фиктивным якорем»). Сечения (д, е) проходят через якорь

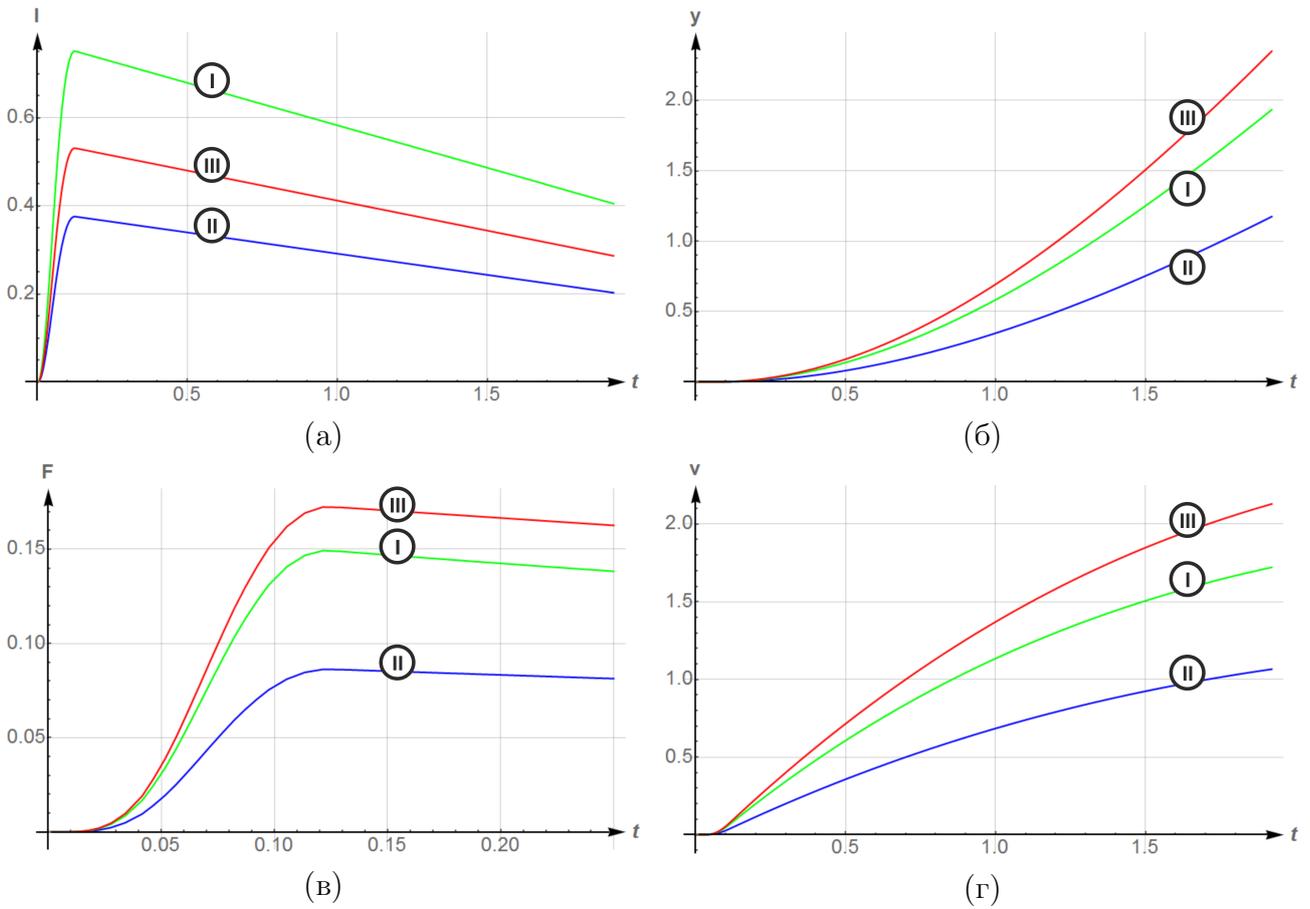


Рис. 5.8. Зависимости сосредоточенных характеристик ускорения: (а) полного тока, проходящего через фронтальное сечение, (б) координаты, (в) действующей на якорь силы Лоренца, (г) скорости — от времени. Зелёный цвет (I) соответствует конфигурации с рельсом подмагничивания. Синий (II) и красный (III) цвета соответствуют классической конфигурации устройства с заданными полными токами I и $\sqrt{2}I$ соответственно

6. Заключение

Изложены особенности решения системы уравнения Максвелла в МГД-приближении в случае, когда расчётная область содержит несколько несвязных проводящих подобластей, проанализированы методы получения единственного решения задачи.

Разработан метод решения, заключающийся во введении «фиктивного якоря». Предложенный метод имеет наименьшую вычислительную сложность среди проанализированных. Проведённые вычислительные эксперименты (расчёты процесса ускорения в рельсотроне с рельсами подмагничивания) показали корректность метода.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование более сложных конфигураций рельсотронов может увеличить ускоряющую макротела силу Лоренца при минимальном увеличении плотности тока в якоре и его нагрева.

Список литературы

- [1] Галанин М. П., Попов Ю. П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах [Текст] — М. : Наука; Физматлит, 1995. — 320 с.
- [2] Галанин М. П. Математическое моделирование эрозии металлических контактов в рельсотронном ускорителе [Текст] / М. П. Галанин, А. П. Лотоцкий, С. С. Уразов, Ю. А. Халимуллин // Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2003. — № 79. — 28 с.
- [3] Галанин М. П., Уразов С. С. Численное моделирование качественных особенностей распределений трехмерных полей в неоднородных подобластях электродинамического ускорителя [Текст] // Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2004. — № 27. — 30 с.
- [4] Галанин М.П. Численное моделирование пространственно трехмерных явлений при электромагнитном ускорении проводящих макротел [Текст] / М. П. Галанин, А. П. Лотоцкий, Ю. П. Попов, С. С. Храмовский // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 8. — С. 3 — 22.
- [5] Галанин М. П. Компьютерное моделирование в задачах конвертирования электромагнитной и кинетической энергии. Задачи и модели [Текст] // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2002. — № 4. — С. 109 — 123.
- [6] Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики [Текст] — М. : Наука, 1967. — 460 с.

- [7] Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа [Текст] // Тр. МИАН СССР. — 1960. — Т. 59. — С. 5 — 36.
- [8] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ [Текст] — М. : Мир, 1981. — 408 с.
- [9] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений [Текст] — М. : Наука, 1978. — 592 с.
- [10] Уразов С. С. Математическое моделирование многомерных квазистационарных электромагнитных полей в канале электродинамического ускорителя [Текст] : дис. канд. ф.-м. наук : 05.13.18 — Москва, 2007. — 120 с.
- [11] Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики [Текст] — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 424 с.
- [12] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры [Текст] — М. : Физматлит, 1963. — 736 с.
- [13] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра [Текст] — М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 336 с.

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	4
2.1. Устройство электродинамического ускорителя типа рельсотрон	4
2.2. Математическая модель	4
2.3. Особенности постановки задачи при наличии рельсов подмагничивания	6
3. Поиск ядра оператора задачи	7
4. Методы решения задачи в случае многосвязной области	9
4.1. Вычисление нормальной матрицы	9
4.2. Поиск решения, ортогонального ядру	10
4.3. Ортогонализация имеющегося решения	11
4.4. Итерационные методы для уравнений с вырожденным оператором	12
5. Метод введения «фиктивного якоря»	14
5.1. Исследование влияния размеров расчётной области на результат расчёта	15
5.2. Исследование влияния положения «фиктивного якоря» на результат расчёта	16
5.3. Исследование влияния электрической проводимости «фиктивного якоря» на результат расчёта	17
5.4. Сравнение результатов, полученных методом «фиктивного якоря» и методом поиска нормального решения системы линейных алгебраических уравнений	17
5.5. Сравнение результатов расчётов ускорения макротел в классическом рельсотроне и ускорителе с рельсами подмагничивания	19
6. Заключение	22