ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 144 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А., Козубская Т.К.

Рёберно-ориентированная аппроксимация уравнений Навье – Стокса для осесимметрических течений на неструктурированной сетке

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А., Козубская Т.К. Рёберно-ориентированная аппроксимация уравнений Навье – Стокса для осесимметрических течений на неструктурированной сетке // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 144. 24 с. doi:10.20948/prepr-2017-144
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-144

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П. А. Бахвалов, Т. К. Козубская

Рёберно-ориентированная аппроксимация уравнений Навье – Стокса для осесимметрических течений на неструктурированной сетке

Москва — 2017

Бахвалов П. А., Козубская Т. К.
Рёберно-ориентированная аппроксимация уравнений Навье – Стокса для осесимметрических течений на неструктурированной сетке

Описывается рёберно-ориентированная аппроксимация уравнений Навье – Стокса для осесимметрических течений идеального вязкого теплопроводного газа. Сравниваются различные аппроксимации источникового члена, заменяющего азимутальные потоки. Корректность разностной схемы демонстрируется на тестовых задачах.
Ключевые слова: уравнения Навье – Стокса, цилиндрические координаты, метод конечных объёмов, рёберно-ориентированная схема

Pavel Alexeevisch Bakhvalov, Tatiana Konstantinovna Kozubskaya
Edge-based Approximation of the Navier – Stokes equations for axial symmetric flows on unstructured meshes

Considered are Navier – Stokes equations for axial symmetric flows of the viscous heat conducting ideal gas. Edge-based approximation on unstructured meshes are written. Compared are different approximations for the source term which models the asimuthal flux. The scheme is verified by test problems.
Key words: Navier – Stokes equations, cylindrical coordinates, finite volume method, edge-based scheme

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01-07911.

Оглавление

Введение

Несмотря на то что современные суперкомпьютеры, а иногда и отдельные рабочие станции позволяют проводить расчёты задач аэродинамики в полной трёхмерной постановке, расчёты в двумерной или осесимметрической постановке по-прежнему могут представлять интерес благодаря значительно меньшей вычислительной стоимости. В некоторых случаях двумерные (в том числе осесимметрические) расчёты позволяют достаточно точно описать исследуемые физические явления. Это имеет место, например, при обтекании тел гиперзвуковым потоком [1]. Также при моделировании тел, близких к осесимметричным, они могут быть полезны в качестве предварительных расчётов, позволяющих увидеть течение и учесть его при построении трёхмерных расчётных сеток.

Одним из классов конечно-объёмных схем на неструктурированных сетках являются рёберно-ориентированные схемы. В их основе лежит классический метод Галёркина с непрерывными кусочно-линейными базисными функциями. В нелинейных задачах с преобладанием конвективного переноса этот метод является неустойчивым, и рёберно-ориентированный подход заключается в оснащении разностной схемы противопоточной диссипацией, характерной для конечно-объёмных схем. Такая схема, не требующая настроечных параметров, для решения уравнений Эйлера впервые была предложена в [2]. Хотя в рамках рёберно-ориентированного подхода, по-видимому, нельзя построить схему наперёд заданного порядка аппроксимации, схемы этого класса – EBR [3] и метод коррекции потоков [4,5] – позволяют на практике добиваться приемлемой точности при сравнительно низкой вычислительной стоимости.

Вязкие члены также аппроксимируются при помощи метода Галёркина с кусочно-линейным базисом, и он также может быть представлен в рёберной форме [6]. Он формально не обладает аппроксимацией на неструктурированной сетке, но сходимость решения к точному присутствует. Надёжность этого метода обеспечивается компактностью шаблона, теоретически доказанной положительной определённостью разностного лапласиана и его монотонностью на остроугольных сетках. Альтернативный подход для аппроксимации вязких членов, позволяющий добиться большей точности, предложен в [7], но он менее надёжен и приводит к трудностям в случае неявного интегрирования по времени.

В настоящей работе рёберно-ориентированный подход применяется для аппроксимации уравнений Навье – Стокса для осесимметрических течений идеального вязкого теплопроводного газа. Корректность разностной схемы демонстрируется на тестовых задачах.

Уравнения Навье – Стокса

Рассмотрим уравнения Навье – Стокса для вязкого идеального сжимаемого газа в предположении равенства нулю коэффициента второй вязкости. В декартовой системе координат они имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j(\rho u_j) = 0;\\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla_j(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \tau_{ij}) = 0;\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u_k u_k}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) + \nabla_j\left(\left(\frac{\rho u_k u_k}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma-1}\right) u_j - \tau_{jk} u_k + q_j\right) = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

По повторяющимся индексам здесь и далее предполагается суммирование. Тензор вязких напряжений $\tau = \{\tau_{ij}\}$ и тепловой поток $\mathbf{q} = \{q_j\}$ определяются формулами

$$\tau_{ij} = \mu\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_k u_k\right), \tag{2}$$

$$q_j = -\varkappa \nabla_j\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad \varkappa = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}. \tag{3}$$

Удобно в качестве основного взять набор переменных

$$\mathbf{U} = (U_0, U_1, U_2, U_3, U_4)^T = (\rho, u_x, u_y, u_z, p/\rho)^T.$$

Тогда в матричном виде уравнения Навье – Стокса (1)–(3) запишутся как

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Q}(\mathbf{U}) + \nabla\cdot\mathcal{F}^{conv}(\mathbf{U}) - \nabla\cdot\mathcal{F}^{diss}(\tau(\nabla\mathbf{U}), \mathbf{q}(\nabla\mathbf{U}), \mathbf{U}) = 0, \tag{4}$$

где функция перехода от физических к консервативным переменным имеет вид $\mathbf{Q}(\mathbf{U}) = (Q_0(\mathbf{U}), Q_1(\mathbf{U}), Q_2(\mathbf{U}), Q_3(\mathbf{U}), Q_4(\mathbf{U}))^T$,

$$Q_0(\mathbf{U}) = U_0, \quad Q_s(\mathbf{U}) = U_0 U_s, \quad Q_4(\mathbf{U}) = U_0\left(\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}{2} + \frac{U_4}{\gamma-1}\right), \tag{5}$$

где $s = 1, 2, 3$, а функции $\mathcal{F}^{conv}(\,\cdot\,)$, $\tau(\,\cdot\,)$, $\mathbf{q}(\,\cdot\,)$ и $\mathcal{F}^{diss}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ задаются формулами

$$\mathcal{F}^{conv}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} U_0U_1 & U_0U_2 & U_0U_3 \\ U_0(U_1^2 + U_4) & U_0U_1U_2 & U_0U_1U_3 \\ U_0U_1U_2 & U_0(U_2^2 + U_4) & U_0U_2U_3 \\ U_0U_1U_3 & U_0U_2U_3 & U_0(U_3^2 + U_4) \\ (Q_4(\mathbf{U}) + U_0U_4)\,U_1 & (Q_4(\mathbf{U}) + U_0U_4)\,U_2 & (Q_4(\mathbf{U}) + U_0U_4)\,U_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$(\tau(\nabla \mathbf{U}))_{ij} = \mu \left(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i - \frac{2}{3}\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} \nabla_k U_k \right), \quad i, j = 1, \ldots, 3, \tag{7}$$

$$(\mathbf{q}(\nabla \mathbf{U}))_j = -\varkappa \nabla_j U_4, \quad j = 1, \ldots, 3, \tag{8}$$

$$\mathcal{F}^{diss}(\tau, \mathbf{q}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \tau_{1j} U_j - q_1 & \sum\limits_{j=1}^{3} \tau_{2j} U_j - q_2 & \sum\limits_{j=1}^{3} \tau_{3j} U_j - q_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Также будем рассматривать линеаризованные уравнения Навье – Стокса. Пульсационные переменные будем обозначать штрихами при имени переменных, а фоновые поля – чертой над ними. Введём

$$\mathbf{U}' = (U_0', U_1', U_2', U_3', U_4')^T = \left(\rho', u_x', u_y', u_z', T'\right)^T, \quad T' = \frac{p'}{\bar{\rho}} - \rho' \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^2}.$$

Линеаризованная функция перехода к консервативным переменным и линеаризованная функция конвективных потоков имеют вид

$$\mathbf{Q}^{lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}) = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{U}})\, \mathbf{U}', \quad \mathcal{F}^{conv,lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}) = \frac{d\mathcal{F}^{conv}}{d\mathbf{U}}(\bar{\mathbf{U}})\, \mathbf{U}'. \tag{10}$$

В частности, при отсутствии фонового потока ($\bar{u}_x = \bar{u}_y = \bar{u}_z = 0$) и однородных полях плотности и давления $\bar{\rho} = 1$, $\bar{p} = 1/\gamma$ справедливо

$$\mathbf{Q}^{lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}) = \left(U_0', U_1', U_2', U_3', U_0'/(\gamma(\gamma-1)) + U_4'/(\gamma-1)\right)^T,$$

$$\mathcal{F}^{conv,lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}) = \begin{pmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \\ U_4' + U_0'/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & U_4' + U_0'/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & U_4' + U_0'/\gamma \\ U_1'/(\gamma-1) & U_2'/(\gamma-1) & U_3'/(\gamma-1) \end{pmatrix}.$$

Тензор вязких напряжений τ и вектор тепловых потоков являются линейными функционалами от $\nabla \mathbf{U}$, поэтому выражения для их компонент (7) и (8) не претерпевают изменений при линеаризации. В целом, если пренебречь зависимостью коэффициента динамической вязкости от пульсаций, линеаризованные уравнения записываются в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}^{lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}) + \nabla \cdot \mathcal{F}^{conv,lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}) - \\ - \nabla \cdot \mathcal{F}^{diss}(\tau(\nabla \mathbf{U}'), \mathbf{q}(\nabla \mathbf{U}'), \bar{\mathbf{U}}) - \nabla \cdot \mathcal{F}^{diss}(\tau(\nabla \bar{\mathbf{U}}), 0, \mathbf{U}') = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Уравнения Навье – Стокса в цилиндрической системе координат

Перепишем уравнения Навье – Стокса (1)–(3) в цилиндрической системе координат. К цилиндрической системе преобразуем как координаты, так и компоненты скоростей.

Всюду будем пользоваться компонентами скоростей, имеющими ту же размерность, что и в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{x}{r}u_x + \frac{y}{r}u_y, \\ u_\varphi &= -\frac{y}{r}u_x + \frac{x}{r}u_y. \end{aligned} \tag{12}$$

При этом

$$u_x = u_r \cos\varphi - u_\varphi \sin\varphi;$$

$$u_y = u_r \sin\varphi + u_\varphi \cos\varphi;$$

$$\nabla_x = \cos\varphi \nabla_r - \frac{1}{r}\sin\varphi \nabla_\varphi;$$

$$\nabla_y = \sin\varphi \nabla_r + \frac{1}{r}\cos\varphi \nabla_\varphi.$$

Дивергенция в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$\nabla_j v_j = \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{13}$$

Выразим из уравнения для декартовых компонент импульса выражение для его радиальной и угловой компонент. Рассмотрим отдельно конвективную и вязкую составляющие.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial t} &= -x\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) - y\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_y) = \Phi_r^{conv} - \Phi_r^{diss}, \\ -\frac{\partial(r\rho u_\varphi)}{\partial t} &= y\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) - x\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_y) = \Phi_\varphi^{conv} - \Phi_\varphi^{diss}, \\ -\frac{\partial(r\rho u_z)}{\partial t} &= -r\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z) = \Phi_z^{conv} - \Phi_z^{diss}. \end{aligned}$$

Начнём с конвективных потоков.

$$\Phi_r^{conv} = x\left(\nabla_j(\rho u_x u_j) + \nabla_x p\right) + y\left(\nabla_j(\rho u_y u_j) + \nabla_y p\right) =$$
$$= (x\nabla_x p + y\nabla_y p) + \left(\nabla_j(x\rho u_x u_j) - \rho u_x^2\right) + \left(\nabla_j(y\rho u_y u_j) - \rho u_y^2\right) =$$
$$= r\frac{\partial p}{\partial r} + \nabla_j(r\rho u_r u_j) - \rho(u_r^2 + u_\varphi^2) =$$
$$= r\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho u_r^2) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_r u_z) - \rho u_r^2 - \rho u_\varphi^2 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}(r(\rho u_r^2 + p)) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_r u_z) - p - \rho u_\varphi^2.$$

$$\Phi_\varphi^{conv} = -y\left(\nabla_j(\rho u_x u_j) + \nabla_x p\right) + x\left(\nabla_j(\rho u_y u_j) + \nabla_y p\right) =$$
$$= (-y\nabla_x p + x\nabla_y p) + (\nabla_j((-y)\rho u_x u_j) + \rho u_x u_y) + (\nabla_j(x\rho u_y u_j) - \rho u_x u_y) =$$
$$= \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nabla_j(r\rho u_\varphi u_j) =$$
$$= \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho u_\varphi u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\rho u_\varphi^2) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_\varphi u_z) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r(\rho u_\varphi^2 + p)) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_\varphi u_z) + \rho u_r u_\varphi.$$

$$\Phi_z^{conv} = r\nabla_j(\rho u_z u_j) + r\nabla_z p =$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\rho u_\varphi u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(r(\rho u_z^2 + p)).$$

Таким образом, в цилиндрических координатах уравнения Эйлера записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(ru_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\rho u_\varphi u_z) + \frac{\partial}{\partial z}\big(r(\rho u_z^2 + p)\big) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}\big(r(\rho u_r^2 + p)\big) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\rho u_r u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_r u_z) - p - \rho u_\varphi^2 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r u_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\big(r(\rho u_\varphi^2 + p)\big) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_\varphi u_z) + \rho u_r u_\varphi = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(rE) + \frac{\partial}{\partial r}(r(E+p)u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r(E+p)u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(r(E+p)u_z) = 0,$$

где полная энергия единицы объёма E определяется как $E = p/(\gamma-1) + \rho\mathbf{u}^2/2$.

Определяя теперь основной набор переменных как $\mathbf{U} = (\rho, u_z, u_r, u_\varphi, p/\rho)^T$ и вводя

$$\tilde{\nabla} = (\partial/\partial z, \partial/\partial r, 1/r\; \partial/\partial\varphi),$$

можно переписать уравнения Эйлера для цилиндрической системы координат в матричном виде:

$$\frac{\partial(r\mathbf{Q}(\mathbf{U}))}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot(r\mathcal{F}^{conv}(\mathbf{U})) = \mathbf{H}^{conv}(\mathbf{U}),$$

где $\mathcal{F}^{conv}(\,\cdot\,)$ – обычная эйлеровская функция потоков (6), а источниковый член $\mathbf{H}^{conv}(\mathbf{U})$ выражается формулой

$$\mathbf{H}^{conv}(\mathbf{U}) = (0, 0, p + \rho u_\varphi^2, -\rho u_r u_\varphi, 0)^T.$$

Теперь перейдём к вязким слагаемым в уравнениях для компонент импульса. Пусть $\hat{x}_j = \{x, j = x;\;\; y, j = y;\;\; 0, j = z\}$. Тогда

$$\Phi_r^{diss} = x\nabla_j\tau_{xj} + y\nabla_j\tau_{yj} = r\left(\frac{x}{r}\nabla_j\tau_{xj} + \frac{y}{r}\nabla_j\tau_{yj}\right) =$$

$$= r\nabla_j\left(\frac{x}{r}\tau_{xj} + \frac{y}{r}\tau_{yj}\right) - r\tau_{xj}\left(\frac{\delta_{xj}}{r} - \frac{x\hat{x}_j}{r^3}\right) - r\tau_{yj}\left(\frac{\delta_{yj}}{r} - \frac{y\hat{x}_j}{r^3}\right).$$

Пусть σ_r – вектор, в декартовых координатах имеющий компоненты $\sigma_{rj} = (x\tau_{xj} + y\tau_{rj})/r$. Пользуясь (12), запишем его цилиндрические компоненты:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2}(\tau_{xx}x^2 + 2\tau_{xy}xy + \tau_{yy}y^2);$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}(-xy\tau_{xx} - y^2\tau_{xy} + x^2\tau_{xy} + xy\tau_{yy});$$

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{r}(x\tau_{xz} + y\tau_{yz}).$$

Применяя формулу для дивергенции вектора в цилиндрических координатах (13), получаем

$$\begin{gathered}\Phi_r^{diss} = \nabla_r(r\sigma_{rr}) + \nabla_\varphi\sigma_{r\varphi} + \nabla_z(r\sigma_{rz}) + \\ + \left(-\tau_{xx} - \tau_{yy} + \frac{1}{r^2}(\tau_{xx}x^2 + 2\tau_{xy}xy + \tau_{yy}y^2)\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Теперь рассмотрим вязкие потоки в азимутальном направлении.

$$\Phi_\varphi^{diss} = -y\nabla_j\tau_{xj} + x\nabla_j\tau_{yj} = r\left(-\frac{y}{r}\nabla_j\tau_{xj} + \frac{x}{r}\nabla_j\tau_{yj}\right) =$$

$$= r\nabla_j\left(-\frac{y}{r}\tau_{xj} + \frac{x}{r}\tau_{yj}\right) + r\tau_{xj}\left(\frac{\delta_{yj}}{r} - \frac{y\hat{x}_j}{r^3}\right) - r\tau_{yj}\left(\frac{\delta_{xj}}{r} - \frac{x\hat{x}_j}{r^3}\right).$$

Пусть σ_φ – вектор, в декартовой системе координат имеющий компоненты $\sigma_{\varphi j} = (-y\tau_{xj} + x\tau_{rj})/r$. Пользуясь (12), запишем его цилиндрические компоненты:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}(y^2\tau_{xx} - 2xy\tau_{xy} + x^2\tau_{yy});$$

$$\sigma_{\varphi z} = \frac{1}{r}(-y\tau_{xz} + x\tau_{yz}); \quad \sigma_{\varphi r} = \sigma_{r\varphi}.$$

Применяя формулу для дивергенции вектора в цилиндрических координатах, получаем

$$\Phi_\varphi^{diss} = \nabla_r\left(r\sigma_{\varphi r}\right) + \nabla_\varphi\sigma_{\varphi\varphi} + r\nabla_z\sigma_{\varphi z} + \frac{1}{r^2}\left(-\tau_{xx}xy + \tau_{xy}(x^2 - y^2) + \tau_{yy}xy\right). \quad (15)$$

В осевом направлении

$$\Phi_z^{diss} = r\nabla_j\tau_{zj} = \nabla_r(x\tau_{xz} + y\tau_{yz}) + \nabla_\varphi\left(-\frac{y}{r}\tau_{xz} + \frac{x}{r}\tau_{yz}\right) + \nabla_z(r\tau_{zz}).$$

Введём вектор σ_z с декартовыми компонентами $\sigma_{zj} = \tau_{zj}$. Его цилиндрические компоненты равны $\sigma_{zr} = \sigma_{rz}$, $\sigma_{z\varphi} = \sigma_{\varphi z}$ и $\sigma_{zz} = \tau_{zz}$. Отсюда следует $\Phi_z^{diss} = \nabla_r(r\sigma_{zr}) + \nabla_\varphi\sigma_{z\varphi} + r\nabla_z\sigma_{zz}$.

Таким образом, из (14) из (15) получим выражения

$$\begin{aligned}
\Phi_r^{diss} &= \nabla_r(r\sigma_{rr}) + \nabla_\varphi\sigma_{r\varphi} + r\nabla_z\sigma_{rz} - \sigma_{\varphi\varphi},\\
\Phi_\varphi^{diss} &= \nabla_r(r\sigma_{r\varphi}) + \nabla_\varphi\sigma_{\varphi\varphi} + r\nabla_z\sigma_{\varphi z} + \sigma_{r\varphi},\\
\Phi_z^{diss} &= \nabla_r(r\sigma_{rz}) + \nabla_\varphi\sigma_{\varphi z} + r\nabla_z\sigma_{zz}.
\end{aligned}$$

Пусть σ – симметрическая матрица, составленная из цилиндрических компонент векторов σ_r, σ_φ и σ_z:

$$\sigma = \{\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{zz}\}. \quad (16)$$

Выразим эти компоненты через цилиндрические компоненты скоростей. Выкладки исключительно громоздкие, поэтому приведём только конечные выражения:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \mu\left(\frac{4}{3}\nabla_r u_r - \frac{2}{3r}u_r - \frac{2}{3}\nabla_z u_z - \frac{2}{3r}\nabla_\varphi u_\varphi\right) = 2\mu\nabla_r u_r - \frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\mathbf{u};\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \mu\left(\frac{4}{3r}\nabla_\varphi u_\varphi + \frac{4}{3r}u_r - \frac{2}{3}\nabla_z u_z - \frac{2}{3}\nabla_r u_r\right) =\\
&= \frac{2\mu}{r}\nabla_\varphi u_\varphi + \frac{2\mu}{r}u_r - \frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\mathbf{u};\\
\sigma_{zz} &= \mu\left(\frac{4}{3}\nabla_z u_z - \frac{2}{3r}u_r - \frac{2}{3r}\nabla_\varphi u_\varphi - \frac{2}{3}\nabla_r u_r\right) = \frac{2\mu}{r}\nabla_z u_z - \frac{2}{3}\mu\mathrm{div}\mathbf{u};\\
\sigma_{r\varphi} &= \mu\left(\nabla_r u_\varphi + \frac{1}{r}\nabla_\varphi u_r - \frac{1}{r}u_\varphi\right);\\
\sigma_{\varphi z} &= \mu\left(\nabla_z u_\varphi + \frac{1}{r}\nabla_\varphi u_z\right);\\
\sigma_{rz} &= \mu\left(\nabla_r u_z + \nabla_z u_r\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Дивергенция скоростей вычисляется формулой (13).

В уравнении энегрии диссипативное слагаемое имеет вид $\nabla\cdot\mathcal{F}_E^{diss}$, где $\mathcal{F}_{E,j}^{diss} = \tau_{jk}u_k - q_j$. Польуясь инвариантностью скалярного произведения относительно поворота векторов, получим

$$
\mathcal{F}_{E,j}^{diss} = \tau_{jk}u_k - q_j = \sigma_{rj}u_r + \sigma_{\varphi j}u_\varphi + \sigma_{zj}u_z - q_j.
$$

Снова пользуясь формулой для дивергенции в цилиндрических координатах, получаем

$$
\begin{gathered}
r\nabla\cdot\mathcal{F}_E^{diss} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r(\sigma_{rr}u_r + \sigma_{r\varphi}u_\varphi + \sigma_{rz}u_z - q_r)\right) +\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r(\sigma_{r\varphi}u_r + \sigma_{\varphi\varphi}u_\varphi + \sigma_{\varphi z}u_z - q_\varphi)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r(\sigma_{rz}u_r + \sigma_{\varphi z}u_\varphi + \sigma_{zz}u_z - q_z)\right).
\end{gathered}
$$

Цилиндрические компоненты тезнора скоростей деформаций определяются выражениями (17), а для цилиндрические компоненты вектора теплового потока определяются как

$$
q_r = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\varphi = -\varkappa\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}, \quad q_z = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}.
$$

Таким образом, уравнения Навье – Стокса в цилиндрической системе координат можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial(r\mathbf{Q}(\mathbf{U}))}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot(r\mathcal{F}^{conv}(\mathbf{U})) - \tilde{\nabla}\cdot(r\mathcal{F}^{diss}(\sigma(\mathbf{U},\tilde{\nabla}\mathbf{U}),\mathbf{q}(\tilde{\nabla}\mathbf{U}),\mathbf{U})) =\\
= \mathbf{H}^{conv}(\mathbf{U}) + \mathbf{H}^{diss}(\sigma(\mathbf{U},\tilde{\nabla}\mathbf{U})),
\end{gathered}
\tag{18}
$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, u_z, u_r, u_\varphi, p/\rho)^T, \quad \tilde{\nabla} = (\partial/\partial z, \partial/\partial r, 1/r\ \partial/\partial\varphi),$$

$\mathbf{Q}(\,\cdot\,)$, $\mathbf{q}(\,\cdot\,)$, $\mathcal{F}^{conv}(\,\cdot\,)$ и $\mathcal{F}^{diss}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – обычные функции консервативных переменных (5), тепловых потоков (8), конвективных (6) и диссипативных потоков (9), σ – матрица цилиндрических компонент тензора вязких напряжений (16). Источниковые члены $\mathbf{H}^{conv}$ и $\mathbf{H}^{diss}$ выражаются формулами

$$\mathbf{H}^{conv}(\mathbf{U}) = (0, 0, p + \rho u_\varphi^2, -\rho u_r u_\varphi, 0)^T, \quad \mathbf{H}^{diss}(\sigma) = (0, 0, -\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}, 0)^T.$$

Формула (18) отличается от уравнений в декартовой системе координат (4)–(9) множителем r под производными и наличием источникового члена. Кроме того, отличие присутствует в выражениях для компонент тензора вязких напряжений.

Процедура линеаризации для уравнений в цилиндрических координат не отличается от аналогичной процедуры для уравнений в декартовой системе координат относительно декартовых компонент скоростей. Векторы линеаризованных переменных, относительно которых записываются уравнения в цилиндрической системе координат, приобретают вид

$$\mathbf{U}' = \left(\rho', u_z', u_r', u_\varphi', p'\frac{1}{\bar{\rho}} - \rho'\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^2}\right)^T,$$

фоновых полей – $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\rho}, \bar{u}_z, \bar{u}_r, \bar{u}_\varphi, \bar{p}/\bar{\rho})^T$, а сами уравнения записываются в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial(r\mathbf{Q}^{lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}))}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot(r\mathcal{F}^{conv,lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}))- \\ -\tilde{\nabla}\cdot(r\mathcal{F}^{diss}(\sigma(\mathbf{U}', \tilde{\nabla}\mathbf{U}'), \mathbf{q}(\tilde{\nabla}\mathbf{U}'), \bar{\mathbf{U}}) + r\mathcal{F}^{diss}(\sigma(\bar{\mathbf{U}}, \tilde{\nabla}\bar{\mathbf{U}}), 0, \mathbf{U}')) = \\ = \mathbf{H}^{conv,lin}(\mathbf{U}', \bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{H}^{diss}(\sigma(\mathbf{U}', \tilde{\nabla}\mathbf{U}')),\end{gathered} \tag{19}$$

где линеаризованная функция конвективного источникового члена имеет вид

$$\mathbf{H}^{conv,lin}(\mathbf{U}') = (0, 0, p' + \rho'\bar{u}_\varphi^2 + 2\bar{\rho}\bar{u}_\varphi u_\varphi', -\rho'\bar{u}_r\bar{u}_\varphi - \bar{\rho}u_r'\bar{u}_\varphi - \bar{\rho}\bar{u}_r u_\varphi', 0)^T.$$

Уравнения в случае осевой симметрии

Рассмотрим уравнения Навье – Стокса в цилиндрический системе координат (18) для аксиально симметрического течения, т. е. при $\partial\mathbf{U}/\partial\varphi = 0$, и линеаризованные уравнения (19) при $\partial\mathbf{U}'/\partial\varphi = 0$ и $\partial\bar{\mathbf{U}}/\partial\varphi = 0$. Отметим, что нулевые производные по φ должны быть от цилиндрических, а не от декартовых компонент скоростей.

Для получения уравнений Навье – Стокса в случае осевой симметрии достаточно в (18) занулить производные по φ, то есть заменить оператор $\tilde{\nabla}$ на

$$\hat{\nabla} = (\partial/\partial z, \partial/\partial r, 0).$$

Отметим, что при этом u_φ не обязательно должна равняться 0.

Поскольку по следанному предположению цилиндрические компоненты скорости не зависят от φ, можно вместо (17) записать

$$\sigma_{rr} = \mu\left(\frac{4}{3}\nabla_r u_r - \frac{2}{3r}u_r - \frac{2}{3}\nabla_z u_z\right); \quad \sigma_{zz} = \mu\left(\frac{4}{3}\nabla_z u_z - \frac{2}{3r}u_r - \frac{2}{3}\nabla_r u_r\right);$$
$$\sigma_{r\varphi} = \mu\left(\nabla_r u_\varphi - \frac{1}{r}u_\varphi\right); \quad \sigma_{\varphi z} = \mu(\nabla_z u_\varphi); \quad \sigma_{rz} = \mu\left(\nabla_r u_z + \nabla_z u_r\right).$$

Таким образом, при $\partial\mathbf{U}/\partial\varphi = 0$ все компоненты σ представляются в виде суммы двух частей, одна из которых имеет ту же запись, что и в декартовых координатах, а вторая пропорциональна $1/r$. Поэтому запишем

$$\sigma(\mathbf{U}, \hat{\nabla}\mathbf{U}) = \tau(\hat{\nabla}\mathbf{U}) + \frac{1}{r}\breve{\sigma}(\mathbf{U}),$$

где компоненты $\breve{\sigma}$ записываются в виде

$$\breve{\sigma}_{zz} = \breve{\sigma}_{rr} = -\frac{2}{3}\mu u_r, \quad \breve{\sigma}_{r\varphi} = -\mu u_\varphi, \quad \breve{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{4}{3}\mu u_r, \quad \breve{\sigma}_{\varphi z} = \breve{\sigma}_{rz} = 0.$$

Поскольку τ и σ линейны по своим аргументам, представленное разложение в равной степени применимо и к линейному случаю.

Вершинно-центрированный конечно-объёмный метод

В случае неоднородного фонового поля линеаризованные уравнения по сравнению с полными содержат дополнительное слагаемое, возникающее из-за линеаризации диссипативной функции. Способ его аппроксимации не отличается от того, который будет приведён ниже для основного вязкого слагаемого, однако, чтобы нелинейные и линейные уравнения можно было записать единообразно, мы органичимся случаем однородного фонового поля $\bar{\mathbf{U}}$, что в силу осевой симметрии подразумевает $\bar{u}_r = \bar{u}_\varphi = 0$. Далее для единообразия в линейном случае штрих будем опускать, а в нелинейном случае положим $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$.

Предположим, что расчётная область в системе координат (z, r) покрыта покоящейся неструктурированной сеткой, состоящей в общем случае из треугольников и четырёхугольников. Обозначим радиус-векторы узлов этой сетки через $\mathbf{r}_i$. Будем считать, что значения сеточных переменных $\mathbf{U}$ заданы в узлах сетки. Для записи консервативной схемы разобьём расчётную область на контрольные объёмы C_i, каждый из которых содержит ровно один сеточный узел. В случае треугольной сетки будем использовать медианные, а в случае гибридной сетки – прямые контрольные объёмы, которые строятся путём соединения центра каждого сеточного элемента с серединами всех его сторон. Под центром элемента подразумевается точка с радиус-вектором, равным среднему арифметическому радиус-векторов всех вершин элемента. Другим возможным вариантом в случае гибридной сетки являются полупрозрачные контрольные объёмы. Оба типа контрольных объёмов описаны в [8].

Для получения конечно-объёмной схемы проинтегрируем уравнение (18) или (19) по медианному или прямому контрольному объёму некоторого узла i:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint\limits_{C_i} r\mathbf{Q}^{[lin]}(\mathbf{U})dzdr + \oint\limits_{\partial C_i} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dl - \\ - \oint\limits_{\partial C_i} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{visc}\left(\tau(\hat{\nabla}\mathbf{U}) + \frac{1}{r}\breve{\sigma}(\mathbf{U}), \mathbf{q}(\hat{\nabla}\mathbf{U}), \bar{\mathbf{U}}\right)dl = \\ = \iint\limits_{C_i}\mathbf{H}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dzdr + \iint\limits_{C_i}\mathbf{H}^{visc}(\mathbf{U},\hat{\nabla}\mathbf{U}))dzdr.\end{gathered} \tag{20}$$

Здесь $\hat{\nabla} = (\partial/\partial z, \partial/\partial r, 0)$, $\mathbf{n}$ – вектор единичной, внешней к C_i нормали.

Введём обозначение $N_1(i)$ для множества узлов, соединённых с узлом i ребром (в случае прямых контрольных объёмов), либо входящих с узлом i в общий элемент (в случае полупрозрачных контрольных объёмов). Тогда граница контрольного объёма C_i распадается на общие границы контрольных объёмов i и k, $k \in N_1(i)$, и половины граничных рёбер расчётной области. Обозначим последние через E_{im}, $m = 1, 2$ (в двумерном случае граничные узлы инцидентны ровно двум рёбрам). Определим для контрольного объёма площадь S_i и объём фигуры вращения V_i (в расчёте на 1 радиан) равенствами

$$S_i = \iint\limits_{C_i} dzdr, \quad V_i = \iint\limits_{C_i} rdzdr.$$

По определению центра масс контрольного объёма $\mathbf{r}_i^{m.c.} = \{r_i^{m.c.}, z_i^{m.c}\}$ можно записать $V_i = r_i^{m.c.} S_i$. Отметим, что центр масс контрольного объёма, вообще говоря, не совпадает с его узлом.

Также определим ориентированную площадь фигуры, полученной вращением некоторого отрезка E, лежащего в плоскости $\varphi = 0$, с вершинами $E1$ и $E2$, также в расчёте на 1 радиан:

$$\mathbf{n}_E = \int\limits_E r d\mathbf{l}^\perp = \frac{r_{E1} + r_{E2}}{2} \int\limits_E d\mathbf{l}^\perp.$$

Ориентированная площадь поверхности вращения общей границы двух контрольных объёмов вычисляется как

$$\mathbf{n}_{ik} = \int\limits_{\partial C_i \cap \partial C_k} r dl = \sum_{E \in \partial C_i \cap \partial C_k} \mathbf{n}_E.$$

Запишем аппроксимацию равенства (20) по рёберно-ореинтированной схеме.

1. Заменим интегральное среднее от $\mathbf{Q}^{[lin]}(\mathbf{U})$ по фигуре вращения на точечное значение сеточной функции $\mathbf{Q}^{[lin]}$ в узле i. Таким образом, первое слагаемое в разностной схеме будет иметь вид $V_i\, d\mathbf{Q}_i^{[lin]}/dt$.

2. Для аппроксимации второго слагаемого запишем

$$\oint\limits_{\partial C_i} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dl = \sum_{k \in N_1(i)} \int\limits_{\partial C_i \cap \partial C_k} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dl + \sum_{m=1}^{2} \int\limits_{E_{im}} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dl.$$

В интеграле по $\partial C_i \cap \partial C_k$ заменим $\mathcal{F}^{conv,[lin]}$ на точечное значение в середине рёбра. В случае с граничными рёбрами поток также заменим некоторым средним по E_{im}, которое определим позже. Получим

$$\oint\limits_{\partial C_i} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dl = \sum_{k \in N_1(i)} \mathbf{n}_{ik}\cdot\mathcal{F}_{ik} + \sum_{m=1}^{2} \mathbf{n}_{im}\cdot\mathcal{F}_{im} = \sum_{k \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ik}|\mathbf{n}_{ik}| + \sum_{m=1}^{2} \mathbf{h}_{im}|\mathbf{n}_{im}|,$$

где $\mathbf{h}_{ik} = (\mathbf{n}_{ik}/|\mathbf{n}_{ik}|) \cdot \mathcal{F}_{ik}$ – значение численного потока. Для внутренних рёбер оно определяется путём точного или некоторого приближённого решения задачи Римана относительно некоторым образом определённых предраспадных значений $\mathbf{U}_{ik}^L$ и $\mathbf{U}_{ik}^R$. В простейшем случае $\mathbf{U}_{ik}^L = \mathbf{U}_i$ и $\mathbf{U}_{ik}^R = \mathbf{U}_k$. Для более точной аппроксимации конвективных потоков нужно определять $\mathbf{U}_{ik}^L$ и $\mathbf{U}_{ik}^R$ таким образом, чтобы они аппроксимировали значение $\mathbf{U}$ в середние ребра ik со вторым порядком. В проводимых ниже тестах для этого будет использоваться схема с квазиодномерной реконструкцией переменных EBR3 [3].

Отметим, что свойство вырождения в конечно-разностную схему высокого порядка на трансляционно-инвариантной сетке (ранее мы называли такие сетки трансляционно-симметрическими) у схем EBR в цилиндрической геометрии теряется даже для линейных задач. На равномерной декартовой (в плоскости z, r) сетке его можно восстановить, если в радиальном направлении реконструировать не физические (ρ, u_z, u_r, u_φ, p) или потоковые переменные, а потоковые переменные, домноженные на r (см., например, [9]). Однако разработка схемы для неструктурированной сетки, которая бы использовала это свойство, представляет собой отдельную проблему, и её сложность, на наш взгляд, существенно превосходит её актуальность.

3. Рассмотрим теперь аппроксимацию вязких потоков. Предположим вначале, что расчётная сетка является треугольной. Представим контурный интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам, входящих в границу контрольного объёма. Каждый такой отрезок полностью лежит в пределах некоторого треугольника T.

$$\oint\limits_{\partial C_i} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{visc}(\sigma(\mathbf{U},\hat\nabla\mathbf{U}),\mathbf{q}(\hat\nabla\mathbf{U}),\bar{\mathbf{U}})dl =$$

$$= \sum_{k\in N_1(i)}\sum_{T\ni i,k}\int\limits_{\partial C_i\cap\partial C_k\cap T} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{visc}\left(\tau(\hat\nabla\mathbf{U})+\frac{1}{r}\breve\sigma(\mathbf{U}),\mathbf{q}(\hat\nabla\mathbf{U}),\bar{\mathbf{U}}\right)dl+$$

$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{E_{im}} r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{visc}\left(\tau(\hat\nabla\mathbf{U})+\frac{1}{r}\breve\sigma(\mathbf{U}),\mathbf{q}(\hat\nabla\mathbf{U}),\bar{\mathbf{U}}\right)dl.$$

Здесь $T\ni i,k$ – треугольник, опирающийся на ребро ik.

В пределах треугольника будем считать значения $\hat\nabla\mathbf{U}$, а также $\mathbf{U}$, входящего в $\breve\sigma$ и в качестве дополнительного параметра в $\mathcal{F}$, постоянными. Значение $\mathbf{U}$ на треугольнике будем вычислять как среднее арифметическое значений $\mathbf{U}$ в его вершинах, и градиент $\hat\nabla\mathbf{U}$ на треугольнике по значениям в вершинах определяется обычным образом.

Рассмотрим некоторый отрезок E, внутренний (соединяющий середину ребра с центром масс треугольника) или граничный (половину граничного ребра). Пусть это ребро лежит внутри (или на границе) треугольника T. Аппроксимируем интеграл по этому ребру от вязких потоков следующим образом:

$$\int\limits_E r\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}^{visc}\left(\tau(\hat\nabla\mathbf{U})+\frac{1}{r}\breve\sigma(\mathbf{U}),\mathbf{q}(\hat\nabla\mathbf{U}),\bar{\mathbf{U}}\right)dl \simeq$$

$$\simeq \int\limits_E r d\mathbf{l}^\perp\cdot\mathcal{F}^{visc}\left(\tau_T,\mathbf{q}_T,\bar{\mathbf{U}}_T\right)+\int\limits_E d\mathbf{l}^\perp\cdot\mathcal{F}^{visc}\left(\breve\sigma(\mathbf{U}_T),0,\bar{\mathbf{U}}_T\right).$$

Здесь τ_T – фрагмент тензора вязких напряжений, посчитанный по производным на треугольнике T, а $\mathbf{U}_T$ и $\bar{\mathbf{U}}_T$ – средние значения переменных на треугольнике.

В случае гибридной сетки построим два её треугольных разбиения таким образом, чтобы каждый четырёхугольник был в них разбит разными диагоналями. На каждой из сеток запишем аппроксимацию вязких членов. Взяв их полусумму, получим аппроксимацию вязких членов на исходной гибридной сетке.

4. Аппроксимация конвективного источникового члена. Конвективное слагаемое $\mathbf{H}^{conv}$ или $\mathbf{H}^{conv,lin}$ не содержит ни производных, ни деления на r. В настоящей работе будем рассматривать два варианта аппроксимации этого слагаемого. В первом случае значение $\mathbf{U}$ в пределах контрольного объёма заменим точечным значением:

$$\iint\limits_{C_i} \mathbf{H}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dzdr \simeq S_i\, \mathbf{H}^{conv,[lin]}(\mathbf{U}_i). \tag{21}$$

Во втором случае на каждом сеточном элементе определим интерполянт, который затем проинтегрируем по контрольному объёму аналитически. Получим

$$\iint\limits_{C_i} \mathbf{H}^{conv,[lin]}(\mathbf{U})dzdr \simeq S_i\, < \mathbf{H}^{conv,[lin]}(\mathbf{U}) >_i, \tag{22}$$

где символом $< \ldots >_i$ обозначено осреднение по контрольному объёму. Осреднение от набора величин выполняется покомпонентно. Для некоторой функции f оно записывается в виде

$$< f >_i = \frac{\sum\limits_{T\ni i} S_T \sum\limits_{j\in T} \alpha_{ij} f_j}{\sum\limits_{T\ni i} S_T},$$

где S_T – площадь сеточного элемента, а α_{ij} – некоторые коэффициенты. В случае треугольной сетки на треугольнике будем использовать стандартный линейный интерполянт, при этом получим $\alpha_{ij} = 22/36$ при $i = j$ и $\alpha_{ij} = 7/36$ иначе. Для четырёхугольника можно получить $\alpha_{ij} = 7/12$ при $i = j$, $\alpha_{ij} = 1/6$, если i и j соединены ребром, и $\alpha_{ij} = 1/12$, если i и j соединяются диагональю. Интерполяция, полученная методом локальных разбиений, даёт близкие коэффициенты, соответственно, $11/18$, $7/48$ и $7/72$.

Перейдём теперь к аппроксимации $\mathbf{H}^{diss}$. Градиенты в узле, входящие в формулу для $\mathbf{H}^{diss}$, вычисляются как средний градиент по треугольникам, содержащим этот узел, с весом, равным площади этого треугольника. Также в вязких слагаемых присутствуют члены вида u_r/r и u_φ/r. В узлах, не лежащих на оси, будем использовать простейшую, точечную, аппроксимацию этих слагаемых. Поскольку при $r = 0$ для точного решения выполняется $u_r|_{r=0} = u_\varphi|_{r=0} = 0$, при $r \to 0$ справедливо $u_r/r \to \partial u_r/\partial r(0)$ и $u_\varphi/r \to \partial u_\varphi/\partial r(0)$. Поэтому для аппроксимации источниковых членов в узлах, лежащих на оси, отношения заменяются на соответствующие производные.

Граничные условия

Для рёберно-ориентированных схем используются два типа граничных условий (ГУ): потоковые и точечные. Потоковые условия заключаются в задании конвективных и вязких потоков через границу контрольного объёма, лежащую на границе расчётной области. Конкретный вид численного потока определяется конкретным типом граничного условия. Точечные же условия заключаются в следующем. Полудискретная аппроксимация уравнений Навье – Стокса в конечном счёте записана в виде

$$V_i \frac{d\mathbf{Q}_i}{dt} = \Phi_i(\{\mathbf{Q}\}, t),$$

где функция Φ включает в себя конвективные, вязкие и источниковые слагаемые. Точечные граничные условия заключаются в том, что посчитанное значение Φ_i в граничных узлах игнорируется и заменяется граничным условием. В частности, если на некоторую переменную q требуется наложить условие $(dq/dt)_i = 0$, то соответствующая компонента функции $\Phi_i(\{\mathbf{Q}\}, t)$ зануляется. Условие $q_i = 0$ заменяется на совокупность $q_i(0) = 0$ и $(dq/dt)_i = 0$, причём первое устанавливается в начальный момент времени, а задание второго не отличается от предыдущего случая.

В настоящей работе рассматривались два варианта задания граничных условий на оси вращения. В первом случае на оси держались значения $u_r = u_\varphi = 0$. Для компонент, не затрагиваемых точечными граничными условиями, задание потокового на границе не требуется, так как потоки содержат множитель r, равный нулю. Во втором случае никаких точечных условий на оси не накладывалось вовсе. Существенной разницы между этими постановками обнаружено не было. В приводимых ниже численных расчётах задач при наличии вязкости использовался первый вариант, а при отсутствии вязкости – второй.

Для невязкой задачи для задания условий непротекания в соответствии с [2] используются потоковые граничные условия. Численный поток через граничное ребро задаётся в виде $\mathbf{h}_{im} = (0, p_i n^z_{im}, p_i n^r_{im}, 0, 0)^T$, где p_i – давление в граничном узле, а n^z_{im} и n^r_{im} – компоненты вектора ориентированной площадь $\mathbf{n}_{im}$.

Условие прилипания предполагает нулевой поток массы (потоковый тип ГУ) и зануление производных от всех компонент скоростей на границе (точечный тип ГУ). При использовании адиабатических стенок граничный поток энергии задаётся равным 0, либо, если граница движется, поток определяется путём вычисления диссипативной функции. При использовании изотермических стенок используется условие $dT/dt = 0$. В случае линеаризованных уравнений $T' = p' - \rho'/\gamma$, а $p' = (\gamma - 1)E'$, где E' – пульсация полной энергии. Поэтому граничное условие приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\left((\gamma - 1)E' - \frac{\rho'}{\gamma}\right) = 0.$$

При ап проксимаици уравнение для пульсации плотности не меняется, а уравнение для пульсации полной энергии заменяется на

$$V_i \frac{dE'_i}{dt} = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \Phi_i^{(\rho)}.$$

Таким образом, изотермическое условие на температуру имеет обычный вид точечных ГУ. Аналогичным образом изотермическое условие записывается и в случае полных уравнений Навье – Стокса.

Для входной и выходной границы расчётной области $\mathcal{F}_{i,m}^{conv}$ определяется решением задачи Римана относительно переменных $\mathbf{Q}_i$ и $\mathbf{Q}_\infty(\mathbf{Q}_i)$, причём последняя определяется конкретным типом граничного условия. В простейшем случае $\mathbf{Q}_\infty$ не зависит от $\mathbf{Q}_i$ и соответствует невозмущённому потоку. Некоторые другие способы задания граничных условий см. в [10]. $\mathcal{F}^{diss}$ полагается равным нулю.

Верификация: линейные возмущения

Всюду в настоящем разделе будем рассматривать нестационарные начально-краевые задачи для уравнения Эйлера или Навье – Стокса, линеаризованные на фоновом поле $\bar{\rho} = 1$, $\bar{\mathbf{u}} = 0$, $\bar{p} = 1/\gamma$, $\gamma = 1.4$. Начальные данные задаются при $t = 0$ соответственно точному решению.

Расчёты будем проводить на декартовых сетках из квадратов с длиной стороны h и на неструктурированных треугольных сетках с характерной длиной ребра h, построенной генератором gmsh [11]. В качестве меры ошибки будем использовать разность между плотностью и её точным значением на конечный момент времени в нормах L_∞ и L_1. Все результаты приводятся при точечной аппроксимации источника (21) и при аппроксимации с осреднением (22).

Вначале верифицируем разработанный алгоритм на акустической волне при отсутствии вязкости и теплопроводности. Рассмотрим точное решение

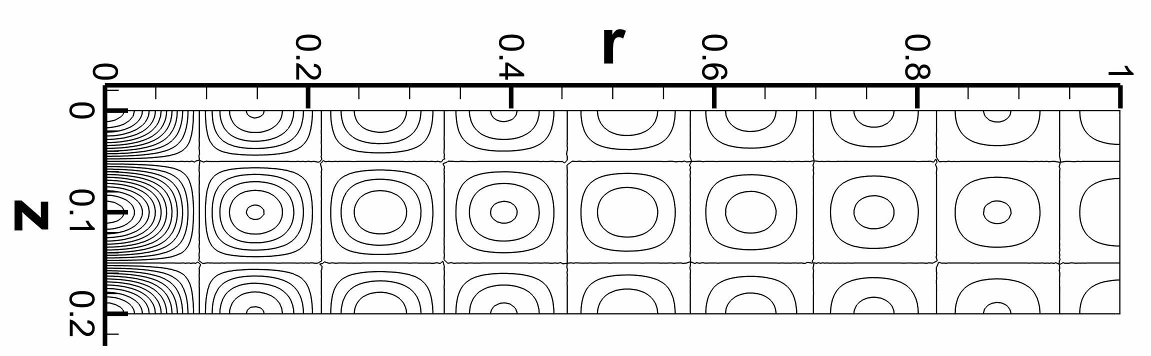

Рис. 1. Изолинии ρ' в плоскости (r, z) в случае $k = 10\pi$, $m = 8$ при $t = 0$

$$
\begin{gathered}
u'_z(z,r,\varphi,t) = -\frac{k}{\omega}\frac{J_0(\varkappa r)}{J_0(\varkappa R)}\cos(kz+\omega t),\\
u'_r(z,r,\varphi,t) = \frac{\varkappa}{\omega r}\frac{J_1(\varkappa r)}{J_0(\varkappa R)}\sin(kz+\omega t),\\
u'_\varphi(z,r,\varphi,t) = 0,\\
\rho'(z,r,\varphi,t) = p'(z,r,\varphi,t) = \frac{J_0(\varkappa r)}{J_0(\varkappa R)}\cos(kz+\omega t),
\end{gathered}
\tag{23}
$$

где k – осевое волновое число, $\varkappa = \lambda_m/R$, $\omega = (\varkappa^2 + k^2)^{1/2}$ – частота, $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя 1-го рода индекса 0 и 1 соответственно, λ_m – m-й нуль функции $J_1(x)$. Радиус канала R положим равным 1, и на его боковой стенке зададим условие отражения.

Численная ошибка по плотности на время $t = 10$ в случае $k = 0$, $m = 1$ сведена в таблицу 1. Видно, что ошибка в интегральной норме почти не зависит от способа аппроксимации источникового члена. А в норме L_∞ при точечной аппроксимации ошибка оказывается меньше. Глядя на распределение ошибки (в препринте оно не приводится), можно заметить, что в случае осреднённой аппроксимации источника максимум ошибки находится на оси или в одном из соседних с ней узлов, тогда как при точечной аппроксимации он находится не на оси.

Численная ошибка по плотности на время $t = 10$ в случае $k = 10\pi$, $m = 8$ представлена в таблице 2. Это решение в начальный момент времени изображено на рис. 1, где показаны изолинии плотности от $\rho' = -6$ до $\rho' = 6$ с шагом 0.5.

Таблица 1

Численная ошибка решения задачи о невязкой волне, $k = 0$, $m = 1$

		Усреднённая аппроксимация источника		Точечная аппроксимация источника	
сетка	h	ошибка, L_∞	ошибка, L_1	ошибка, L_∞	ошибка, L_1
квадратная	1/50	4.07×10^{-3}	1.14×10^{-3}	3.02×10^{-3}	1.15×10^{-3}
	1/100	1.22×10^{-3}	3.42×10^{-4}	9.17×10^{-4}	3.46×10^{-4}
	1/200	3.38×10^{-4}	9.28×10^{-5}	2.50×10^{-4}	9.39×10^{-5}
неструкт.	1/50	4.41×10^{-3}	1.10×10^{-3}	3.29×10^{-3}	1.11×10^{-3}
	1/100	1.57×10^{-3}	3.09×10^{-4}	9.31×10^{-4}	3.11×10^{-4}
	1/200	4.50×10^{-4}	7.97×10^{-5}	2.47×10^{-4}	8.01×10^{-5}

Таблица 2

Численная ошибка решения задачи о невязкой волне, $k = 10\pi$, $m = 8$

		Усреднённая аппроксимация источника		Точечная аппроксимация источника	
сетка	h	ошибка, L_∞	ошибка, L_1	ошибка, L_∞	ошибка, L_1
квадратная	1/200	7.30×10^{-1}	6.70×10^{-2}	8.02×10^{-1}	6.55×10^{-2}
	1/400	9.61×10^{-2}	9.27×10^{-3}	1.11×10^{-1}	8.70×10^{-3}
	1/800	1.35×10^{-2}	1.34×10^{-3}	1.35×10^{-2}	1.34×10^{-3}
неструкт.	1/200	1.05×10^{0}	9.12×10^{-2}	1.11×10^{0}	8.94×10^{-2}
	1/400	1.64×10^{-1}	1.32×10^{-2}	1.86×10^{-1}	1.25×10^{-2}
	1/800	4.17×10^{-2}	2.11×10^{-3}	4.51×10^{-2}	1.85×10^{-3}

Перейдём теперь к верификации линеаризованных уравнений Навье – Стокса. Рассмотрим задачу о поршневой моде в канале при наличии вязкости и теплопроводности. Эта задача впервые была решена Кирхгоффом [12], конечное выражение и детали реализации см. в [13]. Коэффициент вязкости зададим большим, чтобы вязкие эффекты доминировали над конвективными. Используя комплекснозначное точное решение этой задачи, мы подразумеваем, что в качестве начальных данных и эталона для сравнения используется его действительная часть.

Будем использовать следующий набор параметров: радиус канала $R = 1$, коэффициент вязкости $\mu = 1$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$, показатель адиабаты

Таблица 3

Численная ошибка решения задачи о вязкой теплопроводной волне

		Усреднённая аппроксимация источника		Точечная аппроксимация источника	
сетка	h	ошибка, L_∞	ошибка, L_1	ошибка, L_∞	ошибка, L_1
квадратная	1/50	2.82×10^{-2}	3.36×10^{-3}	2.90×10^{-2}	3.26×10^{-3}
	1/100	9.54×10^{-3}	7.98×10^{-4}	9.80×10^{-3}	7.91×10^{-4}
	1/200	3.27×10^{-3}	2.01×10^{-4}	3.33×10^{-4}	2.02×10^{-4}
неструкт.	1/50	2.60×10^{-2}	2.22×10^{-3}	2.29×10^{-2}	2.19×10^{-3}
	1/100	1.08×10^{-3}	5.27×10^{-4}	8.97×10^{-3}	5.38×10^{-4}
	1/200	3.71×10^{-3}	1.33×10^{-4}	3.25×10^{-3}	1.37×10^{-4}

Таблица 4

Численная ошибка решения задачи о вихревом возмущении

		Усреднённая аппроксимация источника		Точечная аппроксимация источника	
сетка	h	ошибка, L_∞	ошибка, L_1	ошибка, L_∞	ошибка, L_1
квадратная	1/50	6.99×10^{-6}	2.81×10^{-6}	6.99×10^{-6}	2.81×10^{-6}
	1/100	1.74×10^{-6}	7.01×10^{-7}	1.74×10^{-6}	7.01×10^{-7}
	1/200	4.36×10^{-7}	1.75×10^{-7}	4.36×10^{-7}	1.75×10^{-7}
неструкт.	1/50	8.14×10^{-6}	2.89×10^{-6}	8.14×10^{-6}	2.89×10^{-6}
	1/100	2.33×10^{-6}	7.21×10^{-7}	2.33×10^{-6}	7.21×10^{-7}
	1/200	5.43×10^{-7}	1.83×10^{-5}	5.43×10^{-7}	1.83×10^{-7}

$\gamma = 1.4$, радиальная мода $m = 3$, осевое волновое число $k = 2\pi$. При этом частота колебаний равна $\omega = 11.7014553388525 + \mathrm{i}\, 1.35317029113126$. Амплитуда плотности в начальный момент времени примерно равна 4.01. Расчёт проводился до момента времени $t = 1$, и за счёт диссипации (определяемой мнимой частью частоты) на конечный момент времени она становится примерно равной 1.04. Результаты сведены в таблицу 3.

Также рассмотрим вихревое возмущение при наличии вязкости в отсутствие теплопроводности. Для задания такого возмущения нужно задать начальные данные $\rho' = p' = u'_r = u'_z = 0$, а азимутальная скорость может быть произвольной функцией r и z. Для получения решения начальные данные разлага-

Таблица 5

Предельное число Куранта

	Усреднённая аппроксимация источника	Точечная аппроксимация источника
Без ГУ на оси	0.925	0.875
Задание на оси $u_r = u_\varphi = 0$	0.925	0.925

ются в ряд по собственным функциям, каждая из которых затухает по времени со своей скоростью. Общее решение записывается в виде

$$u_\varphi(r, z, t) = \int\limits_{k=-\infty}^{\infty} dk \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(k) \exp(i\omega_{k,m} t + ikz) J_1 \left(\lambda_m \frac{r}{R}\right),$$

$$\omega_{k,m} = i\mu \left(k^2 + \frac{\lambda_m^2}{R^2}\right),$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя 1-го рода индекса 1, λ_m – её m-й нуль, $\alpha_m(k)$ – произвольные функции, определяемые из начальных условий. Начальные данные задавались в виде

$$u_\varphi(r, z, 0) = \cos(2\pi z) r \sin(\pi r),$$

то есть решение соответствовало одному волновому числу вдоль оси и всему множеству радиальных волновых чисел m. Ошибка относительно точного решения на момент времени $t = 10$ сведена в таблицу 6. Поскольку все переменные, кроме u_φ, равны 0 как в точном, так и в численном решении, ошибка выводилась по u_φ. Решение не завит от способа аппроксимации $\mathbf{H}^{conv,lin}$, поскольку это слагаемое равно 0.

В таблице 5 представлено предельное число Куранта, при котором на декартовых сетках наблюдается устойчивый счёт невязкой задачи. Число Куранта приведено в зависимости от способа аппроксимации источникового члена и наличия граничных условий на оси, с точностью до 0.025. Видно, что рассматриваемые детали аппроксимации практически не влияют на устойчивость численного метода.

Верификация: течение между вращающимися цилиндрами

Для верификации разработанного метода в случае нелинейных уравнений рассмотрим задачу о стационарном течении между вращающимися цилиндрами. Расчётная область имеет вид $1 < r < 2$, $z_1 < z < z_2$, но зависимость от z

Таблица 6

Ошибка относительно точного решения по азимутальной скорости и температуре

	Декартова сетка		Неструктурированная сетка	
h	ошибка по T	ошибка по u_φ	ошибка по T	ошибка по u_φ
0.1	1.01×10^{-4}	4.32×10^{-5}	1.36×10^{-4}	1.87×10^{-4}
0.05	2.87×10^{-5}	1.12×10^{-5}	2.78×10^{-5}	4.96×10^{-5}

отсутствует. На внутреннем цилиндре $(r = 1)$ зададим условие $u_\varphi = 0.15$, что соответствует вращению внутреннего цилиндра с угловой скоростью $\omega = 0.15$ вокруг оси z, и приравняем к нулю тепловой поток: $\partial T/\partial n = 0$, где $T = p/\rho$. На внешнем цилиндре $(r = 2)$ зададим нулевую скорость и постоянную температуру, равную $1/\gamma$, $\gamma = 1.4$. Коэффициент динамической вязкости μ будем полагать одинаковым во всей области. Точное решение этой задачи не зависит от конкретных значений коэффициента вязкости и теплопроводности, мы использовали $\mu = 0.01$ и $\mathrm{Pr} = 1$.

В таблицу 6 сведены максимумы по всей области отличия численного решения от точного по азимутальной скорости и температуре.

Заключение

В работе проведена дискретизация уравнений Навье – Стокса для осесимметрических течений при помощи метода конечных объёмов при определении переменных в узлах, причём для конвективных слагаемых использовался его рёберно-ориентированный вариант. В численных экспериментах метод показывает порядок точности между первым и вторым. Существенной зависимости от способа аппроксимации источникового члена и задания дополнительных граничных условий на оси ни по точности, ни по устойчивости численного метода не наблюдается.

Список литературы

1. Gross A., Fasel H. Numerical investigation of supersonic flow for axisymmetric cones // Mathematics and Computers in Simulation. 2010. Vol. 81. P. 133–142.

2. Stoufflet B., Fezoui F. P., Dervieux A. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements // AIAA Paper No. 87-0560. 1987.

3. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2016. Vol. 81. P. 331–356.

4. Pincock B., Katz A. High-Order Flux Correction for Viscous Flows on Arbitrary Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2014. nov. T. 61, № 2. C. 454–476.

5. Work C. D., Katz A. J. Aspects of the Flux Correction Method for Solving the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes // AIAA paper No. 2015-0834. 2015.

6. Barth T. J. Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-0721. 1991.

7. Nishikawa H. A first-order system approach for diffusion equation. II: unification of advection and diffusion // Journal of Computational Physics. 2009. T. 227. C. 315–352.

8. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. О построении рёберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 4. С. 92–111.

9. Wang S., Johnsen E. High-order schemes for cylindrical/spherical geometries with cylindrical/spherical symmetry // AIAA Paper No. 2013-2430. 2013.

10. Carlson J.-R. Inflow/Outflow Boundary Conditions with Application to FUN3D: Tech. Rep.: NASA/TM–2011-217181: NASA, 2011.

11. Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. 1997.

12. Kirchhoff G. Über der Einfluss der Warmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // Annalen der Physik und Chemie. 1868. Vol. 134, no. 6.

13. Бахвалов П. А. Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 135. С. 1–32. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-135.