



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 141 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Лысов В.Г.

Об аппроксимациях Эрмита-  
Паде для произведения  
двух логарифмов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Лысов В.Г. Об аппроксимациях Эрмита-Паде для произведения двух логарифмов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 141. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2017-141](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-141)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-141>

О р д е н а Л е н и н а  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША  
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.Г. Лысов

Об аппроксимациях Эрмита–Паде  
для произведения двух логарифмов

Москва – 2017

УДК 517.53

**В.Г. Лысов**

Об аппроксимациях Эрмита–Паде для произведения двух логарифмов.

Рассматриваются аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций, содержащих  $\ln(1+1/z)\ln(1-1/z)$ . Исследование мотивировано теоретико-числовыми приложениями, связанными с диофантовыми приближениями произведений логарифмов. Рассмотрены две конструкции, для которых удается найти явный вид аппроксимаций Эрмита–Паде. Изучена их асимптотика и доказана сходимость.

**Ключевые слова:** многочлены совместной ортогональности, векторная задача равновесия, мера иррациональности.

**V.G. Lysov**

On Hermite–Padé approximants for the product of two logarithms.

The Hermite–Padé approximants for systems of functions, containing  $\ln(1 + 1/z)\ln(1 - 1/z)$  are considered. The research is motivated by the number-theoretic applications related to Diophantine approximations for products of logarithms. Two constructions are considered, for which it is possible to find an explicit form of Hermite–Padé approximants. Their asymptotic behavior is studied and convergence is proved.

**Key words:** multiple orthogonal polynomials, vector equilibrium problem, irrationality measure.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00614) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-9119.2016.1).

© Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2017

© В.Г. Лысов, 2017

# 1 Введение и основные результаты

## 1.1 Мотивация

В работе [15] японский математик Масаёси Хата доказал, что функция

$$f(x) := \ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

принимает иррациональные значения во всех целых точках  $x \geq 54$ . Доказательство основано на построении в явном виде рациональных аппроксимаций типа Паде для функции (1). А именно, рассматривались последовательности многочленов с целыми коэффициентами  $Q(x; n, \alpha)$  и  $P(x; n, \alpha)$ , степени не выше  $n$ , такие, что

$$(Qf - P)(x) = O \left( \frac{1}{x^{[\alpha n] + 1}} \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Случай  $\alpha = 1$  соответствует классическим аппроксимациям Паде в бесконечно удаленной точке. В этом случае рациональная функция  $P/Q$  порядка  $n$  существует и единственна, однако для произведения логарифмов (1) ее явный вид неизвестен. При  $\alpha < 1$  единственности уже нет, и речь идет о какой-нибудь последовательности решений (2). Хата нашел следующее представление (формулу Родрига) для знаменателей  $Q$  при  $\alpha = 1/4$ :

$$Q \left( x; 4n, \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^n (x^2 - 1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} x^{2n} (x^2 - 1)^n \quad (3)$$

и поставил задачу о нахождении в явном виде каких-нибудь рациональных аппроксимаций (2) при  $\alpha \in (1/4, 1]$ .

Задача Хаты была решена в [18] для случая  $\alpha = 1/3$ . Приведем соответствующую формулу Родрига

$$Q \left( x; 3n, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{n! \left( \left[ \frac{n}{2} \right]! \right)^2} \times \\ \times \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (x^2 - 1)^{\left[ \frac{n}{2} \right]} x^{2\left[ \frac{n}{2} \right]} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\left[ \frac{n}{2} \right]} x^{2\left[ \frac{n}{2} \right]} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right)^n (x^2 - 1)^n x^{2n}. \quad (4)$$

Арифметические свойства коэффициентов многочленов (4) не позволяют доказать иррациональность  $f(x)$  при  $x \in \{2, 3, \dots, 53\}$ . Однако

многочлены (4) позволяют улучшить верхнюю оценку меры иррациональности произведения логарифмов при больших  $x$ .

Напомним (см., например, [25]), что мерой иррациональности числа  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  называется точная нижняя грань всех  $\mu$ , для которых неравенство  $\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu}$  имеет лишь конечное число решений  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ . Конструктивное доказательство [15] позволяет оценить сверху меру иррациональности  $f(x)$  величиной  $\mu(x)$ , где  $\mu$  — монотонно убывающая функция целого аргумента  $x \geq 54$ , имеющая предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) = 5$ . Можно показать, что рациональные аппроксимации со знаменателями (4) позволяют при  $x \geq x_0$  оценить сверху меру иррациональности числа  $f(x)$  величиной  $\tilde{\mu}(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(x) = 4$ . Таким образом, при достаточно больших  $x$  эти аппроксимации улучшают известную оценку меры иррациональности чисел (1). Настоящая работа содержит подготовительные результаты для получения необходимых оценок в этом теоретико-числовом утверждении.

Отметим, что иррациональность произведения логарифмов при достаточно больших целых  $x$  была доказана А.И. Галочкиным в работе [11] в качестве иллюстрации существенно более общего результата. Эффективные оценки в [3], полученные при рассмотрении аппроксимаций Эрмита–Паде типа I (по классификации Малера [20]), доказывают иррациональность (1) при  $x > e^{795}$ . Результат братьев Чудновских [9], использующий аппроксимации Эрмита–Паде типа II, позволяет улучшить границу с  $e^{795}$  до  $e^{170}$ .

Рассмотренные Хатой многочлены (3) и рассмотренные нами многочлены (4) также являются знаменателями диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде типа II для набора из четырех и трех функций соответственно, каждый из которых содержит функцию (1).

## 1.2 Аппроксимации Эрмита–Паде

Пусть  $\vec{f} := (f_1, \dots, f_r)$  — вектор ростков аналитических функций в окрестности бесконечности:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{jk}}{z^k}, \quad j = 1, \dots, r. \quad (5)$$

Для вектора ростков  $\vec{f}$  и мультииндекса  $\vec{n} := (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r$  аппроксимациями Эрмита–Паде типа II (с общим знаменателем) называется на-

бор рациональных функций  $\left(\frac{P_{\vec{n},1}}{Q_{\vec{n}}}, \dots, \frac{P_{\vec{n},r}}{Q_{\vec{n}}}\right)$ , таких, что  $\deg Q_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := n_1 + \dots + n_r$  и выполнено  $r$  интерполяционных условий в бесконечности:

$$R_{\vec{n},j}(z) := (Q_{\vec{n}}f_j - P_{\vec{n},j})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, r. \quad (6)$$

Такие аппроксимации всегда существуют, нахождение  $Q_{\vec{n}}$  сводится к поиску нетривиального решения линейной однородной системы, в которой количество неизвестных коэффициентов превосходит на единицу число уравнений. Многочлены  $P_{\vec{n},j}$  являются полиномиальными частями разложений  $Q_{\vec{n}}f_j$  в бесконечности. Функции остатка  $R_{\vec{n},j}$  называются также функциями второго рода.

Для марковских функций:

$$f_j(z) = \widehat{w}_j(z) := \int_{\Delta_j} \frac{w_j(x)dx}{z-x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

где  $\Delta_j$  — отрезок вещественной оси, а  $w_j$  — положительный вес на  $\Delta_j$ , интерполяционные условия эквивалентны соотношениям ортогональности целым неотрицательным степеням  $x$  относительно весов  $w_j$ : (6)  $\Leftrightarrow$  (7), где

$$\int_{\Delta_j} Q_{\vec{n}}(x)x^k w_j(x)dx = 0, \quad k < n_j, \quad j = 1, \dots, r. \quad (7)$$

Мультииндексы  $\vec{n}$ , для которых аппроксимации Эрмита–Паде определены однозначно (с точностью до постоянного множителя), а степени  $Q_{\vec{n}}$  максимальны:  $\deg Q_{\vec{n}} = |\vec{n}|$ , называются нормальными. Системы (5), для которых все мультииндексы нормальны, называются совершенными [20]. Хорошо известны [22] два класса совершенных систем марковских функций. Это системы Анжелеско и Никишина.

### 1.3 Система Анжелеско

По определению система Анжелеско [1] соответствует случаю попарно неперекрывающихся отрезков:  $\text{cap}(\Delta_j \cap \Delta_k) = 0$ , где  $\text{cap}$  — логарифмическая емкость, для отрезка равная четверти его длины. Из соотношений ортогональности (7) следует, что многочлен  $Q_{\vec{n}}$  имеет  $n_j$  перемен знака внутри отрезка  $\Delta_j$  для всех  $j = 1, \dots, r$ . Таким образом,  $\deg Q_{\vec{n}} = |\vec{n}|$ , а система Анжелеско совершенна. Первый результат об

асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде для системы Анжелеско получен в [16], теоретико-числовое приложение рассмотрено в [26]. В работе [12] на примере системы Анжелеско предложен новый асимптотический метод, основанный на векторной задаче равновесия логарифмического потенциала, см. также [13]. Чтобы сформулировать этот результат, введем необходимые обозначения.

Пусть  $K$  — компакт в  $\mathbb{C}$ ,  $\mu$  — конечная мера с носителем  $S(\mu) \subseteq K$ ,  $|\mu| := \mu(K)$  — положительное число, называемое массой  $\mu$ . Класс всех мер массы  $p > 0$  обозначим  $\mathcal{M}_p(K)$ . Для вектора положительных чисел  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_r)$  и набора отрезков  $\vec{\Delta} := (\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  рассмотрим прямое произведение множеств  $\mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{\Delta}) := \mathcal{M}_{p_1}(\Delta_1) \times \dots \times \mathcal{M}_{p_r}(\Delta_r)$ . Для матрицы взаимодействия Анжелеско  $A = (a_{jk})$ :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

и векторной меры  $\vec{\mu} \in \mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{\Delta})$  построим векторный логарифмический потенциал  $(W_1^{\vec{\mu}}, \dots, W_r^{\vec{\mu}})$ :

$$W_j^{\vec{\mu}} := \sum_{k=1}^r a_{jk} V^{\mu_k}, \quad V^{\mu_k}(z) := \int \ln \frac{1}{|z-x|} d\mu(x),$$

где  $V^{\mu_k}$  — логарифмический потенциал скалярной меры  $\mu_k$ . В классе  $\mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{\Delta})$  существует и единственна мера  $\vec{\lambda}$ , удовлетворяющая следующим условиям равновесия:

$$W_j^{\vec{\lambda}}(x) \begin{cases} = \omega_j, & x \in S(\lambda_j), \\ \geq \omega_j, & x \in \Delta_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, r, \quad (8)$$

где  $\omega_j$  — некоторые постоянные. Таким образом, исходными данными векторной задачи равновесия (8) являются класс мер  $\mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{\Delta})$  и матрица взаимодействия  $A$ . Меру  $\vec{\lambda} \in \mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{\Delta})$  называют векторной равновесной мерой, соответствующей матрице  $A$ . Вопросам существования и единственности широкого класса векторных задач равновесия посвящена работа [8].

Теперь сформулируем результат [12] о слабой асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде для системы Анжелеско.

**Теорема [12].** Пусть  $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^r$  — последовательность мультииндексов, такая, что  $\frac{n_j}{|\vec{n}|} \rightarrow p_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , при  $\vec{n} \in \Lambda$ . Пусть старший коэффициент  $Q_{\vec{n}}$  равен единице. Тогда при  $\vec{n} \in \Lambda$  имеют место предельные соотношения:

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \ln |Q_{\vec{n}}|(z) \Rightarrow - \sum_{j=1}^r V^{\lambda_j}(z), \quad z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^r \Delta_j,$$

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \ln |R_{n,j}|(z) \Rightarrow V^{\lambda_j}(z) - \omega_j, \quad z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus \Delta_j.$$

Здесь  $K$  — произвольный компакт в указанной области. Справедлива более точная формулировка, в которой отрезки  $\Delta_j$  заменены на носители  $S(\lambda_j)$ . В векторных задачах носители равновесных мер могут отличаться от исходных отрезков. Это свойство тесно связано с возникновением областей расходимости совместных рациональных аппроксимаций. Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы Анжелеско исследована в [2], [33]. Перейдем к другому примеру совершенной системы — системе Никишина.

## 1.4 Система Никишина

В системе Никишина [21] все отрезки совпадают  $\Delta_j = \Delta$ , а на веса  $w_j$  наложены некоторые условия «независимости». А именно, пусть  $\vec{\Gamma} := (\Gamma_1, \dots, \Gamma_r)$  — набор отрезков вещественной оси, такой, что  $\Gamma_1 = \Delta$  и соседние отрезки попарно не перекрываются:  $\text{cap}(\Gamma_j \cap \Gamma_{j+1}) = 0$ . Пусть на каждом из  $\Gamma_j$  заданы знакопостоянные функции  $v_j$ , генерирующие знакопостоянные веса  $w_j$  на  $\Delta$  по следующему правилу:

$$w_1 := v_1, \quad w_j := \langle v_1, \dots, v_j \rangle, \quad j \geq 2,$$

где  $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$  определяются по индукции:

$$\langle v_1, v_2 \rangle := v_1 \widehat{v}_2,$$

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_j \rangle := \langle v_1, \langle v_2, \dots, v_j \rangle \rangle, \quad j > 2.$$

Полное доказательство совершенности системы Никишина было получено в работе [10]. В работе [28] рассмотрена система Никишина, приводящая к доказательству теоремы Апери об иррациональности  $\zeta(3)$ .

Слабая асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы Никишина впервые была найдена в работе [14], сильная асимптотика — в работе [3]. Для целей настоящей работы достаточно ограничиться формулировкой в случае  $r = 2$ . Итак, пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — два неперекрывающихся промежутка вещественной оси,  $v_1, v_2$  — знакопостоянные функции на них, генерирующие веса  $w_1 = v_1$ ,  $w_2 = v_1 \widehat{v}_2$  на  $\Delta = \Gamma_1$ . Пусть  $\vec{p} := (1, q)$ ,  $q \in (0, \frac{1}{2}]$ . В классе  $\mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{\Gamma})$  определим векторную равновесную меру  $\vec{\lambda}$  с матрицей взаимодействия Никишина:

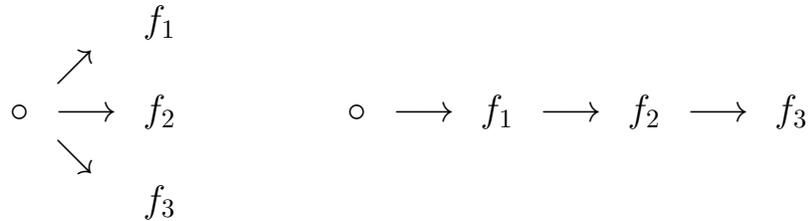
$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Теорема [14].** Пусть  $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^2$  — последовательность мультииндексов, такая, что  $\frac{n_1}{|\vec{n}|} \rightarrow 1 - q$ ,  $\frac{n_2}{|\vec{n}|} \rightarrow q$  при  $\vec{n} \in \Lambda$ . Пусть старший коэффициент  $Q_{\vec{n}}$  равен единице. Тогда при  $\vec{n} \in \Lambda$  имеют место предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{n}|} \ln |Q_{\vec{n}}|(z) &\Rightarrow -V^{\lambda_1}(z), & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus \Delta, \\ \frac{1}{|\vec{n}|} \ln |R_{\vec{n},1}|(z) &\Rightarrow (V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2})(z) - \omega_1, & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \\ \frac{1}{|\vec{n}|} \ln |\widetilde{R}_{\vec{n},2}|(z) &\Rightarrow V^{\lambda_2}(z) - \omega_1 - \omega_2, & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus \Gamma_2, \end{aligned}$$

где  $\widetilde{R}_{\vec{n},2} := R_{\vec{n},2} - \widehat{v}_2 R_{\vec{n},1}$ .

На самом деле, в работе [14] была предложена конструкция, объединяющая и обобщающая системы Анжелеско и Никишина. Такие системы удобно ассоциировать с графами-деревьями. Деревья для систем Анжелеско и Никишина изображены ниже для случая  $r = 3$ .



Доказательство линейной независимости полилогарифмов, основанное на изучении аппроксимаций Эрмита–Паде для систем функций на бинарных деревьях, получено в [29].

## 1.5 Система функций на дереве

Многочлены Хаты (3) являются [17] знаменателями диагональных (для мультииндекса  $\vec{n} = (n, n, n, n)$ ) аппроксимациями Эрмита–Паде для системы функций  $\vec{f} := (f_1, f_2, f_3, f_4)$ , где

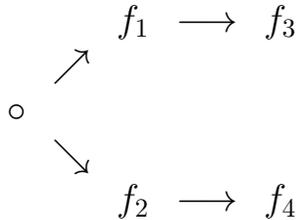
$$\begin{aligned} f_1(z) &:= \int_0^1 \frac{-dx}{z-x} = \ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right), & f_3(z) &:= \int_0^1 \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx}{z-x}, \\ f_2(z) &:= \int_{-1}^0 \frac{dx}{z-x} = \ln \left( 1 + \frac{1}{z} \right), & f_4(z) &:= \int_{-1}^0 \frac{\ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right) dx}{z-x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что сумма функций  $f_3$  и  $f_4$  дает произведение логарифмов:

$$(f_3 + f_4)(z) = -(f_1 f_2)(z) = -\ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{z} \right),$$

а их разность может быть выражена через дилогарифм  $\text{Li}_2$ . Примеры явного построения рациональных аппроксимаций для произведений логарифмов можно найти также в работах [27], [32].

Система функций  $\vec{f}$  представляют собой обобщенную систему Никишина (GN-систему, см. [14]), ассоциированную со следующим деревом.



В построении системы (9) участвуют только классические меры Лебега (т.е. все генерирующие функции равны единице). Отметим, что другой пример системы функций для этого дерева привел к рациональным приближениям для постоянной Эйлера, см. [4]. Вопрос о совершенности GN-систем пока остается открытым. В [14] доказана нормальность индексов  $\vec{n}$ , удовлетворяющих условию невозрастания относительно частичного порядка  $\prec$  на множестве вершин дерева:  $n_j + 1 \geq n_k$  при  $j \prec k$ . В частности, диагональные индексы для системы (9) нормальны.

Рассмотрим соответствующую (см. [14]) векторную задачу равновесия. Пусть  $\vec{F} := (F_1, F_2, F_3, F_4)$ , где  $F_1 := F_4 := [0, 1]$ ,  $F_2 := F_3 := [-1, 0]$ .

Пусть  $\vec{p} = (2, 2, 1, 1)$ , а матрица взаимодействия имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В классе  $\mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{F})$  существует и единственна равновесная (8) мера  $\vec{\lambda}$  с матрицей взаимодействия (10).

Для того, чтобы сформулировать асимптотический результат для многочленов (3), которые здесь мы обозначаем  $Q_{\vec{n}}$ , нам понадобится информация об их старшем коэффициенте. Старший коэффициент многочленов (3) равен

$$a_{\vec{n}} := \binom{4n}{2n} \binom{5n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{\vec{n}}}{n} = 5 \ln 5 - 4 \ln 2 =: a. \quad (11)$$

Из результата [14] можно вывести следующее утверждение, см. [17].

**Утверждение 1.** *Многочлены  $Q_{\vec{n}}$  (см. (3)) и их функции второго рода имеют следующую асимптотику при  $n \rightarrow \infty$ :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln |Q_{\vec{n}}|(z) &\rightrightarrows -(V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2})(z) + a, & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \\ \frac{1}{n} \ln |R_{\vec{n},1}|(z) &\rightrightarrows (V^{\lambda_1} - V^{\lambda_3})(z) - \omega_1 + a, & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \\ \frac{1}{n} \ln |R_{\vec{n},2}|(z) &\rightrightarrows (V^{\lambda_2} - V^{\lambda_4})(z) - \omega_2 + a, & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \\ \frac{1}{n} \ln |\tilde{R}_{\vec{n},3}|(z) &\rightrightarrows V^{\lambda_3}(z) - \omega_1 - \omega_3 + a, & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 0], \\ \frac{1}{n} \ln |\tilde{R}_{\vec{n},4}|(z) &\rightrightarrows V^{\lambda_4}(z) - \omega_2 - \omega_4 + a, & z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus [0, 1], \end{aligned}$$

где  $\tilde{R}_{\vec{n},3} := R_{\vec{n},3} - f_2 R_{\vec{n},1}$ ,  $\tilde{R}_{\vec{n},4} := R_{\vec{n},4} - f_1 R_{\vec{n},2}$ .

Найдем явный вид равновесной меры  $\vec{\lambda}$  в терминах алгебраических функций, подробнее см. [23], [5], [7], [19]. Для этого рассмотрим компактную риманову поверхность  $\mathcal{R}$ , которую реализуем в виде склейки вдоль некоторых разрезов пяти экземпляров сферы Римана. Пусть

$$\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_1 := \mathcal{R}_2 := \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1],$$

$$\mathcal{R}_3 := \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 0], \quad \mathcal{R}_4 := \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, 1].$$

Будем склеивать пары листов вдоль разрезов: верхний берег разреза на одном листе склеим с нижним берегом на другом листе, и наоборот — нижний берег на одном листе склеим с верхним берегом на другом. Листы  $\mathcal{R}_0$  и  $\mathcal{R}_1$ , а также листы  $\mathcal{R}_2$  и  $\mathcal{R}_4$  склеиваются вдоль разреза  $[0, 1]$ . Листы  $\mathcal{R}_0$  и  $\mathcal{R}_2$ , а также  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_3$  склеиваются вдоль  $[-1, 0]$ . Полученная поверхность  $\mathcal{R}$  имеет по две точки ветвления второго порядка над точками  $-1$  и  $1$  и точку ветвления пятого порядка в  $0$ . По формуле Римана–Гурвица род  $\mathcal{R}$  равен нулю.

На поверхности  $\mathcal{R}$  определим рациональную функцию  $\Phi$ , имеющую дивизор  $4\infty_0 - \sum_{j=1}^4 \infty_j$ . Такая функция существует и единственна с точностью до нормировки. Сужения  $\Phi$  на листы  $\mathcal{R}_j$  обозначим  $\Phi_j$ .

Можно построить конформное отображение поверхности  $\mathcal{R}$  на сферу Римана  $\mathbb{C}_s$  и найти явный вид функции  $\Phi$  в координатах  $s$ :

$$\begin{cases} \Phi = 5s^4 - 5s^2 + 1, \\ z = \frac{2s^5}{5s^4 - 5s^2 + 1}. \end{cases} \quad (12)$$

Равновесная мера  $\vec{\lambda}$  может быть выражена в терминах функции  $\Phi$ .

**Предложение 1.** *Векторная равновесная мера  $\vec{\lambda}$  для графа-дерева выражается в терминах функции  $\Phi$ :*

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \Phi_j(x + i0), \quad x \in F_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Логарифмические потенциалы  $V^{\lambda_j}$  компонент равновесной меры выражаются через  $\ln |\Phi_j|$ . Свойства  $\Phi$  и асимптотика из утверждения 1 позволяют доказать сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде.

**Следствие 1.** *Диагональные аппроксимации Эрмита–Паде для набора функций  $\vec{f}$  сходятся к ним в максимально возможной области:*

$$\frac{P_{\vec{n},j}}{Q_{\vec{n}}}(z) \rightrightarrows f_j(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Сходимость имеет геометрическую скорость, т.е.  $\left| \frac{P_{\vec{n},j}}{Q_{\vec{n}}} - f_j \right| < \theta^n$ , где величина  $\theta < 1$  зависит от компакта  $K$ .

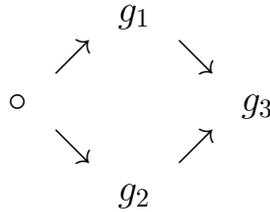
## 1.6 Система функций на графе

Рассмотрим теперь систему из трех функций  $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ :

$$g_1 := f_1, \quad g_2 := f_2, \quad g_3 := -f_1 f_2 = f_3 + f_4, \quad (13)$$

где  $f_j$  определены в (9). Система функций  $\vec{g}$  является примером дальнейшего обобщения систем Никишина на графах. Впервые такое обобщение возникло в связи с приложениями в задачах о диофантовых приближениях [30], [31]. Асимптотические вопросы исследовались в [6], [18], [24].

Система функций (13) ассоциирована со следующим графом.



Многочлены (4) являются [18] знаменателями диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде для системы  $\vec{g}$ . Степень многочлена (4) равна  $6\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Нормальными являются только мультииндексы, соответствующие четным  $n$ . Однако для нечетных  $n$  аппроксимации Эрмита–Паде также определены однозначно.

Рассмотрим векторную задачу равновесия, соответствующую такому графу. Набор компактов  $\vec{F}$  определяется так же, как и выше. Матрица взаимодействия

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

вырождена, имеет ранг три. Определим класс векторных мер  $\mathcal{M}_*(\vec{F})$ , в котором фиксируются массы не всех четырех компонент, а задаются три линейных условия на них:

$$\vec{\mu} \in \mathcal{M}_*(\vec{F}) \quad \Leftrightarrow \quad S(\mu_j) \subseteq F_j, \quad \begin{cases} |\mu_3| + |\mu_4| = 1, \\ |\mu_1| - |\mu_3| = 1, \\ |\mu_2| - |\mu_4| = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу равновесия (8) с дополнительным линейным ограничением на постоянные равновесия:

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_2 + \omega_4.$$

Решение  $\vec{\lambda}$  такой задачи существует и единственно. Учитывая единственность решения и симметрию в задаче, нетрудно убедиться, что  $\lambda_1(x) = \lambda_2(-x)$  и  $\lambda_3(x) = \lambda_4(-x)$ . Таким образом,  $\vec{\lambda} \in \mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{F}) \subset \mathcal{M}_*(\vec{F})$ , где  $\vec{p} := (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Другими словами, в симметричной постановке можно искать равновесную меру в более узком классе, тогда ограничение на постоянные равновесия будет выполнено автоматически.

Старший коэффициент многочлена (4) равен

$$b_{\vec{n}} := 2^{2[\frac{n}{2}] - n} \binom{4n}{2n} \binom{n + 2[\frac{n}{2}]}{n} \binom{n + [\frac{n}{2}]}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln b_{\vec{n}}}{n} = 7 \ln 2 =: b.$$

Слабая асимптотика многочленов (4) и функций второго рода описывается в следующем утверждении (см. [6], [18]):

**Утверждение 2.** *Многочлены  $Q_{\vec{n}}$  (см. (4)) и их функции второго рода имеют следующую асимптотику при  $n \rightarrow \infty$ :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln |Q_{\vec{n}}|(z) &\rightrightarrows - (V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2})(z) + b, \\ \frac{1}{n} \ln |R_{\vec{n},1}|(z) &\rightrightarrows (V^{\lambda_1} - V^{\lambda_3})(z) - \omega_1 + b, \\ \frac{1}{n} \ln |R_{\vec{n},2}|(z) &\rightrightarrows (V^{\lambda_2} - V^{\lambda_4})(z) - \omega_2 + b, \\ \frac{1}{n} \ln |R_{\vec{n},3}^*|(z) &\rightrightarrows (V^{\lambda_3} + V^{\lambda_4})(z) - \omega + b, \end{aligned}$$

где  $\omega := \omega_1 + \omega_3 = \omega_2 + \omega_4$  и  $R_{\vec{n},3}^* := R_{\vec{n},3} - g_1 R_{\vec{n},2} - g_2 R_{\vec{n},1}$ , а сходимость равномерная на компактах  $K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

Найдем теперь явный вид равновесной меры  $\vec{\lambda}$ . Снова рассмотрим компактную риманову поверхность  $\mathcal{R}^*$ , на этот раз имеющую четыре листа. Сделаем разрезы вдоль отрезка  $[-1, 1]$  и склеим листы

$$\mathcal{R}_0^* := \mathcal{R}_1^* := \mathcal{R}_2^* := \mathcal{R}_3^* := \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1],$$

таким образом: лист  $\mathcal{R}_0^*$  вдоль отрезка  $[0, 1]$  склеиваем с  $\mathcal{R}_1^*$ , а вдоль отрезка  $[-1, 0]$  — с  $\mathcal{R}_2^*$ ; лист  $\mathcal{R}_3^*$ , наоборот, вдоль отрезка  $[0, 1]$  склеиваем с

$\mathcal{R}_2^*$ , а вдоль  $[-1, 0]$  — с  $\mathcal{R}_1^*$ . Поверхность  $\mathcal{R}^*$  имеет по две точки ветвления второго порядка над точками  $-1, 0$  и  $1$ , ее род равен нулю.

На поверхности  $\mathcal{R}^*$  определим рациональную функцию, имеющую дивизор  $3\infty_0 - \sum_{j=1}^3 \infty_j$ . Нам проще будет работать с квадратом этой функции, который мы обозначим  $\Phi^*$ . Как и ранее, сужения  $\Phi^*$  на листы  $\mathcal{R}_j^*$  обозначаем  $\Phi_j^*$ .

Можно найти уравнение на алгебраическую функцию  $\Phi^*$ :

$$\begin{cases} \Phi^* &= (4t - 1)(2t - 1)^2, \\ z^2 &= \frac{4t^4}{(4t - 1)(2t - 1)^2}. \end{cases} \quad (15)$$

Аналогично предложению 1 формулируется связь между  $\Phi^*$  и равновесной мерой  $\vec{\lambda}$ .

**Предложение 2.** *Векторная равновесная мера  $\vec{\lambda}$  для графа выражается в терминах функции  $\Phi^*$ :*

$$\begin{aligned} \lambda_j(x) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \Phi_j^*(x + i0), \quad x \in F_j, \quad j = 1, 2, 3. \\ \lambda_4(x) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \Phi_3^*(x + i0), \quad x \in F_4. \end{aligned}$$

**Следствие 2.** *Диагональные аппроксимации Эрмита–Паде для набора функций  $\vec{g}$  сходятся к ним с геометрической скоростью на компактах в  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ :*

$$\frac{P_{\vec{n},j}}{Q_{\vec{n}}}(z) \Rightarrow g_j(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in K \Subset \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad j = 1, 2, 3.$$

В следующей главе мы докажем предложения 1 и 2 и выведем их следствия.

## 2 Доказательства

### 2.1 Равновесная мера для дерева

Этот подраздел посвящен доказательству предложения 1 и следствия 1. Пользуясь формулой Родрига (3) и формулой Коши, получим интеграль-

ное представление для полинома  $Q_{\bar{n}}$  :

$$Q_{\bar{n}}(z) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\gamma_z} \frac{t^n(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}} dt \int_{\gamma_t} \frac{s^{2n}(s^2 - 1)^n}{(s - t)^{2n+1}} ds. \quad (16)$$

Здесь  $\gamma_z$  — замкнутая кривая в плоскости  $\mathbb{C}_t$ , обходящая точку  $z$ , а  $\gamma_t$  — замкнутая кривая в  $\mathbb{C}_s$ , обходящая точку  $t$ , направление обхода положительное. В соответствии с методом перевала основной вклад в асимптотику интеграла (16) дают значения функции

$$\Phi(t, s; z) = \frac{t(t^2 - 1)}{(t - z)} \frac{s^2(s^2 - 1)}{(s - t)^2} \quad (17)$$

в критических точках  $(t, s)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \Phi(t, s; z) = \frac{1}{t} + \frac{2t}{t^2 - 1} - \frac{1}{t - z} + \frac{2}{s - t} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi(t, s; z) = \frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2 - 1} - \frac{2}{s - t} = 0.$$

Выделяя  $t$  и  $s$  из этой системы и подставляя их в (17), получим алгебраическую функцию  $\Phi$  от переменной  $z$ , заданную параметрически в (12).

Вначале исследуем алгебраическую функцию  $s$  от  $z$ , см. (12). Полином  $2s^5 - z(5s^4 - 5s^2 + 1)$  имеет кратные корни только при  $z = -1, 0, 1$ . При  $z = \pm 1$  у функции  $s$  по две точки ветвления второго порядка, в точке  $z = 0$  — ветвление пятого порядка. Функция  $s$  осуществляет конформное отображение римановой поверхности  $\mathcal{R}$  на  $\overline{\mathbb{C}}_s$ . Соответствующие ветви функции  $s$  имеют такое поведение в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$s_0(z) \approx c_0 z, \quad s_j(z) \approx c_j, \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$c_0 = \frac{5}{2},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}},$$

$$c_2 = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}, \quad c_4 = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Отсюда следует, что функция  $\Phi$  рациональна на поверхности  $\mathcal{R}$ . Из представления  $\Phi = 2s^5/z$  вытекает, что  $\Phi$  имеет следующий дивизор: полюс четвертого порядка в бесконечности на листе  $\mathcal{R}_0$  и простые нули в бесконечных точках на остальных листах. Поведение функции  $\Phi$  в окрестности бесконечности и точек ветвления описано ниже.

(1) При  $z \rightarrow \infty$

$$\Phi_0(z) \approx 2c_0^5 z^4, \quad \Phi_j(z) \approx \frac{2c_j^5}{z}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

(2) В точках  $z = \pm 1$

$$\begin{aligned} \Phi_1(1) = \Phi_0(1) = \Phi_0(-1) = \Phi_2(-1) &= 11 + 5\sqrt{5}, \\ \Phi_2(1) = \Phi_4(1) = \Phi_3(-1) = \Phi_1(-1) &= 11 - 5\sqrt{5}, \\ \Phi_3(1) = \Phi_4(-1) &= 1/16. \end{aligned}$$

(3) В точке  $z = 0$  все  $\Phi_j(0) = 1$ .

Нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** *Ветви функции  $\Phi$  обладают следующими свойствами.*

1) На отрезке  $[0, 1]$  функции  $\text{Arg } \Phi_1(x+i0)$  и  $\text{Arg } \Phi_4(x+i0)$  возрастают и имеют следующие приращения:

$$\begin{aligned} \Delta_{[0,1]} \text{Arg } \Phi_1(x+i0) &= 2\pi, \\ \Delta_{[0,1]} \text{Arg } \Phi_4(x+i0) &= \pi. \end{aligned} \tag{18}$$

2) На отрезке  $[-1, 0]$  функции  $\text{Arg } \Phi_2(x+i0)$  и  $\text{Arg } \Phi_3(x+i0)$  возрастают и

$$\begin{aligned} \Delta_{[-1,0]} \text{Arg } \Phi_2(x+i0) &= 2\pi, \\ \Delta_{[-1,0]} \text{Arg } \Phi_3(x+i0) &= \pi. \end{aligned} \tag{19}$$

3) При  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} |\Phi_0(z)| &> \max(|\Phi_1(z)|, |\Phi_2(z)|) \geq \\ &\geq \min(|\Phi_1(z)|, |\Phi_2(z)|) > \max(|\Phi_3(z)|, |\Phi_4(z)|). \end{aligned} \tag{20}$$

*Доказательство.* Рассмотрим логарифмическую производную  $\Phi$ :

$$\varphi(z) := \frac{\Phi'}{\Phi}(z) = \frac{2s^2(2s^2 - 1)}{z(s^4 - 3s^2 + 1)}, \text{ где } s = s(z).$$

Монотонность  $\text{Arg } \Phi_j(x+i0)$  при  $x \in (0, 1)$ , и  $j \neq 3$  следует из отсутствия нулей у  $\text{Im } \varphi_j(x+i0)$ . Последнее следует из отсутствия у полинома  $2s^5 - z(5s^4 - 5s^2 + 1)$  кратных корней на интервале  $(0, 1)$ . Формулы (18), (19) получаем из принципа аргумента. Легко проверить, что  $\text{Re } \varphi_j(x+i0) \neq 0$  на  $(-1, 0)$  и  $(0, 1)$ . Отсюда следует монотонность  $|\Phi_j(x+i0)|$  на  $(0, 1)$  и  $(-1, 0)$ . Зная значения  $\Phi_j$  в точках  $-1, 0, 1$ , проверяем, что неравенства (20) выполняются как нестрогие на  $[-1, 1]$ . Далее пользуемся принципом максимума. Лемма 1 доказана.

Обозначим  $\lambda_j(x) := \frac{1}{\pi} \text{Arg } \Phi_j(x+i0)$  при  $j = 1, 2, 3, 4$  и покажем, что  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  — искомая равновесная мера. Из пунктов 1) и 2) леммы 1 следует, что  $\vec{\lambda} \in \mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{F})$ . Далее, используя формулы Сохоцкого и учитывая поведение  $\Phi_j$  в бесконечности, получаем

$$\ln |\Phi_0| = -V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2} + \ln |2c_0^5|, \quad (21)$$

$$\ln |\Phi_1| = V^{\lambda_1} - V^{\lambda_3} + \ln |2c_1^5|, \quad \ln |\Phi_3| = V^{\lambda_3} + \ln |2c_3^5|, \quad (22)$$

$$\ln |\Phi_2| = V^{\lambda_2} - V^{\lambda_4} + \ln |2c_2^5|, \quad \ln |\Phi_4| = V^{\lambda_4} + \ln |2c_4^5|.$$

Отсюда и из условий склейки листов получаем условия равновесия (8) с матрицей взаимодействия (10). Таким образом, предложение 1 доказано. При этом имеют место следующие соотношения для постоянных равновесия:

$$\omega_1 = 5 \ln \frac{|c_0|}{|c_1|}, \quad \omega_2 = 5 \ln \frac{|c_0|}{|c_2|}, \quad \omega_3 = 5 \ln \frac{|c_1|}{|c_3|}, \quad \omega_4 = 5 \ln \frac{|c_2|}{|c_4|}. \quad (23)$$

Заметим, что слабый предел (11) старшего коэффициента  $Q_{\vec{n}}$  (число  $a$ ) совпадает с  $\ln |2c_0^5|$ . Из утверждения 1 и формул (21), (22), (23) следуют асимптотические формулы при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|Q_{\vec{n}}|} &\rightrightarrows |\Phi_0|, \\ \sqrt[n]{|R_{\vec{n},1}|} &\rightrightarrows |\Phi_1|, \quad \sqrt[n]{|\tilde{R}_{\vec{n},3}|} \rightrightarrows |\Phi_3|, \\ \sqrt[n]{|R_{\vec{n},2}|} &\rightrightarrows |\Phi_2|, \quad \sqrt[n]{|\tilde{R}_{\vec{n},4}|} \rightrightarrows |\Phi_4| \end{aligned}$$

равномерно на компактах из  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Отсюда и из неравенств (20) вытекает сходимость аппроксимаций, т.е. справедливость следствия 1.

## 2.2 Равновесная мера для графа

В этом подразделе мы доказываем предложение 2 и следствие из него. Из формулы Родрига (4) нетрудно получить интегральное представление для полинома  $Q_{\vec{n}}(z)$ . Для простоты ограничимся четными индексами:

$$Q_{2\vec{n}}(z) = \frac{2^{4n-3}i}{\pi^3} \int_{\gamma_{z^2}} \frac{(x-1)^n x^n dx}{(x-z^2)^{n+1}} \int_{\gamma_x} \frac{s^n \sqrt{s} ds}{(s-x)^{n+1}} \int_{\gamma_s} \frac{(t-1)^{2n} t^{2n} dt}{\sqrt{t}(t-s)^{2n+1}}, \quad (24)$$

где  $\gamma_{z^2}$ ,  $\gamma_x$ ,  $\gamma_s$  — контуры вокруг точек  $z^2$ ,  $x$  и  $s$  соответственно. Нахождение асимптотики интеграла (24) сводится к исследованию значений функции

$$\Phi^*(x, s, t; z) = \frac{(x-1)xs(t-1)^2 t^2}{(x-z^2)(s-x)(t-s)^2} \quad (25)$$

в критических точках  $(x, s, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi^*(x, s, t; z) &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-z^2} + \frac{1}{s-x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi^*(x, s, t; z) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s-x} + \frac{2}{t-s} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln \Phi^*(x, s, t; z) &= \frac{2}{t-1} + \frac{2}{t} - \frac{2}{t-s} = 0. \end{aligned}$$

Решения этой системы суть алгебраические функции от  $z$ . Подставляя их в (25), получим алгебраическую функцию  $\Phi^*$ , имеющую параметрическое представление (15)

Алгебраическое уравнение относительно  $t$  (см. (15)) имеет кратные значения при  $z = -1, 0, 1$  и  $\infty$ . Легко проверить, что при  $z = \pm 1$  функция  $t$  имеет по две точки ветвления второго порядка, при  $z = 0$  — одну точку ветвления второго порядка, а в точке  $z = \infty$  не имеет ветвления. Четырехлистная компактная поверхность  $\mathcal{R}^*$  является римановой поверхностью алгебраической функции  $t$ .

Функция  $\Phi^*(z) = 4t^4(z)/z^2$  мероморфна на  $\mathcal{R}^*$  и, с точностью до нормировки, определяется своим дивизором: полюс шестого порядка в бесконечности на  $\mathcal{R}_0^*$  и нули второго порядка в бесконечных точках на остальных листах. Перечислим некоторые свойства ветвей (т.е. сужений на листы  $\mathcal{R}_j^*$ ) функции  $\Phi^*$ , которые сразу следуют из (15).

(1) Ветви функции  $\Phi^*$  симметричны относительно вещественной оси:

$$\overline{\Phi_j^*(z)} = \Phi_j^*(\bar{z}).$$

(2) Ветви функции  $\Phi^*$  симметричны относительно нуля:

$$\Phi_0^*(z) = \Phi_0^*(-z), \quad \Phi_1^*(z) = \Phi_2^*(-z), \quad \Phi_3^*(z) = \Phi_3^*(-z).$$

(3) При  $z \rightarrow \infty$

$$\Phi_0^*(z) \approx 1024z^6, \quad \Phi_1^*(z) \approx \Phi_2^*(z) \approx \frac{1}{4z^2}, \quad \Phi_3^*(z) \approx \frac{1}{64z^2}.$$

(4) При  $z = 1$

$$\Phi_0^*(1) = \Phi_1^*(1) = 17 + 12\sqrt{2}, \quad \Phi_2^*(1) = \Phi_3^*(1) = 17 - 12\sqrt{2}.$$

(5) При  $z = 0$  все  $\Phi_j^*(0) = -1$ .

Теперь установим свойства  $\Phi^*$ , аналогичные свойствам функции  $\Phi$  из леммы 1.

**Лемма 2.** *Ветви функции  $\Phi^*$  обладают следующими свойствами.*

1) При  $x \in (0, 1)$  функции  $\text{Arg } \Phi_1^*(x + i0)$  и  $\text{Arg } \Phi_3^*(x + i0)$  монотонно возрастают и имеют следующие приращения:

$$\begin{aligned} \Delta_{[0,1]} \text{Arg } \Phi_1^*(x + i0) &= 3\pi, \\ \Delta_{[0,1]} \text{Arg } \Phi_3^*(x + i0) &= \pi. \end{aligned} \tag{26}$$

2) При  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} |\Phi_0^*(z)| &> \max(|\Phi_1^*(z)|, |\Phi_2^*(z)|) \geq \\ &\geq \min(|\Phi_1^*(z)|, |\Phi_2^*(z)|) > |\Phi_3^*(z)|. \end{aligned} \tag{27}$$

*Доказательство.* Обозначим

$$h(z) := \frac{(\Phi^*)'}{\Phi^*}(z) = \frac{4t(3t-1)}{z(2t^2-4t+1)}$$

— логарифмическую производную функции  $\Phi^*$ . Функция  $h$  мероморфна на  $\mathcal{R}^*$ . Она удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$z^2(1 - z^2)^2 h^4 + 24z^2(1 - z^2)h^2 + 64z(1 - z^2)h + 16(4 - 3z^2) = 0,$$

из которого видно что  $\operatorname{Re} h(x + i0) \neq 0$  и  $\operatorname{Im} h(x + i0) \neq 0$  при  $x \in (0, 1)$ . Отсюда следует монотонность  $\operatorname{Arg} \Phi_j^*(x + i0)$  и  $|\Phi_j^*(x + i0)|$  на  $[0, 1]$ . Теперь пункт 1) следует из симметрии и принципа аргумента, а пункт 2) — из симметрии и принципа максимума. Лемма 2 доказана.

Покажем теперь, что

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \Phi_1^*(x + i0), & \lambda_3(x) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \Phi_3^*(x + i0), \\ \lambda_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \Phi_2^*(x + i0), & \lambda_4(x) &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg} \Phi_3^*(x + i0) \end{aligned}$$

— суть компоненты векторной равновесной меры  $\vec{\lambda} \in \mathcal{M}_*(\vec{F})$  с матрицей взаимодействия (14). Из пункта 1) леммы 2 следует, что  $\lambda \in \mathcal{M}_{\vec{p}}(\vec{F}) \subset \mathcal{M}_*(\vec{F})$ , где  $\vec{p} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Далее по формулам Сохоцкого, учитывая поведение  $\Phi_j^*$  в бесконечности, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln |\Phi_0^*| &= -V^{\lambda_1} - V^{\lambda_2} + 5 \ln 2, \\ \frac{1}{2} \ln |\Phi_1^*| &= V^{\lambda_1} - V^{\lambda_3} - \ln 2, \\ \frac{1}{2} \ln |\Phi_2^*| &= V^{\lambda_2} - V^{\lambda_4} - \ln 2, \\ \frac{1}{2} \ln |\Phi_3^*| &= V^{\lambda_3} + V^{\lambda_4} - 3 \ln 2. \end{aligned}$$

Отсюда и из условий склейки листов получаем условия равновесия (8) с матрицей (14). Подставим полученные выражения в асимптотические формулы утверждения 2. Получим, что при  $n \rightarrow \infty$  имеет место сходимость равномерно на компактах из  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|R_{2\vec{n},1}|} &\rightrightarrows 2^4 |\Phi_1^*|, & \sqrt[n]{|R_{2\vec{n},3}^*|} &\rightrightarrows 2^4 |\Phi_3^*|, \\ \sqrt[n]{|R_{2\vec{n},2}|} &\rightrightarrows 2^4 |\Phi_2^*|, & \sqrt[n]{|Q_{2\vec{n}}|} &\rightrightarrows 2^4 |\Phi_0^*|. \end{aligned}$$

Отсюда и из пункта 2) леммы 2 вытекает справедливость следствия 2.

## Список литературы

- [1] Angelesco A. Sur deux extensions des fractions continues algébriques. C. R. Acad. Sci. Paris, 168 (1919), 262–265.
- [2] Аптекарев А. И. Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско. Матем. сб., 136(178):1(5) (1988), 56–84.
- [3] Аптекарев А.И. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина, Матем. сб., 190:5 (1999), 3–44.
- [4] Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения, Сборник статей, Совр. пробл. матем., 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007 , 84 с.
- [5] Aptekarev, A.I.; Kalyagin, V.A.; Lysov, V.G.; Toulyakov, D.N. Equilibrium of vector potentials and uniformization of the algebraic curves of genus 0. J. Comput. Appl. Math., 233:3 (2009), 602–616.
- [6] Аптекарев А.И., Лысов В.Г. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде, Матем. сб., 201:2 (2010), 29-78.
- [7] Аптекарев А.И., Лысов В.Г., Туляков Д.Н. Трехлистные римановы поверхности рода 0 с фиксированными проекциями точек ветвления, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2007, №13, 21 с.
- [8] Beckermann, V.; Kalyagin, V.; Matos A.; Wielonsky, F. Equilibrium problems for vector potentials with semidefinite interaction matrices and constrained masses. Constr. Approx., 37:1 (2013), 101–134.
- [9] Chudnovsky, D.V.; Chudnovsky, G.V. Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions, Lecture Notes in Math., vol. 1135, Springer-Verlag, 1985, pp. 9–51.
- [10] Fidalgo Prieto, U.; López Lagomasino, G. Nikishin systems are perfect. Constr. Approx. 34 (2011), no. 3, 297-356.
- [11] Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса, Матем. сб., 95(137):3(11) (1974), 396–417.

- [12] Гончар А.А., Рахманов Е.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа, Тр. МИАН, 157 (1981), 31-48.
- [13] Гончар А.А., Рахманов Е.А. О задаче равновесия для векторных потенциалов, УМН, 40(244):4 (1985), 155–156.
- [14] Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н. Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа, Матем. сб., 188:5 (1997), 33-58.
- [15] Nata, M. The irrationality of  $\log(1 + 1/q) \log(1 - 1/q)$ . Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 6, 2311–2327
- [16] Калягин В. А., Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности, Матем. сб., 110(152):4(12) (1979), 609–627.
- [17] Лысов В.Г. Асимптотика многочленов совместной ортогональности, связанных с одной задачей теории диофантовых приближений. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2005. № 4. С. 25-29.
- [18] Лысов В.Г. Аппроксимации Эрмита–Паде для циклических графов и распределение нулей многочленов, ортогональных с переменным комплексным весом. Диссертация к.ф.-м.н., М. 2006.
- [19] Лысов В.Г., Туляков Д.Н. О векторной теоретико-потенциальной задаче равновесия с матрицей Анжелеско, Тр. МИАН 298 (2017), 185–215.
- [20] Mahler, K. Perfect systems, Compos. Math. 19 (1968), 95–166.
- [21] Никишин Е. М. О совместных аппроксимациях Паде, Матем. сб., 113(155):4(12) (1980), 499-519.
- [22] Никишин Е. М., Сорокин В. Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность, М.: Наука, 1988.
- [23] Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials, J. Approx. Theory, 42:4 (1984), 299-386.

- [24] Рахманов Е.А. К асимптотике многочленов Эрмита–Паде для двух марковских функций, Матем. сб., 202:1 (2011), 133-140.
- [25] Шидловский А. Б., Диофантовы приближения и трансцендентные числа, М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [26] Сорокин В.Н. Асимптотика линейных функциональных форм от двух логарифмов, УМН, 38:1(229) (1983), 193–194.
- [27] Сорокин В.Н. Аппроксимации Эрмита–Паде последовательных степеней логарифма и их арифметические приложения, Изв. вузов. Матем., 1991, № 11, 66-74.
- [28] Сорокин В.Н. Аппроксимации Эрмита-Паде для систем Никишина и иррациональность  $\zeta(3)$ , УМН, 49:2(296) (1994), 167-168.
- [29] Сорокин В.Н. О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов, Матем. сб., 192:8 (2001), 139–154.
- [30] Сорокин В.Н. Циклические графы и теорема Апери, УМН, 57:3(345) (2002), 99–134.
- [31] Сорокин В.Н. Об одном алгоритме быстрого вычисления  $\pi^4$ , Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2002, 028, 46 с.
- [32] Сорокин В.Н. Оценки многочленов от логарифмов некоторых рациональных чисел, Фундамент. и прикл. матем., 11:6 (2005), 179–194.
- [33] Yattselev M., Strong asymptotics of Hermite–Padé approximants for Angelesco systems with complex weights, Canad. J. Math., 68(5) (2016), 1159–1200.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение и основные результаты</b>	<b>3</b>
1.1	Мотивация . . . . .	3
1.2	Аппроксимации Эрмита–Паде . . . . .	4
1.3	Система Анжелеско . . . . .	5
1.4	Система Никишина . . . . .	7
1.5	Система функций на дереве . . . . .	9
1.6	Система функций на графе . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Доказательства</b>	<b>14</b>
2.1	Равновесная мера для дерева . . . . .	14
2.2	Равновесная мера для графа . . . . .	18