



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 125 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Подлазов А.В.**

Решение  
самоорганизованно-  
критической модели Манны  
произвольной размерности

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Подлазов А.В. Решение самоорганизованно-критической модели Манны произвольной размерности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 125. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2017-125](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-125)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-125>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Подлазов**

**Решение самоорганизованно-  
критической модели Манна  
произвольной размерности**

**Москва — 2017**

А.В. Подлазов

Решение самоорганизованно-критической модели Манна  
произвольной размерности

В работе исследуется модель Манна – консервативная изотропная самоорганизованно-критическая модель типа кучи песка. Для нее приводятся результаты компьютерного моделирования в трехмерном случае, а также – аналитическое решение для произвольной размерности пространства. Решение опирается на построение модели мезоуровня, формулируемой в терминах плотности возбуждения, его корреляционной длины, средней активности лавины и ширины границы ее области. Расчет показателей выполнен двумя независимыми способами: на основе стохастических дифференциальных уравнений и путем сведения происходящих процессов к случайным блужданиям.

*Ключевые слова:* самоорганизованная критичность, кучи песка, модель Манна, модель БТВ, масштабная инвариантность, степенные распределения, модели мезоуровня, уравнения Ланжевена, случайные блуждания

A.V. Podlazov

Solution of the self-organized critical Manna model of arbitrary dimension

I study the conservative isotropic self-organized critical sandpile model of Manna. I present for it the results of computer simulation in 3D and analytical solution for arbitrary space dimension. The solution bases on the formulation of an mesolevel model in terms of the excitation density, its correlation length, the average activity and the boundary width of avalanche region. Calculation of the critical indices is carried out in two independent ways: on the basis of stochastic differential equations and by reducing of the occurring processes to random walks.

*Key words:* self-organized criticality, sandpiles, Manna model, BTW model, scale invariance, power laws, mesolevel models, Langevin equations, random walks

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00342-а).

Содержание

Введение .....	3
Правила моделей .....	3
Свойства степенных распределений .....	4
Результаты компьютерного моделирования .....	6
Решение на основе ланжевеновского формализма .....	10
Решение сведением к случайным блужданиям .....	13
Обсуждение и выводы .....	15

## ВВЕДЕНИЕ

В теории самоорганизованной критичности [1], отмечающей в этом году свое 30-летие, одно из ключевых место занимают модели типа кучи песка. Они стали не только важнейшим инструментом исследования механизмов возникновения масштабно-инвариантных свойств и степенной статистики, но и символом всей теории.

Правила консервативных моделей кучи песка классифицируются, с одной стороны, по наличию или отсутствию перераспределения песчинок выделенного направления, а с другой – по наличию или отсутствию стохастичности. Наиболее известными примерами направленных моделей являются детерминированная модель Дхара–Рамасвами (ДР) [2] и стохастическая модель Пастор-Саторраса–Веспиньяни (ПСВ) [3], а изотропных моделей – детерминированная модель Бака–Танга–Визенфельда (БТВ) [4,5] и стохастическая модель Манны [6].

Основной целью как компьютерного, так и аналитического исследования самоорганизованно-критических моделей является определение показателей распределений вероятностей, описывающих происходящие события. Направленные модели легко решаются аналитически – для модели ДР точное решение было найдено еще ее авторами [2], да и модель ПСВ быстро сдалась исследователям [7,8]. В случае изотропных моделей ситуация оказалась более сложной. В трехмерном случае модель БТВ была решена в работе [9], но к двумерному случаю этот метод решения адаптировать не удалось. Автором настоящей работы были найдены решения двумерных моделей Манны [10,11] и БТВ [12], однако использованные подходы, как будет пояснено далее, неприменимы для большей размерности пространства. Обе изотропные модели при размерности пространства от четырех и выше демонстрируют одинаковое поведение [13,14], поэтому нерешенной остается только трехмерная модель Манны, и результаты компьютерного моделирования далее приводятся только для нее, а также для одной из характеристик трехмерной модели БТВ, не рассмотренной другими исследователями.

### *Правила моделей*

Изотропные модели кучи песка формулируются как клеточные автоматы на  $d$ -мерной кубической решетке линейного размера  $L$ . Числа в ячейках решетки традиционно интерпретируются как количество содержащихся в них песчинок. При наличии не менее  $2d$  песчинок ячейки считаются неустойчивыми и опрокидываются, передавая указанное число песчинок ячейкам, имеющим с ними общую грань. В модели БТВ песчинки раздаются строго по одной в каждую соседнюю ячейку, а в модели Манны каждая передаваемая песчинка случайным образом выбирает, в какую из соседних ячеек перейти. При опрокидывании ячеек, находящихся на краю решетки, часть песчинок выпадает за ее край, покидая кучу. Потеря кучей песчинок при опрокидывании компенсируется их вбросом, осуществляемым в состоянии, когда все ячейки устойчивы. Песчинки вбрасываются по одной в случайно выбранные ячейки кучи (в данной работе используются лишь центральные ячейки решеток с четным  $L$ ). Если в

результате вброса песчинки происходит нарушение устойчивости ячейки, она опрокидывается, передавая песчинки соседкам и тем самым, возможно, нарушая их устойчивость. Развивается лавина опрокидываний, по завершении которой вбрасывается новая песчинка и цикл повторяется. Независимо от начального состояния кучи после некоторого количества циклов она переходит в состояние, описываемое степенным распределением лавин по их характеристикам, что и породило термин «самоорганизованная критичность».

Основными характеристикам лавины являются:

- $T$  – *длительность* в параллельном времени (при одновременной обработке неустойчивых ячеек);
- $N$  – *размер* – число опрокидываний, или длительность в последовательном времени (при обработке неустойчивых ячеек по одной);
- $S$  –  $d$ -мерный *объем* – число ячеек, где произошли опрокидывания (без учета его кратности);
- $C$  – *периметр* – число ячеек, получивших песчинки, но сохранивших устойчивость, дополненное числом песчинок, упавших за край решетки.

Наряду с указанными характеристиками лавины будут рассматриваться ее линейная *протяженность*  $R$ , в предположении компактности области лавины задаваемая формулой  $R \sim S^{1/d}$ , *ширина границы* области лавины  $W = C/R^{d-1}$  и *средняя активность*  $A = N/T$ .

Здесь и далее все выкладки проводятся с точностью до коэффициента, поэтому, предполагая степенной вид зависимостей между всеми характеристиками лавины, деление мы не отличаем от дифференцирования, а умножение – от интегрирования.

### ***Свойства степенных распределений***

Для любой характеристики лавины  $X$  распределение лавин по ее величине имеет при  $X \gg 1$  плотность вида

$$u_X(X) = X^{-(1+\alpha_X)} g_X(X/X_1), \quad (1)$$

где функция  $g_X(z)$  примерно постоянна при  $z \ll 1$  и убывает быстрее любой степени аргумента при  $z \rightarrow \infty$ , а величина  $X_1$ , характеризующая лавины, крупные настолько, что они уже не помещаются в решетку конечного размера  $L$ , растет как некоторая его степень:

$$X_1 \sim L^{\nu_X}. \quad (2)$$

Доля лавин, не помещающихся в решетку, убывает с ее размером как

$$P\{X > X_1\} = \int_{X_1}^{\infty} u_X(X) dX \cong \int_{L^{\nu_X}}^{\infty} X^{-(1+\alpha_X)} g_X(X L^{-\nu_X}) dX \sim L^{-\varepsilon},$$

где универсальный показатель

$$\varepsilon \equiv \alpha_X \nu_X \quad (3)$$

не зависит от того, какая именно характеристика лавины используется для его вычисления, поскольку если она не помещается в систему, то не помещается сразу по всем своим характеристикам.

Сочетание формул (1) и (2) позволяет определить скейлинговое поведение и для средней лавины

$$\langle X \rangle = \int X^{-\alpha_X} g_X(XL^{-\nu_X}) dX \sim L^{\nu_X - \varepsilon}.$$

Скейлинговые показатели  $\nu_X$  и  $\nu_X - \varepsilon$ , связывающие характерные значения  $X_1$  и  $\langle X \rangle$  с обусловившим их появление конечным размером  $L$ , для некоторых характеристик лавины можно определить из общих соображений.

Во-первых, линейная протяженность и объем наиболее крупных лавин ограничены только размерами решетки, т.е.  $R_1 \sim L$  и  $S_1 \sim L^d$ , или

$$\nu_R = 1 \text{ и } \nu_S = d. \quad (4)$$

Во-вторых, путь каждой песчинки через систему представляет собой случайное блуждание, в силу чего среднее число опрокидываний, в которых песчинка успевает поучаствовать до того, как покинет решетку, квадратично по ее линейному размеру  $\langle N \rangle \sim L^2$ , или

$$\nu_N - \varepsilon = 2. \quad (5)$$

В масштабно-инвариантном состоянии взаимосвязь разных характеристик лавины дается степенной формулой, конкретный вид которой находится сопоставлением характеристик крупных лавин:

$$Y^{\nu_X} \sim X^{\nu_Y}. \quad (6)$$

Применив к этому выражению тождество (3), получаем эквивалентную запись

$$X^{\alpha_X} \sim Y^{\alpha_Y}, \quad (7)$$

которая, впрочем, может быть выведена и напрямую из распределения (1), ограниченного областью некрупных лавин.

При рассмотрении 4 основных характеристик ( $T$ ,  $N$ ,  $V$  и  $C$ ) для полного решения модели необходимо определить 8 показателей (4 пары  $\alpha$  и  $\nu$ ). Формула (3) дает 3 скейлинговых соотношения, формулы (4) и (5) – еще по 1. Таким образом, для решения модели необходимо получить еще 3 уравнения, связывающие между собой характеристики лавины, на чем и сосредоточены дальнейшие усилия. При этом базовые скейлинговые соотношения (3), (4), (5), (6) и (7) используются без указания ссылок.

## РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Показатели самоорганизованно-критических моделей определяются тем точнее, чем больше размер решетки. И если при низкой размерности пространства наращивание  $L$  ограничивается лишь быстродействием, нехватку которого можно отчасти компенсировать расчетом на многих процессорах или компьютерах, то при высокой размерности пространства лимитирующим фактором становится память, нехватку которой компенсировать нечем, из-за чего результаты трехмерного моделирования сопряжены с ощутимыми погрешностями.

Для повышения точности при скейлинговом анализе плотностей, показанном на рис. 1 и 2, подбирались значения показателей, не только ограниченные базовым скейлинговым соотношением, но и являющиеся рациональными числами с небольшими числителями и знаменателями. Оправданность такого подхода далее подтверждена теоретическими расчетами.

Важную роль при аналитическом изучении изотропных моделей играет периметр области лавины, которым модельеры обычно пренебрегают. Исправляя это упущение, рис. 3 дает распределение этой характеристики и для модели БТВ, хотя она и не является основным предметом настоящего исследования.

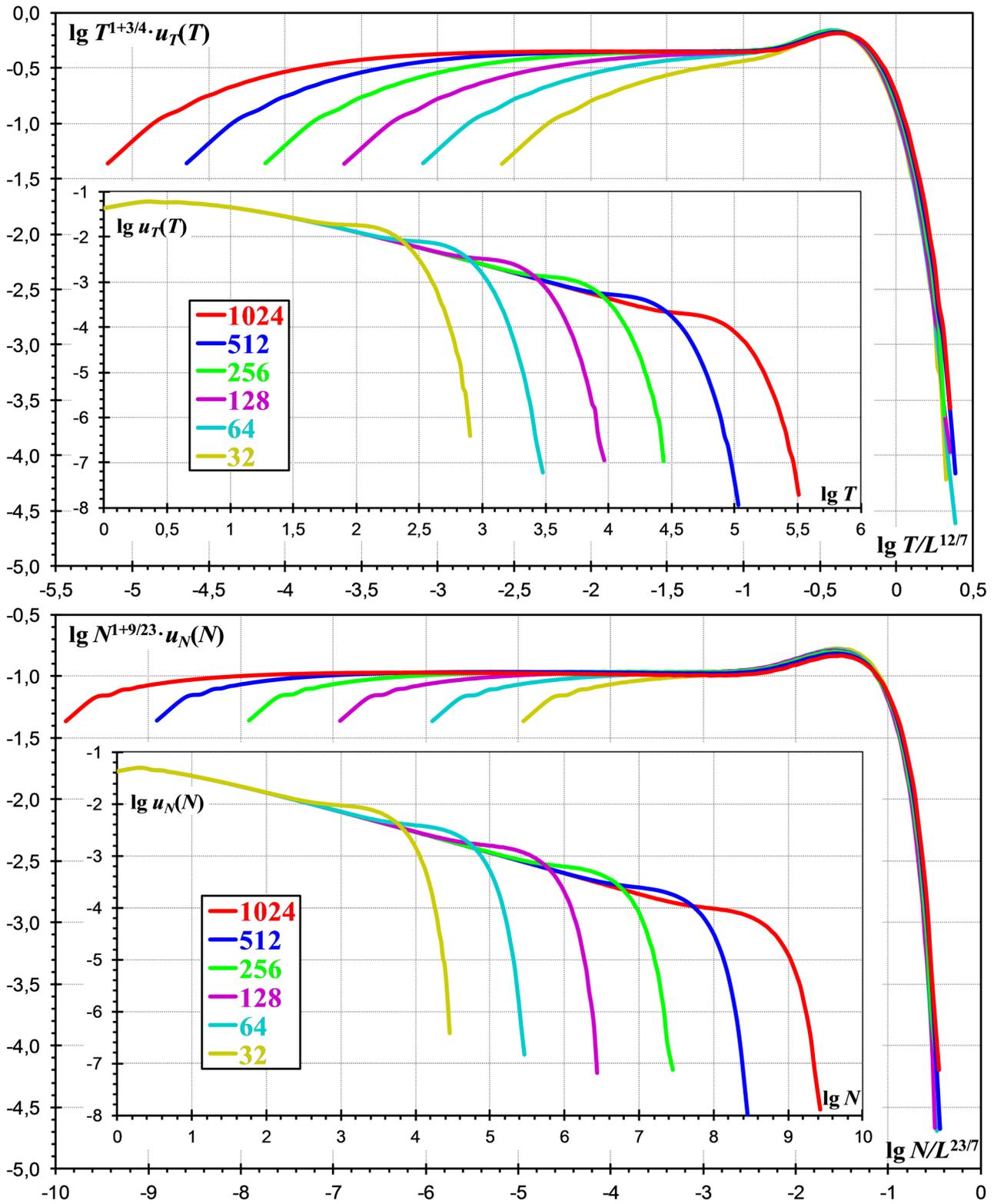
Итоги выполненного анализа в сочетании с результатами работ [9,10,11,12,13,14] подведены следующей в таблице.

Показатель		Модель Манны				Обе модели		Модель БТВ			
		$d = 2$		$d = 3$		$d \geq 4^*$		$d = 3$		$d = 2$	
		$\nu$	$\alpha$	$\nu$	$\alpha$	$\nu$	$\alpha$	$\nu$	$\alpha$	$\nu$	$\alpha$
Длительность	$T$	3/2	1/2	12/7	3/4	2	1	1,63 <sup>†</sup>	0,61 <sup>†</sup>	5/4 <sup>§</sup>	1/3
Размер	$N$	11/4	3/11	23/7	9/23	4	1/2	3	1/3	2 <sup>§</sup>	5/24
Объем	$S$	2	3/8	3	3/7	4	1/2	3	1/3	2	5/24
Периметр	$C$	5/4	3/5	18/7	1/2	4	1/2	18/7 <sup>‡</sup>	7/18 <sup>‡</sup>	5/4	1/3
$\varepsilon \equiv \alpha\nu$		3/4		9/7		2		1		5/12	

\* Среднедолевые значения. † Приблизительные значения. ‡ Значения ранее не публиковались. § Нескейлинговый вид плотности распределения.

Сразу обращают на себя внимание два обстоятельства.

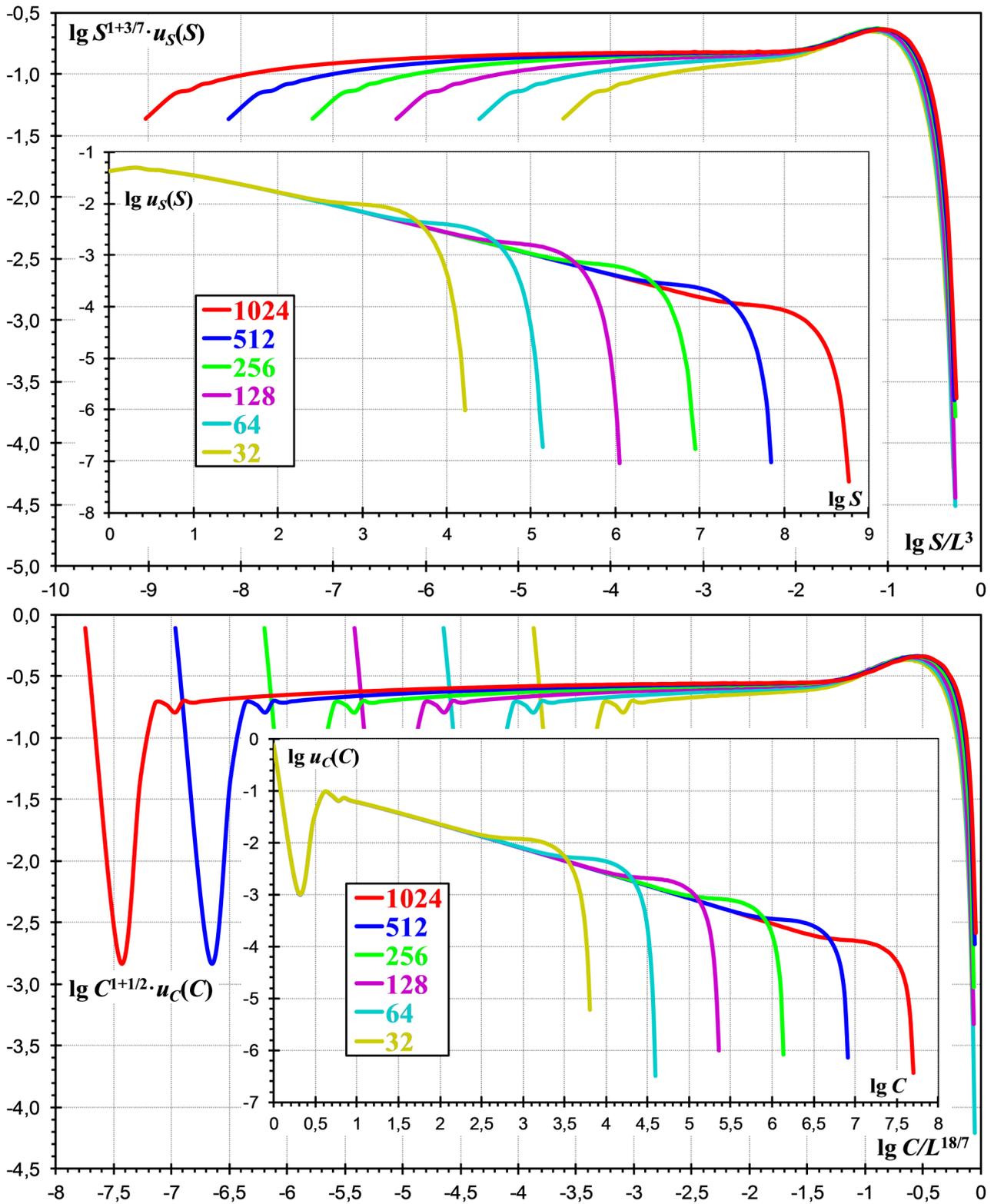
Во-первых, для модели Манны  $\nu_T > \nu_C$  при  $d = 2$ , но  $\nu_T < \nu_C$  при  $d = 3; 4$ . Т.е. если в двумерном случае активность распространяется преимущественно вдоль границы области лавины, медленно смещающейся вовне, то в пространстве большей размерности граница оказывается столь изрезанной, что локальное направление вдоль нее может быть глобально направлением поперек. Такое различие не дает надежды на обобщение методов пространственной декомпозиции, предложенных для решения двумерной задачи [10,11,12], на случай произвольной размерности, для которого требуются иные подходы, изложение которых дается далее.



**Рис. 1. Распределение лавин по длительности и размеру в трехмерной модели Манни**

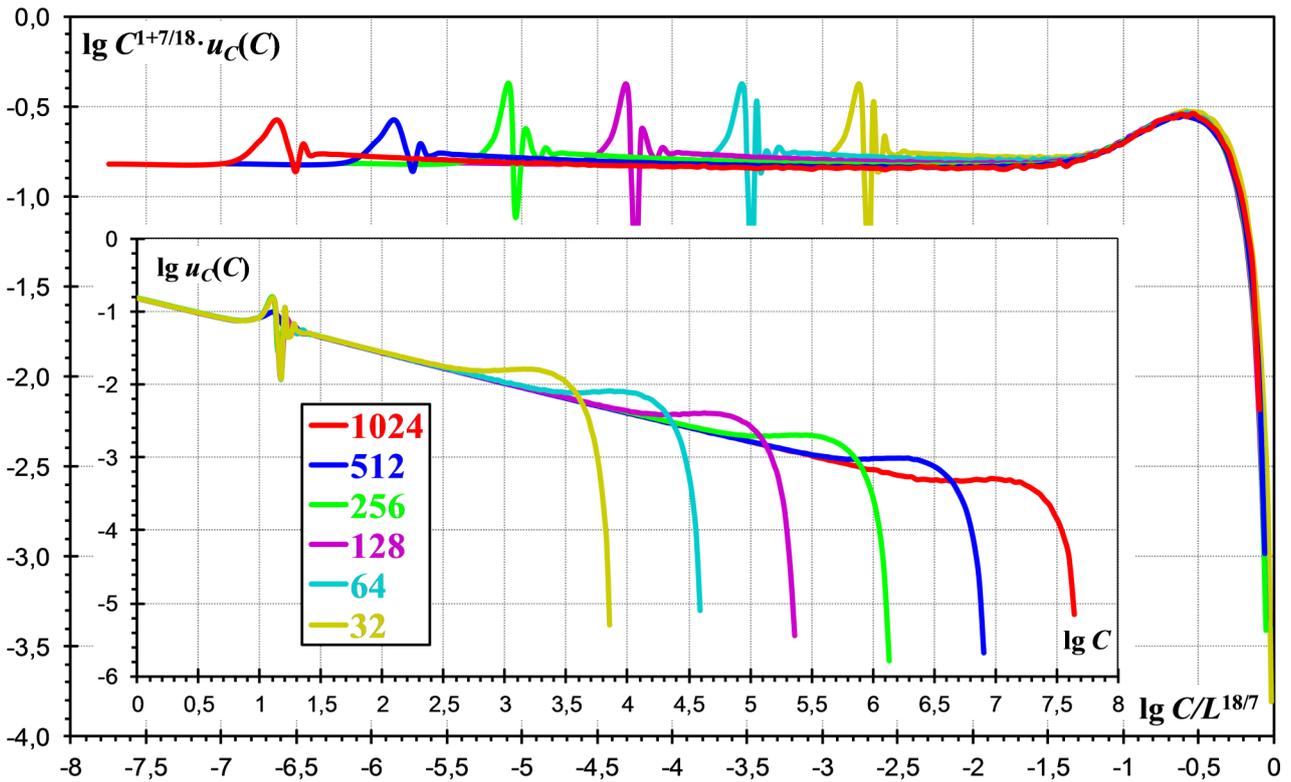
На врезке: в двойном логарифмическом масштабе линейным участком графика представляется степенной вид плотности при  $1 \ll X \ll X_1$ .

При домножении ординаты на  $X^{1+\alpha}$  и делении абсциссы на  $L^\nu$  графики, полученные для систем различного размера, совмещаются в области  $1 \ll X$ , что позволяет подобрать значения показателей  $\alpha$  и  $\nu$ . Однако для не очень больших значений  $L$  совмещение оказывается неидеальным и видно, как графики идут друг за другом в порядке изменения размера системы.



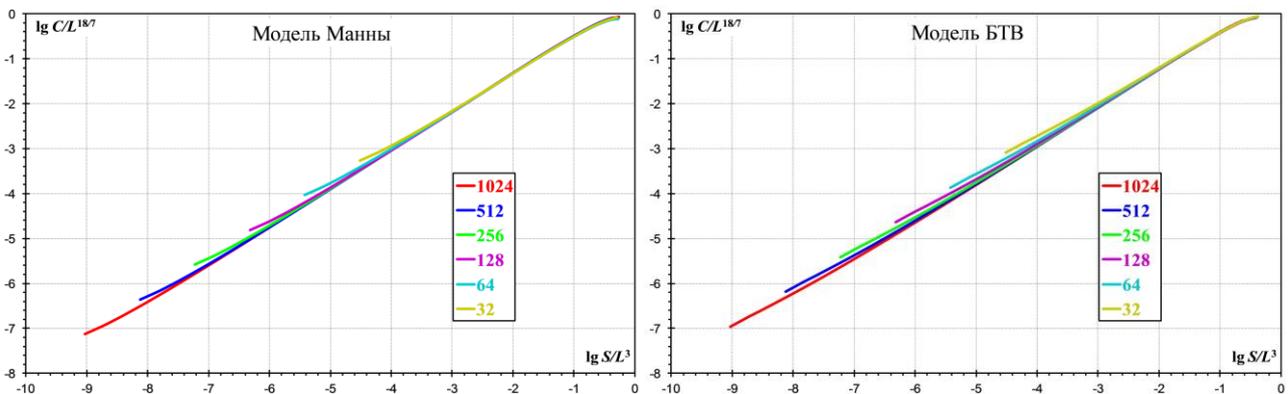
**Рис. 2. Распределение лавин по объему и периметру в трехмерной модели Манна**

Рисунок аналогичен рис. 1 с той разницей, что в случае периметра нестепенные участки отмасштабированных графиков, полученных для малых  $L$ , пришлось закрыть врезкой, чтобы не уменьшать ее размер до нечитаемости. Необычно сильное отклонение  $u_C(C)$  от степенного вида, возникающее при малых  $C$  (особенно при  $C = 2$  и  $3$ ), связано с тем, что такие значения наблюдаются лишь для лавин, в которых почти все песчинки, розданные опрокинутыми ячейками, попали в эти же самые ячейки, вероятность чего крайне низка.



**Рис. 3. Распределение лавин по периметру в трехмерной модели БТВ**

Рисунок аналогичен нижней части рис. 2. Однако в силу детерминированности правил в модели БТВ невозможны значения  $1 < C < 2d$ , из-за чего отклонения плотности от степенного вида оказываются намного меньше, чем в модели Манни.



**Рис. 4. Зависимость между периметром и объемом для трехмерных изотропных моделей**

После нормировки характеристик на  $L^v$  графики, полученные при разных  $L$ , совпадают для достаточно больших  $S$ . Показатели  $v_S$  и  $v_C$  одинаковы для обеих моделей.

Во-вторых, среди приведенных показателей есть лишь одно нетривиальное значение, совпадающее для моделей Манни и БТВ (при всех размерностях пространства). Это пространственная фрактальная размерность границы области лавины  $v_C$  (см. рис. 4). Таким образом, обе модели имеют одинаковую геометрию области лавины, несмотря на различия в динамике ее развития и в кратности опрокидывания ячеек. Данное наблюдение далее будет использовано при описании эволюции границы на основе величин, относящихся к микро- и мезомасштабам, без учета макромасштаба.

## РЕШЕНИЕ НА ОСНОВЕ ЛАНЖЕВЕНОВСКОГО ФОРМАЛИЗМА

Здесь и далее большими буквами обозначаются итоговые значения характеристик, относящихся к завершившейся лавине, а соответствующими малыми буквами – их текущие значения, относящиеся к развивающейся лавине.

Переход от микроуровня, на котором формулируются правила модели, оперирующие состоянием отдельных ячеек и судьбой отдельных песчинок, к макроуровню, на котором учитываются лишь интегральные характеристики лавин, лежит через мезоуровень, на котором строится промежуточная модель, описывающая коллективную динамику элементов системы. Правила промежуточной модели не выводятся, а угадываются. Поэтому всё, сказанное в этом разделе, следует рассматривать в первую очередь не как расчет показателей, а как подробное описание промежуточной модели. Общефизическое обоснование ее положений и сопоставление ее результатов с экспериментом вынесено в другие разделы. Пока же сосредоточимся на вопросе, как следует проводить расчеты, отложив вопрос, почему это следует делать именно так.

Развитие лавины представляет собой распространение по системе возбуждения, инициированного вбросом в нее одной песчинки. Этот процесс будем характеризовать *плотностью возбуждения*  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , агрегированно учитывающей не только пространственное распределение неустойчивых ячеек, но и изменение заполнения ячеек устойчивых, которое прямо влияет на их возбудимость.

Будучи скрытой переменной, плотность возбуждения, тем не менее, напрямую влияет на изменение наблюдаемых величин, поэтому анализ мы начинаем именно с нее. Ее эволюция описывается стохастическим уравнением диффузии

$$\dot{\rho}(\mathbf{r}, t) = \Delta \rho(\mathbf{r}, t) + \eta(\mathbf{r}, \rho) \quad (8)$$

с дельта-коррелированным шумом:

$$\langle \eta(\mathbf{r}, \rho) \cdot \eta(\mathbf{r}', \rho') \rangle \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \delta(\rho - \rho'). \quad (9)$$

Действие случайных факторов определяется заполнением решетки, которое меняется при изменении возбуждения, в силу чего шумовой член  $\eta$  зависит только от  $d$ -мерной пространственной координаты  $\mathbf{r}$  и текущей плотности  $\rho$ , но не зависит явным образом от времени  $t$ . Таким образом, шум в уравнении (8) следует считать закрепленным, если рассматривать это уравнение как описывающее динамику поверхности, движущейся в  $(d+1)$ -мерном пространстве, на которой и производится осреднение шума в формуле (9).

Исследовать ланжевенские уравнения, описывающие масштабно-инвариантные системы, проще всего с помощью т.н. «наивной» перенормировки, связанной с огрублением всех масштабов [15]. При согласованном увеличении всех переменных значимые члены уравнения должны изменяться пропорциональным образом.

Традиционно перенормировочные выражения привязывают к пространственной координате, однако в рассматриваемой задаче формулы оказываются значительно компактнее, если взять за основу время. При огрублении его масштаба  $t \rightarrow bt$  остальные переменные преобразуются по формулам  $\mathbf{r} \rightarrow b^{\kappa_\xi} \mathbf{r}$ ,  $\rho \rightarrow b^{\kappa_\rho} \rho$  и  $\eta \rightarrow b^{-(\kappa_\xi d + \kappa_\rho)/2} \eta$ , где введены временные размерности

$$\kappa_x = v_x / v_T, \quad (10)$$

а масштабирование шума рассчитано на основе его корреляции (9). После такой перенормировки уравнение (8) преобразуется к виду

$$b^{\kappa_\rho - 1} \dot{\rho}(\mathbf{r}, t) = b^{\kappa_\rho - 2\kappa_\xi} \Delta \rho(\mathbf{r}, t) + b^{-(\kappa_\xi d + \kappa_\rho)/2} \eta(\mathbf{r}, \rho).$$

Его эквивалентность исходной записи требует выполнения равенств  $\kappa_\rho - 1 = \kappa_\rho - 2\kappa_\xi = -(\kappa_\xi d + \kappa_\rho)/2$ , из которых находятся показатели  $\kappa_\rho = (4 - d)/6$  и  $\kappa_\xi = 1/2$ , определяющие зависимость амплитуды плотности возбуждения  $\rho$  и дистанции  $\xi$ , на которой скоррелированы его флуктуации, от времени  $t$ .

Физическая интерпретация величины  $\xi$  именно как корреляционной длины априори неочевидна и подсказана формулой

$$\rho \sim \xi^{(4-d)/3}, \quad (11)$$

хорошо известной из теории обычных критических явлений [16]. Следствием такой зависимости является возникновение верхней критической размерности  $d_{uc} = 4$ , при превышении которой структура решетки становится незначимой, так что реализованная на ней модель перестает отличаться от модели со случайным соседством. Поэтому здесь мы ограничимся случаем  $d \leq d_{uc}$ . Важность этого условия определяется также и тем, что при его нарушении становится неверным предположение о компактности области лавины [14].

Эволюция средней активности (суммарного числа опрокидываний за шаг параллельного времени) как макрохарактеристики описывается обыкновенным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{a}(t) = \chi(\rho) \quad (12)$$

с дельта-коррелированным шумом:

$$\langle \chi(\rho) \cdot \chi(\rho') \rangle \sim \delta(\rho - \rho'). \quad (13)$$

Зависимость шума только от амплитуды плотности возбуждения означает, что изменение количества одновременно существующих неустойчивых ячеек обуславливается исключительно изменением амплитуды плотности возбуждения, вбирающей в себя локальные флуктуации заполнения ячеек. Такой вид шума можно условно охарактеризовать как «полусвободный», т.к. завися от

времени хотя бы неявно, от координат и изучаемой переменной он независим полностью.

При огрублении масштабов переменные преобразуются по формулам  $t \rightarrow bt$ ,  $a \rightarrow b^{\kappa_a} a$  и  $\chi \rightarrow b^{-\kappa_\rho/2} \chi$ , где масштабирование шума рассчитано на основе его корреляции (13). Нечувствительность уравнения к (12) к такой перенормировке требует выполнения равенства  $\kappa_a - 1 = -\kappa_\rho/2$ , из которого получаем первое из скейлинговых соотношений, необходимых для решения модели:

$$\kappa_a = (8 + d)/12. \quad (14)$$

Развитие лавины связано с ростом ее области, т.е. продвижением вовне ее границы, трактуемым здесь как рост поверхности над некоторой  $(d-1)$ -мерной подложкой. При глобальном рассмотрении ее роль играет  $(d-1)$ -мерная сфера радиуса  $r$ , однако такая трактовка не является строгой, поскольку в силу фрактальности границы для нее «вовне» вовсе не означает «по радиус-вектору от какой-то точки внутри». Локально же подложкой может служить положение границы, усредненное в некоторой области пространства, масштаб которой по-прежнему задается линейной протяженностью области лавины  $r$ .

Разложим относительно подложки  $d$ -мерную пространственную координату  $\mathbf{r}$  на  $(d-1)$ -мерную тангенциальную и 1-мерную нормальную составляющие  $\mathbf{r}_\parallel$  и  $\mathbf{r}_\perp$ . Разброс смещений вдоль последней задает ширину границы, описываемую стохастическим уравнением диффузии:

$$\dot{w}(\mathbf{r}_\parallel, t) = \rho \Delta w(\mathbf{r}_\parallel, t) + \rho^{-1} \zeta(t), \quad (15)$$

в котором возбуждение выступает как фактор, способствующий разглаживанию границы. С одной стороны,  $\rho$  здесь играет роль коэффициента диффузии, а с другой – задает относительную амплитуду свободного шума  $\zeta(t)$ , стремящегося нарушить гладкость границы. Как и в уравнениях (8) и (12), шум предполагается дельта-коррелированным:

$$\langle \zeta(t) \cdot \zeta(t') \rangle \sim \delta(t - t'), \quad (16)$$

однако зависит он теперь только от времени, поскольку все случайные факторы, привязанные к координате и текущему состоянию, полагаются уже учтенными в амплитуде плотности возбуждения.

При огрублении масштабов переменные преобразуются по формулам  $t \rightarrow bt$ ,  $\rho \rightarrow b^{\kappa_\rho} \rho$ ,  $w \rightarrow b^{\kappa_w} w$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow b^{\kappa_r} \mathbf{r}$  и  $\zeta \rightarrow b^{-1/2} \cdot \zeta$ , где масштабирование шума рассчитано на основе его корреляции (16). Чтобы вид уравнения (15) не менялся при такой перенормировке, необходимо выполнение равенств  $\kappa_w - 1 = \kappa_\rho + \kappa_w - 2\kappa_r = -\kappa_\rho - 1/2$ , из которых получаются 2 недостающих скейлинговых соотношения

$$\kappa_w = (d - 1)/6 \quad (17)$$

и  $\kappa_r = (10 - d)/12.$  (18)

Дальнейшие выкладки элементарны, но громоздки, поэтому ограничимся их результатом:

$X$	$\kappa_x$	$v_x$	$\alpha_x$
$T$	1	$12/(10 - d)$	$d/4$
$N$	$(d + 20)/12$	$(d + 20)/(10 - d)$	$3d/(d + 20)$
$S$	$(10 - d)d/12$	$d$	$3/(10 - d)$
$C$	$(1 - d/12)(d - 1)$	$(12 - d)(d - 1)/(10 - d)$	$3d/(12 - d)(d - 1)$

(19)

и  $\varepsilon = 3d/(10 - d).$  (20)

Вхождение в показатели для  $C$  и в соотношение (17) члена  $d - 1$  напоминает о том, что у модели кроме верхней критической размерности должна быть и нижняя. Причем ее величина, скорее всего, даже не равна 1, а превышает ее. По крайней мере, в одномерном случае показатели модели Манна [17] уже не подчиняются формулам (19) и (20), а одномерного варианта модели БТВ и вовсе не существует (можно предположить, что одномерный вариант модели Манна, так же как и двумерный вариант модели БТВ, является вырожденным случаем, требующим специального описания). Таким образом, новизна полученных формул ограничивается трехмерным случаем, а также, возможно, версиями модели на фрактальных решетках.

### РЕШЕНИЕ СВЕДЕНИЕМ К СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЯМ

В этом разделе используются понятия и обозначения из предыдущего раздела, однако все связывающие их формулы выводятся независимо.

За  $t$  шагов развития лавины песчинки, совершающие случайные блуждания по решетке, смещаются на характерное расстояние

$$\xi \sim \sqrt{t}, \quad (21)$$

которым определяется объем  $\omega \sim \xi^d$ , в котором возбуждение является скоррелированным.

Как случайное блуждание можно трактовать и изменение линейной протяженности области лавины  $r$ . При рассмотрении в параллельном времени  $t$  частота скачков определяется плотностью возбуждения  $\rho$ , т.е.

$$r^2 \sim \rho t. \quad (22)$$

Если же рассматривать процесс в последовательном времени  $n$ , то частота скачков будет определяться локальным избытком песка. Поскольку во время лавины песчинки успевают свободно перемещаться в объеме корреляции  $\omega$ , внутри него имеет значение не их изначальное расположение, а только суммарное количество. Его флуктуации пропорциональны  $\omega^{1/2}$ , т.е. избыток песка, приходящий на одну ячейку, составляет порядка  $\omega^{-1/2} \sim \xi^{-d/2}$ . Таким образом,

$$r^2 \sim \xi^{-d/2} n. \quad (23)$$

Подставив сюда корреляционную длину (21), получаем выражение  $t^{d/4} \sim n/r^2 \sim r^{v_N-2}$ . Элементарное преобразование показателя его правой части  $v_N - 2 = \varepsilon = \alpha_R$  позволяет найти показатель распределения лавин по длительности

$$\alpha_T = d/4. \quad (24)$$

Столь простое выражение, разумеется, может быть получено и без промежуточных выкладок. Вероятность того, что лавина доживет до шага  $t$ ,  $P_T(t) \sim t^{-\alpha_T}$ . Выживание лавины определяется тем, что локальный избыток песка превышает некоторый фиксированный порог, вероятность чего составляет порядка  $\omega^{-1/2}$ . Приравняв эти две вероятности, с помощью формулы (21) получаем значение (24).

Сопоставление формул (22) и (23) приводит к выражению  $a/\rho \sim \omega^{1/2}$ , означающему, что отношение активности (экстенсивной характеристики) к амплитуде плотности возбуждения (интенсивной характеристике) определяется флуктуациями количества песчинок в объеме корреляции, т.е. условиями не на макро-, а на мезомасштабе. Иными словами, условия в области лавины существенно неоднородны.

Ширина границы области лавины  $w$  определяет пространственный масштаб корреляции там, где плотность возбуждения приближается к своему минимально возможному значению, обусловленному дискретностью происходящих процессов. А амплитуда плотности возбуждения определяет пространственный масштаб корреляции в области лавины в целом, т.е.  $\xi \sim w\rho$ , откуда посредством формул (21) и (22) получаем еще одно соотношение пространственных масштабов

$$r \sim w\rho^{3/2}. \quad (25)$$

В результате выноса песка на границу области лавины каждая ячейка внутри нее теряет в среднем  $c/s \sim w/r$  песчинок. Их избыток  $\sqrt{\omega}$ , имеющийся в объеме корреляции, локализован в  $\sqrt{\omega} \cdot r/w$  ячейках. События захвата и потери

таких ячеек объемом корреляции являются шагами процесса, определяющего изменение корреляционной длины. Рассмотрение его в качестве случайного блуждания дает выражение  $\xi^2 \sim \xi^{d/2} r/w$ , которое с помощью формулы (25) позволяет воспроизвести формулу (11) для амплитуды плотности возбуждения. А из нее с помощью формул (21) и (22) получается соотношение (18), которого в сочетании с определением (10), соотношением (24) и формулой (25) достаточно для получения полного решения модели (19)–(20).

Завершим решение наблюдением, позволяющим лучше понять роль границы области лавины. Граница проходит свою ширину за время  $\theta \sim wt/r$ , возрастание которого по мере развития лавины должно быть очень медленным, коль скоро периферия ее области характеризуется минимально-возможной плотностью возбуждения. И в самом деле, с помощью формул (25), (11) и (21) находим  $\theta \sim t^{\alpha_r}$ , откуда из записи (1) находим  $\langle \Theta \rangle \sim \log L$ .

Не степенная, а лишь логарифмическая зависимость среднего времени прохождения границей ее ширины от размера системы может быть использована для независимого вывода одной из формул этого раздела.

## ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Точное аналитическое решение модели Манны опирается на использование величин, которые либо являются производными основных характеристик лавины (средняя активность  $a$  и ширина границы ее области  $w$ ), либо не наблюдаемы непосредственно (плотность возбуждения  $\rho$  и его корреляционная длина  $\xi$ ). Однако именно этими величинами описывается коллективная динамика ячеек на мезоуровне, посредничающем между микроуровнем правил и макроуровнем распределений вероятностей.

Ключевой переменной промежуточной модели является плотность возбуждения. Ее амплитуда возрастает по формуле  $\rho(t) \sim t^{(4-d)/6}$ , демонстрирующей наличие у модели верхней критической размерности  $d_{uc} = 4$ . Начиная с этой размерности пространства плотность возбуждения постоянна во времени, что означает эффективно случайное соседство ячеек, нарушающее их взаимодействие друг с другом.

Хотя сама по себе плотность возбуждения не регистрируется в эксперименте, ее амплитуда связана со средней активностью простой формулой  $\rho \sim a \cdot P$ , где  $P \sim x^{-\alpha_x}$  – вероятность лавины дожить до текущих значений ее характеристик. Отставание возбуждения от активности связано с отсутствием корреляции возбуждения на масштабе всей области лавины.

Возбуждение скоррелировано лишь на длине  $\xi$ , промежуточной между шириной границы области лавины  $w$  и ее линейной протяженностью  $r$ . Пространственные масштабы, описывающие структуру области лавины, соотносятся как  $w : \xi : r = 1 : \rho : \rho^{3/2}$ .

Завершим подведение итогов описанием минимального набора простейших скейлинговых соотношений, позволяющих восстановить полный набор показателей, описывающих поведение модели. Эти соотношения отобраны из соображений простоты именно их итоговой записи, а не математического вывода или физического обоснования.

Распределение лавин по объему описывается показателями  $\alpha_s = 3/(10-d)$  и  $\nu_s = d$ , из которых восстанавливается универсальный показатель  $\varepsilon = \alpha\nu$ . С его помощью из показателя распределения лавин по длительности  $\alpha_T = d/4$  и скейлингового показателя среднего размера лавины  $\nu_N - \varepsilon = 2$  восстанавливаются показатели для этих ее характеристик. Наконец, показатели для границы могут быть восстановлены на основе временной размерности ее ширины  $\kappa_w = \nu_w/\nu_T = (d-1)/6$  и вытекающей из определения формулы  $\nu_C = \nu_w + (d-1)$ .

### Литература

1. *Бак П.* Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности/ Пер. с англ./ Изд. стереотип./ Синергетика: от прошлого к будущему. №66. – М.: URSS, 2015. – 276 с.
2. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena// Phys. Rev. Lett. 1989. V.63, N16, p.1659-1662.
3. *Pastor-Satorras R., Vespignani A.* Universality classes in directed sandpile models// J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V.33, N3, p.L33–L39.
4. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: An explanation of 1/f-noise// Phys. Rev. Lett. 1987. V.59, N4, p.381-384.
5. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality// Phys. Rev. A. 1988. V.38, N1, p.364-374.
6. *Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality// J. Phys. A: Math. Gen. 1991. V.24, N7, p.L363–L639.
7. *Paczuski M., Bassler K.E.* Theoretical results for sandpile models of SOC with multiple topplings// Phys. Rev. E. 2000. V.62, N4, p.5347-5352.
8. *Kloster M., Maslov S., Tang C.* Exact solution of stochastic directed sandpile model// Phys. Rev. E. 2001. V.63, p.026111.
9. *Ktitarov D.V., Lübeck S., Grassberger P., Priezzhev V.B.* Scaling of waves in the Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model// Phys. Rev. E. 2000. V.61, N1, p.81-92.
10. *Подлазов А.В.* Решение двумерной самоорганизованно-критической модели Маннны// Изв. вузов: ПНД. 2013. Т.21, №6, с.69-87.
11. *Подлазов А.В.* Двумерная самоорганизованно-критическая модель Маннны для песчаных сред// Мат. модел. и числ. мет. 2014, №3(3), с.89-110.
12. *Подлазов А.В.* Классические двумерные модели кучи песка// Изв. вузов: ПНД. 2016. Т.24, №4, с.39-70.
13. *Priezzhev V.B.* The upper critical dimension of the Abelian sandpile model// J. Stat. Phys. 2000, V.98, N3/4, p.667-684.
14. *Lübeck S., Usadel K.D.* Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model around upper critical dimension// Phys. Rev. E. 1997. V.56, N5, p.5138-5143.
15. *Hentschel H.G.E., Family F.* Scaling in open dissipative system// Phys. Rev. Lett. 1991. V.66, N15, p.1982-1985.
16. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. – М.: Мир, 1980. – 298 с.
17. *Nakanishi H., Sneppen K.* Universal versus drive-dependent exponents for sandpile models// Phys. Rev. E. 1997. V.55, N4, p.4012-4016.