



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Шестопёров А.И., Ткачев С.С.

Линейно-квадратичные
методы гашения
низкочастотных колебаний в
нежестком элементе
конструкции макета

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Линейно-квадратичные методы гашения низкочастотных колебаний в нежестком элементе конструкции макета // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 123. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2017-123](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-123)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-123>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.И. Шестопёров, С.С. Ткачев

**Линейно-квадратичные методы
гашения низкочастотных колебаний
в нежестком элементе
конструкции макета**

Москва — 2017

А.И. Шестопёров, С.С. Ткачев

Линейно-квадратичные методы гашения низкочастотных колебаний в нежестком элементе конструкции макета

В работе рассматривается класс линейно-квадратичных методов гашения низкочастотных колебаний в нежестких элементах. Построен линейно-квадратичный регулятор, стабилизирующий макет в заданном положении на столе при заданной ориентации. Реализован алгоритм, подавляющий возмущения остаточных мод редуцированной модели управления.

Ключевые слова: крупногабаритный нежесткий элемент конструкции, подавление низкочастотных колебаний, линейно-квадратичное регулирование, возмущение остаточных мод

Aleksey Shestoporov, Stepan Tkachev

Linear Quadratic Methods of Vibration Suppression in the Mock-Up Flexible Appendage

Survey of the linear quadratic methods for vibration suppression at flexible appendages is presented. Linear quadratic regulator which stabilizes the required position and attitude of the mock-up on the table is obtained. The control law which eliminates the spillover effect influence is implemented in the paper.

Key words: flexible appendage, vibration suppression, linear quadratic regulator, spillover

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (16-01-00634 А).

Введение

Космические аппараты с крупногабаритными нежесткими элементами конструкции (КА с КНЭК) используются для решения множества прикладных задач. Таковыми являются телекоммуникационные аппараты с антеннами большого размера, аппараты исследования дальнего космоса с солнечным парусом, аппараты с роботизированными манипуляторами и выносными штангами. Большая часть таких конструкций запускается в сложенном состоянии. Из-за большой протяженности нежестких элементов, которые зачастую изготавливаются из легких материалов, в процессе их развертывания на орбите, а затем в ходе орбитального и углового маневрирования КА, в их конструкции неизбежно возникают вибрации, которые могут не только ухудшать точность ориентации всего аппарата, но также привести к неустойчивости требуемых режимов движения. Для гашения низкочастотных колебаний в нежестком элементе требуется установка демпфирующих устройств. Обычно для этого используются пьезоэлектрические устройства, крепящиеся на нежесткий элемент. Однако практический интерес представляет задача, когда управление КА осуществляется только при помощи устройств, расположенных на основном теле КА.

Чтобы иметь возможность ясно судить об эффективности различных алгоритмов управления КА с КНЭК и в дальнейшем провести их лабораторное тестирование, в качестве объекта исследования выбран макет,двигающийся по столу [1] и состоящий из основного тела, предполагаемого твердым, и нежесткого стержня, прикрепленного к основному телу при помощи одностепенного шарнира. Рассмотренные алгоритмы в дальнейшем могут быть использованы при решении задачи маневрирования КА с КНЭК на орбите.

В настоящей работе рассматривается задача учета и гашения вибраций в нежестком элементе макета.

1. Постановка задачи

В работе рассматриваются три задачи:

- задача гашения низкочастотных колебаний в нежестком элементе макета, движущегося по столу;
- задача стабилизации макета в заданном угловом положении;
- задача стабилизации основного тела макета в заданной точке стола.

Макет состоит из основного тела, предполагаемого твердым, и нежесткого стержня, прикрепленного к основному телу при помощи одноступенного шарнира. Такая структура макета позволяет учесть нежесткость стержня наряду с нежесткостью в точке соединения стержня и основного тела.

Закон управления макетом предлагается реализовать с помощью четырех вентиляторов, установленных на основном теле макета. Расположение вентиляторов на основном теле макета показано на рис. 1.

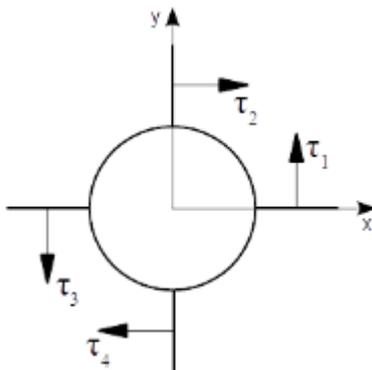


Рис. 1. Схема расположения вентиляторов

Вентиляторы, расположенные на противоположных гранях основного тела, создают силы $\tau_i, i = \overline{1,4}$, направленные в противоположные стороны вдоль оси, которая лежит в плоскости стола и в плоскости параллельной соответствующим граням. Такой принцип размещения и работы вентиляторов позволяет управлять как движением центра масс основного тела, так и угловым движением макета.

Введем используемые в работе системы координат (СК) (рис.2):

$OXYZ$ – инерциальная СК, ее начало лежит в угле стола, ось OZ перпендикулярна плоскости стола, OX и OY направлены вдоль краев стола;

$O_s x_{uz}$ – связанная с корпусом макета СК, ее начало лежит в центре масс корпуса спутника, оси – его главные центральные оси;

$O_p x_p y_p z_p$ – связанная со стержнем СК, ее начало помещается в шарнире, ось $O_p z_p$ – ось вращения шарнира, ось $O_p x_p$ направлена вдоль недеформированного состояния стержня, третья дополняет систему до правой тройки.

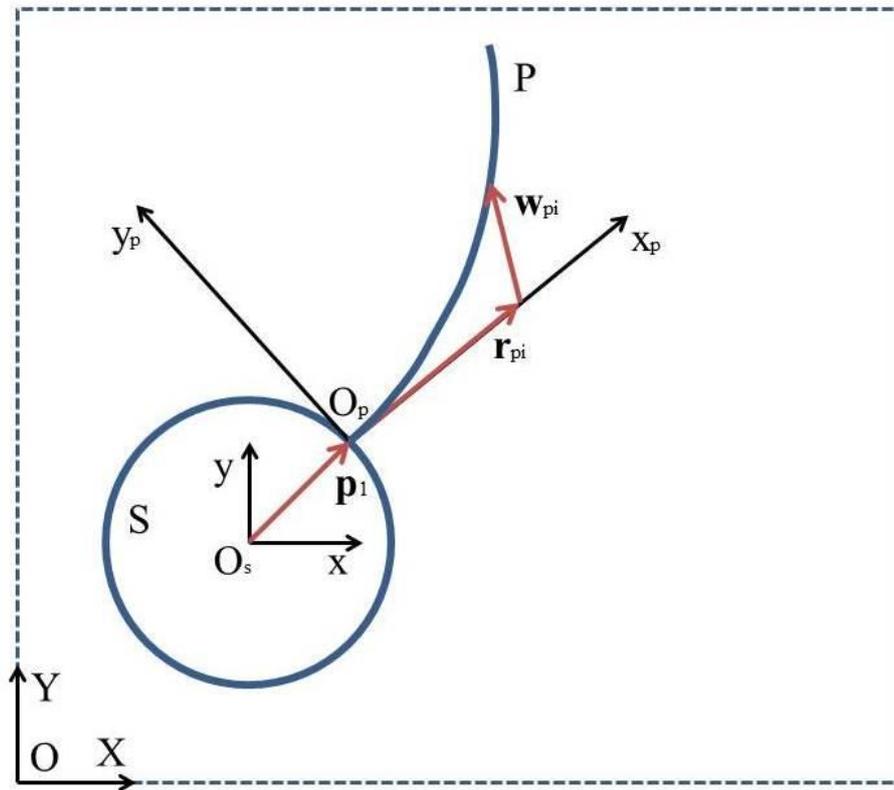


Рис. 2. Системы координат

Последовательность переходов между СК следующая:
 $OXYZ \rightarrow O_sxyz \rightarrow O_px_py_pz_p$.

2. Математическая модель движения макета

2.1. Описание вибраций произвольного нежесткого элемента

Вибрации нежесткого элемента макета описываются уравнениями в частных производных. Системы такого типа являются системами с бесконечным числом степеней свободы. В общем случае смещение $\mathbf{w}(P,t)$ точки P (рис. 2), принадлежащей нежесткому элементу, описывается уравнением (см. [2],[3]):

$$M(P) \frac{\partial^2 \mathbf{w}(P,t)}{\partial t^2} + D(P) \frac{\partial \mathbf{w}(P,t)}{\partial t} + L\mathbf{w}(P,t) = \mathbf{f}(P,t)$$

с граничными условиями $B_i \mathbf{w}(P,t) = 0 (i = \overline{1,n})$, где B_i – линейные дифференциальные операторы, $M(P)$ – оператор плотности массы, $D(P)$ – оператор затухания, L – не зависящий от времени линейный самосопряженный неотрицательно определенный дифференциальный оператор жесткости, $\mathbf{f}(P,t)$ – вектор внешних воздействий (в том числе и управляющих).

В работе предполагается, что естественное затухание колебаний в нежестком элементе отсутствует, и рассматривается уравнение

$$M(P) \frac{\partial^2 \mathbf{w}(P,t)}{\partial t^2} + L(P) \mathbf{w}(P,t) = \mathbf{f}(P,t). \quad (2.1)$$

Гашение вибраций происходит исключительно с помощью управляющих воздействий. Соответствующая задача на собственные значения имеет вид

$$L(P) \phi_r(P) = \omega_r^2 M(P) \phi_r(P), \quad (r = \overline{1, \infty}),$$

где $\phi_r(P)$ и ω_r^2 – собственные векторы (*собственные моды колебаний*) и собственные значения (*частоты колебаний*) соответственно.

Так как оператор L – самосопряженный, то собственные моды колебаний ортогональны и могут быть нормализованы

$$\int_D M(P) \phi_r(P) \phi_s(P) dD = \delta_{rs} \quad (r, s = \overline{1, \infty}).$$

Тогда смещение точки нежесткого элемента относительно недеформированного положения представляется в виде ряда

$$\mathbf{w}(P,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(P) q_r(t), \quad (2.2)$$

где $q_r(t)$ называется *амплитудой* r -й собственной моды колебаний. Подставляя (2.2) в (2.1), приходим к системе модальных уравнений

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = f_r(t), \quad (r = \overline{1, \infty}), \quad (2.3)$$

где $f_r(t) = \int_D \phi_r(P) \mathbf{f}(P,t) dS, r = \overline{1, \infty}$.

Таким образом, система уравнений в частных производных (2.1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечной размерности (2.3).

Нежесткие элементы КА в реальных системах, как правило, представляют собой сложные конструкции, и поэтому поиск собственных чисел в конечном виде обычно не представляется возможным. В задаче численного определения собственных мод колебаний часто используется метод конечных элементов [4]. Смещение $\mathbf{w}(\mathbf{r}_i, t)$ точки \mathbf{r}_i после конечно-элементного моделирования представимо в виде

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) \mathbf{q}(t), \quad (2.4)$$

где $\mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i)$ – матрица собственных мод колебаний, полученная, например, в среде NASTRAN и описывающая численно вектор $\phi(\mathbf{r}_i)$. Величины \mathbf{A}_i задаются в СК, связанной с нежестким элементом $(O_p x_p y_p z_p)$.

Из (2.4) видно, что после конечно-элементного моделирования система уравнений в частных производных (2.1) заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений конечной размерности. Знание точных значений частот колебаний требует наличия модели нежесткого элемента большой размерности.

2.2. Уравнения движения макета

Для вывода уравнений движения КА с КНЭК, находящегося на орбите, в работе [5] использовался принцип возможных перемещений для системы с идеальными связями

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i = 0, \quad (2.5)$$

где $\delta \mathbf{R}_i$ – возможное перемещение для i -й точки системы, \mathbf{F}_i – равнодействующая всех активных сил, действующих на i -ю точку (предполагается, что связи идеальные, а значит, работа их реакций на возможных перемещениях равна нулю).

Выведем уравнения плоского движения центра масс основного тела макета. Обозначая положения элементарных точечных i -х масс корпуса макета и стержня, заданные в ИСК векторами \mathbf{R}_{si} , \mathbf{R}_{pi} , соответственно, выпишем для них следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{si} &= \mathbf{R}_s + \mathbf{r}_{si}, \\ \mathbf{R}_{pi} &= \mathbf{R}_p + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{R}_s , \mathbf{R}_p – радиус-векторы центра масс корпуса макета и точки крепления стержня в $OXYZ$ соответственно; \mathbf{r}_{si} – радиус-вектор i -й точки основного тела относительно центра масс основного тела; \mathbf{r}_{pi} – радиус-вектор i -й точки недеформированного стержня относительно точки крепления недеформированного стержня к основному телу; \mathbf{w}_{pi} – смещения i -х точек стержня, вызванные упругими деформациями; \mathbf{p}_1 – радиус-вектор точки крепления стержня относительно центра масс корпуса основного тела; \mathbf{p}_2 – радиус-вектор центра масс недеформированного стержня относительно точки крепления стержня. Величины \mathbf{p}_1 , \mathbf{r}_{si} заданы в O_sxyz , а \mathbf{p}_2 , \mathbf{r}_{pi} и \mathbf{w}_{pi} – в системе $O_p x_p y_p z_p$.

Для исследуемой системы выражение (2.5) может быть записано в виде

$$\sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) \delta \mathbf{R}_{si} + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) \delta \mathbf{R}_{pi} - \sum_i \mathbf{F}_{hi} \delta \mathbf{R}_{hi} = 0. \quad (2.6)$$

Каждая сумма берется по точкам соответствующего тела. Последнее слагаемое отвечает за шарнир, который предполагается невесомым. Для него можно написать

$$\sum_i \mathbf{F}_{hi} \delta \mathbf{R}_{hi} = M_e \delta \varphi.$$

Здесь M_e – момент сил сопротивления в шарнире, $\delta \varphi$ – возможный поворот в шарнире. Для возможных перемещений в каждом теле можно записать

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{R}_{si} &= \delta\mathbf{R}_s + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{si}, \\ \delta\mathbf{R}_{pi} &= \delta\mathbf{R}_s + \delta\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + \\ &+ \mathbf{e} \delta\varphi \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + \mathbf{A}_{pi} \delta\mathbf{q}.\end{aligned}$$

Здесь $\delta\boldsymbol{\theta}$ – элементарный поворот всей системы (угловое движение корпуса спутника).

Возможные перемещения $\delta\mathbf{R}_s$, $\delta\boldsymbol{\theta}$, $\delta\varphi$, $\delta\mathbf{q}$ полагаются независимыми, поэтому равенство (2.6) выполняется в том и только в том случае, когда соответствующие множители перед возможными перемещениями обращаются в нуль, то есть когда

$$\begin{aligned}\sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0, \\ \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \\ + \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0, \\ \sum_i \mathbf{e}^T ((\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi})) &= M_e, \\ \sum_i \mathbf{A}_{pi}^T (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) &= 0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Первое из уравнений (2.7) описывает движение центра масс основного тела макета и может быть переписано как:

$$\begin{aligned}\sum_i m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} + \sum_i m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} &= \sum_i m_{si} (\ddot{\mathbf{R}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{si} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{si}) + \\ + \sum_i m_{pi} (\ddot{\mathbf{R}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi})) + \\ + \sum_i m_{pi} (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{w}}_{pi} + \ddot{\mathbf{w}}_{pi}) &= \mathbf{F}_0.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\ddot{\mathbf{R}}_p = \ddot{\mathbf{R}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1$$

в СК O_sxyz , связанной с центром масс основного тела, получаем уравнение

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{R}}_s + m_p (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1) + \\ + m_p (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2)) + \\ + 2m_p \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 + m_p \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 &= \mathbf{F}_0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Перенося члены со старшими производными в левую часть уравнения (2.8), приходим к выражению, описывающему движение центра масс основного тела макета

$$\begin{aligned}
& \ddot{\mathbf{R}}_s + \frac{m_p}{m} \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \frac{m_p}{m} \dot{\psi} \mathbf{e}_p \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \ddot{\mathbf{q}} = \\
& = \frac{\mathbf{F}_0}{m} - \frac{m_p}{m} \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right) = \\
& = \frac{\mathbf{F}_0}{m} - \mathbf{N}_s, \\
& \mathbf{N}_s = \frac{m_p}{m} \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Оставшиеся три уравнения в (2.7) описывают угловое движение макета. Адаптируя уравнения углового движения КА с КНЭК, полученные в работе [5], под сформулированную в пункте 1.1 задачу, получаем уравнения движения макета на столе

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_s - \mathbf{N}_{\omega p} - \mathbf{f}_{\omega p} \\ -\mathbf{e}_p^T (\mathbf{N}_{\varphi p} + \mathbf{f}_{\varphi p}) + M_p \\ -\mathbf{f}_p - \mathbf{N}_p \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где

$$\mathbf{f}_{\omega p} = (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times m_p \left(\frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{F}_p}{m_p} \right) + (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{F}_p - \mathbf{T}_p, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{f}_{\varphi p} = (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times m_p \left(\frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{F}_p}{m_p} \right) + (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{F}_p - \mathbf{T}_p, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{f}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left(\frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{F}_{pi}}{m_{pi}} - \frac{\mathbf{L}_{pi}}{m_{pi}} \right), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\omega p} &= 2 \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \boldsymbol{\omega}_p \times m_{pi} \dot{\mathbf{w}}_{pi} - \\
&\quad - \omega_p^2 m_p \mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + m_p (\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times (-\omega_p^2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{g}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\varphi p} &= 2 \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \boldsymbol{\omega}_p \times m_{pi} \dot{\mathbf{w}}_{pi} + \\
&\quad + m_p (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times (-\omega_p^2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{g}),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left(-\omega_p^2 (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) + 2\boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{w}}_{pi} - \omega_p^2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{g} \right).$$

Здесь $\mathbf{g} = -\frac{m_p}{m} \left(-\omega_p^2 \mathbf{p}_1 - \omega_p^2 (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \right)$.

Матрица коэффициентов при старших производных

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\varphi p} \mathbf{e}_p & \mathbf{S}_{\omega p} \\ \mathbf{e}_p^T \mathbf{S}_{\omega\varphi p}^T & \mathbf{e}_p^T \mathbf{J}_{\varphi p} \mathbf{e}_p & \mathbf{e}_p^T \mathbf{S}_{p\varphi p} \\ \mathbf{S}_{\omega p}^T & \mathbf{S}_{p\varphi p}^T \mathbf{e}_p & \mathbf{M}_p \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & \mathbf{J}_s + \tilde{\mathbf{J}}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2, \mathbf{p}_1) + \\ & + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) - \frac{1}{m} K(m_p(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2), m_p(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2)), \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_s = \sum_i m_{si} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{si}, \mathbf{r}_{si}) - \text{тензор инерции спутника},$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_p = \sum_i \mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}, \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) - \text{тензор инерции деформированной панели},$$

$$\mathbf{S}_{\omega\varphi p} = \tilde{\mathbf{J}}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) - \frac{m_p}{m} \mathbf{K}(m_p(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2), \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2),$$

$$\mathbf{S}_{\omega p} = \sum_i m_{pi} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} (m_p(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}_2)) \times \mathbf{A}_p,$$

$$\mathbf{J}_{\varphi p} = \tilde{\mathbf{J}}_p - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2, \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2),$$

$$\mathbf{S}_{p\varphi p} = \sum_i m_{pi} (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m} (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) \times \mathbf{A}_p,$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_p.$$

Выше использованы следующие обозначения:

m_s – масса тела спутника; m_p – масса панели; m_{si} – масса i -й точки тела спутника; m_{pi} – масса i -й точки панели; $m = m_s + m_p$ – масса всей системы;

$\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость спутника;

φ_p – угол поворота панели в шарнире;

$\psi_p = \dot{\varphi}_p$ – угловая скорость поворота панели в шарнире;

\mathbf{q} – амплитуда собственных мод колебаний панели;

\mathbf{e}_p – ось шарнира, вектор деформации записан в виде разложения по собственным функциям;

$\boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}_p \dot{\varphi}$ – абсолютная угловая скорость панели;

M_p – момент в шарнире (управляющий и, быть может, сил сопротивления);

$\mathbf{T}_s = \sum_i \mathbf{r}_{si} \times \mathbf{F}_{si}$ – главный момент внешних сил, действующих на спутник;

$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{m_p} \sum_i m_{pi} \mathbf{w}_{pi} = \frac{\sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}}{m_p}$ – смещение центра масс панели за счет ее

деформации, где $\mathbf{A}_{pi}(\mathbf{r}_{pi})$ – матрица собственных мод колебаний,

$\mathbf{A}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}$; величины \mathbf{A}_{pi} задаются в системе координат $O_p x_p y_p z_p$;

$\mathbf{T}_p = \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{w}_{pi}) \times \mathbf{F}_{pi}$ – момент внешних сил, действующих на панель,

относительно точки крепления;

\mathbf{F}_0 – главный вектор всех активных сил (в том числе и управляющих воздействий), действующих на всю систему;

$\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_p$ – главные векторы всех активных сил, действующих на тело спутника и на панель соответственно;

$\mathbf{F}_{si}, \mathbf{F}_{pi}$ – главные векторы всех активных сил, действующих на i -ю точку тела спутника и панели соответственно;

$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – матрица двойного векторного произведения, задаваемого так:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{b}) = \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{y}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_2 b_2 + a_3 b_3 & -a_2 b_1 & -a_3 b_1 \\ -a_1 b_2 & a_1 b_1 + a_3 b_3 & -a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 & -a_2 b_3 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что главные векторы всех активных сил, действующих на i -ю точку панели, содержат в себе часть, отвечающую за силы, возникающие при деформации. Такая часть в дальнейшем обозначается \mathbf{L}_{pi} и задается выражением

$$\mathbf{L}_{pi} = -m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{\Omega} \mathbf{q},$$

где $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots)$ – матрица собственных частот колебаний.

Так как движение происходит в плоскости стола, уравнения движения (2.10), (2.9) дополняются кинематическими соотношениями

$$\dot{Q}_3 = \frac{1}{2} Q_0 \omega, \quad \dot{\varphi}_p = \psi_p, \quad (2.15)$$

где $\mathbf{Q} = (Q_0 \ 0 \ 0 \ Q_3)^T$ – кватернион ориентации макета, компоненты которого связаны между собой равенством

$$Q_0^2 + Q_3^2 = 1.$$

В координатной записи уравнения движения записываются в СК $O_s x y z$, связанной с корпусом спутника. Использование кватернионов в описании плоского движения макета объясняется желанием в будущем обобщить полученные результаты на случай движения КА с КНЭЖ по орбите.

3. Обзор методов гашения вибраций в КНЭК

3.1. Линейно-квадратичный регулятор

В разделе описываются методы гашения вибраций в КНЭК КА. Объектом исследования в задачах такого типа являются линейные стационарные непрерывные системы большой размерности

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.1)$$

с заданными начальными условиями

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.2)$$

где t – непрерывное время, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ – управление (управляющее воздействие). Хотя на практике обычно само состояние системы неизвестно, а известен лишь ее линейный выход (т.е. вектор измерений) $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

В рассматриваемой работе, если не оговорено иное, предполагается, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Также в дальнейшем система (3.1) считается полностью определенной, т.е. матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} заданы точно.

Отправной точкой при разработке закона управления $\mathbf{u}(t)$ в задачах гашения вибраций в нежестком элементе конструкции является построение линейно-квадратичного гауссового регулятора (LQG регулятора) (см. [6],[7]), которое происходит в два этапа:

- построение фильтра Калмана, позволяющего получить оптимальную оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ вектора состояния по вектору измерений $\mathbf{y}(t)$;
- построение обратной связи по оценке вектора состояния $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Фильтрация измерений проводится отдельно от задачи линейно-квадратичного регулирования и выходит за рамки работы.

Закон управления, минимизирующий функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{Q} > 0$, $\mathbf{R} > 0$, при ограничениях (3.1), задается выражением (см. [8])

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

Матрица усиления \mathbf{K} имеет вид $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$. Для нахождения матрицы \mathbf{P} необходимо решить алгебраическое уравнение Риккати

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}. \quad (3.5)$$

Задача о минимизации функционала (3.3) при ограничениях (3.1) называется задачей линейно-квадратичного регулирования (LQR).

3.2. Редукция модели управления. Подавление возмущений в остаточных модах

Прямое использование LQR в задаче гашения вибраций в нежестком элементе конструкции наталкивается на определенные трудности. Так как вычислительные затраты, необходимые для решения уравнения Риккати, тем больше, чем больше размерность вектора состояния системы, то возникает проблема реализации LQR–алгоритма в режиме реального времени.

Одним из возможных способов преодолеть данное затруднение является редукция части системы (3.1). В задаче гашения вибраций редуцированной является часть системы, включающая в себя моды с наиболее высокими частотами колебаний, так как их поведение слабо влияет на движение объекта управления.

В работе [2] приведена следующая классификация мод колебаний модели, которой мы будем пользоваться в дальнейшем:

- *учитываемые управляемые моды* – моды, учтенные в математической модели объекта, к которым приложено управляющее воздействие (включая колебательные моды твердого тела нулевой частоты);
- *учитываемые неуправляемые (или остаточные) моды* – моды, учтенные в математической модели объекта, к которым не приложено управляющее воздействие;
- *неучитываемые моды*, то есть те моды колебаний, которые отбрасываются на этапе конечно-элементного моделирования (отсутствуют в (3.1)).

В задаче гашения вибраций матрица \mathbf{A} в (3.1) может быть представлена в блочно-диагональном виде [9], и система уравнений (3.1) разбивается на два независимых векторных уравнения

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.6)$$

где \mathbf{x}_c – вектор учитываемых управляемых мод, \mathbf{x}_r – вектор остаточных мод.

Линейно-квадратичный регулятор, построенный на базе управляемой части модели, минимизирует функционал

$$J_{cont} = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (3.7)$$

при условии

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}. \quad (3.8)$$

Закон управления, решающий задачу (3.7), (3.8), имеет вид

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}_c. \quad (3.9)$$

Рассмотрим, как управление (3.9) влияет на систему (3.6). Замкнутая обратная связь (3.9), она принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_c & 0 \\ -\mathbf{B}_r \mathbf{K}_c & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Если недиагональный элемент $-\mathbf{B}_s \mathbf{K}_c \neq 0$, то в процессе гашения управляемых мод может возникнуть нежелательное возмущение остаточных мод (англ. *spillover*) [10].

Однако если редуцированная система управления может работать в стационарной точке остаточных состояний, т.е. следующее соотношение выполняется

$$0 \equiv \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u}, \quad (3.11)$$

то для подавления возмущений в остаточных модах ($\mathbf{B}_r \mathbf{K}_c \rightarrow 0$) можно использовать подход, предложенный в работах [9], [11], [12] (англ. Model Error Sensitivity Suppression (MESS), Forced Singular Perturbation (FSP)). Из (3.11) получаем

$$\mathbf{x}_r = -\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r \mathbf{u}. \quad (3.12)$$

Для системы (3.6) функционал качества имеет вид

$$J_{full} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt. \quad (3.13)$$

После подстановки сюда \mathbf{x}_r в (3.13) задача (3.1), (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} J_{red} = & \int_0^{\infty} \mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c dt + \\ & + \int_0^{\infty} \mathbf{u}^T \left[\mathbf{R}_c + (\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r)^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r \right] \mathbf{u} dt \rightarrow \min \end{aligned} \quad (3.14)$$

при условии $\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}$. Закон управления (3.9) в процессе минимизации функционала (3.14) уменьшает возмущающее влияние члена $\mathbf{B}_r \mathbf{u}$ на поведение остаточных мод за счет слагаемого $(\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r)^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r$ в J_{red} , где матрица \mathbf{Q}_r выбирается произвольно.

3.3. High Authority /Low Authority управление (НАС/LAC)

Математическая модель нежесткого элемента не содержит в себе неучитываемых колебательных мод, и вышеописанные методы не устраняют их влияние на движение объекта. Чтобы его минимизировать, необходимо увеличивать количество учитываемых в модели мод или использовать робастные алгоритмы управления, например *High Authority(НА) /Low Authority (LA) управление* [6]. Оно имеет двухуровневую структуру. На первом этапе *НА управление*, которое воздействует на редуцированную модель объекта управления, содержащую моды с низкими частотами, приводит систему в окрестность требуемого состояния. *НА управление* реализуется при помощи

LQR. Задача *LA управления* – стабилизировать систему при помощи управляющих устройств (УУ), рассеивающих энергию.

Для построения *LA управления* необходимо прибегнуть к методам теории возмущений [13]. Рассмотрим систему с обратной связью по вектору наблюдений, который получается в результате снятия измерений с сенсоров:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{y}. \quad (3.15)$$

Так как после реализации *HA управления* система находится в окрестности требуемого положения, то управляющую матрицу \mathbf{C} можно считать такой, что выполняется

$$\mathbf{GCH} \equiv \Delta\mathbf{F},$$

где матрица $\Delta\mathbf{F}$ возмущающая по отношению к матрице \mathbf{F} . Тогда поведение системы с обратной связью (3.15) может быть описано уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} + \mathbf{GCH})\mathbf{x} = (\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F})\mathbf{x}. \quad (3.16)$$

Пусть λ_n – n -е собственное значение \mathbf{F} и $\mathbf{L}_n, \mathbf{R}_n$, соответствующие ему, – левый и правый нормированные собственные вектора \mathbf{F} , т.е.

$$\mathbf{L}_n^T \mathbf{F} = \lambda_n \mathbf{L}_n^T, \quad \mathbf{F} \mathbf{R}_n = \lambda_n \mathbf{R}_n, \quad \mathbf{L}_n^T \mathbf{R}_n = 1. \quad (3.17)$$

Определим $\Delta\lambda_n$ как сдвиги n -го собственного значения и n -го собственного вектора, соответствующие $\Delta\mathbf{F}$. Тогда из второго равенства в (3.17) следует

$$(\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F})(\mathbf{R}_n + \Delta\mathbf{R}_n) = (\lambda_n + \Delta\lambda_n)(\mathbf{R}_n + \Delta\mathbf{R}_n). \quad (3.18)$$

Равенство (3.18) после подстановки в него второго равенства из (3.17) упрощается до

$$\mathbf{F}\Delta\mathbf{R}_n + \Delta\mathbf{F}(\mathbf{R}_n + \Delta\mathbf{R}_n) = \lambda_n \Delta\mathbf{R}_n + \Delta\lambda_n (\mathbf{R}_n + \Delta\mathbf{R}_n). \quad (3.19)$$

Умножая (3.19) слева на \mathbf{L}_n^T , учитывая, что сдвиг $\delta\mathbf{R}_n$ достаточно мал, приходим к формуле Якоби, которая описывает сдвиги n -го собственного значения в процессе *LA управления*

$$\Delta\lambda_n \cong \mathbf{L}_n^T \delta\mathbf{F} \mathbf{R}_n \equiv \mathbf{L}_n^T \mathbf{GCH} \mathbf{R}_n \equiv (\phi_n^L) \mathbf{C} (\phi_n^R),$$

где $\phi_n^L = \mathbf{L}_n^T \mathbf{G}$ – обобщенные моды УУ, $\phi_n^R = \mathbf{H} \mathbf{R}_n$ – обобщенные моды сенсора. Тогда

$$\Delta\lambda_n \cong \sum_{a,r} C_{ar} \phi_{an}^L \phi_{rn}^R, \quad (3.20)$$

где $a = \overline{1, N_a}$ и $b = \overline{1, N_r}$ – индексы, описывающие положения УУ и сенсоров соответственно.

Рассмотрим физическую модель, в которой пары сенсор/УУ:

- *совмещены*, т.е. расположены на нежестком элементе очень близко друг другу;
- *сопряжены*, т.е. имеют соответствующие типы (например, смещение/сила, вращение/момент).

В работе [14] отмечается, что в этом случае

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^T, \quad \mathbf{G}^T \mathbf{L}_n = \mathbf{H} \mathbf{R}_n. \quad (3.21)$$

Из (3.21) следует, что

$$\phi_n^L = \mathbf{G}^T \mathbf{L}_n = \mathbf{H} \mathbf{R}_n = \phi_n^R \equiv \phi_n.$$

В итоге основная формула, устанавливающая зависимость сдвигов собственных значений с помощью достаточно малых коэффициентов усиления C_{ar} , имеет вид

$$\Delta \lambda_n \cong \sum_{a,r} C_{ar} \phi_{an} \phi_{rn}. \quad (3.22)$$

C_{ar} выбираются так, чтобы

$$J(\mathbf{C}) = \sum_n W_n \left((\Delta \lambda_n)_p - (\Delta \lambda_n)_d \right)^2 + \sum_{a,r} C_{ar}^2 \rightarrow \min,$$

где $(\Delta \lambda_n)_p$ – спрогнозированные сдвиги собственных значений, описываемые формулой (3.22), а $(\Delta \lambda_n)_d$ – требуемые для приведения системы в нужное положение сдвиги собственных значений. Коэффициент W_n штрафует за отклонения собственных значений от требуемых значений, а добавка $\sum_{a,r} C_{ar}^2$

минимизирует затраты на управление. Так как функционал $J(\mathbf{C})$ квадратичный по \mathbf{C} , C_{ar} могут быть получены алгебраически как решения линейной системы уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = 0.$$

Обозначим требуемые сдвиги собственных значений $(\Delta \lambda_n)_d$ как \mathbf{d}_n и вектор, состоящий из компонент \mathbf{d}_n , как \mathbf{d} . Окончательно матрица обратной связи имеет вид

$$\mathbf{C} = \left[\left[\Phi^{(2)} \right]^T \mathbf{W} \Phi^{(2)} + I \right]^{-1} \left[\Phi^{(2)} \right]^T \mathbf{W} \mathbf{d}, \quad \mathbf{W} = \text{diag} \|W_n\|,$$

$$\Phi^{(2)} = \text{vector} \left(\Phi_{n\alpha}^{(2)} \right)_{\alpha=1}^{N_a N_r}, \quad \Phi_{n\alpha}^{(2)} = \sum_{a,r} C_{ar} \phi_{an} \phi_{rn},$$

$$\alpha = a \otimes r, \quad a = \overline{1, N_a}, \quad r = \overline{1, N_r}.$$

НА/LA управление универсально в использовании за исключением требования совмещенности и сопряженности пар сенсор/УУ. *НА/LA управления* не предотвращают возмущения остаточных мод на стадии разработки LQR, а исправляют последствия этого процесса при помощи *LA управления*.

3.4. Уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния (SDRE-подход)

Выше были рассмотрены различные методы управления линейными системами. Одним из быстроразвивающихся методов для проектирования нелинейных регуляторов является метод синтеза управления с использованием уравнения Риккати, параметры которого зависят от состояния объекта (State

Dependent Riccati Equation (SDRE)) [15]. SDRE-подход, применительно к задаче гашения вибраций в нежестком элементе КА, использован в работе [16]. Рассмотрим автономную, нелинейную по состоянию и линейную по управлению систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.23)$$

где $\mathbf{x} \in \Omega \in \mathbb{R}^n$ ($0 \in \Omega$), $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x}$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in C^k$, $k \geq 0$. Функционал качества представлен в виде

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t)) dt, \quad (3.24)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0$. Требуется построить управление с обратной связью

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \mathbf{K}(\cdot) \in C^0(\Omega).$$

Факторизация нелинейной системы (или *SDC параметризация*)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad (3.25)$$

приводит к системе линейной структуры с матрицами $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, которые называются *SDC (State-Dependent Coefficient) матрицами*. В работе [15] приводится следующее предположение, условия которого выполняются в задаче, поставленной в работе.

Предположение. Пусть функция $\mathbf{f} \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{f} \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$. Тогда для $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, *SDC параметризация* (3.25) $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ всегда существует для некоторой $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Одна из возможных SDC-матриц имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\lambda \mathbf{x}} d\lambda,$$

где λ – некоторая фиктивная переменная интегрирования. После *SDC параметризации* система (3.23) принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Как следует из [15], управление для нелинейных систем (3.23) с функционалом качества (3.24) ищется в следующем виде:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t).$$

Здесь $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ является решением алгебраического уравнения Риккати

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \\ & - \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что, в отличие от стандартного LQR-метода, алгебраическое уравнение Риккати с SDC-матрицами решается на каждом шаге интегрирования управления.

Сформулируем преимущества SDRE-подхода. Он

- предлагает алгоритм синтеза управления с обратной связью без необходимости линеаризации модели;

- обеспечивает большую гибкость управления, так как весовые матрицы зависят от состояния;
- различные способы *SDC параметризации* системы создают дополнительные степени свободы при построении управления, а значит, это может быть использовано для улучшения характеристик регулятора.

4. Построение управления в задаче стабилизации макета

4.1. Построение линейно-квадратичного регулятора

Для того чтобы построить линейно-квадратичное управление (3.4) для задачи стабилизации макета в заданных угловом положении и положении на столе, необходимо линеаризовать уравнения движения макета (2.9), (2.10), (2.15) в окрестности положения равновесия. В пространстве состояний система определяется вектором

$$\mathbf{x} = (\mathbf{R}_{sx} \quad \mathbf{R}_{sy} \quad \mathbf{V}_{sx} \quad \mathbf{V}_{sy} \quad \mathbf{Q}_3 \quad \omega \quad \mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}} \quad \varphi \quad \psi)^T, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{R}_{sx}, \mathbf{R}_{sy}$ – компоненты радиус-вектора центра масс основного тела макета \mathbf{R}_s , а $\mathbf{V}_{sx} \triangleq \dot{\mathbf{R}}_{sx}, \mathbf{V}_{sy} \triangleq \dot{\mathbf{R}}_{sy}$ – его скорости. Всюду в работе состояние, в которое должен быть приведен макет, задается вектором $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{(8+2n) \times 1}$. Требуемое угловое положение основного тела макета задается кватернионом $\mathbf{Q} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Линеаризованные уравнения движения (2.9), (2.10), (2.15) имеют вид

$$\mathbf{S}_0 \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\psi}_{p1} \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_s - \mathbf{f}_{\omega p} \\ -\mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{f}_{\varphi p} + M_{p1} \\ -\mathbf{f}_p \end{pmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_s + \frac{m_p}{m} \dot{\omega} \times \mathbf{p} + \frac{m_p}{m} \dot{\psi} \mathbf{e}_p \times \mathbf{p}_2 + \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{F}_0}{m}, \quad (4.2)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_3 = \frac{1}{2} \omega, \quad \dot{\varphi}_p = \psi_p,$$

где

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 & \mathbf{S}_{0\omega\varphi p} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{S}_{0\omega p} \\ \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega\varphi p}^T & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J}_{0\varphi p} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0p\varphi p} \\ \mathbf{S}_{0\omega p}^T & \mathbf{S}_{0p\varphi p}^T \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{M}_p \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_0 &= \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}), \\
\mathbf{J}_{0\varphi p} &= \mathbf{J}_p - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_p, \\
\mathbf{S}_{0\omega\varphi p} &= \mathbf{J}_p + m_p \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \frac{m_p^2}{m} \mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2), \\
\mathbf{S}_{0\omega p} &= \sum_i m_{pi} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi}) \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{A}_p, \\
\mathbf{S}_{0p\varphi p} &= \sum_i m_{pi} \mathbf{r}_{pi} \times \mathbf{A}_{pi} - \frac{m_p}{m} \mathbf{p}_2 \times \mathbf{A}_p.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

В (4.3) использованы следующие обозначения: $\mathbf{A}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}$;

$\mathbf{J}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi}, \mathbf{r}_{pi})$ – тензор инерции недеформированного стержня.

В работе предполагается, что на макет не действуют внешние силы. Исключение составляют управляющие воздействия $\mathbf{F}_O = (F_{0x} \ F_{0y} \ 0)^T$, создаваемые при помощи четырех вентиляторов (см. п. 1.1). В этом случае они действуют только на основное тело, и линеаризованные $\mathbf{f}_{\varphi p}, \mathbf{f}_{\omega p}, \mathbf{f}_p$ принимают вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{0\omega p} &= \mathbf{p} \times \frac{m_p}{m} \mathbf{F}_O, \quad \mathbf{f}_{0\varphi p} = \mathbf{p}_2 \times \frac{m_p}{m} \mathbf{F}_O, \\
\mathbf{f}_{0p} &= \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \left(\frac{\mathbf{F}_O}{m} - \frac{\mathbf{L}_{pi}}{m_{pi}} \right).
\end{aligned}$$

Запишем линеаризованные уравнения движения в пространстве состояний

$$\hat{\mathbf{S}}_{lin} \dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_{lin} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}_{lin} \mathbf{u}, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{u} = (F_{0x} \ F_{0y} \ T_{sz})^T$ – вектор управляющих воздействий; T_{sz} – момент управляющих сил, действующих на основное тело макета, который создается при помощи вентиляторов на борту макета. Матрица при старших производных имеет вид

$$\hat{\mathbf{S}}_{lin} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{D}_{lin} \\ \hline \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{S}_{lin} \end{array} \right),$$

$$\mathbf{S}_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J}_0 \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega\phi p} \mathbf{e}_{p1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{S}_{0\omega p}^T \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{M}_p & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{S}_{0p\phi p}^T \mathbf{e}_{p1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0\omega\phi p} \mathbf{e}_{p1} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{S}_{0p\phi p} & 0 & \mathbf{e}_{p1}^T \mathbf{J}_{0\phi p} \mathbf{e}_{p1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_p}{m} p_y & \mathbf{0}_{1 \times n} & \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^x & 0 & -\frac{m_p}{m} p_{2y} \\ 0 & \frac{m_p}{m} p_x & \mathbf{0}_{1 \times n} & \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^y & 0 & \frac{m_p}{m} p_{2x} \end{pmatrix},$$

матрица состояния системы:

$$\hat{\mathbf{A}}_{lin} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4+2n)} \\ \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{0}_{(4+2n) \times 2} & \mathbf{A}_{lin} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} & -\mathbf{\Omega} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

матрица управления:

$$\hat{\mathbf{B}}_{lin} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (1+n)} \\ \frac{1}{m} \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (1+n)} \\ -\mathbf{D}_{lin}^T & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{E}_{n \times n} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times n} \end{pmatrix}.$$

Здесь введено обозначение: $\mathbf{C}_{m \times n} = \|c_{ij}\|_{\substack{(i,j)=(m,n) \\ (i,j)=(1,1)}}$, где $\mathbf{C}_{m \times n}$ – некоторая матрица;

$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots)$ – матрица собственных частот колебаний.

Преобразуя уравнения (4.4), получаем

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{lin} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{S}}_{lin}^{-1} \hat{\mathbf{B}}_{lin} \mathbf{u} \triangleq \mathbf{A}_{lin}^{cont} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{lin}^{cont} \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

В процессе линейно-квадратичного управления макетом минимизируется функционал

$$J_{lin} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_{lin} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_{lin} \mathbf{u}(t)) dt, \quad \mathbf{Q}_{lin} > 0, \quad \mathbf{R}_{lin} > 0$$

при ограничениях (4.5). Минимизация J_{lin} приводит систему в нулевое состояние, которое совпадает с \mathbf{x}_0 . Закон управления описывается выражением (см. 3.1)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_{lin}^{-1} (\mathbf{B}_{lin}^{cont})^T \mathbf{P}_{lin} \mathbf{x},$$

где для нахождения матрицы \mathbf{P} необходимо решить алгебраическое уравнение Риккати

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A}_{lin}^{cont})^T \mathbf{P}_{lin} + \mathbf{P}_{lin} \mathbf{A}_{lin}^{cont} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}_{lin} \mathbf{B}_{lin}^{cont} \mathbf{R}_{lin}^{-1} (\mathbf{B}_{lin}^{cont})^T \mathbf{P}_{lin}.$$

4.2. Построение управления, подавляющего возмущения в остаточных модах

Матрица состояния \mathbf{A}_{lin}^{cont} в модели макета (4.5) не является блочно-диагональной, т.к. в модели учитывается движение макета в целом. Однако алгоритм подавления возмущений в остаточных модах из раздела 3.2 может быть обобщен и на случай системы (4.5). Управляя макетом при помощи вентиляторов, напрямую можно влиять только на угловую скорость и на положения центра масс основного тела макета. Поэтому разобьем систему (4.5) на две части

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_r \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{x}_c = (\mathbf{R}_{sx} \quad \mathbf{R}_{sy} \quad \mathbf{V}_{sx} \quad \mathbf{V}_{sy} \quad \mathbf{Q}_3 \quad \omega)^T$ – вектор управляемых состояний, $\mathbf{x}_r = (\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}} \quad \varphi \quad \psi)^T$ – вектор остаточных состояний. Так как редуцированная часть системы (4.6) может работать в стационарной точке остаточных состояний, то выполняется:

$$\mathbf{0} \equiv \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{x}_r = -\mathbf{A}_{22}^{-1} (\mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_r \mathbf{u}) \triangleq -\mathbf{A}_x \mathbf{x}_c - \mathbf{A}_u \mathbf{u}. \quad (4.7)$$

Подставим (4.7) в (4.6):

$$\dot{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_c - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_r) \mathbf{u}. \quad (4.8)$$

Для системы (4.6) функционал качества J_{lin} может быть записан в виде

$$J_{lin} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (4.9)$$

Используя (4.7), преобразуем слагаемое $\mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r$ в J_{lin}

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{x}_r &= (\mathbf{A}_x \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_u \mathbf{u})^T \mathbf{Q}_r (\mathbf{A}_x \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_u \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{x}_c^T \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_x \mathbf{x}_c + 2\mathbf{x}_c^T \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{A}_u^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u \mathbf{u}\end{aligned}$$

и подставим его в (4.9). В результате получаем функционал для управляемой части системы

$$\begin{aligned}J_{red} &= \int_0^{\infty} \mathbf{x}_c^T (\mathbf{Q}_c + \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_x) \mathbf{x}_c dt + \\ &+ \int_0^{\infty} (2\mathbf{x}_c^T \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u \mathbf{u} + \mathbf{u}^T (\mathbf{R} + \mathbf{A}_u^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u) \mathbf{u}) dt.\end{aligned}$$

Чтобы построить LQR для управляемой части системы (4.8), необходимо минимизировать функционал J_{red} при ограничениях (4.8). В итоге искомым закон управления имеет вид

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}_{red}^T \mathbf{P}_{red} + \mathbf{N}_{red}^T) \mathbf{x},$$

где матрица \mathbf{P}_{red} находится из обобщенного уравнения Риккати

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{A}_{red}^T \mathbf{P}_{red} + \mathbf{P}_{red} \mathbf{A}_{red} + \mathbf{Q} - \\ &- (\mathbf{P}_{red} \mathbf{B}_{red} + \mathbf{N}_{red}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}_{red}^T \mathbf{P}_{red} + \mathbf{N}_{red}^T).\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{red} &= \mathbf{Q}_c + \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_x, \\ \mathbf{B}_{red} &= \mathbf{R} + \mathbf{A}_u^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u, \\ \mathbf{N}_{red} &= \mathbf{A}_x^T \mathbf{Q}_r \mathbf{A}_u.\end{aligned}$$

5. Компьютерное моделирование

Для иллюстрации работы алгоритмов проводится численное моделирование. В модели макета учитывается одна колебательная мода нежесткого элемента, поэтому вектор состояния (4.1), описывающий поведение макета на столе, можно записать в виде

$$\mathbf{x} = (\mathbf{R}_{sx} \quad \mathbf{R}_{sy} \quad \mathbf{V}_{sx} \quad \mathbf{V}_{sy} \quad \mathbf{Q}_3 \quad \omega \quad q_1 \quad \dot{q}_1 \quad \varphi \quad \psi)^T.$$

Требуемое конечное положение системы задается нулевым вектором

$$\mathbf{x}_{fin} = \mathbf{0}_{10 \times 1}.$$

Начальные условия задаются следующим образом:

$$\mathbf{R}_{sx} = 0.5 \text{ м}, \mathbf{R}_{sy} = 0.4 \text{ м}, \mathbf{V}_{sx} = 0.1 \text{ м/с}, \mathbf{V}_{sy} = 0.2 \text{ м/с},$$

$$\mathbf{Q}_3 = \sin 15^\circ, \omega = 5 \text{ град/с}, q_1 = 0.1, \dot{q}_1 = 0 \text{ 1/с},$$

$$\varphi = 5^\circ, \psi = 10 \text{ град/с}.$$

Параметры макета: длина корпуса 0.15 м; ширина корпуса 0.15 м; высота корпуса 0.5 м; длина стержня 1.08 м; максимальный момент, создаваемый

вентиляторами, 0.4 Н*м ; максимальная сила, создаваемая вентиляторами, 4 Н ; тензор инерции макета

$$J_s = \begin{pmatrix} 0.2646 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2646 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1125 \end{pmatrix} \text{ кг/м}^2.$$

Шаг интегрирования для обоих методов равен 0.01 с , а шаг управления равен 0.1 с . Законы управления системой при таком выборе шагов могут быть реализованы при помощи аппаратного обеспечения, используемого в макете на стенде КОСМОС [1]. На рис. 3–18 и в табл. 1 приведены результаты компьютерного моделирования при заданных начальных условиях.

Таблица 1. Величина компонент вектора состояния к заданному моменту времени для алгоритмов LQR и MESS

Компонента \mathbf{x} , размерность	Точность LQR	MESS	Момент времени, сек
$R_{sx}, R_{sy}, \text{м}$	10^{-3}	10^{-3}	40
$V_{sx}, V_{sy}, \text{м/с}$	10^{-3}	10^{-3}	40
$\omega, \text{град/с}$	10^{-2}	10^{-3}	10
	10^{-4}	10^{-4}	20
Q_3	10^{-2}	10^{-3}	10
	10^{-4}	10^{-4}	20
q_1	10^{-4}	10^{-4}	10
$\varphi, \text{град}$	10^{-3}	10^{-3}	10

Сделаем следующие выводы:

- как LQR-алгоритм, так и MESS-алгоритм успешно стабилизируют макет на столе;
- MESS-алгоритм дает результаты, не уступающие результатам LQR-алгоритма, опираясь при этом на модель меньшей размерности;
- оба алгоритма могут быть реализованы с помощью имеющихся управляющих устройств (четырёх вентиляторов) и имеющегося аппаратного обеспечения макета, представленного на стенде КОСМОС[4].

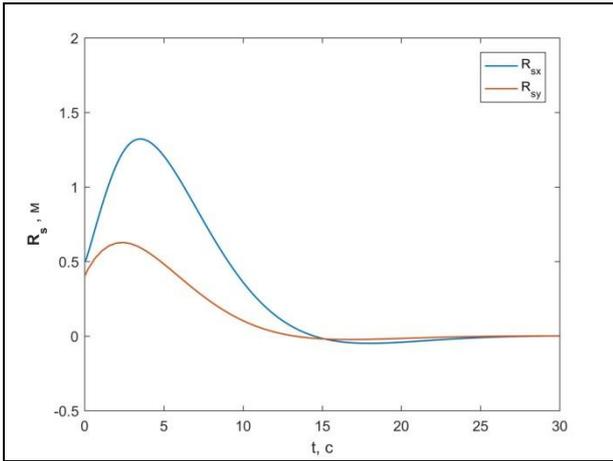


Рис. 3. Положение центра масс основного тела макета на столе (LQR)

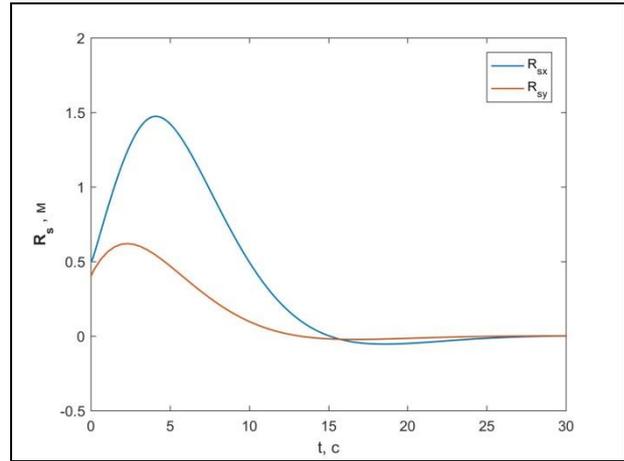


Рис. 4. Положение центра масс основного тела макета на столе (MESS)

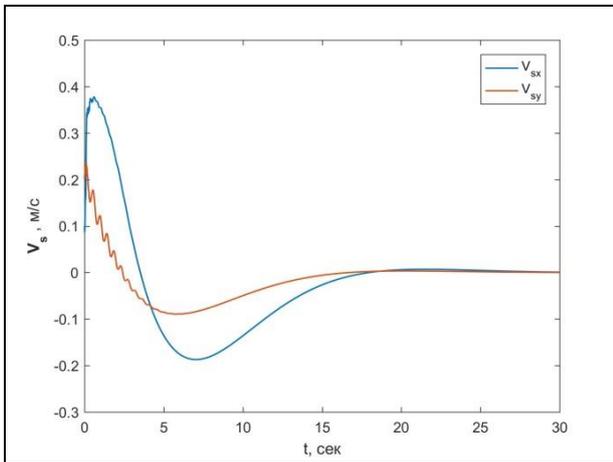


Рис. 5. Скорость центра масс основного тела макета (LQR)

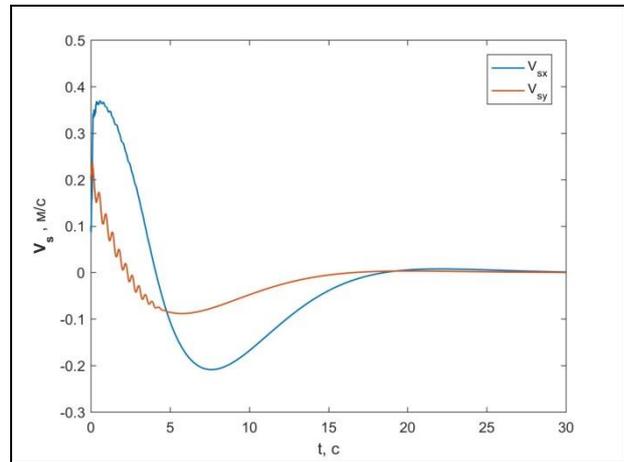


Рис. 6. Скорость центра масс основного тела макета (MESS)

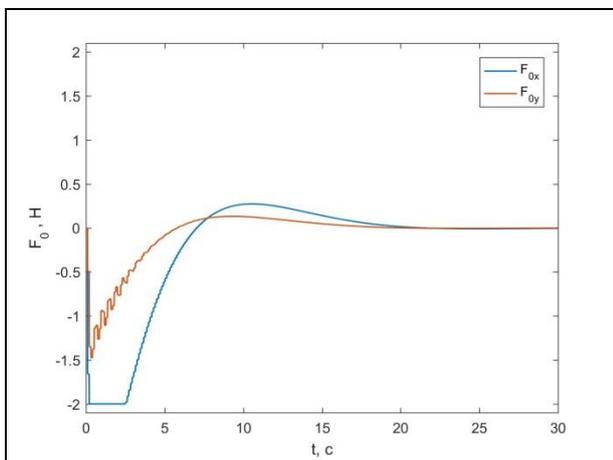


Рис. 7. Управление центром масс основного тела макета (LQR)

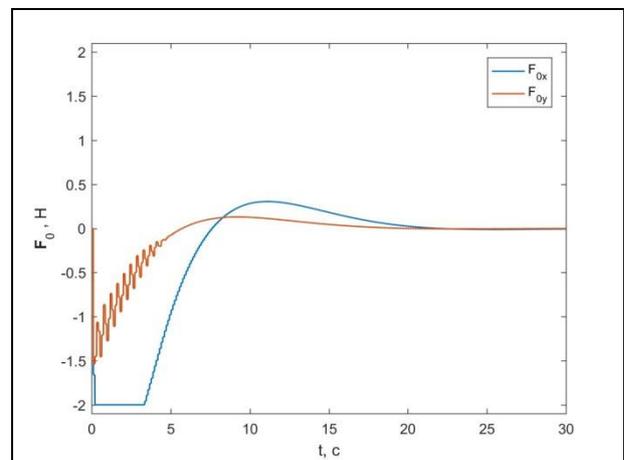


Рис. 8. Управление центром масс основного тела макета (MESS)

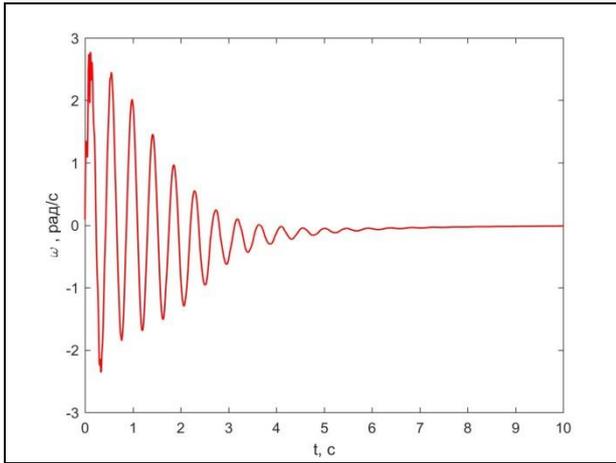


Рис. 9. Угловая скорость основного тела макета (LQR)

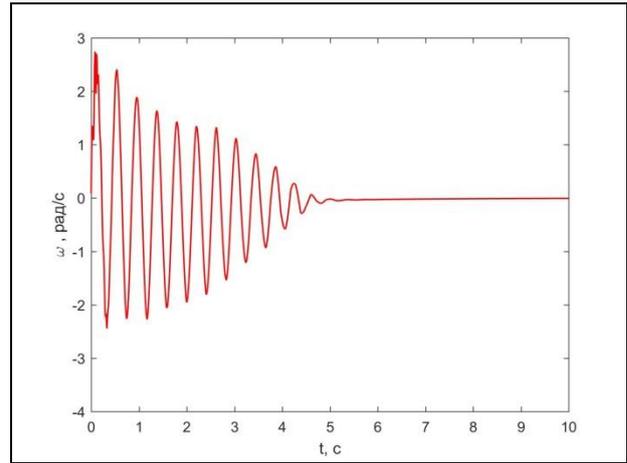


Рис. 10. Угловая скорость основного тела макета (MESS)

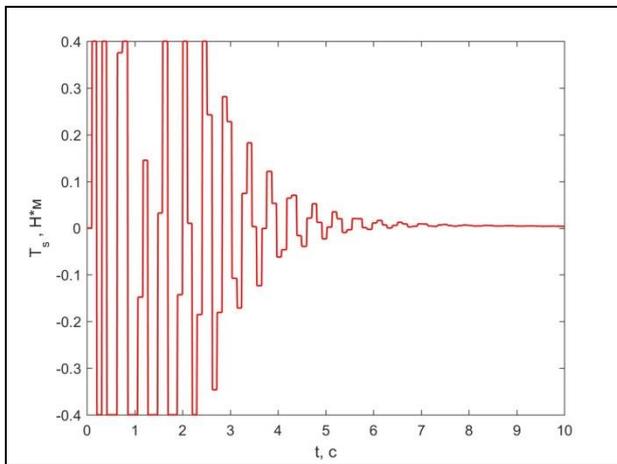


Рис. 11. Управление угловой скоростью основного тела макета (LQR)

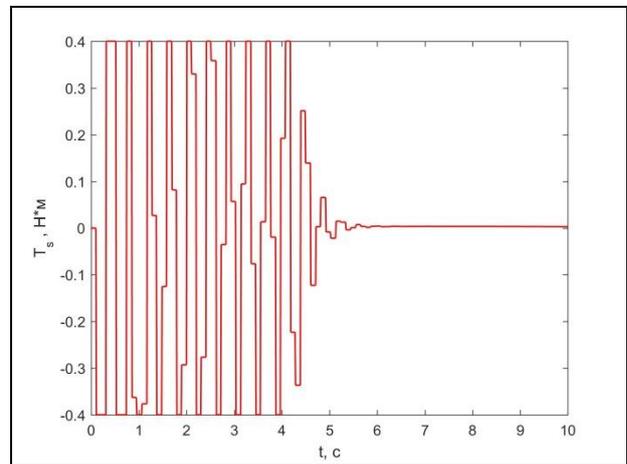


Рис. 12. Управление угловой скоростью основного тела макета (MESS)

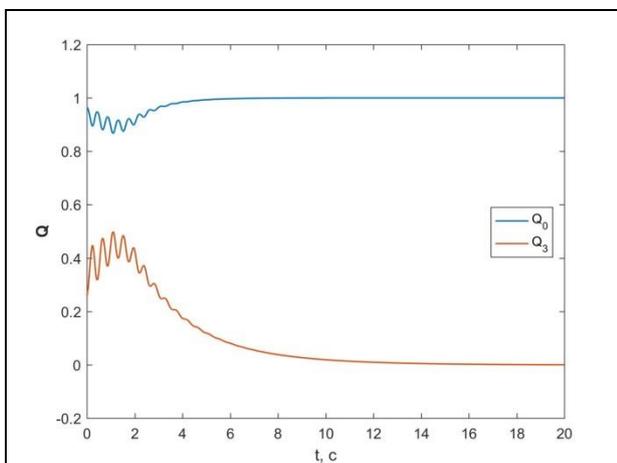


Рис. 13. Кватернион ориентации основного тела макета (LQR)

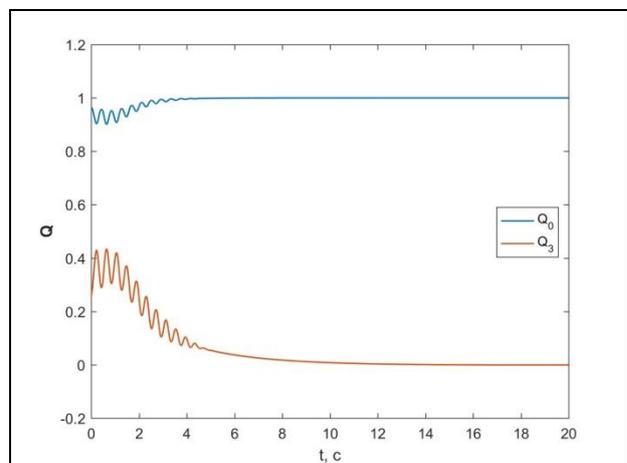


Рис. 14. Кватернион ориентации основного тела макета (MESS)

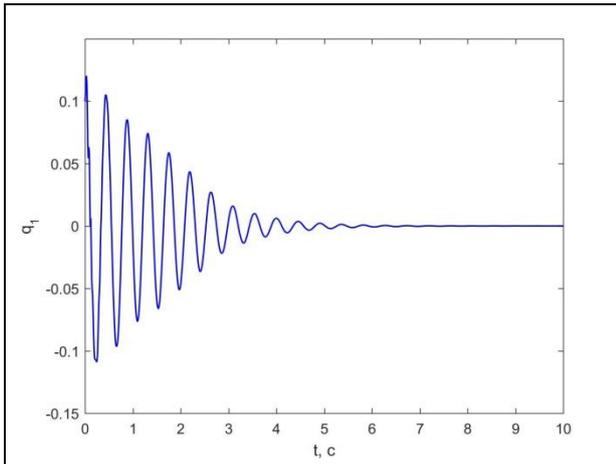


Рис. 15. Первая колебательная мода нежесткого элемента (LQR)

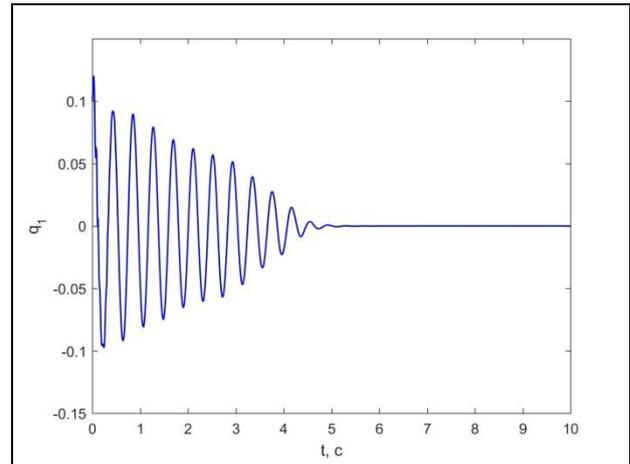


Рис. 16. Первая колебательная мода нежесткого элемента (MESS)

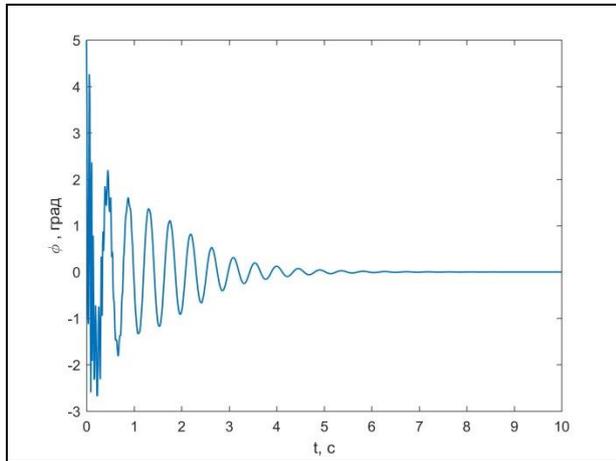


Рис. 17. Угол поворота в шарнире (LQR)

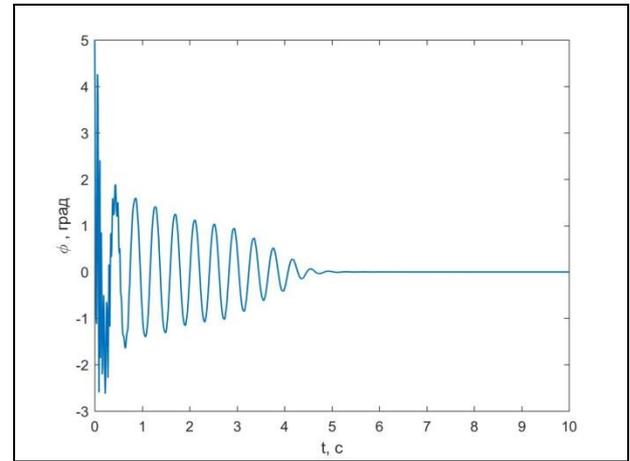


Рис. 18. Угол поворота в шарнире (MESS)

Заключение

В работе рассмотрены линейно-квадратичные методы гашения колебаний в нежестком элементе конструкции макета. Составляющими макета были твердое основное тело и нежесткий стержень, прикрепленный к основному телу. Особенность рассмотренной модели состоит в том, что крепление нежесткого элемента к основному телу моделируется как одностепенной шарнир, что учитывает нежесткость в точке соединения элементов конструкции.

Были реализованы линейно-квадратичный регулятор и алгоритм управления (MESS-алгоритм), опирающийся на редуцированную математическую модель объекта. В процессе компьютерного моделирования

параметры математической модели исследуемого объекта соответствовали параметрам макета, представленного на стенде КОСМОС, а также предполагалось, что управление макетом осуществляется при помощи устройств, расположенных лишь на его основном теле. Следующие задачи были решены с помощью обоих алгоритмов:

- задача гашения низкочастотных колебаний в нежестком элементе макета, движущегося по столу;
- задача стабилизации макета в заданном угловом положении;
- задача стабилизации основного тела макета в заданной точке стола.

Было установлено, что MESS-алгоритм дает результаты, не уступающие результатам LQR-алгоритма, опираясь при этом на модель меньшей размерности.

Список литературы

1. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Стенд КОСМОС для моделирования движения макетов системы управления микроспутников и обзор мировых аналогов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2016. - №138. - 32 с.
2. Joshi S.M. Control techniques of large flexible space structures, Lecture notes in control and information sciences. Springer, Berlin, Vol. 131.1989. P.192
3. Junkins J.L. , Kim Y. Introduction to dynamics and control of flexible structures // Washington DC: AIAA Education Series, AIAA, 1993. P. 452
4. Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Овчинников М.Ю. Уравнения движения спутника с нежесткими элементами конструкции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2015. - №58. - 20 с.
5. Hyland D.C., Junkins J.L., Longman R.V. Active control technology for large space structures // J. Guid. Control. Dyn. 1993. Vol. 16, № 5. P. 801–821.
6. Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.L. Dynamics and control of large space structures // J. Guid. Control. Dyn. 1984. Vol. 7, № 5. P. 514–526.
7. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. - 616 с.
8. Meirovitch L., Baruh H., Oz H. A comparison of control techniques for large flexible structures // J. Guid. Control. Dyn. 1983. Vol. 6, № 4. P. 302–310.
9. Coradetti T. Orthogonal subspace reduction of optimal regulator order // Proceedings of the AIAA Guidance and Control Conference, Boulder, Colo, U.S.A, August 6–8, 1979.
10. Balas M.J. Active control of flexible systems // Journal of Optimization Theory and Applications. 1978. Vol. 25, №3. P. 415–436.
11. Sesak J.R., Likins P. Model Error Sensitivity Suppression: Quasi-Static Optimal Control for Flexible Structures // Proceedings of the 18th IEEE Conference on Decision and Control, Ft. Lauderdale, FL, U.S.A, December 12-14, 1979.

12. Sesak J.R., Coradetti T. Decentralized control of large space structures via forced singular perturbation // Proceedings of the AIAA 17th Aerospace Sciences Meeting, New Orleans, LA, U.S.A, January 15-17, 1979.
13. Auburn J.N., Theory of the Control of Structures by Low Authority Controllers // J. Guid. Control. Dyn. 1980. Vol. 3, № 5. P. 444–451.
14. Lyons M.G., Aubrun J.N., Margulies G., Gupta N.K., aCOSS Three Phase 1 // Rome Air Development Center, RADC-TR-80-131, Griffits AFB, NY, May 1980.
15. Cimen T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control: A survey // Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
16. Gasbarri P., Monti R., Sabatini M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainties // Acta Astronautica, Vol. 93, p. 252-265.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	4
2. Математическая модель движения макета	5
2.1. Описание вибраций произвольного нежесткого элемента	5
2.2. Уравнения движения макета	7
3. Обзор методов гашения вибраций в КНЭЖ	12
3.1. Линейно-квадратичный регулятор	12
3.2. Редукция модели управления. Подавление возмущений в остаточных модах	13
3.3. High Authority /Low Authority управление (НАС/ЛАС)	14
3.4. Уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния (SDRE-подход)	16
4. Построение управления в задаче стабилизации макета	18
4.1. Построение линейно-квадратичного регулятора	18
4.2. Построение управления, подавляющего возмущения в остаточных модах	21
5. Компьютерное моделирование	22
Заключение	26
Список литературы	27