ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 105 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Полные диагностические тесты длины два для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Полные диагностические тесты длины два для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 105. 10 с. doi:10.20948/prepr-2017-105
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-105

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

К. А. Попков

Полные диагностические тесты длины два для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов

Москва — 2017

Попков К. А.

Полные диагностические тесты длины два для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов

Доказано, что любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$, допускающей полный диагностический тест длины не более 2 относительно инверсных неисправностей на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, инверсная неисправность, полный диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

Complete diagnostic tests of the length two for logic networks under inverse faults of logic gates

It is proved that one can implement any Boolean function by a logic network in the basis $\{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$, allowing a complete diagnostic test with a length not exceeding 2 regarding inverse faults on outputs of logic gates.

Key words: logic network, inverse fault, complete diagnostic test

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-21-00025 П.

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \dots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате она вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \dots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \dots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — полный диагностический тест (ПДТ) для некоторой схемы из функциональных элементов S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D^B_{\text{ПД}}(T)$ — длина теста T; $D^B_{\text{ПД}}(S) = \min D^B_{\text{ПД}}(T)$, где минимум берётся по всем ПДТ T для схемы S; $D^B_{\text{ПД}}(f) = \min D^B_{\text{ПД}}(S)$, где минимум берётся по всем схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{\text{ПД}}(n) = \max D^B_{\text{ПД}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D^B_{\text{ПД}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ПДТ. По аналогии с функциями $D^B_{\text{ПД}}$ можно ввести функции $D^B_{\text{ЕП}}$, $D^B_{\text{ПП}}$ и $D^B_{\text{ЕД}}$ для соответственно единичного проверяющего, полного проверяющего и единичного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^B_{\text{ЕД}}(f)$ дополнительно предполагается неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{\text{ЕП}}(n)$ — функция Шеннона длины единичного проверяющего теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим инверсными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится противоположным значению на выходе этого элемента в случае, когда он исправен. С. В. Коваценко в [5] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1\}$ установил, что $D^{B_1}_{\text{ЕП}}(n) = 1$, $D^{B_1}_{\text{ЕД}}(n) \leqslant n+1$ и $D^{B_1}_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^{n-2}$. Н. П. Редькин в [6] для классического базиса $B_2 = \{\&, \vee, \neg\}$ получил оценку $D^{B_2}_{\text{ЕП}}(n) \leqslant 2$, а в [7] для произвольного полного базиса B — оценку $D^B_{\text{ЕП}}(n) \leqslant 3$. Д. С. Романов в [8] доказал, что существует базис B_3, состоящий из булевых функций от не более чем девяти переменных, в котором $2 \leqslant D^{B_3}_{\text{ПП}}(n) \leqslant 4$. Им же в [9, 10] получены равенства $D^{B_1}_{\text{ЕД}}(n) = 1$ и $D^{B_2}_{\text{ЕД}}(n) = 2$ соответственно. При этом в работе [8] рассматривались только тестопригодные схемы, т. е. такие схемы, в которых любые допустимые неисправности элементов приводят к функциям неисправности, отличным от исходной функции, реализуемой данной схемой (понятие тестопригодных схем введено Д. С. Романовым и является обобщением понятия неизбыточных схем на случай произвольного числа неисправных элементов).

В данной работе будут рассматриваться полные диагностические тесты, в качестве неисправностей функциональных элементов — инверсные неисправности на выходах элементов, а в качестве базиса — множество $B_4 = \{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$. Для краткости вместо $D^{B_4}_{\text{ПД}}(f)$ и $D^{B_4}_{\text{ПД}}(n)$ будем писать соответственно $D(f)$ и $D(n)$. В соответствии с введёнными выше обозначениями, а также определениями из [4, гл. IV, §§1, 3] на схемы, в отличие от работы [8], не будет накладываться условие тестопригодности.

Отметим, что при возникновении инверсной неисправности на выходе любого элемента, реализующего булеву функцию φ от своих входов, данный элемент начинает реализовывать функцию $\overline{\varphi} = \varphi \oplus 1$ от своих входов.

Предполагается, что константа 1 из базиса реализуется на выходах функциональных элементов, которые могут быть неисправны (и, соответственно, реализовывать константу 0).

Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x \oplus y$ (вида $x\&y\&z$), будем называть *сумматором* (соответственно *трёхвходовым конъюнктором*).

Вместо «вход схемы S (элемента E), отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход „x_i“схемы S (соответственно элемента E)».

Формулировка и доказательство основного результата

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливы неравенства $1 \leqslant D(n) \leqslant 2$.*

Доказательство. Можно считать, что в базисе B_4 содержится функция $x\&y$: достаточно отождествить входы «y» и «z» у произвольного трёхвходового конъюнктора и получить двухвходовой элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ от своих входов и допускающий инверсную неисправность на своём выходе. Любой элемент, реализующий функцию вида $x\&y$, будем называть *двухвходовым конъюнктором*.

Для любого $n \geqslant 0$ существует булева функция $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащая множеству $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (в случае $n = 0$ это множество считаем пустым). Выход любой схемы, реализующей функцию f, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности одного этого элемента получающаяся схема будет реализовывать функцию $\overline{f}(\tilde{x}^n)$, которую надо отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 1$.

Докажем неравенство $D(n) \leqslant 2$. Для этого достаточно доказать, что любую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать схемой в базисе B_4, допускающей ПДТ длины не более 2. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то реализуем функцию f схемой, состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно из одного сумматора, на оба входа которого подаётся переменная x_1). Легко видеть, что построенная схема реализует функцию f, а единственной её функцией неисправности является $\overline{f}$. Отсюда следует, что множество, состоящее из любого одного двоичного набора длины n, является для этой схемы ПДТ длины 1.

Пусть теперь функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Представим её полиномом Жегалкина:

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{1}$$

где $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$. Реализуем функцию f схемой S_0 в базисе B_4 в соответствии с представлением (1). Каждую конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, m$, ранга r_i реализуем цепочкой Z_i из $r_i - 1$ двухвходовых конъюнкторов; если при этом $r_i = 1$, то в цепочке Z_i не содержится элементов, а её выход совпадает со входом схемы, соответствующим конъюнкции K_i. Затем выходы всех построенных цепочек $Z_1, \ldots, Z_m$, а также — в случае $c = 1$ — выход элемента «константа 1» соединим цепочкой $Z_\oplus$ из сумматоров (если $m = 1$, то в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает с выходом цепочки Z_1). Выход цепочки $Z_\oplus$ объявим выходом схемы S_0.

Пусть в построенной схеме S_0 содержатся ровно q двухвходовых конъюнкторов, не являющихся выходными элементами цепочек $Z_1, \ldots, Z_m$. В случае $q = 0$ легко видеть, что неисправность любого элемента схемы S_0 прибавляет по модулю 2 единицу к функции, реализуемой этой схемой (при, возможно, уже наличии в ней неисправных элементов). Поэтому все функции неисправности схемы S_0 принадлежат множеству $\{f, f \oplus 1\} = \{f, \overline{f}\}$. Отсюда следует, что множество, состоящее из любого одного двоичного набора длины n, является для этой схемы ПДТ длины 1.

Далее будем считать, что $q \geqslant 1$. Обозначим указанные в предыдущем абзаце q двухвходовых конъюнкторов через $E_1, \ldots, E_q$ (в произвольном порядке). Построим схему S^* в базисе B_4 с четырьмя входами x, y, z и t и одним выходом. Возьмём трёхвходовой конъюнктор, на входы которого подаются переменные x, y и z, и двухвходовой конъюнктор, на входы которого подаются переменные x и t. Выходы этих элементов, а также вход «x» схемы S^* соединим цепочкой из двух сумматоров, выход которой объявим выходом данной схемы. Легко видеть, что на этом выходе реализуется функция $h(x, y, z, t) = xyz \oplus xt \oplus x$, а все функции неисправности схемы S^* принадлежат множеству $\{h, \overline{h}\} = \{h, h \oplus 1\}$.

Для каждого конъюнктора E_j, $j = 1, \ldots, q$, возьмём копию S_j схемы S^*, вход «t» которой соединим с выходом данного конъюнктора, а входы «y» и «z» — с теми входами схемы S_0 или выходами элементов, с которыми в схеме S_0 соединяются входы двухвходового конъюнктора E_j. Затем соединим все построенные подсхемы $S_1, \ldots, S_q$ в цепочку Z_C через их входы «x», оставшиеся незанятыми; при этом вход «x» подсхемы S_1 соединим с выходом схемы S_0, а для каждого $j \in \{2, \ldots, q\}$ (при $q \geqslant 2$) вход «x» подсхемы S_j соединим с выходом подсхемы S_{j-1}. Выходом цепочки Z_C объявим выход подсхемы S_q. Полученную схему обозначим через S (см. рисунок; каждое из многоточий над верхними конъюнкторами обозначает либо вход схемы, либо выход предыдущего конъюнктора из той же цепочки и её верхнюю часть). Выходом схемы S

будем считать выход цепочки Z_C.

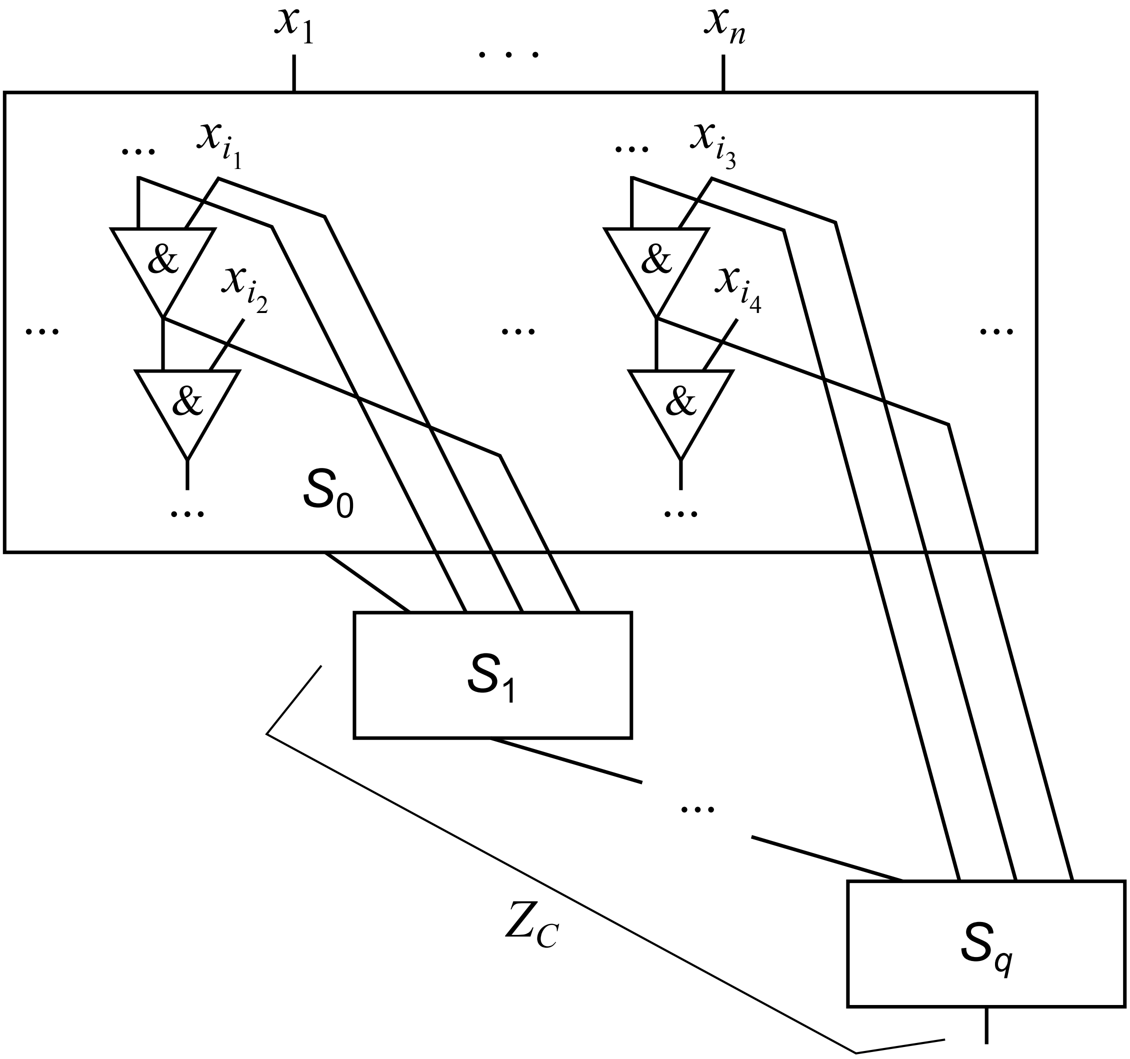

Рисунок. Схема S

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Эта функция по построению реализуется на выходе подсхемы S_0. Рассмотрим подсхему S_j, $j = 1, \ldots, q$. Пусть на её входы «x», «y», «z» и «t» в схеме S подаются булевы функции φ_x, φ_y, φ_z и φ_t соответственно, тогда на её выходе реализуется функция $h(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_t)$. Как было отмечено выше, входы «y» и «z» подсхемы S_j соединяются с теми же выходами элементов или входами подсхемы S_0 (а значит, и схемы S), что и входы конъюнктора E_j, выход которого соединён со входом «t» подсхемы S_j. Поэтому на выходе конъюнктора E_j в схеме S реализуется функция $\varphi_t = \varphi_y \& \varphi_z$, а на выходе подсхемы S_j — функция

$$h(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_y \& \varphi_z) = \varphi_x \varphi_y \varphi_z \oplus \varphi_x \varphi_y \varphi_z \oplus \varphi_x = \varphi_x. \quad (2)$$

Таким образом, функция, реализуемая на выходе каждой подсхемы в цепочке Z_C, совпадает с функцией, подающейся на вход «x» этой подсхемы. В силу построения цепочки Z_C это означает, что на её выходе в схеме S реализуется та же булева функция, что и на выходе подсхемы S_0, т. е. функция $f(\tilde{x}^n)$, что и требовалось доказать.

Найдём все возможные функции неисправности схемы S. Зафиксируем некоторую неисправность элементов этой схемы. Рассмотрим два случая.

1. Среди конъюнкторов $E_1, \ldots, E_q$ есть хотя бы один неисправный элемент. Среди всех таких неисправных элементов выберем элемент E_k с наибольшим нижним индексом. Тогда каждый двухвходовой конъюнктор E_j, $j = k+1, \ldots, q$ (при $k < q$), исправен, поэтому на его выходе реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе подсхемы S_j — функция, подаваемая на вход «x» данной подсхемы, или отрицание этой функции, по аналогии с (2) и с учётом того, что схема S^* реализует функцию из множества $\{h, \overline{h}\}$. Таким образом, на выходе цепочки Z_C, т. е. на выходе схемы S, будет реализована та же булева функция, что и на выходе подсхемы S_k, или её отрицание.

Далее, пусть на входы «x», «y», «z» и «t» подсхемы S_k в схеме S подаются булевы функции φ'_x, φ'_y, φ'_z и φ'_t соответственно, тогда на выходе подсхемы S_k с учётом возможных неисправностей внутри неё реализуется функция вида $h(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z, \varphi'_t) \oplus \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$. Как было отмечено выше, входы «y» и «z» подсхемы S_k соединяются с теми же выходами элементов или входами схемы S, что и входы конъюнктора E_k, выход которого соединён со входом «t» подсхемы S_k. Так как конъюнктор E_k неисправен, то на его выходе в схеме S реализуется функция $\varphi'_t = \varphi'_y \varphi'_z \oplus 1$, а на выходе подсхемы S_k — функция

$$h(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z, \varphi'_y \varphi'_z \oplus 1) \oplus \alpha = (\varphi'_x \varphi'_y \varphi'_z \oplus \varphi'_x(\varphi'_y \varphi'_z \oplus 1) \oplus \varphi'_x) \oplus \alpha \equiv$$
$$\equiv 0 \oplus \alpha = \alpha.$$

Значит, функция, реализуемая на выходе схемы S, будет равна либо α, либо $\overline{\alpha}$, т. е. некоторой булевой константе. Случай 1 разобран.

2. Все конъюнкторы $E_1, \ldots, E_q$ исправны. Тогда на выходе каждого элемента E_j, $j = 1, \ldots, q$, реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе подсхемы S_j — функция, подаваемая на вход «x» данной подсхемы, или отрицание этой функции, по аналогии с (2) и с учётом того, что схема S^* реализует функцию из множества $\{h, \overline{h}\}$. Таким образом, на выходе цепочки Z_C, т. е. на выходе схемы S, будет реализована та же булева функция, что и на выходе подсхемы S_0, или её отрицание. По предположению случая 2 в подсхеме S_0 мо-

гут быть неисправны только выходные двухвходовые конъюнкторы цепочек $Z_1, \dots, Z_m$, сумматоры из цепочки $Z_\oplus$, а также элемент «константа 1». Легко видеть, что неисправность каждого такого элемента прибавляет по модулю 2 единицу к функции, реализуемой подсхемой S_0. Поэтому на выходе данной подсхемы будет реализована функция из множества $\{f, f \oplus 1\} = \{f, \overline{f}\}$, а на выходе схемы S — функция из этого же множества. Случай 2 разобран.

В итоге получаем, что все функции неисправности схемы S принадлежат множеству $\{0, 1, f, \overline{f}\}$, при этом по предположению $f \notin \{0, 1\}$. Пусть $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$ — такие двоичные наборы длины n, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$, $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Тогда на наборе $\tilde{\sigma}_0$ каждую из функций $0, f$ можно отличить от каждой из функций $1, \overline{f}$, а на наборе $\tilde{\sigma}_1$ функцию f можно отличить от константы 0, а функцию $\overline{f}$ — от константы 1. Таким образом, множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является для схемы S ПДТ длины 2. Теорема 1 доказана. $\square$

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

5. Коваценко С. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

6. Редькин Н. П. О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 196.

7. Редькин Н. П. Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: Наука, 2003. — С. 217–230.

8. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2015. — № 1. — С. 30–37.

9. Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2015. — № 4. — С. 38–54.

10. Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины два // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2016. — № 3. — С. 56–72.