ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 98 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Денисов С.А.

О проблеме Стеклова в классе весов положительных и непрерывных на окружности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Денисов С.А. О проблеме Стеклова в классе весов положительных и непрерывных на окружности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 98. 10 с. doi:10.20948/prepr-2016-98
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-98

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

С. А. Денисов

О проблеме Стеклова в классе весов положительных и непрерывных на окружности

Москва — 2016

УДК 517.53+517.9

Денисов С. А. О проблеме Стеклова в классе весов положительных и непрерывных на окружности

Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016

В этой работе получены оценки снизу для равномерной нормы полиномов, ортонормированных на окружности относительно непрерывного и положительного веса. Наши оценки являются точными и улучшают результаты подобного рода, ранее полученные М. Амброладзе.

Ключевые слова: Равномерная норма, полиномы ортогональные на единичной окружности, проблема Стеклова.

Denisov S. A.

On the problem by Steklov for the class of weights that are positive and continuous on the circle

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2016

In this paper, we obtain the lower bounds for the uniform norm of the polynomials orthonormal on the unit circle with respect to a continuous and positive weight. Our bounds are sharp and improve similar results obtained earlier by M. Ambroladze.

Key words: Uniform norm, polynomials orthonormal on the unit circle, problem of Steklov.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

1. Введение

Рассмотрим вероятностную меру σ, определённую на единичной окружности и имеющую бесконечно много точек роста. Определим полиномы $\{\phi_k(z,\sigma)\}$, ортонормированные относительно σ, следующим образом

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(e^{i\theta})\, \overline{\phi_m(e^{i\theta})}\, d\sigma \;= \delta_{n,m}\ , \quad n,m = 0{,}1{,}2\ \ldots, \quad \mathrm{coeff}(\phi_k,k) > 0, \quad \mathsf{deg}\phi_k = k, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{coeff}(Q,k)$ обозначает коэффициент при z^k в Q. Рассмотрим также ортогональные многочлены $\{\Phi_n(z,\sigma)\}$ с единичным первым коэффициентом, заданные

$$\mathsf{deg}\Phi_n = n,\ \mathrm{coeff}(\Phi_n,n) = 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(e^{i\theta},\sigma)\overline{\Phi_m(e^{i\theta},\sigma)}\, d\sigma \;= 0\ , \quad m < n\,.$$

Впоследствии, нам понадобятся следующие обозначения: для $Q_n(z) = q_n z^n + \ldots + q_0$ - полинома степени не больше n, мы рассмотрим $(*)$–операцию, заданную таким образом:

$$Q_n(z) \xrightarrow{(*)} Q_n^*(z) = \bar{q}_0 z^n + \ldots + \bar{q}_n\,.$$

Эта $(*)$-операция зависит от n.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения. Символ $\mathbb{T}$ будет обозначать единичную окружность. Если для двух неотрицательных функций $f_{1(2)}$ справедливо неравенство

$$f_1(x) < C(\alpha) f_2(x)$$

для всех x и константа C зависит только от параметра α, мы будем писать

$$f_1 <_\alpha f_2$$

Если же константа абсолютна, то мы будем писать

$$f_1 \lesssim f_2.$$

Мы будем рассматривать меры, заданные весами, которые удовлетворяют условию Стеклова:

$$d\sigma = w d\theta, \quad w \ge \delta/(2\pi),$$

где $\delta \in (0{,}1)$.

Для мер из класс Сегё, т.е. для σ, удовлетворяющих оценке

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \sigma' d\theta > -\infty,$$

мы имеем (см., например, [8])

$$\exp\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} \log(2\pi\sigma'(\theta))d\theta\right) \le \left|\frac{\Phi_n(z,\sigma)}{\phi_n(z,\sigma)}\right| \le 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.2}$$

Поэтому, для мер из класса Стеклова справедливо неравенство

$$\sqrt{\delta} \le \left|\frac{\Phi_n(z,\sigma)}{\phi_n(z,\sigma)}\right| \le 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,. \tag{1.3}$$

Таким образом, если $\{\Phi_n\}$ или $\{\phi_n\}$ растёт по n, то и другая последовательност тоже растёт.

Заметим также, что ортогональные полиномы удовлетворяют очевидному шкалированию:

$$\phi_n(z,\sigma) = \alpha^{1/2}\phi_n(z,\alpha\sigma), \quad \Phi_n(z,\sigma) = \Phi_n(z,\alpha\sigma), \quad \alpha > 0. \tag{1.4}$$

Проблема оценки равномерной нормы $\|\phi_n(z,w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ в классе мер из класса Стеклова (проблема Стеклова) была изучена в ряде работ (например, [6, 7]).

Е.А. Рахмановым был получен, например, такой результат:

Теорема 1.1. *(Рахманов, [7]) Существует $\delta_0 \in (0,1)$, такое что*

$$\sup_{\sigma:\sigma'\ge\delta_0/(2\pi)} \|\phi_n(e^{i\theta},\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} > C\sqrt{\frac{n}{\log^3 n}}\,,$$

Верхняя оценка

$$\sup_{\sigma:\sigma'\ge\delta/(2\pi)} \|\phi_n(e^{i\theta},\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} <_\delta \sqrt{n}$$

тривиальна и была известна ранее.

Точные неравенства для задачи Стеклова были недавно получены в [2].

В частности, справедлива следующая теорема

Теорема 1.2. *(Аптекарев-Денисов-Туляков, [2]) Для любого $\delta \in (0,1), p < \infty$ и $A > 1$, мы имеем*

$$\sqrt{n} \le_{p,\delta,A} \sup_{w:w>\delta/(2\pi),\|w\|_1=1,\|w\|_p<A} \|\phi_n(e^{i\theta},w)\|_\infty \le_\delta \sqrt{n}\,.$$

Используя методы этой работы и одну идею С. Бернштейна, С.А. Денисов и Ф.Л. Назаров получили, в частности, следующий результат:

Теорема 1.3. *(Денисов-Назаров, [4],[5]) Рассмотрим*

$$\widehat{M}_{n,\epsilon} = \sup_{w \in C(\mathbb{T}):\|w-1\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le \epsilon} \|\phi_n(e^{i\theta}, w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} .$$

Существует $\epsilon_0 > 0$, такое что

$$n^{C_1 \epsilon} \le_\epsilon \widehat{M}_{n,\epsilon} \le_\epsilon n^{C_2 \epsilon} \tag{1.5}$$

для $\epsilon < \epsilon_0$.

Заметим, что меры, рассмотренные в этой вариационной задаче, не обязаны быть вероятностными.

Оценки для полиномов с весами w, удовлетворяющими свойствам $w, w^{-1} \in BMO(\mathbb{T})$, были получены в недавней работе [3]. В частности, было показано, что для таких весов оценка сверху $\sqrt{n}$ из Теоремы 1.2 может быть существенно улучшена до $n^\alpha, \alpha < 1/2$, где значение α зависит от величины $\|w\|_{BMO} \cdot \|w^{-1}\|_{BMO}$. В настоящей работе мы используем нижнюю оценку из предыдущей Теоремы для улучшения одного результата М. Амброладзе.

Теорема 1.4. *(М. Амброладзе, [1]) Для произвольной числовой последовательности $\{a_n\}$, монотонно сходящейся к нулю, существует непрерывный и положительный вес w и подпоследовательность $\{k_n\}$ из $\mathbb{N}$, для которых справедлива оценка*

$$\|\phi_{k_n}(e^{i\theta}, w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \ge C(w) a_{k_n} \log k_n .$$

Амброладзе использовал конструкцию из работы [6], сглаживая сингулярный вес Рахманова свёрткой с подходящим тригонометрическим полиномом.

Нашим основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1.5. *Для произвольной числовой последовательности $\{a_n\}$, монотонно сходящейся к нулю, существует непрерывный и положительный вес w^* и подпоследовательность $\{k_n\}$, для которых справедлива оценка*

$$\|\phi_{k_n}(z, w^*)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \ge C(w^*) \exp\left(C a_{k_n} \log k_n\right) . \tag{1.6}$$

Оказывается, что этот результат точен. В своей диссертации K. Rush использует метод получению верхних оценок в Теореме 1.3 и аргумент Бернштейна для доказательства, в частности, такого результата:

Теорема 1.6. *(K. Rush) Если вес w положителен и непрерывен на $\mathbb{T}$, то*

$$\log \|\phi_n(e^{i\theta}, w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = o(1)\log n\,.$$

Для полноты изложения мы приводим доказательство этого результата в следующей секции.

2. Принцип локализации и доказательства основных результатов

Для доказательства нам необходим следующий несложный принцип локализации, доказанный, например, в [2].

Рассмотрим вес w on $[-\pi, \pi]$ и определим

$$\lambda(w) = \exp\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} \log(2\pi w(\theta))d\theta\right), \quad \Lambda(w) = \sqrt{\|w\|_{L^1(\mathbb{T})}}\,.$$

Теорема 2.1. ([2]) *Пусть $w_{1(2)}$ - два веса, заданные на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие*

$$w_1(\theta) = w_2(\theta), \quad \theta \in [-\epsilon, \epsilon]\,. \tag{2.1}$$

Тогда

$$\left|\frac{\phi_n(1, w_1)}{\phi_n(1, w_2)}\right| \le \frac{\Lambda(w_2)}{\lambda(w_1)} + \frac{4\Lambda(w_1)}{\epsilon\lambda(w_1)}\left(\int_{|\theta|>\epsilon} |\phi_n(e^{i\theta}, w_1)\phi_n(e^{i\theta}, w_2)|(w_1 + w_2)d\theta\right) \tag{2.2}$$

для произвольных n.

Мы получаем простое следствие:

Лемма 2.1. *Пусть*

$$0 < m_1 \le w_{1(2)}(e^{i\theta}) \le m_2 \quad \theta \in [-\pi, \pi) \tag{2.3}$$

и

$$w_1(e^{i\theta}) = w_2(e^{i\theta}) \text{ for } \theta \in [-\epsilon, \epsilon]\,. \tag{2.4}$$

Тогда,

$$\frac{\epsilon m_1}{m_2} \lesssim \left|\frac{\phi_n(1, w_1)}{\phi_n(1, w_2)}\right| \lesssim \frac{m_2}{\epsilon m_1}\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_n(e^{i\theta}, w_1)\phi_n(e^{i\theta}, w_2)| w_1 d\theta \le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_n(e^{i\theta}, w_2)|^2 w_1 d\theta\right)^{1/2},$$

всилу нормализации и неравенства Коши. Очевидно, что $\Lambda(w_{1(2)}) \lesssim \sqrt{m_2}$ и $\lambda(w_{1(2)}) \gtrsim \sqrt{m_1}$. Поскольку

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\phi_n(e^{i\theta}, w_2)|^2 w_2 d\theta \ge m_1 \int_{-\pi}^{\pi} |\phi_n(e^{i\theta}, w_2)|^2 d\theta,$$

мы получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_n(e^{i\theta}, w_1)\phi_n(e^{i\theta}, w_2)| w_1 d\theta \le \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{0.5}.$$

Неравенство с весом w_2 получается так же. Для доказательства нижней оценки в (2.5), остаётся поменять $w_{1(2)}$ ролями. □

Мы теперь готовы приступить к доказательству основного результата.

Доказательство. (Теоремы 1.5)

Начнём с того, что заметим следующее: класс весов, рассмотренных в вариационной задаче (1.5) - инвариантен относительно трансляций на окружности и поэтому можно утверждать, что

$$\sup_{w \in C(\mathbb{T}): \|1-w\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < \epsilon} |\phi_n(1, w)| = \widehat{M}_{n,\epsilon} \ge_\epsilon n^{C_1 \epsilon} \tag{2.6}$$

Для каждого n и ϵ, обозначим через $w_{n,\epsilon}$ такой вес, что

$$|\phi_n(1, w_{n,\epsilon})| > C_\epsilon n^{C_2 \epsilon}$$

и

$$w_{n,\epsilon} \in C(\mathbb{T}), \quad \|1 - w_{n,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < \epsilon\,. \tag{2.7}$$

По заданной $\{a_n\}$, мы будем строить искомый вес w^* и последовательность $\{k_n\}$ по следующему правилу. Рассмотрим последовательность интервалов $I_n = [\theta_n - \delta_n, \theta_n + \delta_n]$, таких что $0 < \theta_n < \theta_{n-1}$, $\forall n$ и отрезки $\{I'_n\}$ непересекаются, где

$$I'_n = [\theta_n - 2\delta_n, \theta_n + 2\delta_n]\,.$$

Мы предположим также, что $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$ и что $\delta_{n+1} \le \delta_n$, $\forall n$. Существование последовательности таких интервалов не вызывает сомнений. Очевидно, мы имеем $\{\delta_n\} \in \ell^1$. Рассмотрим функцию ω, которая удовлетворяет свойствам

(a) $\omega(\theta) = 1$ на каждом I_n,
(b) $0 \le \omega(\theta) \le 1$,
(c) $\omega(\theta) = 0$, если $\theta \in \mathbb{T} \setminus \cup_n I'_n$,
(d) $\omega(\theta) \in C^\infty(\mathbb{T} \setminus \{0\})$.

Рассмотрим последовательность параметров $\{\epsilon_n\} : \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ и $k_n \in \mathbb{N}$, выбор которых будет сделан позже. Искомый вес определим, как

$$w^* = 1 + \sum_n w(\theta) \cdot \chi_{I'_n} \cdot \Big(w_{k_n,\epsilon_n}(\theta - \theta_n) - 1 \Big) .$$

Очевидно, что w^* непрерывен и положителен, если $\sup_n \epsilon_n$ достаточно мал. Теперь мы можем задать параметры $\{k_n\}$ и $\{\epsilon_n\}$, чтобы удовлетворить (1.6).

1. Выбираем $\epsilon_1 < 0.1$. Затем берём k_1 настолько большим, чтобы

$$|\phi_{k_1}(1, w_{k_1,\epsilon_1})| > \exp\left(\log C_{\epsilon_1} + C_1 \epsilon_1 \log k_1\right) > \delta_1^{-1} \exp\left(a_{k_1} \log k_1\right) .$$

   Мы всегда можем это гарантировать, поскольку $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Далее, мы фиксируем ϵ_2 и берём k_2 настолько большим, что $k_2 > k_1$ и

$$|\phi_{k_2}(1, w_{k_2,\epsilon_2})| > \exp\left(\log C_{\epsilon_2} + C_1 \epsilon_2 \log k_2\right) > \delta_2^{-1} \exp\left(a_{k_2} \log k_2\right) .$$

3. В общем случае, зафиксировав ϵ_n, мы берём $k_n > k_{n-1}$, так что

$$|\phi_{k_n}(1, w_{k_n,\epsilon_n})| > \exp\left(\log C_{\epsilon_n} + C_1 \epsilon_n \log k_n\right) > \delta_n^{-1} \exp\left(a_{k_n} \log k_n\right) .$$

Теперь, когда все $\{\epsilon_n\}$ и $\{k_n\}$ выбраны, остаётся применить (2.5), чтобы получить

$$|\phi_{k_n}(\theta_n, w^*)| > C\delta_n^{-1}\delta_n \exp\left(a_{k_n} \log k_n\right) ,$$

и поэтому

$$\|\phi_{k_n}(e^{i\theta}, w^*)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} > C \exp\left(a_{k_n} \log k_n\right) .$$

□

Доказательство. (Теоремы 1.6). Нам достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \|\Phi_n(e^{i\theta}, w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{\log n} = 0,$$

где Φ_n - полином с единичным первым коэффициентом. Это следует из того, что вес удовлетворяет условию Сегё и поэтому $|\phi_n| \sim |\Phi_n|$.

Для произвольного $\epsilon > 0$ мы можем найти аналитический полином $P(z)$, такой что

$$\mathsf{deg} P = N, \quad \|w - w_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le \epsilon, \quad w_\epsilon = |P|^{-2}.$$

Тогда,

$$\Phi_n(z,w)=C_n\phi_n(z,w_\epsilon)+\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(e^{i\theta},w)\sum_{j=0}^{n-1}\phi_j(z,w_\epsilon)\overline{\phi_j(e^{i\theta},w_\epsilon)}w(\theta)d\theta,$$

при этом $C_n\sim 1$, что следует из сравнения старших коэффициентов. Кроме того, $\phi_n(z,w_\epsilon)=C(\|w\|_1)P(z)$ при $n\geq N$ по теореме Бернштейна-Сегё. Поскольку $\Phi_n(z,w)$ - ортогонален относительно w, мы можем написать

$$\Phi_n(z,w)=C_nP+\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(e^{i\theta},w)\sum_{j=0}^{n-1}\phi_j(z,w_\epsilon)\overline{\phi_j(e^{i\theta},w_\epsilon)}(w(\theta)-w_\epsilon(\theta))d\theta,\quad n\geq N\,.$$

По известной формуле для ядра Кристофеля-Дарбу, мы имеем при $n\geq N$:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\phi_j(z,w_\epsilon)\overline{\phi_j(e^{i\theta},w_\epsilon)}=\frac{\phi_n(z,w_\epsilon)\overline{\phi_n(e^{i\theta},w_\epsilon)}-\phi_n^*(z,w_\epsilon)\overline{\phi_n^*(e^{i\theta},w_\epsilon)}}{ze^{-i\theta}-1}=$$

$$e^{i\theta}\frac{P(z)\overline{P(e^{i\theta})}-P^*(z)\overline{P^*(e^{i\theta})}}{z-e^{i\theta}},$$

где $(*)$ порядка n. Всилу того, что $C_1\leq|P(e^{i\theta})|\leq C_2$ при $\epsilon\ll\min_{\mathbb{T}}w$, мы получаем оценку

$$\|\Phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})}\leq C+C\epsilon\|\Phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})}\|H\|_{p,p}\,,$$

где $\|H\|_{p,p}$- норма оператора Гильберта из $L^p(\mathbb{T})$ в $L^p(\mathbb{T})$, которая не больше чем Cp при $p\in[2,\infty)$. Таким образом, по принципу сжатых отображений, мы имеем

$$\|\Phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})}<C(1-C\epsilon p)^{-1}<C$$

при $p\ll\epsilon^{-1}$. Далее неравенство Никольского даёт

$$\|\Phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}<C_1n^{C_2\epsilon},$$

где $n>N(\epsilon)$, а константы $C_{1(2)}$ зависят лишь от $\|w\|_{L^\infty(\mathbb{T})},\|w^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. Поэтому,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\|\Phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{\log n}<C_2\epsilon\,.$$

Поскольку ϵ сколь угодно мало, мы получаем утверждение Теоремы.

□

Список литературы

[1] М. У. Амброладзе, О возможной скорости роста многочленов, ортогональных с непрерывным положительным весом, Матем. сб., 182:3 (1991), 332–353. English translation in: Math. USSR-Sb. 72 (1992), no. 2, 311–331.

[2] A. Aptekarev, S. Denisov, D. Tulyakov, On a problem by Steklov, Journal of American Mathematical Society, Vol. 29, N4, 2016, 1117–1165.

[3] S. Denisov, K. Rush, Orthogonal polynomials on the circle for the weight w satisfying conditions w,$1/w \in BMO(\mathbb{T})$, принята в печать в Constr. Approx.

[4] S. Denisov, F. Nazarov, Polynomials orthogonal on the circle: new upper and lower bounds, unpublished.

[5] S. Denisov, The growth of polynomials orthogonal on the unit circle with respect to a weight w that satisfies $w, w^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T})$, preprint, (available at http://www.math.wisc.edu/˜denissov/listweb.htm).

[6] Е. А. Рахманов, О гипотезе Стеклова в теории ортогональных многочленов, Матем. сб., 108(150):4 (1979), 581–608, English translation in: Math. USSR, Sb., 1980, 36, 549–575.

[7] Е. А. Рахманов, Об оценках роста ортогональных многочленов, вес которых отграничен от нуля, Матем. сб., 114(156):2 (1981), 269–298, English translation in: Math. USSR, Sb., 1982, 42, 237–263.

[8] B. Simon, Orthogonal polynomials on the unit circle, volumes 1 and 2, AMS 2005.

Sergey Denisov: denissov@wisc.edu
University of Wisconsin–Madison
Mathematics Department
480 Lincoln Dr., Madison, WI, 53706, USA
and
Keldysh Institute for Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences
Miusskaya pl. 4, 125047 Moscow, RUSSIA