ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 97 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Дудникова Т.В.

Теория рассеяния для дискретной гамильтоновой системы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дудникова Т.В. Теория рассеяния для дискретной гамильтоновой системы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 97. 26 с. doi:10.20948/prepr-2016-97
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-97

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Т. В. Дудникова

Теория рассеяния для дискретной гамильтоновой системы

Москва — 2016

Дудникова Т.В.

Теория рассеяния для дискретной гамильтоновой системы

Изучается поведение решений задачи Коши для дискретной гамильтоновой системы. Основная цель – доказать существование волновых операторов.

Ключевые слова: дискретная гамильтонова система, задача Коши, волновые операторы

Tatiana Vladimirovna Dudnikova

Scattering theory for a discrete Hamiltonian system

The behavior of solutions of the Cauchy problem for a discrete Hamiltonian system is studied. The main goal is to prove the existence of wave operators.

Key words: discrete Hamiltonian system, Cauchy problem, wave operators

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-03587).

Оглавление

1. Введение

В данной работе изучается гамильтонова система, состоящая из дискретного волнового поля $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, взаимодействующего с частицей, находящейся в положении $q \in \mathbb{R}^n$. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H(\varphi, \psi, q, p) = H_A(q,p) + H_B(\varphi, \psi) + H_I(\varphi, q). \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,

$$H_A(q,p) = \frac{1}{2}\Big(|p|^2 + P(q)\Big), \tag{1.2}$$

H_B обозначает гамильтониан гармонического кристалла в $\mathbb{Z}^d$:

$$H_B(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}\langle \varphi, \mathcal{V}\varphi\rangle + \frac{1}{2}\langle \psi, \psi\rangle,$$

слагаемое H_I имеет вид $H_I(\varphi, q) = -q \cdot \langle \varphi, \rho\rangle$, где через $\langle \cdot, \cdot\rangle$ обозначается скалярное произведение в $\ell^2 \equiv \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, $\langle \varphi, \rho\rangle = \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} \varphi(x)\rho(x)$, символ $\mathcal{V}$ обозначает оператор свертки с ядром $V(x)$, $\mathcal{V}\varphi = \sum\limits_{x'\in\mathbb{Z}^d} V(x-x')\varphi(x')$. Обозначим через $\hat\varphi(\theta)$ дискретное преобразование Фурье от $\varphi(x)$:

$$\hat\varphi(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{ix\cdot\theta}\varphi(x), \quad \theta \in \mathbb{T}^d, \quad \text{где } \ \mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z}^d).$$

Предполагается, что начальное состояние $Y_0 = (\varphi_0, \psi_0, q_0, p_0)$ системы принадлежит фазовому пространству $\mathcal{E}_\alpha = \ell^2_\alpha \times \ell^2_\alpha \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, см. определение 2.2. Здесь и ниже используются стандартные весовые пространства ℓ^2_α на $\mathbb{Z}^d$ с нормой

$$\|\varphi\|_\alpha \equiv \|\langle x\rangle^\alpha \varphi\| < \infty, \quad \langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

через $\|\cdot\|$ обозначается норма в $\ell^2 \equiv \ell^2_0$, $\|\varphi\| = (\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x)|^2)^{1/2}$. Существование и единственность решений $Y(t) = (\varphi(t,\cdot), \psi(t,\cdot), q(t), p(t))$ доказывается в Дополнении.

Чтобы изучить поведение решений при больших временах, мы предполагаем, что $d = n = 1$ и $P(q) = \kappa q^2/2$ с некоторым числом $\kappa > 0$. Кроме того, $\mathcal{V} = -\Delta_L + m^2$ – дискретный оператор Клейна–Гордона, где $m \geq 0$, а Δ_L обозначает вторую производную на $\mathbb{Z}$:

$$\Delta_L\varphi = \varphi(x+1) - 2\varphi(x) + \varphi(x-1), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

На константу κ и функцию взаимодействия ρ накладывается ряд ограничений (см. условия **R1**–**R5** ниже), в частности, $\hat\rho(0)=\hat\rho(\pi)=0$ и $\rho\in\ell^2_\alpha$ с $\alpha>5/2$. Мы доказываем (см. теорему 2.4), что для любых начальных данных $Y_0\in\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha>5/2$, таких, что $\hat Y_0(0)=\hat Y_0(\pi)=0$, существуют операторы $\Omega_\pm:\mathcal{E}_\alpha\to\mathcal{E}_0$, такие, что решение $Y(t)$ системы допускает следующее представление

$$Y(t)=Y_\pm(t)+r_\pm(t)\quad\text{при}\quad t\to\pm\infty,$$

где $\|r_\pm(t)\|_{\mathcal{E}_0}\le C\langle t\rangle^{-1/2}\|Y_0\|_{\mathcal{E}_\alpha}$, а $Y_\pm(t)$ – решения соответствующей невозмущенной (т.е. с $\rho\equiv 0$) задачи Коши с начальными данными $\Omega_\pm Y_0$. Кроме того, решение $Y(t)$ системы удовлетворяет следующей оценке

$$\|Y(t)\|_{\mathcal{E}_{-\alpha}}\le C\langle t\rangle^{-3/2}\|Y_0\|_{\mathcal{E}_\alpha},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Гармонические системы с гамильтонианом типа H_B на многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$ с любым $d\ge 1$ изучались многими авторами, см., например, [10, 11]. В [1, 3] такие системы были изучены со случайными начальными данными (φ_0,ψ_0). В работе [4] рассматривалась линейная система "поле–частица"в $\mathbb{R}^3$ с полем, которое описывалось непрерывными волновыми уравнениями, и получены некоторые результаты об асимптотике решений. Нелинейные непрерывные системы, аналогичные (1.1), были изучены в работах Имайкина, Комеча и Вайнберга [5] и Яксича и Пилле [7]. Для решений линейных дискретных уравнений Шредингера и Клейна–Гордона дисперсионные оценки типа (1.3) были получены в работах Шабана и Вайнберга [13], Комеча, Копыловой и Кунца [9] и Пелиноского и Стефанова [12]. В работе [2] были изучены волновые операторы для дискретного оператора Шредингера на прямой.

2. Главные результаты

2.1. Модель. Беря формально вариационные производные от гамильтониана (1.1), мы получаем динамические уравнения следующего вида

$$\left.\begin{array}{ll}\dot\varphi(t,x)=\psi(t,x), & \dot\psi(t,x)=-(\mathcal{V}\varphi)(t,x)+\rho(x)q(t), \quad x\in\mathbb{Z}^d\\ \dot q(t)=p(t), & \dot p(t)=-\nabla P(q(t))+\langle\varphi(t,\cdot),\rho(\cdot)\rangle, \quad t\in\mathbb{R}\end{array}\right| \tag{2.1}$$

Изучается задача Коши для системы (2.1) с начальными данными

$$\varphi(t,x)|_{t=0}=\varphi_0(x),\ \ \psi(t,x)|_{t=0}=\psi_0(x),\ \ q(t)|_{t=0}=q_0,\ \ p(t)|_{t=0}=p_0. \tag{2.2}$$

Обозначим $\Phi(t)=(\varphi(t,\cdot),\psi(t,\cdot))$, $Q(t)=(q(t),p(t))$, $Y(t)=(\Phi(t),Q(t))$. Тогда система (2.1)–(2.2) принимает вид

$$\dot Y(t)=\mathcal{F}(Y(t)),\quad t\in\mathbb{R};\quad Y(t)|_{t=0}=Y_0. \tag{2.3}$$

Предполагается, что матрица $V(x)=(V_{kl}(x))_{k,l=1}^n$ удовлетворяет условиям **V1**–**V4**.

V1 Существуют константы $C,\beta>0$, такие, что $|V_{kl}(x)|\le Ce^{-\beta|x|}$, $x\in\mathbb{Z}^d$.

V2 $V_{kl}(-x)=V_{lk}(x)\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{Z}^d$.

Из условий **V1** и **V2** вытекает, что $\hat V(\theta)=\hat V^*(\theta)$ – действительно-аналитическая эрмитова матрично-значная функция от $\theta\in\mathbb{T}^d$.

V3 $\hat V(\theta)\ge 0$, $\theta\in\mathbb{T}^d$.

V4 Матрица $\hat V(\theta)$ не равна нулю тождественно при $\theta\in\mathbb{T}^d$.

Из условий **V1**, **V2** и **V4** вытекает, что лебегова мера множества $\{\theta\in\mathbb{T}^d:\hat V(\theta)=0\}$ равна нулю.

Пример 2.1. *Условия* **V1**–**V4** *выполнены, в частности, в случае взаимодействия в соседних точках, т.е. когда матрица $V(x)$ имеет вид: $V_{kl}(x)=0$ при $k\ne l$, а при $k=l$*

$$V_{kk}(x)=1\ \textit{при}\ |x|=1,\ \ V_{kk}(0)=2d+m_k^2,\ \ V_{kk}(x)=0\ \textit{при}\ |x|\ge 2. \tag{2.4}$$

Тогда $\hat V_{kk}(\theta)=(2-2\cos\theta_1)+\cdots+(2-2\cos\theta_d)+m_k^2$.

Потенциал $P(q)$ удовлетворяет следующему условию.

(P) $P\in C^2(\mathbb{R}^n)$, и существует константа $\kappa>0$, такая, что

$$P(q)\ge\kappa|q|^2/2,\quad\forall q\in\mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

На функцию взаимодействия ρ мы накладываем следующее условие.

(R) $\rho_0 := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |\hat\rho(\theta)|^2 \|\hat V(\theta)\|^{-1}\, d\theta < \kappa$ с константой κ из оценки (2.5).

Предполагается, что начальные данные Y_0 принадлежат фазовому пространству $\mathcal{E}_\alpha$.

Определение 2.2. *(i) $\mathcal{H}_\alpha \equiv \ell^2_\alpha \oplus \ell^2_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – гильбертово пространство пар $\Phi \equiv (\varphi(x), \psi(x))$ с конечной нормой $\|\Phi\|_\alpha = \|\varphi\|_\alpha + \|\psi\|_\alpha$.*
(ii) $\mathcal{E}_\alpha \equiv \mathcal{H}_\alpha \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – гильбертово пространство векторов $Y \equiv (\Phi(x), q, p)$ с конечной нормой $\|Y\|_\alpha = \|\Phi\|_\alpha + |q| + |p|$.

В Дополнении доказан следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, выполняются условия* **V1–V4**, **(P)** *и* **(R)**, *$\rho \in \ell^2_\alpha$, если $\alpha > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*
(i) для любого $Y_0 \in \mathcal{E}_\alpha$ задача Коши (2.3) имеет и притом единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E}_\alpha)$.
(ii) Отображение $U_t : Y_0 \mapsto Y(t)$ непрерывно на $\mathcal{E}_\alpha$ для любых $t \in \mathbb{R}$.

2.2. Долговременное поведение решений. Чтобы вывести дисперсионные оценки для решений $Y(t)$, предполагается, что $d = n = 1$, $\mathcal{V}$ – дискретный оператор Клейна–Гордона, т.е. $\mathcal{V} = -\Delta_L + m^2$, $m \ge 0$ (см. пример 2.1), и $P(q) = \kappa q^2/2$ с некоторым $\kappa > 0$. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot\varphi(t,x) = \psi(t,x), & \dot\psi(t,x) = (\Delta_L - m^2)\varphi(t,x) + \rho(x) q(t), \quad x \in \mathbb{Z}, \\ \dot q(t) = p(t), & \dot p(t) = -\kappa q(t) + \langle \varphi(t,\cdot), \rho(\cdot)\rangle, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.6}$$

На число κ и функцию ρ накладывается более сильное условие **R1**, чем условие **(R)**.

R1 $\kappa \in \Big(m^2 + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \dfrac{|\hat\rho(\theta)|^2}{2 - 2\cos\theta}\, d\theta,\ 4 + m^2 - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \dfrac{|\hat\rho(\theta)|^2}{2 + 2\cos\theta}\, d\theta\Big)$.

Кроме того, предполагается, что функция ρ удовлетворяет дополнительным условиям **R2–R5**.

R2 ρ – четная функция, $\rho(-x) = \rho(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z}$.

R3 $\rho \in \ell^2_\alpha$ с некоторым $\alpha > 5/2$.

R4 $\hat\rho(0) = \hat\rho(\pi) = 0$.

R5 $\hat\rho(\theta) \ne 0$ для любых $\theta \in \mathbb{T} \setminus \{0, \pm\pi\}$.

Чтобы сформулировать основной результат для рассматриваемой модели, введем следующие обозначения. Пусть W_t обозначает разрешающий оператор задачи Коши для дискретного уравнения Клейна–Гордона (2.7):

$$\left\{\begin{array}{l}\ddot\varphi(t,x)=(\Delta_L-m^2)\varphi(t,x),\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{Z},\\ \varphi(t,x)|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \dot\varphi(t,x)|_{t=0}=\psi_0(x).\end{array}\right. \tag{2.7}$$

Обозначим через W_t' оператор, “формально сопряженный” к W_t:

$$\langle\Phi,W_t'f\rangle=\langle W_t\Phi,f\rangle,\quad \text{где }\ f\in[S(\mathbb{Z})]^2,\quad \Phi\in\mathcal{H}_\alpha,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Здесь $S(\mathbb{Z})$ обозначает класс последовательностей $f(x)$, $x\in\mathbb{Z}$, убывающих быстрее любой степени $|x|$. Действие группы W_t' совпадает с действием группы W_t с точностью до порядка компонент (см. [3, Лемма 4.1]).

Введем векторнозначную функцию $\Xi(x)=(\Xi^0(x),\Xi^1(x))$, где

$$\Xi^j(x)=\int_0^{+\infty}N^{(j)}(s)(W_{-s}'\rho_0)(x)\,ds,\quad x\in\mathbb{Z},\quad j=0,1,\quad \rho_0:=(\rho,0), \tag{2.9}$$

с функцией $N(s)$, определенной в следствии 4.4, и обозначим

$$\Psi^i(x,y)=\int_0^{+\infty}\big((W_s\rho^0)(x)\big)^i\,(W_{-s}'\Xi^0)(y)ds,\ \ x,y\in\mathbb{Z},\ \ \rho^0:=(0,\rho),\ \ i=0,1. \tag{2.10}$$

Введем оператор $Z:\mathcal{H}_0\to\mathcal{E}_{-\alpha}$, $\alpha>5/2$, следующим образом

$$Z:\Phi\to\big(\Phi^0+\langle\Phi(\cdot),\Psi^0(x,\cdot)\rangle,\Phi^1+\langle\Phi(\cdot),\Psi^1(x,\cdot)\rangle,\langle\Phi,\Xi^0\rangle,\langle\Phi,\Xi^1\rangle\big)\,,$$

где $\Phi=(\Phi^0,\Phi^1)$. Из оценок (4.8) и (3.14) вытекает, что $\Xi^j\in\ell^2$, $\|\Psi^i(x,\cdot)\|_0\in\ell^2_{-\alpha}$ для любых $\alpha>5/2$, и Z – ограниченный оператор.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $\alpha>5/2$ и выполнены условия* **R1**–**R5**. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) $U_tY_0=Z(W_t\Phi_0)+r(t)$, где $\|r(t)\|_{-\alpha}\le C\langle t\rangle^{-1/2}\|Y_0\|_0$, если $Y_0\in\mathcal{E}_0$, и $\|r(t)\|_{-\alpha}\le C\langle t\rangle^{-3/2}\|Y_0\|_\alpha$, если $Y_0\in\mathcal{E}_\alpha$.

(ii) Пусть $Y_0\in\mathcal{E}_\alpha$ и $\hat\Phi_0(0)=\hat\Phi_0(\pi)=0$. Обозначим через U_t^0 оператор U_t в случае, когда $\rho\equiv 0$. Тогда существуют операторы $\Omega_\pm:\mathcal{E}_\alpha\to\mathcal{E}_0$, такие, что

$$U_tY_0=U_t^0\Omega_\pm Y_0+r_\pm(t)\qquad t\to\pm\infty, \tag{2.11}$$

где $\Omega_\pm=\lim\limits_{t\to\pm\infty}U_{-t}^0U_t$ и $\|r_\pm(t)\|_0\le C\langle t\rangle^{-1/2}\|Y_0\|_\alpha$.

(iii) Пусть $Y_0\in\mathcal{E}_\alpha$ и $\hat\Phi_0(0)=\hat\Phi_0(\pi)=0$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|U_tY_0\|_{-\alpha}\le C\langle t\rangle^{-3/2}\|Y_0\|_\alpha,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Эта теорема будет доказана ниже в разделах 3–5. Чтобы объяснить основные шаги доказательства, рассмотрим сначала задачу Коши (2.7). Хорошо известно (см., например, [10]), что для любых начальных данных $\Phi_0 \in \mathcal{H}_\alpha$ существует, и притом единственное, решение $\Phi(t) = W_t\Phi_0 \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\alpha)$ задачи (2.7). Кроме того (см. лемму 6.1 в Дополнении), существуют константы $C, \sigma = \sigma(\alpha) < \infty$, такие, что справедлива следующая оценка

$$\|W_t\Phi_0\|_\alpha \le C\langle t\rangle^\sigma \|\Phi_0\|_\alpha, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Используя оператор W_t, перепишем систему (2.6) в виде

$$\Phi(t) = W_t\Phi_0 + \int\limits_0^t W_{t-s}\rho^0 q(s)\,ds, \tag{2.14}$$

$$\ddot{q}(t) = -\kappa q(t) + \langle \rho_0, \Phi(t)\rangle = -\kappa q(t) + \int\limits_0^t K(t-s)q(s)\,ds + F(t), \tag{2.15}$$

где $\Phi(t) = (\varphi(t,\cdot), \psi(t,\cdot))$, $\rho^0 = (0, \rho)$, $\rho_0 = (\rho, 0)$, $F(t) = \langle \rho_0, W_t\Phi_0\rangle$ и $K(t)$ обозначает функцию

$$K(t) := \langle \rho_0, W_t\rho^0\rangle. \tag{2.16}$$

Первый шаг в доказательстве теоремы 2.4 – изучение поведения функции $K(t)$. В разделе 3 мы установим, что $|K(t)| \le C(1+t)^{-3/2}$, $t > 0$. Для вывода этой оценки применяются преобразование Фурье–Лапласа и метод Пэли–Винера, развитый в работах [9, 13] для дискретных уравнений Шредингера и Клейна–Гордона. Этот подход был впервые использован в работе Вайнберга [15] при выводе долговременной асимптотики для решений гиперболических уравнений в $\mathbb{R}^d$. Далее, в разделе 4 изучается уравнение (2.15) с $F(t) \equiv 0$ и доказывается оценка для $q(t)$:

$$|q(t)| + |\dot{q}(t)| \le C(1+t)^{-3/2}(|q_0| + |p_0|) \quad \text{для любых} \ \ t \ge 0. \tag{2.17}$$

Чтобы вывести эту оценку, мы изучаем аналитические свойства преобразования Фурье–Лапласа $\tilde{q}(\omega)$ функции $q(t)$ для комплексных значений ω и выводим оценку (2.12) в случае $\Phi_0 \equiv 0$. В общем случае доказательство оценки для $q(t)$ основано на оценке (2.17) и формуле вариации произвольной постоянной. Оценка (2.12) для решений $\Phi(t)$ вытекает из представления (2.14). Эти оценки позволяют доказать существование волновых операторов $\Omega_\pm$ и представление (2.11).

3. Оценка функции $K(t)$

В этом разделе докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* **R2**–**R4**. *Тогда справедлива следующая оценка*

$$|K(t)| \le C(1+|t|)^{-3/2}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Поскольку $K(t) = \langle \rho_0, W_t\rho^0\rangle$, мы сначала изучим свойства оператора W_t, используя результаты [9] и [13].

3.1. Свойства резольвенты дискретного оператора Клейна–Гордона. Рассмотрим асимптотические свойства решений $\Phi(t,x) = W_t\Phi_0$, $x \in \mathbb{Z}$, $t \ge 0$, задачи (2.7), используя преобразование Фурье–Лапласа. В силу оценки (2.13) преобразование Фурье–Лапласа по переменной t

$$\tilde\varphi(\omega,x) = \int_0^{+\infty} e^{i\omega t}\varphi(t,x)\,dt, \quad \Im\omega > 0, \tag{3.2}$$

существует по крайней мере для $\Im\omega > 0$ и удовлетворяет следующему уравнению

$$(-\Delta_L + m^2 - \omega^2)\tilde\varphi(\omega,x) = \psi_0(x) - i\omega\varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}, \quad \Im\omega > 0. \tag{3.3}$$

Построим решение уравнения (3.3). Отметим, что преобразование Фурье оператора $-\Delta_L + m^2$ есть оператор умножения на $2 - 2\cos\theta + m^2$. Таким образом, $-\Delta_L + m^2$ является самосопряженным оператором, и его спектр является абсолютно непрерывным и совпадает с областью значений функции $2 - 2\cos\theta + m^2$, т.е. $[m^2, 4+m^2]$. Обозначим через Λ объединение двух отрезков в $\mathbb{R}$: $\Lambda := [-\sqrt{4+m^2}, -m] \cup [m, \sqrt{4+m^2}]$. Пусть φ – решение уравнения $(-\Delta_L + m^2 - \omega^2)\varphi = f$, где $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Введем оператор R_ω следующим образом: $\varphi = R_\omega f = (-\Delta_L + m^2 - \omega^2)^{-1} f$.

Применяя обратное преобразование Фурье–Лапласа относительно переменной ω, перепишем решение $\varphi(t,x)$ задачи (2.7) в виде

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} e^{-i\omega t} R_\omega(\psi_0(x) - i\omega\varphi_0(x))\,d\omega,\ x \in \mathbb{Z},\ t > 0,\ \mu > 0. \tag{3.4}$$

Для вывода асимптотики $W_t\Phi_0$ мы сначала перечислим свойства **I**–**V** оператора $R_\omega = (-\Delta_L + m^2 - \omega^2)^{-1}$, $\omega \in \mathbb{C}$ (см. [6, 13, 9]). Чтобы сформулировать их, обозначим через $B(\alpha,\alpha') = \mathcal{L}(\ell^2_\alpha, \ell^2_{\alpha'})$ пространство ограниченных линейных

операторов из ℓ^2_α в $\ell^2_{\alpha'}$, а через $\mathrm{Op}(K(x,y))$ – оператор с ядром $K(x,y)$.
I. Для $\omega\in\mathbb{C}_\Lambda=\mathbb{C}\setminus\Lambda$ резольвента R_ω является оператором с ядром $R_\omega(x,y)$,

$$R_\omega(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{-i\theta(x-y)}}{2-2\cos\theta+m^2-\omega^2}\,d\theta,\quad x,y\in\mathbb{Z}.$$

В силу теоремы Коши о вычетах имеем

$$R_\omega(x,y)=-i\frac{e^{-i\theta(\omega)|x-y|}}{2\sin(\theta(\omega))},\quad x,y\in\mathbb{Z},\quad \omega\in\mathbb{C}_\Lambda, \tag{3.5}$$

где функция $\theta(\omega)$ определена в следующей лемме (см. [9, Лемма 2.1]).

Лемма 3.1. *Для $\omega\in\mathbb{C}_\Lambda\equiv\mathbb{C}\setminus\Lambda$ уравнение $2-2\cos\theta+m^2=\omega^2$ имеет единственное решение (обозначим его через $\theta(\omega)$) в области* $\{\theta\in\mathbb{C}:\ \Im\theta<0,\ -\pi<\Re\theta\le\pi\}$.

II. Пусть $\omega\in\mathbb{C}_\Lambda$. Тогда R_ω является аналитической операторнозначной функцией в комплексной области ω с разрезом вдоль отрезков из Λ. Более того, последовательность $\{e^{-i\theta(\omega)|x|}\}$, $x\in\mathbb{Z}$, экспоненциально убывает при $|x|\to\infty$. Следовательно, R_ω с $\omega\in\mathbb{C}_\Lambda$ является ограниченным оператором в $\ell^2(\mathbb{Z})$.
III. Обозначим через Λ_0 множество концов отрезков из Λ:

$$\Lambda_0:=\{\pm m,\pm\sqrt{4+m^2}\}.$$

Положим $\theta(\omega\pm i0):=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\theta(\omega\pm i\varepsilon)$. Для $\omega\in\Lambda\setminus\Lambda_0$ и $x,y\in\mathbb{Z}$ справедлива поточечная сходимость

$$R_{\omega\pm i\varepsilon}(x,y)\to R_{\omega\pm i0}(x,y)\quad \text{при } \varepsilon\to+0.$$

Более того, $|\theta(\omega\pm i\varepsilon)|\le C(\omega)$ и $|\sin\theta(\omega)|>0$ при $\omega\in\Lambda\setminus\Lambda_0$. Поэтому $|R_{\omega\pm i\varepsilon}(x,y)|\le C(\omega)$ при $\omega\in\Lambda\setminus\Lambda_0$. Следовательно, для любых $\alpha>1/2$ и $\omega\notin\Lambda_0$ имеем

$$\sum_{x,y\in\mathbb{Z}}|R_{\omega\pm i\varepsilon}(x,y)-R_{\omega\pm i0}(x,y)|^2\,\langle x\rangle^{-2\alpha}\langle y\rangle^{-2\alpha}\to 0,\quad \varepsilon\to+0,$$

в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Таким образом, если $\omega\in\Lambda\setminus\Lambda_0$, то оператор $R_{\omega\pm i\varepsilon}$ сходится к $R_{\omega\pm i0}$ при $\varepsilon\to+0$ как оператор Гильберта–Шмидта в пространстве $B(\alpha,-\alpha)$ с $\alpha>1/2$.

IV. $\overline{\theta(\omega)}=-\theta(\bar\omega)$ для $\omega\in\mathbb{C}_\Lambda$. Поэтому $R_{\omega-i0}(x,y)=\overline{R_{\omega+i0}(x,y)}$ для $\omega\in\Lambda\setminus\Lambda_0$, $x,y\in\mathbb{Z}$.

V. Оператор $R_{\omega\pm i0}$ расходится вблизи точек $\omega\in\Lambda_0$, так как $\sin\theta(\omega+i0)$ равен нулю в этих точках. Непосредственно вычисляя, получим формально разложение Пьюзо оператора R_ω при $\omega\to\omega_0+i0$, $\omega_0\in\Lambda_0$. В самом деле, при $\omega\to\pm m+i0$ $(m\neq 0)$ имеем

$$R_\omega(x,y)=\frac{i}{2}(\omega^2-m^2)^{-1/2}-\frac{1}{2}|x-y|-\frac{i}{16}(4|x-y|^2-1)(\omega^2-m^2)^{1/2}+\dots,$$

где ветвь комплексного корня $\sqrt{\omega^2-m^2}$ выбирается из условия $\Im\sqrt{\omega^2-m^2}>0$. Этот выбор вытекает из условия $\Im\theta(\omega)<0$. Следовательно, в случае $m\neq 0$,

$$R_\omega(x,y)\sim\sum_{j=-1}^{\infty}(\omega^2-m^2)^{j/2}R_j(x,y),\quad \omega\to\pm m+i0, \tag{3.6}$$

где $R_j(x,y)=\sum_{k=0}^{j+1}c_{kj}|x-y|^k$ с некоторыми $c_{kj}\in\mathbb{C}$, $j\geq -1$. В случае $m=0$,

$$R_\omega(x,y)\sim\sum_{j=-1}^{\infty}\omega^j R_j(x,y),\quad \omega\to 0,$$

с теми же слагаемыми $R_j(x,y)$, как в (3.6). При $\omega\to\pm\sqrt{4+m^2}+i0$,

$$R_\omega(x,y)=(-1)^{|x-y|}\Big(\frac{i}{2}(4+m^2-\omega^2)^{-1/2}+\frac{1}{2}|x-y|+\dots\Big), \tag{3.7}$$

где $\Im\sqrt{4+m^2-\omega^2}>0$. Применяя следующие оценки к членам $R_j(x,y)$

$$\sum_{x,y\in\mathbb{Z}}\langle x\rangle^{-2\alpha}|x-y|^{2p}\langle y\rangle^{-2\alpha}<\infty,\quad \alpha>\frac{1}{2}+p,\quad \text{с любым }\ p=0,1,2,\dots,$$

приходим к следующему результату.

Лемма 3.2. *Резольвента R_ω имеет следующее разложение*

$$R_\omega=\sum_{j=-1}^{N}(\omega^2-m^2)^{j/2}R_j+r_N(\omega)\quad \textit{при }\ \omega\to\pm m+i0, \tag{3.8}$$

где операторы $R_j=\mathrm{Op}(R_j(x,y))\in B(\alpha,-\alpha)$, если $\alpha>j+3/2$, и $\|r_N(\omega)\|_{B(\alpha,-\alpha)}=O(|\omega^2-m^2|^{(N+1)/2})$, если $\alpha>5/2+N$. Аналогичное разложение справедливо при $\omega\to\pm\sqrt{4+m^2}+i0$.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 3.2 из [9].

Следствие 3.2. *Пусть* $f \in \ell^2_\alpha$, $\alpha > 5/2$. *При* $\omega \to \pm m + i0$ *получаем*

$$(R_\omega f)(x) = \frac{i\hat{f}(0)}{2\sqrt{\omega^2 - m^2}} - \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |x-y| f(y) + r_1(\omega) f,$$

где $\|r_1(\omega) f\|_{-\alpha} \le C|\omega^2 - m^2|^{1/2} \|f\|_\alpha$. *При* $\omega \to \pm\sqrt{4+m^2} + i0$,

$$(R_\omega f)(x) = \frac{i(-1)^x \hat{f}(\pi)}{2\sqrt{4+m^2-\omega^2}} + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} (-1)^{|x-y|}|x-y| f(y) + r_2(\omega) f,$$

где $\|r_2(\omega) f\|_{-\alpha} \le C|4+m^2-\omega^2|^{1/2}\|f\|_\alpha$.

3.2. Доказательство оценки (3.1). Применяя преобразование Фурье – Лапласа к функции $K(t)$, определенной в (2.16), получаем $\tilde{K}(\omega) = \langle \rho, R_\omega \rho\rangle$, $\omega \in \mathbb{C}$. Следовательно, из свойств **I**–**V** оператора R_ω вытекают следующие свойства для $\tilde{K}(\omega)$.

(i) Если $\omega \in \mathbb{C}_\Lambda \equiv \mathbb{C} \setminus \Lambda$, то $\tilde{K}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{|\hat\rho(\theta)|^2\, d\theta}{2 - 2\cos\theta + m^2 - \omega^2}$.

(ii) Если $\omega \in \mathbb{C}_\Lambda$, то $\tilde{K}(\omega)$ – аналитическая функция. Более того,

$$|\tilde{K}(\omega)| \sim C|\omega|^{-2} \quad \text{при} \ \ |\omega| \to \infty. \tag{3.9}$$

(iii) $\forall \omega \in \Lambda \setminus \Lambda_0$, $\tilde{K}(\omega \pm i\varepsilon) \to \tilde{K}(\omega \pm i0)$ при $\varepsilon \to +0$ в силу условия **R3**.

(iv) $\forall \omega \in \mathbb{C}_\Lambda$, $\tilde{K}(\bar\omega) = \overline{\tilde{K}(\omega)}$. Поэтому $\tilde{K}(\omega - i0) = \overline{\tilde{K}(\omega + i0)}$ для $\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_0$.

(v) Вблизи особых точек из множества Λ_0 из разложения резольвенты R_ω (см. лемму 3.2) вытекает следующая асимптотика для $\tilde{K}(\omega)$:

$$\tilde{K}(\omega) \sim \sum_{j=-1}^{+\infty} (\omega^2 - m^2)^{j/2} K_j \quad \text{при} \ \ \omega \to \pm m + i0, \tag{3.10}$$

где $K_j = \langle \rho, R_j \rho\rangle$ с теми же операторами R_j, как в формуле (3.8). В частности, $K_{-1} = (i/2)|\hat\rho(0)|^2$, $K_0 = -(1/2)\sum\limits_{x,y\in\mathbb{Z}} \rho(x)|x-y|\rho(y)$. Также

$$\tilde{K}(\omega) \sim \sum_{j=-1}^{+\infty} (4 + m^2 - \omega^2)^{j/2} K'_j \quad \text{при} \ \omega \to \pm\sqrt{4+m^2} + i0, \tag{3.11}$$

где $K'_{-1} = (i/2)|\hat\rho(\pi)|^2$, $K'_0 = (1/2)\sum\limits_{x,y\in\mathbb{Z}} \rho(x)(-1)^{|x-y|}|x-y|\rho(y)$. В частности, если $\hat\rho(0) = 0$, то в случае $m \ne 0$,

$$|\Im \tilde{K}(\omega)| \le C|\omega^2 - m^2|^{1/2}\|\rho\|^2_\alpha \quad \text{при} \ \omega \to \pm m + i0, \quad \alpha > 5/2,$$

а в случае $m=0$, $\Im\tilde K(\omega)=O(|\omega|)$ при $\omega\to 0$. Аналогично, если $\hat\rho(\pi)=0$, то

$$|\Im\tilde K(\omega)|\le C|4+m^2-\omega^2|^{1/2}\|\rho\|_\alpha^2,\quad \omega\to\pm\sqrt{4+m^2}+i0,\quad \alpha>5/2.$$

Чтобы доказать оценку (3.1), используем свойства **(i)–(v)** функции $\tilde K(\omega)$ и применим методы работы [9]. Перепишем $K(t)$ в виде

$$K(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Im\omega=\mu>0} e^{-i\omega t}\tilde K(\omega)\,d\omega=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} e^{-i\omega t}\tilde K(\omega)\,d\omega,\quad t>0,$$

где $\Gamma=\{\omega\in\mathbb{C}:|\omega|=R\}$, $R>\sqrt{4+m^2}$, и контур Γ ориентирован против часовой стрелки. Так как $\tilde K(\omega)$ – аналитическая функция на множестве $\mathbb{C}\setminus\Lambda$, мы можем изменить контур интегрирования на Γ_ε, где Γ_ε окружает отрезки из Λ и принадлежит ε-окрестности Λ. В пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем

$$\begin{aligned}K(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_\Lambda e^{-i\omega t}\Big(\tilde K(\omega+i0)-\tilde K(\omega-i0)\Big)\,d\omega\\&=\frac{i}{\pi}\int_\Lambda e^{-i\omega t}\Im\tilde K(\omega+i0)\,d\omega=\sum_{\pm,j=1}^{2}\frac{i}{\pi}\int_\Lambda e^{-i\omega t}P_j^\pm(\omega)\,d\omega,\ t>0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Здесь $P_j^\pm(\omega):=\zeta_j^\pm(\omega)\Im\tilde K(\omega+i0)$, где $\zeta_j^\pm(\omega)$ – гладкие функции, такие, что $\sum\limits_{\pm,j}\zeta_j^\pm(\omega)=1$, $\omega\in\mathbb{R}$, $\operatorname{supp}\zeta_1^\pm\subset\mathcal{O}(\pm m)$, $\operatorname{supp}\zeta_2^\pm\subset\mathcal{O}(\pm\sqrt{4+m^2})$ (через $\mathcal{O}(a)$ обозначается окрестность точки $\omega=a$). В случае $m=0$ вместо $\zeta_1^\pm$ ($P_1^\pm$) введем функцию ζ_1 (соответственно, P_1) с $\operatorname{supp}\zeta_1\subset\mathcal{O}(0)$. Из свойства **(v)** вытекает, что если $\hat\rho(0)=0$, то при $\omega\to\pm m+i0$,

$$P_1^\pm(\omega)=O(|\omega^2-m^2|^{1/2}),\ \text{ если }\ m\ne 0,\ \ P_1(\omega)=O(|\omega|),\ \text{ если }\ m=0.$$

Если $\hat\rho(\pi)=0$, то $P_2^\pm(\omega)=O(|4+m^2-\omega^2|^{1/2})$ при $\omega\to\pm\sqrt{4+m^2}+i0$. Следовательно, применяя лемму Като и Йенсена [8, Лемма 10.2] или лемму Вайнберга [14, Лемма 2], получаем при $t\to\infty$

$$K(t)=\sum_{\pm,j=1,2}\frac{i}{\pi}\int_\Lambda e^{-i\omega t}P_j^\pm(\omega)\,d\omega=\begin{cases}O(t^{-3/2}), & \text{если }\ \hat\rho(0)=\hat\rho(\pi)=0\\ O(t^{-1/2}) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Формально доказательство этого факта основано на известной оценке

$$\Big|\int\limits_{|\omega|=m+1} e^{-i\omega t}(\sqrt{\omega^2-m^2})^j\,d\omega\Big|\le C\langle t\rangle^{-1-j/2}\qquad\text{с нечетными } j\tag{3.13}$$

(см., например, [14, с.144]). Оценка (3.1) при $t>0$ доказана. Доказательство при $t<0$ аналогично.

Замечание 3.3. *(i) Если условие* **R4** *не выполнено, то* $|K(t)| \le C\langle t\rangle^{-1/2}$.
(ii) Пусть $\Phi_0 \in \mathcal{H}_\alpha$ *с* $\alpha > 5/2$. *Если* $\hat{\Phi}_0(0) = \hat{\Phi}_0(\pi) = 0$, *то*

$$\|W_t\Phi_0\|_{-\alpha} \le C\langle t\rangle^{-3/2}\|\Phi_0\|_\alpha, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

4. Доказательство оценки (2.17)

Сначала рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.15) с $F(t) \equiv 0$:

$$\ddot{q}(t) = -\kappa q(t) + \int_0^t K(t-s)q(s)\,ds, \quad t > 0, \tag{4.1}$$

$$q(t)|_{t=0} = q_0, \quad \dot{q}(t)|_{t=0} = p_0. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* **R1**–**R5**. *Тогда решения задачи (4.1)–(4.2) удовлетворяют следующей оценке*

$$|q(t)| + |\dot{q}(t)| \le C(1+t)^{-3/2}(|q_0| + |p_0|) \quad \textit{для любых } t \ge 0.$$

Чтобы доказать теорему 4.1, применим технику, развитую в работах [9, 13]. В преобразовании Фурье–Лапласа уравнение (4.1) принимает вид

$$-\omega^2\tilde{q}(\omega) = -\kappa\tilde{q}(\omega) + \tilde{K}(\omega)\tilde{q}(\omega) + p_0 - i\omega q_0. \tag{4.3}$$

Перепишем уравнение (4.3) в виде $\tilde{q}(\omega) = [-\omega^2 + \kappa - \tilde{K}(\omega)]^{-1}(p_0 - i\omega q_0) \equiv \tilde{N}(\omega)(p_0 - i\omega q_0)$, где, по определению,

$$\tilde{N}(\omega) := \tilde{D}^{-1}(\omega), \quad \tilde{D}(\omega) := -\omega^2 + \kappa - \tilde{K}(\omega) \quad \text{при } \Im\omega > 0. \tag{4.4}$$

Применяя обратное преобразование Фурье–Лапласа, имеем

$$N(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Im\omega=\mu>0} e^{-i\omega t}\tilde{N}(\omega)\,d\omega, \quad t > 0, \quad \text{с некоторым } \mu > 0.$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* **R1**–**R5**. *Тогда*

$$|N(t)| \le C(1+t)^{-3/2}, \quad t \ge 0. \tag{4.5}$$

Чтобы доказать эту теорему, мы сначала изучим свойства функций $\tilde{D}(\omega)$ и $\tilde{N}(\omega)$ при $\omega \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) верхнюю (соответственно, нижнюю) полуплоскость, $\mathbb{C}_\pm = \{\omega \in \mathbb{C} :\ \pm\Im\omega > 0\}$.

Лемма 4.1. *(i) Для любых* $K > 0$ *существует константа* $C(K) > 0$, *такая, что для любых* $\mu \in \mathbb{R}$, *таких, что* $|\mu| \le K$, *справедлива оценка* $|\tilde{D}(\nu + i\mu)| \ge C(K)\nu^2$, $\nu \to \infty$. *(ii)* $\tilde{D}(\omega) \ne 0$ *для* $\omega \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. *(iii)* $\tilde{D}(\omega) \ne 0$ *для* $\omega \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$.

Доказательство. (i) Заметим, что $|\tilde{K}(\omega)| \to 0$ при $|\omega| \to \infty$. Поэтому $(\tilde{D}(\omega))^{-1}$ существует для больших $|\omega|$. Более того, пункт (i) вытекает из (4.4) и (3.9). Следовательно, $|\tilde{N}(\nu + i\mu)| \le C_1|\nu|^{-2}$ при $\nu \to \infty$ для любых $\mu \in \mathbb{R}$, таких, что $|\mu| \le K$.

(ii) Сначала заметим, что $\tilde{N}(\omega)$ – мероморфная функция при $\omega \in \mathbb{C}_\Lambda$. Из формулы (4.4) и свойства **(ii)** для $\tilde{K}(\omega)$ вытекает аналитичность функции $\tilde{D}(\omega)$ при $\omega \in \mathbb{C}_\Lambda$. Проверим, что $\tilde{D}(\omega) \ne 0$ для любых $\omega \in \mathbb{C}_+$. Действительно, допустим, что $\tilde{D}(\omega_0) = 0$ для некоторого $\omega_0 \in \mathbb{C}_+$. Введем функцию $Y(t) = e^{-i\omega_0 t}Y_{\omega_0}$, $t \ge 0$, такую, что

$$Y_{\omega_0} \equiv Y_{\omega_0}(\cdot) = (R_{\omega_0}\rho; -i\omega_0 R_{\omega_0}\rho; 1; -i\omega_0).$$

Легко проверить, что $Y(t)$ – решение системы (2.6) с начальными данными Y_{ω_0}. С другой стороны, гамильтониан $H(Y(t))$ имеем вид $H(Y(t)) = e^{2t\,\Im\omega_0}H(Y_{\omega_0})$ для любых $t \ge 0$, где $H(Y_{\omega_0}) > 0$ (см. замечание 6.2 в Дополнении). Так как $\Im\omega_0 > 0$ и $Y_{\omega_0} \in \mathcal{E}_0$, то этот экспоненциальный рост противоречит энергетической оценке (6.17). Таким образом, $\tilde{D}(\omega) \ne 0$ $\forall\omega \in \mathbb{C}_+$. Из свойства **(iv)** для $\tilde{K}(\omega)$ вытекает, что $\overline{\tilde{D}(\omega)} = \tilde{D}(\bar{\omega})$ при $\omega \in \mathbb{C}_\Lambda$. Следовательно, $\tilde{D}(\omega) \ne 0$ для любых $\omega \in \mathbb{C}_-$.

(iii) Изучим $\tilde{D}(\omega)$ при $\omega \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$. Для $|\omega| > \sqrt{4 + m^2}$

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|\hat{\rho}(\theta)|^2\,d\theta}{2 - 2\cos\theta + m^2 - \omega^2} \ge \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|\hat{\rho}(\theta)|^2\,d\theta}{-2 - 2\cos\theta}.$$

Поэтому для таких значений ω

$$\tilde{D}(\omega) = -\omega^2 + \kappa - \tilde{K}(\omega) < -4 - m^2 + \kappa + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|\hat{\rho}(\theta)|^2}{2 + 2\cos\theta}\,d\theta < 0,$$

в силу условия **R1**. Пусть $m \ne 0$ и $\omega \in (-m, 0) \cup (0, m)$. Следовательно,

$$\tilde{K}(\omega) \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|\hat{\rho}(\theta)|^2}{2 - 2\cos\theta}\,d\theta.$$

Поэтому для $|\omega| < m$

$$\tilde{D}(\omega) = -\omega^2 + \kappa - \tilde{K}(\omega) > -m^2 + \kappa - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|\hat{\rho}(\theta)|^2}{2 - 2\cos\theta}\,d\theta > 0,$$

в силу условий **R1** и **R4**. Лемма 4.1 доказана.

Положим $\tilde{D}(\omega + i0) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \tilde{D}(\omega + i\varepsilon)$, $\omega \in \Lambda$. Обозначим $\theta_+ = \theta(\omega + i0)$.

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия* **R1**–**R5**. *Тогда* $\tilde{D}(\omega + i0) \ne 0$ *для любых* $\omega \in \Lambda$.

Доказательство. Пусть $\omega\in\Lambda\setminus\Lambda_0=(-\sqrt{4+m^2},-m)\cup(m,\sqrt{4+m^2})$. В этом случае $\Im\theta_+=0$ и $\Re\theta_+\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$. Следовательно для таких значений ω, в силу формулы (3.5) и условий **R2** и **R5**,

$$\begin{aligned}\Im\tilde{D}(\omega+i0) &= -\Im\tilde{K}(\omega+i0)=\Im\left(i\frac{\sum_{x,y\in\mathbb{Z}}\rho(x)e^{-i\theta_+|x-y|}\rho(y)}{2\sin\theta_+}\right)\\ &= \frac{\sum_{x,y\in\mathbb{Z}}\rho(x)\cos\left(\theta_+(x-y)\right)\rho(y)}{2\sin\theta_+}=\frac{|\hat{\rho}(\theta_+)|^2}{2\sin\theta_+}\neq 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{D}(\omega+i0)\neq 0$ при $\omega\in\Lambda\setminus\Lambda_0$.

Теперь изучим поведение $\tilde{D}(\omega+i0)$ в окрестности особых точек $\omega\in\Lambda_0$. При $\omega\to\pm m+i0$ имеет место разложение (3.10) для $\tilde{K}(\omega)$. Следовательно, при $\omega\to\pm m+i0$,

$$\tilde{D}(\omega)\sim -m^2+\kappa-(\omega^2-m^2)^{-1/2}K_{-1}-K_0-(\omega^2-m^2)^{1/2}K_1+\ldots.$$

В силу условия **R4**, $K_{-1}=(i/2)|\hat{\rho}(0)|^2=0$. Положим $C_0:=\kappa-m^2-K_0$. Поскольку $K_0=(2\pi)^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\frac{|\hat{\rho}(\theta)|^2}{2-2\cos\theta}\,d\theta$, то $C_0\neq 0$ в силу условия **R1**. Следовательно,

$$(\tilde{D}(\omega))^{-1}\sim\left\{\begin{array}{lll} C_0^{-1}+C_1\sqrt{\omega^2-m^2}+\ldots, & \omega\to\pm m+i0, & m\neq 0,\\ C_0^{-1}+C_1\omega+\ldots, & \omega\to 0, & m=0,\end{array}\right. \tag{4.6}$$

где $C_1=(C_0)^{-2}K_1$. Используя разложение (3.11) и условие **R4**, в окрестности точек $\omega=\pm\sqrt{4+m^2}$ имеем

$$\tilde{D}(\omega)\sim\kappa-(4+m^2)-K_0'-(4+m^2-\omega^2)^{1/2}K_1'+\ldots.$$

Положим $C_0':=\kappa-(4+m^2)-K_0'$. Так как $K_0'=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\frac{|\hat{\rho}(\theta)|^2}{2+2\cos\theta}\,d\theta$, то $C_0'\neq 0$ в силу условия **R1**. Следовательно,

$$(\tilde{D}(\omega))^{-1}\sim(C_0')^{-1}+C_1'(4+m^2-\omega^2)^{1/2}+\ldots,\ \omega\to\pm\sqrt{4+m^2}+i0, \tag{4.7}$$

где $C_1'=(C_0')^{-2}K_1'$. Лемма 4.2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 4.2. Оно аналогично выводу теоремы 3.1. Используя леммы 4.1 и 4.2, получаем

$$N(t)=\frac{i}{\pi}\int_{\Lambda}e^{-i\omega t}\Im\tilde{N}(\omega+i0)\,d\omega=\sum_{\pm}\sum_{j=1}^{2}\frac{i}{\pi}\int_{\Lambda}e^{-i\omega t}\tilde{P}_j^{\pm}(\omega)\,d\omega,\ t>0.$$

Здесь $\tilde{P}_j^{\pm}(\omega):=\zeta_j^{\pm}(\omega)\Im\tilde{N}(\omega+i0)$ с теми же функциями $\zeta_j^{\pm}(\omega)$, что и в формуле (3.12). Следовательно, из (4.6), (4.7) и (3.13) вытекает оценка (4.5).

Следствие 4.3. *Пусть выполнены условия* **R1**–**R5**. *Тогда*

$$|N^{(j)}(t)| \le C(1+t)^{-3/2}, \quad t>0, \quad j=0{,}1{,}2. \tag{4.8}$$

Доказательство этой оценки аналогично теореме 4.2.

Следствие 4.4. *Обозначим через $S(t)$ разрешающий оператор задачи Коши (4.1), (4.2). Тогда для решений задачи (2.15), (4.2) справедливо следующее представление:*

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ \dot q(t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ F(t-\tau) \end{pmatrix} d\tau, \quad t>0.$$

Матрица $S(t)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \dot N(t) & N(t) \\ \ddot N(t) & \dot N(t) \end{pmatrix}$ с матричными членами, удовлетворяющими оценке (4.8).

5. Доказательство теоремы 2.4

(i): Проверим сначала следующее представление

$$q^{(j)}(t) = \langle W_t\Phi_0, \Xi^j\rangle + r_j(t), \quad j=0{,}1, \quad t>0, \tag{5.1}$$

где $|r_j(t)| \le C\langle t\rangle^{-\nu/2}$ с $\nu=1$, если $Y_0\in\mathcal{E}_0$, и $\nu=3$, если $Y_0\in\mathcal{E}_\alpha$. Действительно, во-первых, из теоремы 4.2 и следствия 4.4 вытекает, что

$$\Big|q^{(j)}(t) - \int_0^t N^{(j)}(s)F(t-s)\,ds\Big| \le C\langle t\rangle^{-3/2}. \tag{5.2}$$

Во-вторых, в силу оценки (5.7) в случае, когда $Y_0\in\mathcal{E}_\alpha$, и ограниченности функции $F(t)$ в случае, когда $Y_0\in\mathcal{E}_0$, получаем

$$\Big|\int_t^{+\infty} N^{(j)}(s)F(t-s)\,ds\Big| \le C\langle t\rangle^{-\nu/2}, \quad t>0. \tag{5.3}$$

Таким образом, формула (5.1) вытекает из (5.2), (5.3) и (2.9), так как $F(t-s) = \langle W_t\Phi_0, W'_{-s}\rho_0\rangle$.

Используя (2.14) и (5.1), перепишем $\Phi(t) = \big(\Phi^0(t), \Phi^1(t)\big) \equiv (\varphi(t,\cdot), \psi(t,\cdot))$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi^i(t) &= (W_t\Phi_0)^i + \int_0^t \big(W_s\rho^0\big)^i \Big(\langle W_{t-s}\Phi_0, \Xi^0\rangle + r_0(t-s)\Big)\,ds \\ &= (W_t\Phi_0)^i + \langle W_t\Phi_0, \Psi^i(x,\cdot)\rangle + r_3(t,x), \quad t>0, \quad i=0{,}1, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\|r_3(t,\cdot)\|_{-\alpha} \le C\langle t\rangle^{-\nu/2}$ с числом ν, введенным выше. Докажем разложение (5.4). В силу условия **R4** и оценки (3.14) получаем $\|W_s\rho^0\|_{-\alpha} \le C\langle s\rangle^{-3/2}\|\rho^0\|_\alpha$. Следовательно,

$$\Big\|\int_0^t W_s\rho^0 r_0(t-s)\,ds\Big\|_{-\alpha} \le C\langle t\rangle^{-\nu/2}, \tag{5.5}$$

где $r_0(t)$ – остаточный член из (5.1). Более того, так как $\hat{\Xi}(0)=\hat{\Xi}(\pi)=0$ (см. определение (2.9) и условие **R4**), то $\|W'_\tau\Xi^0\|_{-\alpha} \le C\langle\tau\rangle^{-3/2}$ в силу (3.14). Поэтому

$$\Big\|\int_t^\infty W_s\rho^0\langle\Phi_0, W'_{t-s}\Xi^0\rangle\,ds\Big\|_{-\alpha} \le C\langle t\rangle^{-\nu/2}. \tag{5.6}$$

Таким образом, разложение (5.4) вытекает из формулы (2.10) и оценок (5.5) и (5.6). Заметим, что из пункта (i) теоремы 2.4 вытекает оценка (2.12), так как если $\Phi_0\in\mathcal{H}_\alpha$ и $\hat\Phi_0(0)=\hat\Phi_0(\pi)=0$, то $\|Z(W_t\Phi_0)\|_{-\alpha}\le C\langle t\rangle^{-3/2}\|\Phi_0\|_\alpha$ в силу формул (2.9) и (2.10) и оценки (4.8).

(ii): Для доказательства пункта (ii) теоремы 2.4 применим классический метод Кука (см. например, [16]). Положим $U_t=e^{\mathcal{L}t}$ и $U_t^0=e^{\mathcal{L}_0 t}$, где $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+B$, $\mathcal{L}_0Y=(\psi,(\Delta-m^2)\varphi,p,-\kappa q)$, оператор B определяется следующим соотношением: $BY=(0,\rho(x)q,0,\langle\varphi,\rho\rangle)$ для $Y=(\varphi,\psi,q,p)$. Следовательно, используя интегральное представление Дюамеля

$$U_tY_0=U_t^0Y_0+\int_0^t U_{t-s}^0B(U_sY_0)\,ds,\quad t\in\mathbb{R},$$

и применяя оценку (2.12), получаем, что $\Omega_\pm\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_\alpha,\mathcal{E}_0)$ и

$$\begin{aligned} r_\pm(t) \;&:=\; \int_t^{\pm\infty}\|U_{t-s}^0B(Y(s))\|\,ds \le \int_t^{\pm\infty}\Big[\|W_{t-s}\rho^0\|\,|q(s)| \\ &\quad+\Big(|\cos(\sqrt{\kappa}(t-s))|+|\sin(\sqrt{\kappa}(t-s))|/\sqrt{\kappa}\Big)|\langle\varphi(s),\rho\rangle|\Big]\,ds \\ &\le\; C_1\langle t\rangle^{-1/2}\|Y_0\|_\alpha\to 0,\ \ t\to\pm\infty. \end{aligned}$$

(iii): Из условия **R4** и оценки (3.14) следует, что

$$|F(t)|=|\,\langle\Phi_0,W'_t\rho_0\rangle\,|\le\|\Phi_0\|_\alpha\|W'_t\rho_0\|_{-\alpha}\le C\langle t\rangle^{-3/2},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Следовательно, из следствия 4.4 и формулы (4.8) вытекает оценка (2.12) для $q^{(j)}(t)$. Применяя уравнение (2.14), оценку (2.12) для $q(t)$ и формулу (3.14), получаем оценку (2.12) для $\Phi(t)$.

6. Дополнение: Существование решений

Рассмотрим задачу Коши для гармонического кристалла в $\mathbb{Z}^d$:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t,x) = -(\mathcal{V}\varphi)(t,x) \equiv -\sum\limits_{x'\in\mathbb{Z}^d} V(x-x')\varphi(t,x'), \ \ t\in\mathbb{R}, \ \ x\in\mathbb{Z}^d, \\ \varphi(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \dot{\varphi}(t,x)|_{t=0} = \psi_0(x), \ \ x\in\mathbb{Z}^d. \end{cases} \tag{6.1}$$

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ и выполнены условия* **V1–V3**. *Тогда*
(i) для любых $\Phi_0 = (\varphi_0,\psi_0)\in\mathcal{H}_\alpha$ существует единственное решение $\Phi(t) = (\varphi(t,x),\dot{\varphi}(t,x))\in C(\mathbb{R},\mathcal{H}_\alpha)$ задачи Коши (6.1).
(ii) Для любых $t\in\mathbb{R}$ отображение $W_t:\Phi_0\mapsto\Phi(t)$ непрерывно в $\mathcal{H}_\alpha$, и существуют константы $C,\sigma=\sigma(\alpha,d)<\infty$, такие, что

$$\|W_t\Phi_0\|_\alpha \le C\langle t\rangle^\sigma\|\Phi_0\|_\alpha, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Эта лемма доказана в [3] (см. также [10]). Она вытекает из следующего представления для $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = W_t\Phi_0 = \sum_{x'\in\mathbb{Z}^d}\mathcal{G}_t(x-x')\Phi_0(x'), \quad t\in\mathbb{R}, \quad x\in\mathbb{Z}^d. \tag{6.3}$$

Здесь $W_t = e^{L_B t}$ с оператором $L_B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{V} & 0\end{pmatrix}$,

$$\mathcal{G}_t(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} e^{-ix\cdot\theta}\hat{\mathcal{G}}_t(\theta)\,d\theta, \quad \hat{\mathcal{G}}_t(\theta) = e^{\hat{L}_B(\theta)t}, \quad \hat{L}_B(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\hat{V}(\theta) & 0\end{pmatrix}.$$

Вернемся к доказательству теоремы 2.3. Сначала заметим, что для любых начальных данных Y_0 существует, и притом единственное, решение $Y(t)$ задачи (2.3) для $t\in[0,\varepsilon)$ с некоторым $\varepsilon>0$. В самом деле, мы можем переписать уравнения (2.1) в интегральной форме и применить метод сжимающих отображений. Чтобы доказать существование глобального решения, выведем энергетические оценки (6.4), применяя технику Яксича и Пилле [7].

Для $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)\in\mathcal{H}_\alpha$ и $f=(f_1,f_2)\in\mathcal{H}_{-\alpha}$ введем скалярное произведение $\langle\Phi,f\rangle_E = \langle\mathcal{V}\Phi_1,f_1\rangle + \langle\Phi_2,f_2\rangle$. Обозначим $\|\Phi\|_E^2 = \langle\Phi,\Phi\rangle_E$.

Замечание 6.1. $\langle W_t\Phi,f\rangle_E = \langle\Phi,W_{-t}f\rangle_E$ *для любых $t\in\mathbb{R}$, $\Phi\in\mathcal{H}_\alpha$, $f\in\mathcal{H}_{-\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Введем матричнозначную функцию $V_r(x) = F^{-1}_{\theta\to x}[(\hat{V}(\theta))^r]$. Заметим, что $V_{-1/2}*\rho\in\ell^2_\alpha$ при $\alpha\le 0$, так как

$$\|V_{-1/2}*\rho\|^2_\alpha \le \|V_{-1/2}*\rho\|^2 = \rho_0$$

в силу условия **(R)**. Если $\alpha \geq 0$, то мы дополнительно предполагаем, что $V_{-1/2} * \rho \in \ell^2_\alpha$.

Обозначим $\mathbf{E}_\alpha(Y) = H_A(Q) + \|\Phi\|^2_\alpha/2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, где $Y = (\Phi, Q)$, $\Phi = (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}_\alpha$, $Q = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, $H_A(Q)$ определено в (1.2).

Лемма 6.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, выполнены условия* **V1–V4**, **(P)** *и* **(R)**, *$V_{-1/2} * \rho \in \ell^2_\alpha$ в случае $\alpha > 0$. Тогда для любого решения $Y(t)$ задачи (2.3) справедлива следующая оценка:*

$$\mathbf{E}_\alpha(Y(t)) \leq C\langle t\rangle^{2\sigma+4}\, \mathbf{E}_\alpha(Y(0)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.4}$$

где $\sigma = \sigma(\alpha, d) < \infty$ то же, что и в оценке (6.2).

Доказательство. Введем матричнозначную функцию $\rho_V(x)$:

$$\rho_V(x) = -F^{-1}_{\theta\to x}[\hat\rho(\theta)(\hat V(\theta))^{-1}], \quad x \in \mathbb{Z}^d,$$

и $\mathbb{R}^{2n}$-значную функцию $\xi_q(t) = (\rho_V(x)q(t),0)$. Тогда $L_B\xi_q(t) = (0, \rho(x)q(t))$. Применяя оператор W_t и функцию $\xi_q(t)$, перепишем систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= W_t\Phi_0 + \int_0^t W_{t-s}L_B\xi_q(s)\, ds, && (6.5)\\ \ddot q(t) &= -\nabla P(q(t)) + \langle \varphi(t), \rho\rangle. && (6.6) \end{aligned}$$

Заметим, что $\langle\varphi(t),\rho\rangle \cdot \dot q(t) = -\langle \Phi(t), \dot\xi_q(t)\rangle_E$. Поэтому, применяя уравнения (6.5) и (6.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_A(Q(t)) &= \frac{d}{dt}\Big[P(q(t)) + \frac12|\dot q(t)|^2\Big] = -\langle\Phi(t), \dot\xi_q(t)\rangle_E \\ &= -\langle W_t\Phi_0, \dot\xi_q(t)\rangle_E - \Big\langle \int_0^t W_{t-s}L_B\xi_q(s)\, ds, \dot\xi_q(t)\Big\rangle_E. \quad (6.7) \end{aligned}$$

Используя замечание 6.1 и следующее равенство

$$W_{-s}L_B\xi_q(s) = -\frac{d}{ds}\left(W_{-s}\xi_q(s)\right) + W_{-s}\dot\xi_q(s),$$

перепишем второе слагаемое в правой части равенства (6.7):

$$\begin{aligned} &\Big\langle \int_0^t W_{t-s}L_B\xi_q(s)\, ds, \dot\xi_q(t)\Big\rangle_E = \Big\langle \int_0^t W_{-s}L_B\xi_q(s)\, ds, W_{-t}\dot\xi_q(t)\Big\rangle_E \\ &= -\Big\langle \int_0^t \frac{d}{ds}\left(W_{-s}\xi_q(s)\right) ds, W_{-t}\dot\xi_q(t)\Big\rangle_E + \Big\langle \int_0^t W_{-s}\dot\xi_q(s) ds, W_{-t}\dot\xi_q(t)\Big\rangle_E. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Введем $\mathbb{R}^{2n}$-значную функцию $R(t) = \int_0^t W_{-s}\,\dot{\xi}_q(s)\,ds$. Тогда, применяя замечание 6.1, перепишем равенство (6.8) в виде

$$-\langle \xi_q(t), \dot{\xi}_q(t)\rangle_E + \langle \xi_q(0), W_{-t}\,\dot{\xi}_q(t)\rangle_E + \langle R(t), \dot{R}(t)\rangle_E. \tag{6.9}$$

Из равенств (6.7)–(6.9) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_A(Q(t)) &= -\langle \Phi_0, W_{-t}\,\dot{\xi}_q(t)\rangle_E + \langle \xi_q(t), \dot{\xi}_q(t)\rangle_E - \langle \xi_q(0), W_{-t}\,\dot{\xi}_q(t)\rangle_E \\ &\quad -\langle R(t), \dot{R}(t)\rangle_E \\ &= -\langle \Phi_0 + \xi_q(0), \dot{R}(t)\rangle_E + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi_q(t)\|_E^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|R(t)\|_E^2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Введем “эффективный” гамильтониан

$$H_A^{eff}(Q(t)) := H_A(Q(t)) - \frac{1}{2}\|\xi_q(t)\|_E^2. \tag{6.11}$$

Тогда из уравнения (6.10), получим

$$H_A^{eff}(Q(t)) = H_A^{eff}(Q_0) - \langle \Phi_0 + \xi_q(0), R(t)\rangle_E - \frac{1}{2}\|R(t)\|_E^2. \tag{6.12}$$

Заметим, что из условия **(P)** вытекает

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\xi_q(t)\|_E^2 &\le \frac{1}{2}(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} |\hat{\rho}(\theta)|^2 q(t)\cdot(\hat{V}(\theta))^{-1}q(t)\,d\theta \le \frac{1}{2}|q(t)|^2\rho_0 \\ &\le \frac{\rho_0}{\kappa}P(q(t)) \le \frac{\rho_0}{\kappa}H_A(Q(t)).\end{aligned}$$

Следовательно, получаем следующую оценку

$$H_A^{eff}(Q) \le H_A(Q) \le C H_A^{eff}(Q), \quad \text{где} \ \ C := (1-\rho_0/\kappa)^{-1}. \tag{6.13}$$

Для $\Phi = (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}_\alpha$ введем следующее обозначение

$$\|\Phi\|_{E,\alpha}^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \langle x\rangle^{2\alpha}\left(|(V_{1/2} * \varphi)(x)|^2 + |\psi(x)|^2\right).$$

В силу условия **V1** имеем $\|\Phi\|_{E,\alpha} \le C\|\Phi\|_\alpha$. Используя (6.12), получаем

$$\begin{aligned}H_A^{eff}(Q(t)) &\le H_A^{eff}(Q_0) + |\langle \Phi_0 + \xi_q(0), R(t)\rangle_E| \\ &\le H_A^{eff}(Q_0) + C\Big(\|\Phi_0\|_\alpha + \|\xi_q(0)\|_{E,\alpha}\Big)\|R(t)\|_{E,-\alpha},\end{aligned} \tag{6.14}$$

причем из условия, наложенного на ρ, вытекает, что

$$\|\xi_q(0)\|_{E,\alpha} \le |q_0| \|V_{-1/2} * \rho\|_\alpha < \infty.$$

Оценим $\|R(t)\|_{E,\alpha}$ для любых $t \ge 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. В силу оценок (6.2) и (6.13) имеем

$$\|R(t)\|_{E,\alpha} \le \int_0^t |\dot{q}(\tau)| \|W_{-\tau}(\rho_V, 0)\|_{E,\alpha} \, d\tau \le C_1 \langle t \rangle^{\sigma+1} \sqrt{\max_{0\le\tau\le t} H_A^{eff}(Q_\tau)}. \quad (6.15)$$

Обозначим $M(t) = \max\limits_{0\le\tau\le t} H_A^{eff}(Q_\tau)$, $t \ge 0$. Тогда из (6.14) и (6.15) вытекает, что $M(t) \le M(0) + C\langle t \rangle^{\sigma+1}(\|\Phi_0\|_\alpha + |q_0|)\sqrt{M(t)}$. Следовательно,

$$\sqrt{H_A(Q_t)} \le \sqrt{H_A^{eff}(Q(t))} \le C_1 + C_2 \langle t \rangle^{\sigma+1}(\|\Phi_0\|_\alpha + |q_0|). \quad (6.16)$$

Окончательно, применяя уравнение (6.5) и оценку (6.2), получим

$$\|\Phi(t)\|_\alpha \le \|W_t \Phi_0\|_\alpha + \int_0^t \|W_{t-\tau}(0, \rho(x) q(\tau))\|_\alpha \, d\tau \le C\langle t \rangle^{\sigma+2}.$$

Замечание 6.2. *Для любых $Y_0 \in \mathcal{E}_0$ справедливо следующее равенство:*

$$H(Y(t)) = H(Y_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.17)$$

где функционал $H(Y)$ определен в (1.1). Если выполнено условие **(P)***, то $H(Y(t)) \ge 0$.*

Действительно, перепишем слагаемое с φ в гамильтониане $H(Y)$:

$$\begin{aligned} &\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \Big(\sum_{x'\in\mathbb{Z}^d} \varphi(x) V(x-x') \varphi(x') - 2q \cdot \varphi(x)\rho(x) \Big) \\ \ge\ & -(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |\hat{\rho}(\theta)|^2 q \cdot (\hat{V}(\theta))^{-1} q \, d\theta \ge -|q|^2 \rho_0. \end{aligned}$$

Следовательно, используя условие **(R)**, получаем, что для $Y = (\varphi, \psi, q, p)$

$$H(Y) \ge \frac{1}{2}\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}|p|^2 + P(q) - \frac{1}{2}|q|^2 \kappa \ge 0, \quad (6.18)$$

в силу условия **(P)**.

Замечания. (i) Чтобы доказать существование решений, достаточно предположить, что потенциал $P \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет следующему условию: $P(q) \to +\infty$ при $|q| \to \infty$, поэтому $P(q) \geq P_0$ при всех q с некоторым $P_0 \in \mathbb{R}$. В этом случае, вместо оценки (6.4) можно доказать, что $\|Y(t)\|_\alpha \leq Ce^{Bt}$. Мы накладываем более сильное условие **(P)** для того, чтобы получить оценку (6.18), которая используется в доказательстве теоремы 2.4 (см. доказательство леммы 4.1, пункт (ii)).

В лемме 6.2 мы наложили более сильное условие на функцию ρ, а именно, предположили, что $V_{-1/2} * \rho \in \ell^2_\alpha$ вместо условия $\rho \in \ell^2_\alpha$ в случае $\alpha > 0$. Это было сделано для того, чтобы получить оценку (6.4).

(ii) Из доказательства теоремы 2.4 вытекает, что для любых начальных данных $Y_0 \in \mathcal{E}_\alpha$, $\alpha > 5/2$, имеем $|q^{(j)}(t)| \leq C\langle t\rangle^{-3/2}$. Если потребуем еще, чтобы $\hat\Phi_0(0) = \hat\Phi_0(\pi) = 0$, то получим $\|\Phi(t)\|_{-\alpha} \leq C\langle t\rangle^{-3/2}$. В противном случае справедлива оценка $\|\Phi(t)\|_{-\alpha} \leq C\langle t\rangle^{-1/2}$.

(iii) Мы доказали теорему 2.4 в случае, когда $V(x)$ имеет вид (2.4). На самом деле, результаты этой теоремы остаются справедливы для функций $V(x)$ общего вида, удовлетворяющих условиям **V1**–**V4**. В этом случае требуется изменить условия **R1**, **R4** и **R5** следующим образом. Условие **R1**:

$$\kappa \in \Big(V_{\min} + \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|\hat\rho(\theta)|^2}{\hat V(\theta) - V_{\min}}\, d\theta, V_{\max} + \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|\hat\rho(\theta)|^2}{\hat V(\theta) - V_{\max}}\, d\theta\Big),$$

где $V_{\min} = \min \hat V(\theta)$, $V_{\max} = \max \hat V(\theta)$. Условия **R4** и **R5** – следующие: $\hat\rho(\theta) = 0$ для любых $\theta \in \mathcal{C}_0 := \{\theta \in \mathbb{T} : \hat V'(\theta) = 0\}$, и $\hat\rho(\theta) \neq 0$ при всех $\theta \notin \mathcal{C}_0$. Дополнительно необходимо предположить, что $\hat V''(\theta) \neq 0$ для $\theta \in \mathcal{C}_0$.

Список литературы

[1] Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L.: Convergence to stationary states for infinite harmonic systems, *J. Stat. Phys.* **30** (1983), 123–155.

[2] Cuccagna S.: L^p continuity of wave operators in $\mathbb{Z}$, *J. Math. Anal. Appl.* **354** (2009), 594–605. Preprint on ArXiv: 0809.2752.

[3] Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H.: On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 2596–2620. DOI: 10.1063/1.1571658. Preprint on Arxiv: math-ph/0210039.

[4] Dudnikova T.V.: Convergence to equilibrium distribution. The Klein–Gordon equation coupled to a particle, *Russian J. Math. Phys.* **17** (2010), no.1, 77–95.

[5] Imaikin V., Komech A., Vainberg B.: On scattering of solitons for the Klein–Gordon equation coupled to a particle, *Comm. Math. Phys.* **268** (2006), no.3, 321–367.

[6] Islami H., Vainberg B.: Large time behavior of the solutions to difference wave operators, *Commun. in Partial Dif. Eq.* **31** (2006), no.3, 397–416.

[7] Jakšić V., Pillet C.-A.: Ergodic properties of classical dissipative systems. I, *Acta Math.* **181** (1998), no.2, 245–282.

[8] Jensen A., Kato T.: Spectral properties of Schrodinger operators and time-decay of the wave functions, *Duke Math. J.* **46** (1979), 583–611.

[9] Komech A.I., Kopylova E.A., Kunze M.: Dispersive estimates for 1D discrete Schrodinger and Klein–Gordon equations, *Applicable Anal.* **85** (2006), no.12, 1487–1508.

[10] Lanford III O.E., Lebowitz J.L.: Time Evolution and Ergodic Properties of Harmonic Systems, in: *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Lecture Notes in Physics **38**, Springer-Verlag, Berlin (1975).

[11] Mielke A.: Macroscopic behavior of microscopic oscillations in harmonic lattices via Wigner-Husimi transforms, *Arch. Rational Mech. Anal.* **181** (2006), 401–448.

[12] Pelinosky D.E., Stefanov A.: On the spectral theory and dispersive estimates for a discrete Schrödinger equation in one dimension, *J. Math. Phys.* **49** (2008), no.11, 113501.

[13] Shaban W., Vainberg B.R.: Radiation conditions for the difference Schrödinger operators, *Applicable Analysis* **80** (2001), 525–556.

[14] Вайнберг Б.Р.: Поведение при больших временах решений уравнения Клейна–Гордона, *Труды Моск. Мат. об-ва* **30** (1974), 139–158.

[15] Вайнберг Б.Р.: Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Изд-во Москов. ун-та (1982).

[16] Рид М., Саймон Б.: Методы современной математической физики. т.3. Изд-во Мир, Москва (1982).