



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 95 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Маштаков Я.В., Шестаков С.А.

Поддержание
тетраэдральной
конфигурации группы
спутников при помощи
одноосного управления

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Маштаков Я.В., Шестаков С.А. Поддержание тетраэдральной конфигурации группы спутников при помощи одноосного управления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 95. 27 с. doi:[10.20948/prepr-2016-95](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-95)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-95>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков

**Поддержание тетраэдральной
конфигурации группы спутников
при помощи одноосного управления**

Москва — 2016

Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков

Поддержание тетраэдральной конфигурации группы спутников при помощи одноосного управления

В работе рассматривается группа из четырёх спутников, образующих тетраэдр. Ставится задача поддержания относительных орбит с тем, чтобы тетраэдр сохранял со временем свою форму и размер по введённому критерию. Решена задача построения относительных опорных орбит спутников, которые в рамках линейной модели Хилла–Клохесси–Уилтшира обеспечивают сохранение параметров тетраэдра при отсутствии управления. В рамках линейной модели Швайгарта–Седвика, учитывающей влияние второй гармоники геопотенциала, а также в рамках нелинейной модели движения со второй гармоникой предложены алгоритмы построения одноосного управления движением спутников, ориентированных по магнитному полю Земли, которые обеспечивают поддержание относительных орбит.

Ключевые слова: группа спутников, тетраэдральная конфигурация, одноосное управление, поддержание относительных орбит

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 16-01-00739 а, 15-31-20058 мол_a_вед

Y. Mashtakov, S. Shestakov

Maintenance of the tetrahedral satellite configuration with single-input control

The paper discusses the problem of maintenance of the tetrahedral configuration of four satellites. The main goal is to control satellites so that the formed tetrahedron preserved volume and quality according to certain criterion. The relative orbits preserving the quality in linear HCW model of motion without any control are constructed in the paper. Then in linear SS model and in nonlinear model of motion the algorithms enable single-input control along the geomagnetic field are described. This control is able to maintain the reference orbit, and therefore to preserve volume and quality of the tetrahedron.

Key words: satellite formation, tetrahedral configuration, single-input control, relative orbit maintenance

Введение

В начале космической эры масса и размер научных спутников росли по мере увеличения полезной нагрузки. Однако к началу XXI века благодаря инженерным достижениям в миниатюризации узлов и приборов возросла роль малых спутников в изучении космоса. Для многих научных и коммерческих миссий необходимо иметь несколько спутников, решающих сходные задачи в близких, но различных точках пространства. Малые спутники как нельзя лучше подходят для этой задачи благодаря возможности производства нужного количества унифицированных дешёвых спутников, вывод которых на орбиту может быть произведён одним носителем.

В качестве примера научной задачи, решаемой группами малых спутников, необходимо упомянуть изучение магнитосферы Земли. Основной способ изучения состоит в непосредственном замере параметров магнитосферы [1–4]. В 2015 году NASA в рамках миссии MMS по исследованию магнитосферы было запущено четыре малых спутника. Для обеспечения требуемых исследований спутники должны были формировать правильный тетраэдр с заданной длиной рёбер [5], что успешно реализовано в ходе миссии [6].

Использование группы спутников для проведения исследований вносит ряд сложностей. Во-первых, после вывода отдельных спутников на орбиту необходимо создать требуемую конфигурацию группы. Во-вторых, из-за различных возмущений, действующих на спутники во время движения по орбите, группа будет разрушаться с течением времени. Таким образом, становится необходимым создание алгоритмов поддержания группы спутников, что, учитывая малые размеры аппаратов и, как следствие, существенные ограничения на управление, является нетривиальной задачей.

Построение алгоритма управления спутником включает в качестве подзадачи задачу ориентации, поскольку для активного управления спутником необходимо обеспечить требуемое направление вектора тяги. Наиболее простым решением и естественным выбором служит пассивная система ориентации. Сообразуясь с необходимостью иметь в разные моменты времени разные направления вектора тяги корректирующего двигателя, пассивная магнитная одноосная система ориентации является лучшим претендентом.

В настоящей работе предлагается метод поддержания тетраэдральной конфигурации спутников на околокруговой орбите при наличии вектора тяги, направленного вдоль вектора местной напряжённости магнитного поля Земли (далее для краткости – по магнитному полю Земли). В работе строится опорная орбита, позволяющая пассивно поддерживать определённую конфигурацию спутников в рамках упрощённой модели движения. Затем, в моделях, учитывающих вторую гармонику гравитационного потенциала Земли, строится управление, поддерживающее требуемую тетраэдральную конфигурацию.

Постановка задачи

Рассматривается следующая задача:

- Есть четыре спутника, при этом два из них (назовём их первый и второй) могут управляться вдоль магнитного поля Земли, ещё два (третий и четвёртый) движутся без управления (пассивно).
- Оба пассивных спутника находятся на одной и той же траектории в фазовом пространстве, то есть положение одного спутника может быть получено из положения другого сдвигом по времени.
- Требуется управлять первыми двумя спутниками таким образом, чтобы тетраэдр, образованный четвёркой (четыре спутника суть четыре вершины тетраэдра) сохранял свою форму и размер.

В работе используются следующие правые ортонормированные системы координат:

- Инерциальная система координат O_aXYZ (ИСК): центр O_a расположен в центре масс Земли, O_aZ направлен вдоль оси вращения Земли, O_aX направлен в точку весеннего равноденствия эпохи J2000.
- Орбитальная система координат $Oxyz$ (ОСК): центр O находится в точке, располагающейся на той же траектории в фазовом пространстве, что и пассивно движущиеся спутники посередине между ними, ось Oz направлена вдоль радиус-вектора опорного тела от центра Земли, ось Oy — по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки.

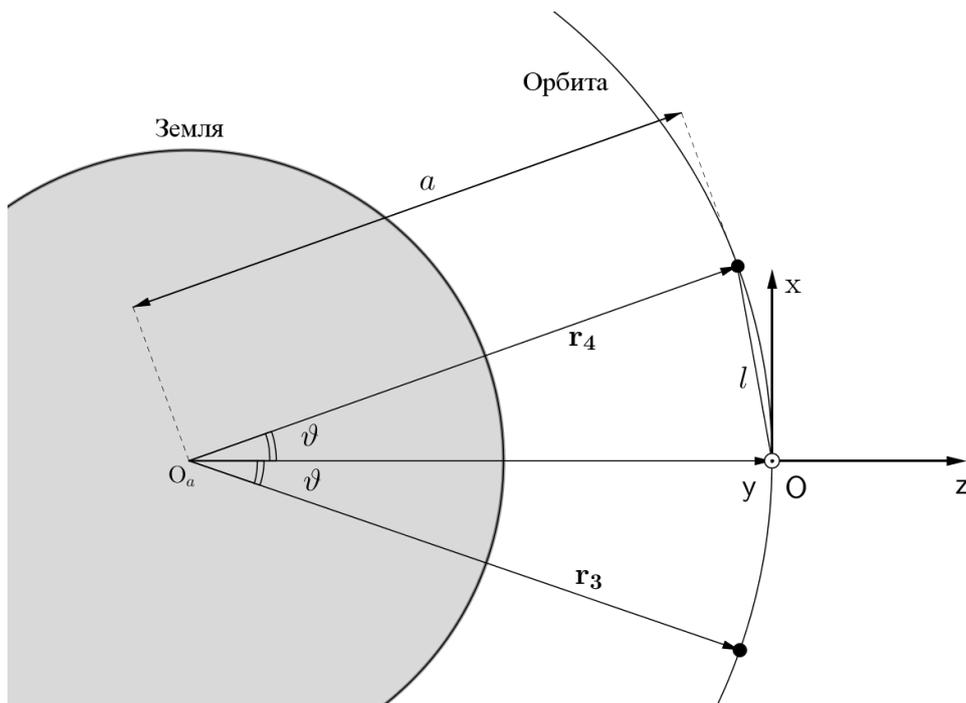


Рис. 1. Орбитальная система координат

Таким образом, задача сводится к управлению только двумя аппаратами, так как пассивно движущиеся спутники будут неподвижны (с точностью до малых периодических движений) в орбитальной системе координат. Эту задачу, в свою очередь, можно разбить на две подзадачи. Во-первых, это построение таких опорных орбит управляемых спутников в ОСК, которые не требовали бы затрат рабочего тела для своего поддержания, по крайней мере в рамках модели Хилла–Клохесси–Уилтшира (Hill–Clohessy–Wiltshire) [7]. Во-вторых, это задача привода спутников на эту опорную орбиту при помощи реактивных двигателей. В настоящей работе учитывается дополнительное ограничение, накладываемое на тягу двигателей: она может быть направлена только вдоль магнитного поля Земли. Обусловлено это тем, что ориентация спутника вдоль магнитного поля может быть осуществлена даже при помощи пассивной системы ориентации, которая, в отличие от активной системы, состоящей из двигателей-маховиков, может легко быть установлена на малые спутники.

Следует отметить, однако, что такой подход будет работать тем лучше, чем меньше относительные орбиты. Для больших относительных орбит (радиуса порядка нескольких десятков километров) потребуются численно подбирать опорные орбиты, которые сохранились бы на протяжении хотя бы нескольких витков.

Поиск опорной относительной орбиты

Как уже упоминалось выше, два спутника движутся пассивно, причём они находятся на той же орбите в фазовом пространстве, что и виртуальный центр орбитальной системы координат. Их движение в ОСК тогда описывается выражениями

$$\mathbf{r}_3 \equiv (-a \sin \vartheta, 0, a \cos \vartheta - a), \quad \mathbf{r}_4 \equiv (a \sin \vartheta, 0, a \cos \vartheta - a),$$

где $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ – радиус-векторы неуправляемых спутников в ОСК, a – большая полуось орбиты виртуальной точки, ϑ – угловое расстояние между каждым из спутников и виртуальной точкой. Предполагая ϑ малым углом, получаем

$$\mathbf{r}_3 \equiv (-l, 0, 0), \quad \mathbf{r}_4 \equiv (l, 0, 0),$$

$l = a\vartheta$ – расстояние между управляемыми спутниками и центром ОСК.

Периодические относительные движения спутников в ОСК, согласно [7], записываются в виде

$$\begin{aligned} x_i &= C_i + 2A_i \cos(nt + \varphi_i), \\ y_i &= B_i \sin(nt + \psi_i), \\ z_i &= A_i \sin(nt + \varphi_i), \end{aligned}$$

где $i=1,2$, $n=\sqrt{\mu/a^3}$, μ – гравитационный параметр Земли. Запишем ориентированный¹ объём тетраэдра с вершинами в рассматриваемых четырёх спутниках

$$V = \frac{1}{6} \det(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) = \frac{1}{3} l B_1 A_2 \sin(nt + \varphi_2) \sin(nt + \psi_1) - \frac{1}{3} l A_1 B_2 \sin(nt + \varphi_1) \sin(nt + \psi_2).$$

Требуется, чтобы тетраэдр, образованный четырьмя спутниками, сохранял форму и размер. Будем ставить ограничения на ориентированный объём, поскольку это позволяет отслеживать не только объём, но и расположение спутников в тетраэдре, что может быть полезно, к примеру, когда спутники пронумерованы или существенно различны. Из условия сохранения ориентированного объёма путём преобразований получаем (см. Приложение), что

$$A_2 B_1 = A_1 B_2, \quad \varphi_2 + \psi_1 = \varphi_1 + \psi_2 + 2\pi k. \quad (1)$$

Последнее условие равносильно тому, что орбиты спутников должны лежать в параллельных плоскостях (рис. 2а, 2б), пунктиром помечена часть дальней орбиты спутника, затеняемая ближней орбитой.

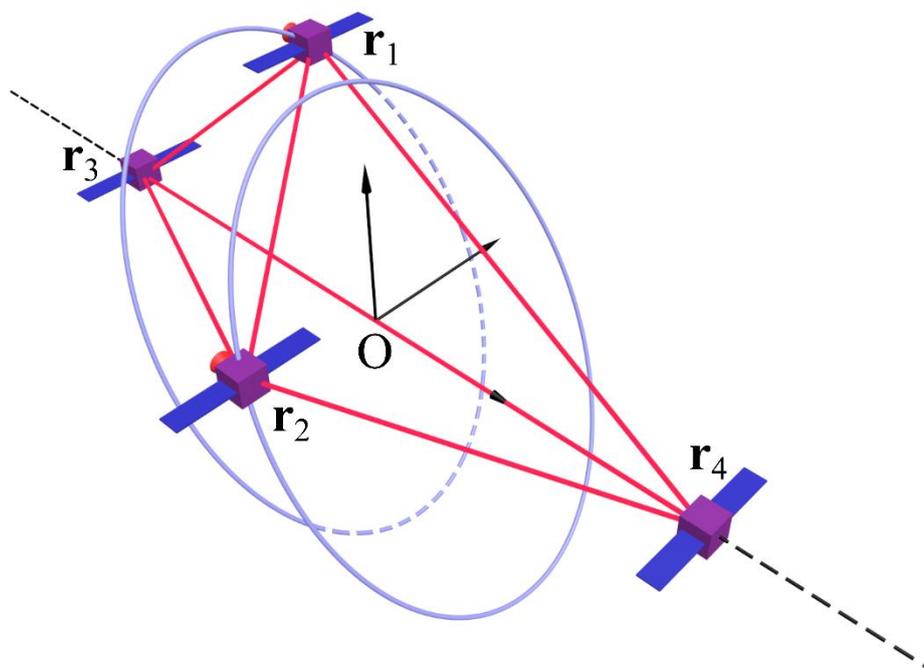


Рис. 2а. Тетраэдральная конфигурация спутников, сохраняющая ориентированный объём

¹ Ориентированный объём означает, что его знак зависит от нумерации вершин и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

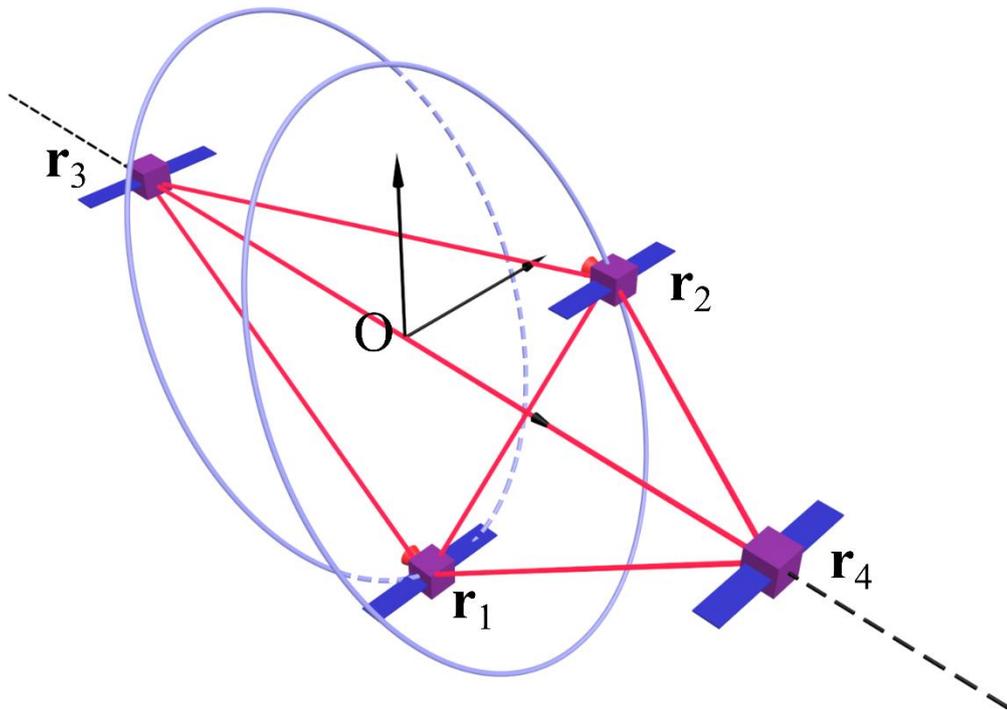


Рис. 2б. Та же конфигурация через половину витка относительного движения

Для отслеживания формы тетраэдра введём понятие *качества* тетраэдра, отражающее близость тетраэдра к вырожденному, когда все четыре его вершины лежат в одной плоскости,

$$Q = 72\sqrt{3} \frac{V}{L^{3/2}}.$$

Здесь L есть сумма квадратов длин всех рёбер тетраэдра, V – его ориентированный объём, числовой множитель подобран таким образом, чтобы на правильном тетраэдре качество по модулю равнялось единице.

Возьмём теперь начальные данные, гарантирующие сохранение объёма. Параметры относительных орбит выбираем следующими:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = 0, \quad A_1 = A_2 = A, \quad B_1 = B_2 = \sqrt{3}A, \\ \psi_1 = \varphi_2 = \alpha, \quad \varphi_1 = \alpha - \theta, \quad \psi_2 = \alpha + \theta. \end{aligned}$$

При таком выборе параметров, согласно полученным ранее условиям (1), объём тетраэдра сохраняется. Два спутника, таким образом, движутся по одной и той же относительной орбите с запаздыванием друг относительно друга. Параметр A отвечает за размер относительной орбиты. Если бы не было сдвига по фазе (т.е. при $\theta = 0$), то орбита была бы круговой. Изменение угла α равносильно сдвигу системы по времени, иными словами, этот угол отвечает за начальное положение спутников на относительной орбите. Выбор

же θ отвечает за угловую удалённость спутников друг от друга, т.е. за разность фаз между ними. Выражение для L при таких значениях параметров принимает вид

$$L = 24A^2 + 8l^2 - 8A^2 \cos \theta - 6A^2 \sin(2nt + 2\alpha) \sin \theta + 9A^2 \sin(2nt + 2\alpha) \sin 2\theta.$$

Для обеспечения постоянства качества (поскольку при таком выборе начальных данных объём гарантированно постоянен) необходимо и достаточно, чтобы L не зависело от времени, то есть

$$3\sin 2\theta - 2\sin \theta = 0.$$

Это уравнение выполняется либо при $\sin \theta = 0$, либо при $\cos \theta = 1/3$. Первый случай не представляет интереса, поскольку тогда объём получившегося тетраэдра равен нулю. Во втором случае выражения для ориентированного объёма, суммы квадратов длин и для качества принимают следующий вид:

$$V = \frac{8\sqrt{3}}{27} A^2 l, \quad L = \frac{64}{3} A^2 + 8l^2, \quad Q = \frac{l/A}{\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}(l/A)^2\right)^{3/2}}.$$

Максимум модуля качества достигается при $l/A = \sqrt{4/3}$ и равен при этом $1/\sqrt{6} \approx 0.4$. Опорные орбиты для управляемых спутников описываются выражениями

$$x_1 = 2A \cos(nt - \arccos(1/3)),$$

$$y_1 = A\sqrt{3} \sin(nt),$$

$$z_1 = A \sin(nt - \arccos(1/3)),$$

$$x_2 = 2A \cos(nt),$$

$$y_2 = A\sqrt{3} \sin(nt + \arccos(1/3)),$$

$$z_2 = A \sin(nt).$$

Таким образом, получена опорная орбита для двух управляемых спутников, сохраняющая выбранные качество и объём тетраэдра постоянными (рис. 3а–3в), пунктиром на рисунке обозначены дальние рёбра, затеняемые тетраэдром.

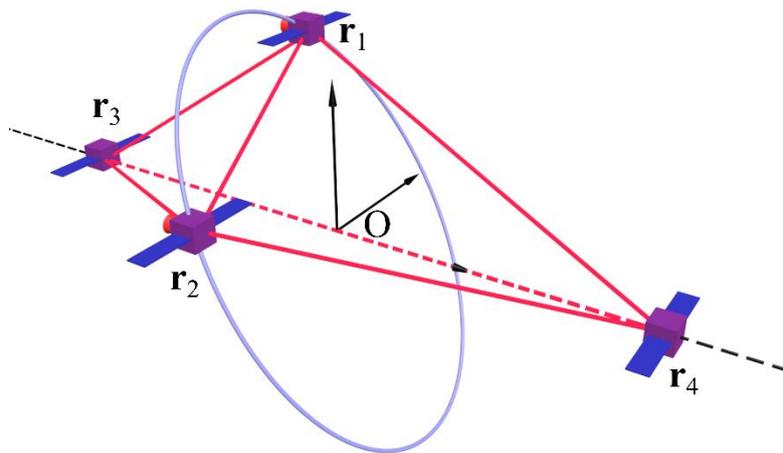


Рис. 3а. Тетраэдральная конфигурация, сохраняющая качество

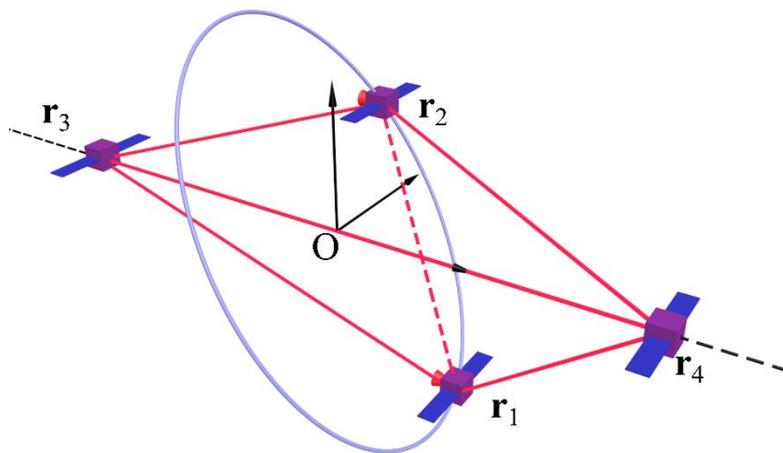


Рис. 3б. Та же конфигурация через треть витка

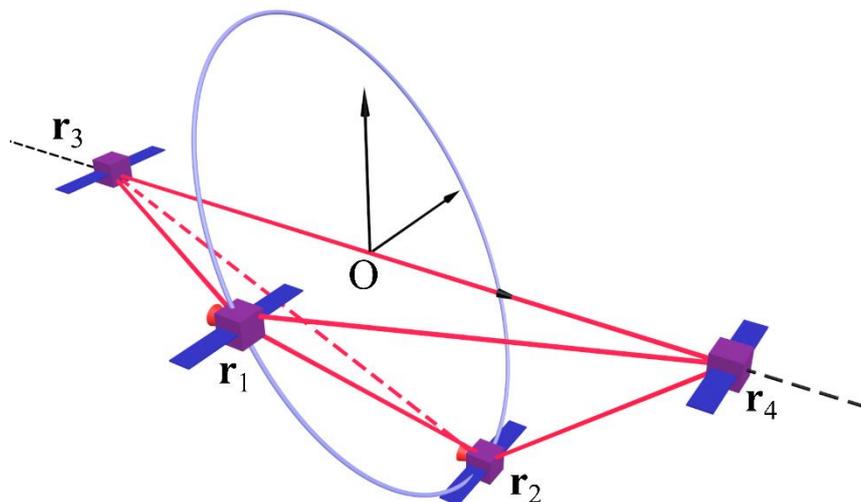


Рис. 3в. Та же конфигурация через две трети витка

Построение управления в линейной модели

Опорная относительная орбита управляемых спутников была построена выше в рамках модели Хилла–Клохесси–Уилтшира, в которой учитывается лишь центральное гравитационное поле Земли. В то же время, в более сложной модели Швайгарта–Седвика (Schweighart–Sedwick) [8], в которой учитывается вторая гармоника геопотенциала, построенные относительные орбиты уже не будут периодическими и спутники начнут разлетаться. Следовательно, необходимо предложить способ управления движением центров масс спутников, который позволил бы поддерживать уже построенные относительные орбиты. При этом необходимо учитывать, что управление не является трёхосным – тяга может быть создана только в направлении магнитного поля Земли. И, конечно, такое управление, помимо поддержания орбиты, должно минимизировать расход топлива.

Для построения управления будем использовать модель Швайгарта–Седвика. В ОСК уравнения движения в рамках этой модели с учётом управления можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)u(t),$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T)^T$, матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2nc \\ 0 & -q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (5c^2 - 2)n^2 & 2nc & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

постоянная и зависит только от начальных условий, вектор $\mathbf{a} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2lq \cos(qt + \phi) \ 0)^T$ отвечает за дрейф вдоль оси Oz , вызванный влиянием J_2 , \mathbf{b} – единичный вектор, вдоль которого осуществляется управление (вектор местной напряжённости магнитного поля Земли). Решение этой системы дифференциальных уравнений может быть записано в виде

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-s))(\mathbf{a}(s) + \mathbf{b}(s)u(s)) ds.$$

В работе [9] было доказано, что такая система является управляемой. Для поддержания относительного движения можно потребовать, чтобы на протяжении нескольких периодов обращения ОСК вокруг Земли все спутники двигались пассивно, так как их разлёт невелик, а затем управление возвращало

два спутника на опорную орбиту. В этом случае для каждого из управляемых спутников должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f,$$

где t_0 – время начала управления, t_f – его окончание, \mathbf{x}_0 – положение спутника на относительной орбите на момент начала управления, \mathbf{x}_f – некоторая точка на опорной орбите. Таким образом, в общем случае задача поиска управления сводится к решению интегрального уравнения

$$\mathbf{x}(t_f) - \exp(\mathbf{A}(t_f - t_0))\mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^{t_f} \exp(\mathbf{A}(t_f - s))(\mathbf{a}(s) + \mathbf{b}(s)u(s))ds = \mathbf{0}.$$

Эта уравнение, путём замены интеграла на конечные суммы, может быть упрощено до системы линейных уравнений:

$$\mathbf{R}\mathbf{U} + \mathbf{p} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{p} = \exp(\mathbf{A}(t_f - t_0))\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f + \int_{t_0}^{t_f} \exp(\mathbf{A}(t_f - s))\mathbf{a}(s)ds$, столбцами матрицы \mathbf{R} являются $\exp(\mathbf{A}(t_f - t_i))\mathbf{b}(t_i)\Delta t$, а i -я компонента вектора \mathbf{U} является управлением на i -м интервале времени. Решение этой системы с учётом минимизации величины суммарного управления, $\mathbf{U}^T\mathbf{U} \rightarrow \min$, записывается в виде

$$\mathbf{U} = -\mathbf{R}^T(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1}\mathbf{p}.$$

Построение управления в нелинейной модели

Модель относительного движения Швайгарта–Седвика, при помощи которой строилось управление в предыдущем пункте, хотя и учитывает наличие второй гармоники геопотенциала, но является линеаризованной. Поэтому, для полноты картины, необходимо построить алгоритм синтеза управления движением центра масс спутника в рамках уже нелинейной модели, которая бы полностью учитывала влияние второй гармоники. Можно вначале найти управление для линейной модели рассмотренным выше способом, а затем уточнить его с помощью метода параллельной пристрелки или модифицированного метода Ньютона [10]. Рассмотрим метод поиска одноосного управления для нелинейной модели без обращения к линеаризации. В этом случае задача поиска управления формулируется в виде оптимизационной:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_{NS} + \mathbf{b}(t)u(t), \\ J &= \int_{t_0}^{t_f} u^2 ds \rightarrow \min, \\ \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \\ \mathbf{v}(t_0) &= \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f.\end{aligned}$$

Здесь \mathbf{a}_{NS} – ускорение, вызванное гармоникой J_2 . Эта задача решается при помощи принципа максимума Понтрягина. Её гамильтониан записывается в виде

$$H = -u^2 + (\boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{v}) + \left(\boldsymbol{\lambda}_v, -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_{NS} + \mathbf{b}(t)u(t) \right),$$

где $\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v$ – переменные, сопряжённые к \mathbf{r}, \mathbf{v} соответственно. Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}_r}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}_v}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}},\end{aligned}$$

а краевые условия задачи оптимального управления –

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \\ \mathbf{v}(t_0) &= \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f.\end{aligned}$$

Таким образом, оптимизационная задача сводится к краевой, а искомыми параметрами являются начальные значения для $\boldsymbol{\lambda}_r$ и $\boldsymbol{\lambda}_v$.

Поставленная задача решается численно. Для этого она сводится к решению системы уравнений, где в качестве переменных выступают значения сопряжённых переменных в начальный момент времени, а сама функция представляет собой вектор невязок в конечный момент времени:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}_r(0), \boldsymbol{\lambda}_v(0)) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Эта система уравнений решается при помощи метода Ньютона. К сожалению, сходимость такого метода для задачи с одноосным управлением оставляет желать лучшего, поэтому требуется модификация указанного метода. В качестве модифицированного метода может выступать метод продолжения по

параметру (когда исходная оптимизационная задача заменяется на более простую, в данном случае – с трёхосным управлением, а затем при помощи последовательных приближений сводится к уже более сложной) либо метод параллельной пристрелки, который обеспечивает лучшую по сравнению с обычным методом Ньютона сходимость. В настоящей работе применена вторая методика.

Результаты моделирования

Ниже представлены результаты моделирования для обоих случаев построения управления: для линейного случая модели Швайгарта–Седвика и для нелинейной модели, учитывающей влияние J_2 . Параметры орбиты виртуальной точки, являющейся началом ОСК, следующие:

- эксцентриситет, долгота восходящего узла и аргумент перицентра в начальный момент равны нулю;
- наклонение орбиты равно 60° ;
- большая полуось равняется 7000 км;
- управление осуществляется вдоль магнитного поля, которое представляется моделью прямого диполя;
- параметр A опорной относительной орбиты равняется 200 м.

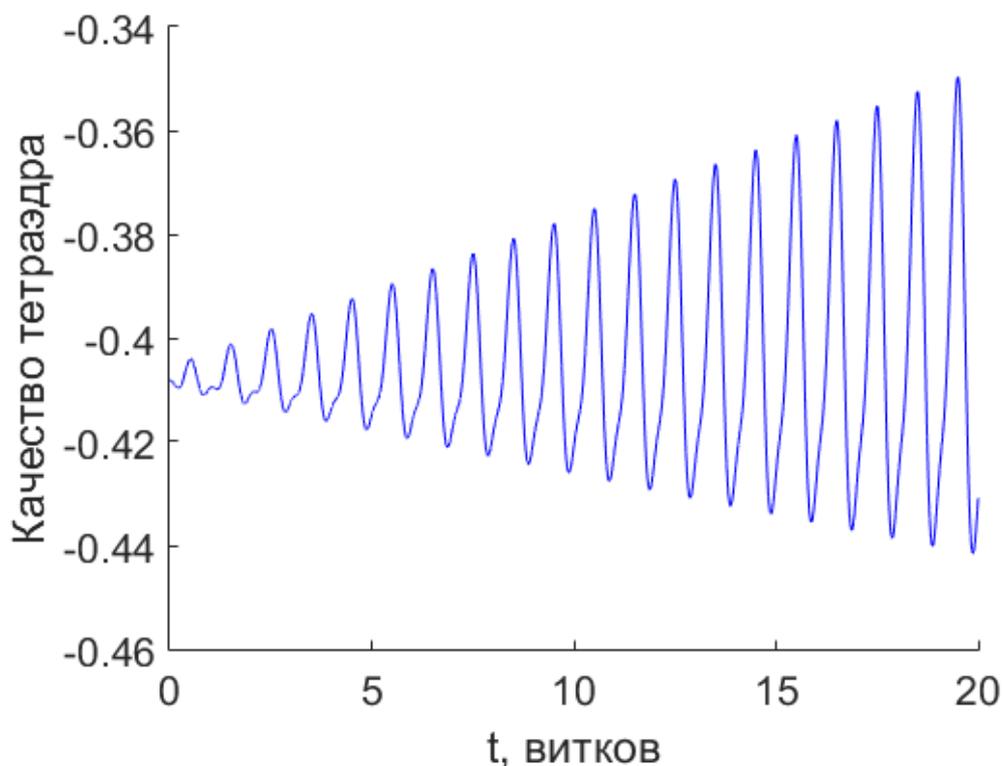


Рис. 4. Качество в пассивном движении

Из графика изменения качества тетраэдра (рис. 4) видно, что его ухудшение на 10% заняло чуть меньше 20 витков, что соответствует примерно 25 часам. Моделирование производилось в рамках нелинейной модели.

Линейная модель

Рассмотрим теперь траектории спутников под действием управления, обеспечивающего возвращение спутников на опорную орбиту, причём моделирование будем проводить для линейной системы уравнений Швайгарта–Седвика. При непрерывном поддержании формации потребуем равенство координат и скоростей соответственно в начале и конце каждого витка, $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_0$. Необходимо отметить, что эти величины заданы в ОСК, в ИСК же они совпадать уже не будут. В этом варианте управления конфигурация восстанавливается к началу каждого нового витка относительного движения. Для задания угла α , при котором рассматриваются начальные данные, определим ΔV в зависимости от α (рис. 5). Из графика видно, что существуют значения α , при которых затраты характеристической скорости на возвращение спутника на опорную орбиту минимальны.

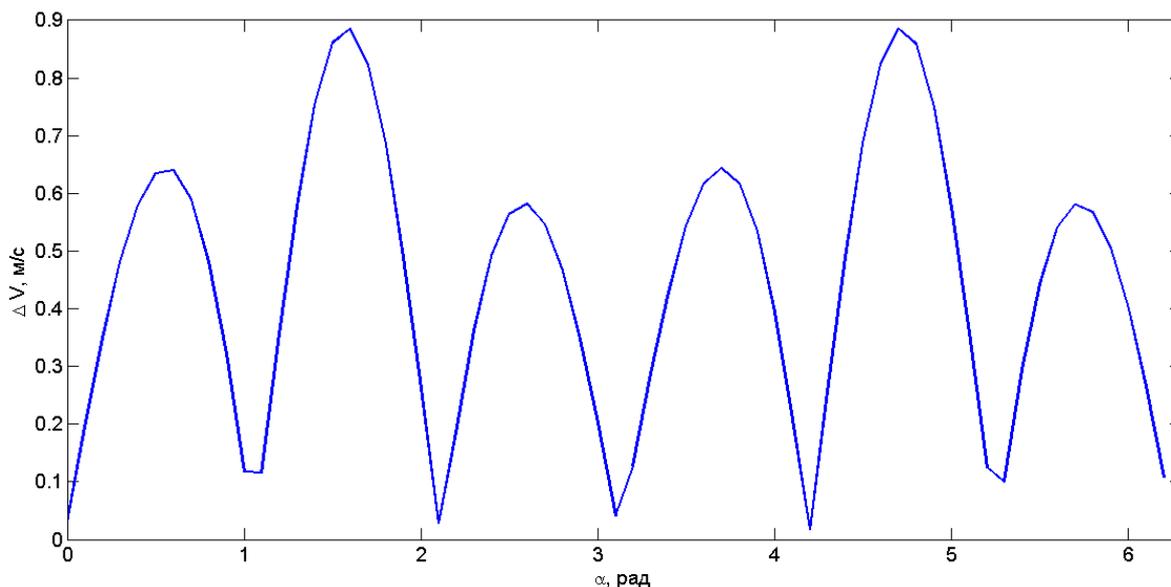
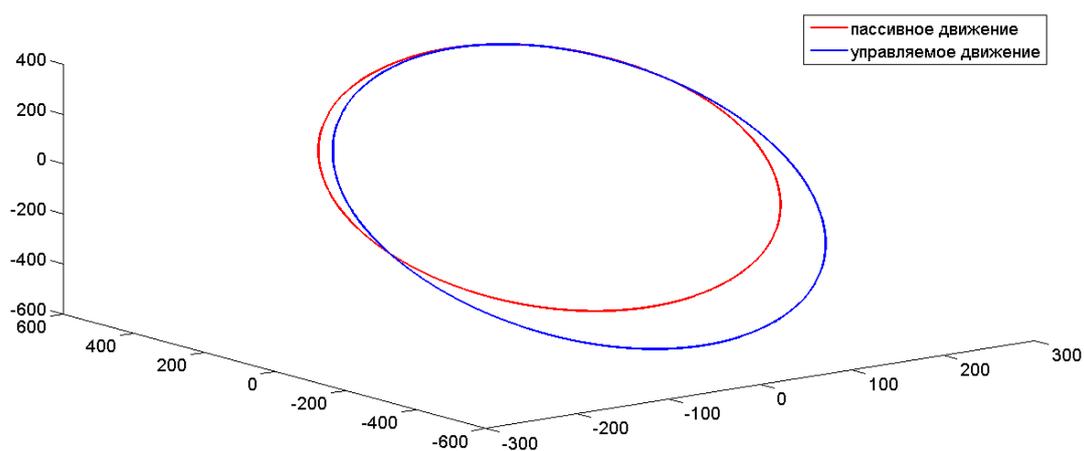
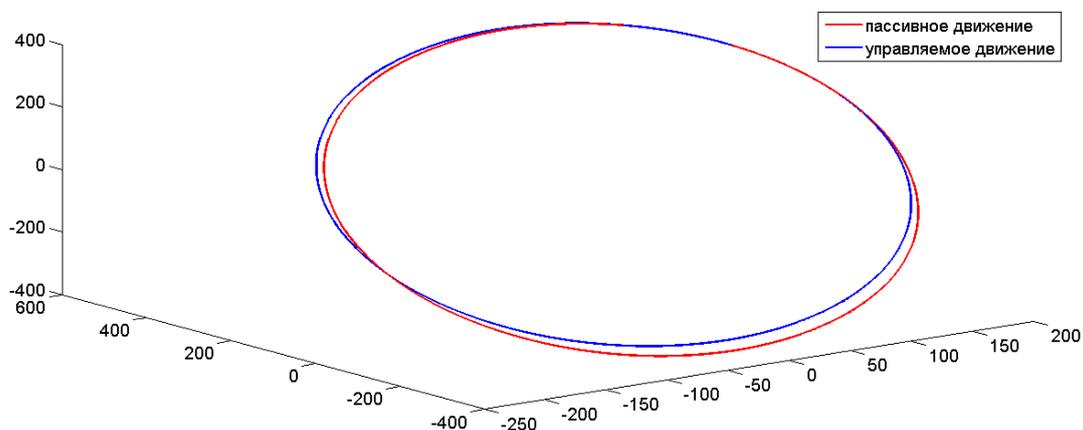
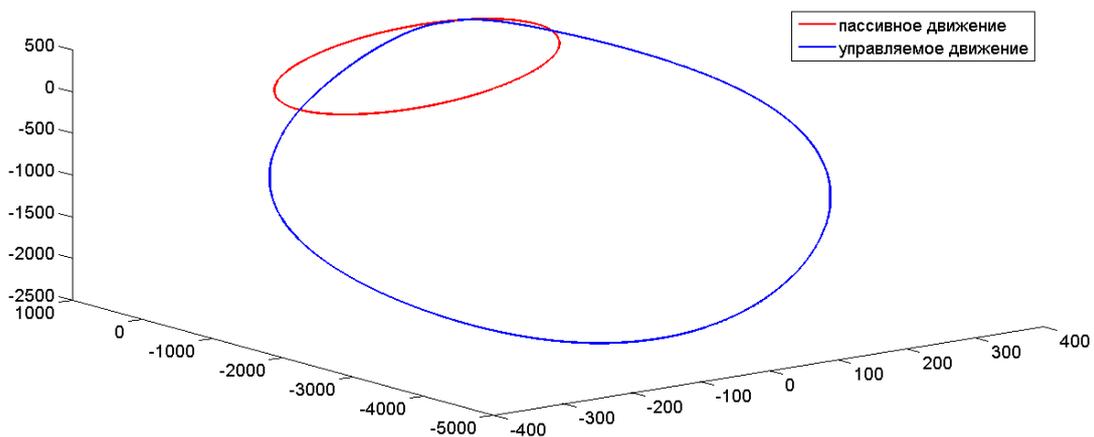


Рис. 5. Зависимость требуемой характеристической скорости от начальной фазы движения спутника

Для сравнения приведём графики управляемого движения при углах $\alpha = 1.7$ и $\alpha = 2.2$ (рис. 6 и 7). Затраты характеристической скорости составили 0.885 м/с и 0.029 м/с соответственно. Нетрудно заметить, что в первом случае относительная орбита гораздо сильнее отличается от пассивного движения, что также нашло отражение и в требуемых затратах характеристической скорости: они отличаются более чем на порядок.

Рис. 6. График управляемого движения, $\alpha = 1.7$ Рис. 7. График управляемого движения, $\alpha = 2.2$

Пусть теперь первые 20 витков движение происходит пассивно, а за следующий виток управление приводит спутник к начальным данным. Приведём графики движения для тех же начальных данных, что и в предыдущем случае (рис. 8 и 9).

Рис. 8. График управляемого движения, $\alpha = 1.7$

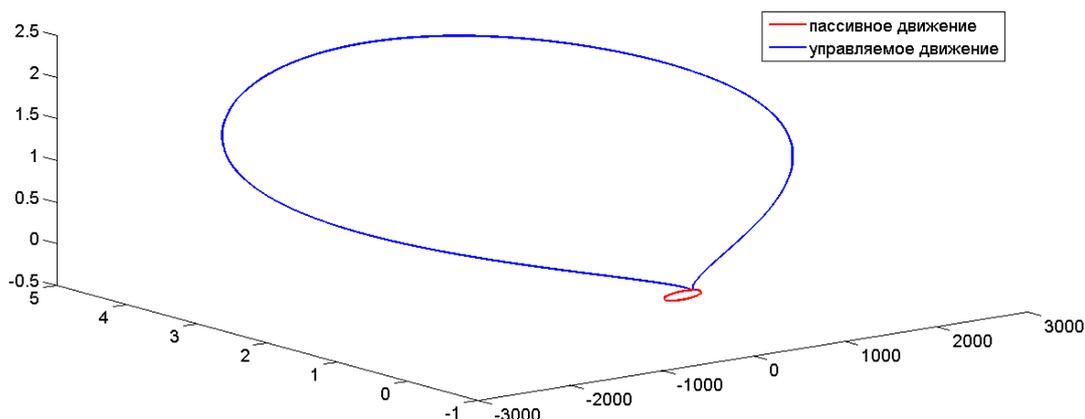


Рис. 9. График управляемого движения, $\alpha = 2.2$

Необходимо отметить, что требуемая характеристическая скорость вследствие неудачного выбора параметра α получается слишком большой и мало реализуемой на спутниках: 18 м/с в первом случае и 198 м/с во втором.

Нелинейная модель

Перейдём теперь к рассмотрению поставленной задачи уже для нелинейной модели. Результаты для случая возврата спутников на опорные орбиты после двадцати витков пассивного движения представлены на рис. 10 и 11.

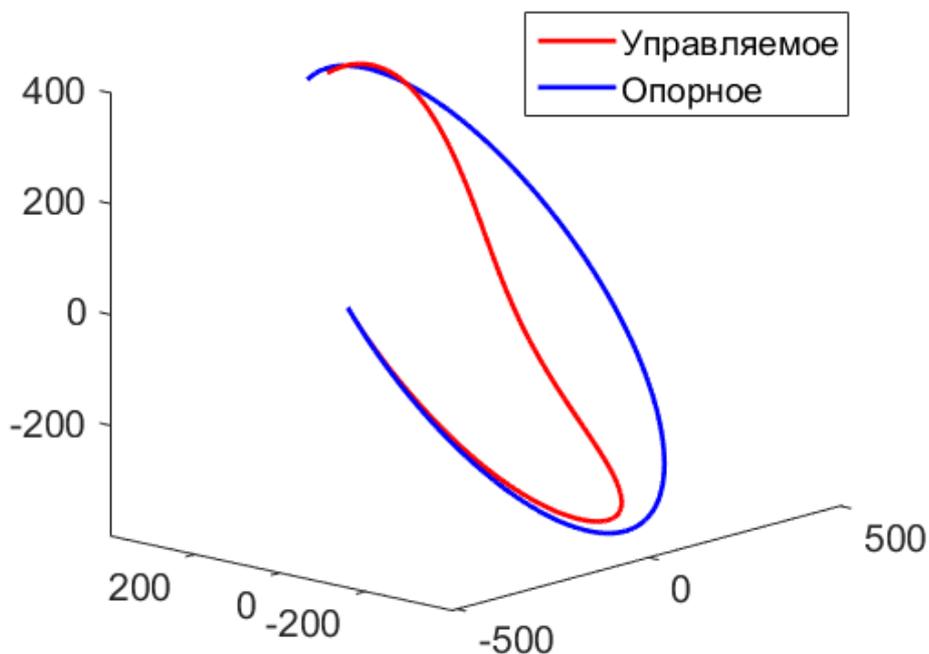


Рис. 10. Возврат первого спутника при одноосном управлении, 0.8 витка

Здесь необходимо отметить, что управление спутником производилось на протяжении 0.8 витка, а не целого витка. Причиной этому является то, что

при установке времени возврата равным одному витку, решение краевой задачи перестаёт сходиться. Связано это, скорее всего, с тем, что для целого количества витков существует не единственное решение краевой задачи. Этот вопрос ещё ждёт своего исследования.

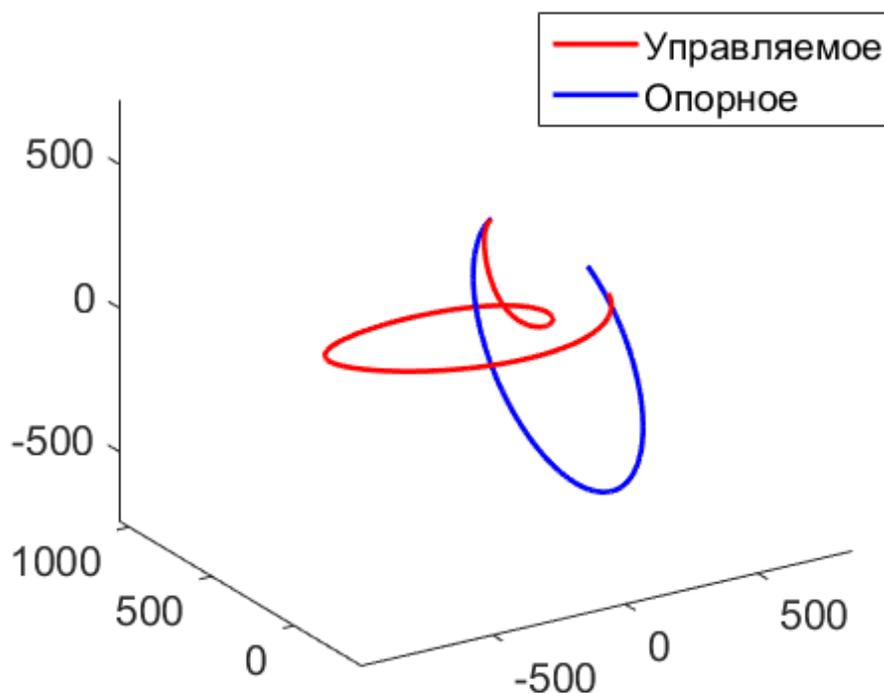


Рис. 11. Возврат второго спутника при одноосном управлении, 0.8 витка

Точность возврата спутников на опорную орбиту составляет порядка 10^{-8} м, ошибка же по скорости составляет менее 10^{-10} м/с. Требуемый запас характеристической скорости составляет 11.46 м/с и 104.99 м/с для первого и второго спутников соответственно. Связано это с разными начальными данными: как и в линейной модели, требуемый запас характеристической скорости сильно зависит от начальных данных.

Необходимо отметить, что запас характеристической скорости, необходимой для выполнения манёвра, существенно зависит от начальных данных, с которых начиналось 20-витковое пассивное движение, а также от времени начала манёвра. Так, при изменении в начальных данных угла α на 1 радиан требуемый запас характеристической скорости для первого спутника составляет 91.06 м/с, а для второго – 97.74 м/с (рис. 12 и 13).

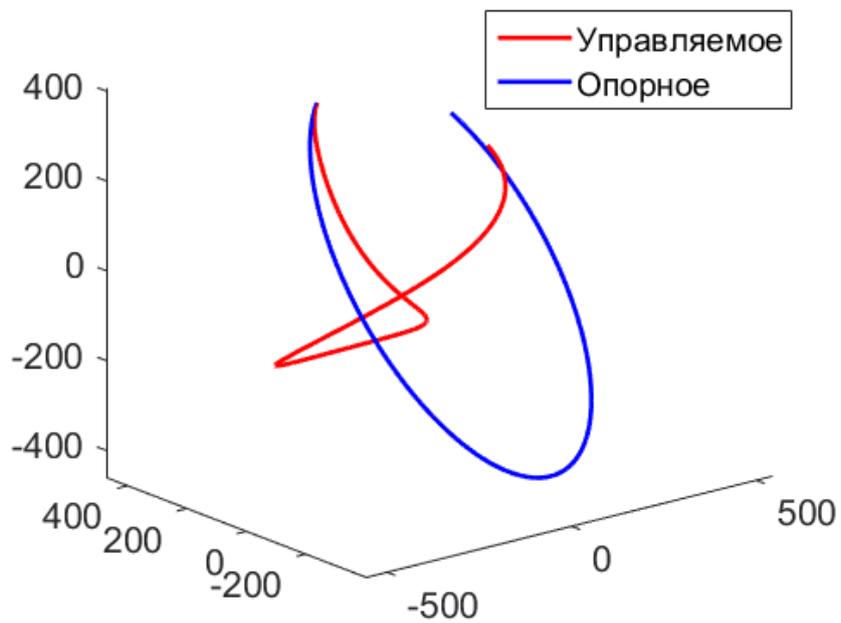


Рис. 12. Возврат первого спутника при одноосном управлении, 0.8 витка

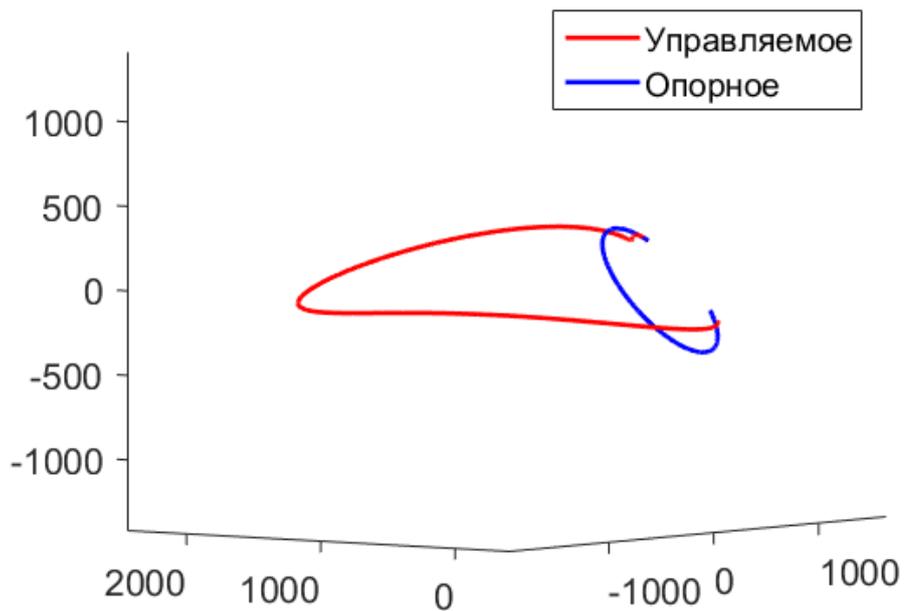


Рис. 13. Возврат второго спутника при одноосном управлении, 0.8 витка

Рассмотрим эволюцию качества тетраэдра во время пассивного движения, периода управления и дальнейшего пассивного движения. Результаты моделирования представлены на рис. 14.

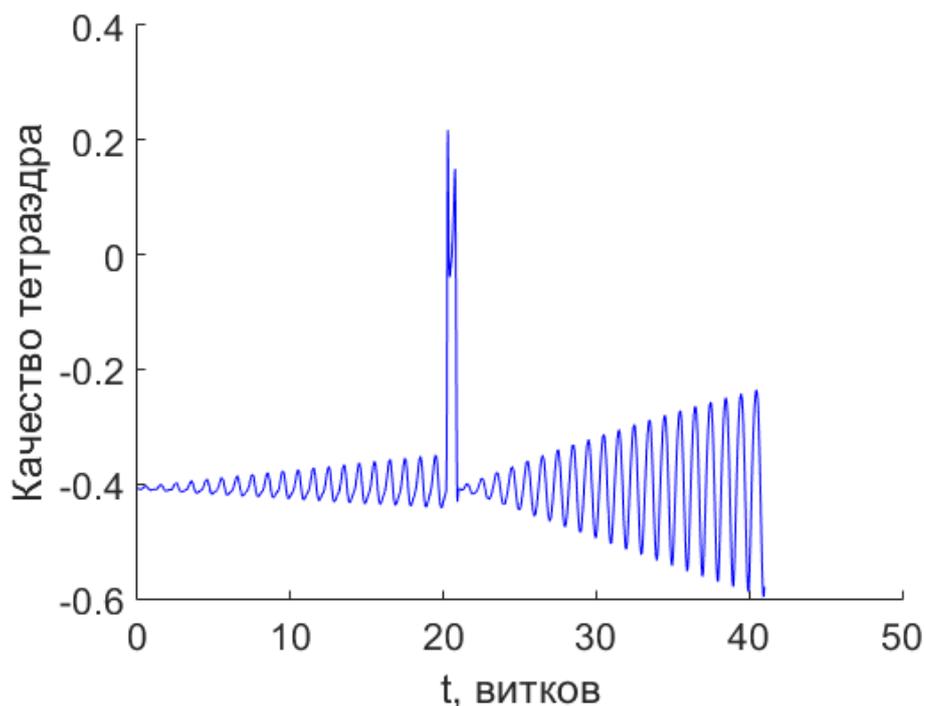


Рис. 14. Эволюция качества тетраэдра

На этом графике управление включается на моменте времени равным 20.2 витков и работает вплоть до начала 21 витка, потом спутники продолжают двигаться пассивно. Видно, что скорость распада группы значительно увеличилась. В то же время, если, не изменяя продолжительности управления, установить время конца управления равным 20.96 витка, группа практически перестает распадаться (рис. 15).

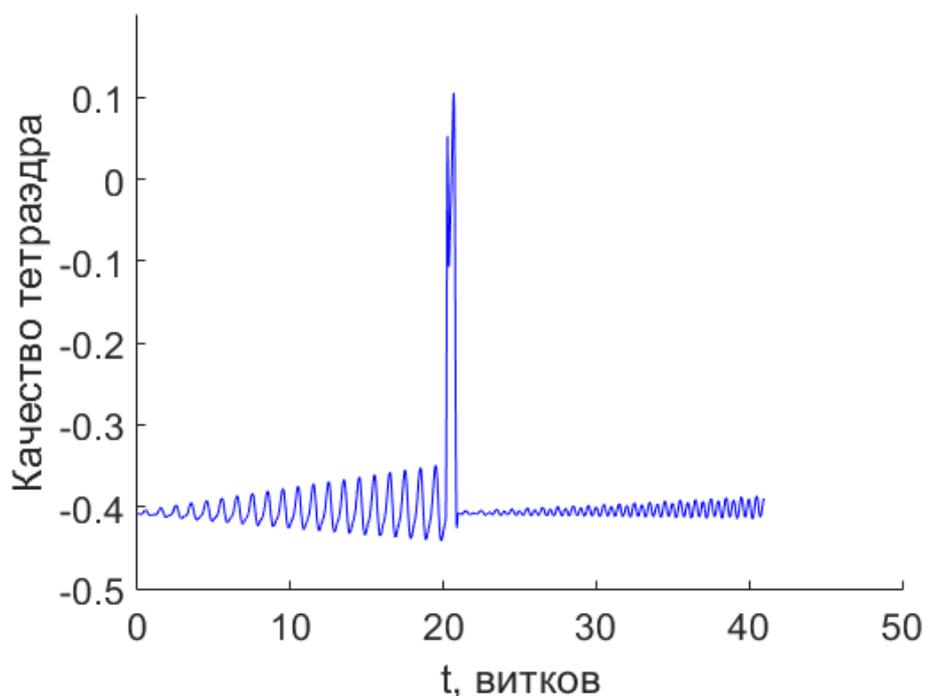


Рис. 15 Эволюция качества тетраэдра

Зависимость скорости распада формации от времени окончания управления при продолжительности управления 0.8 витка представлена на рис. 16.

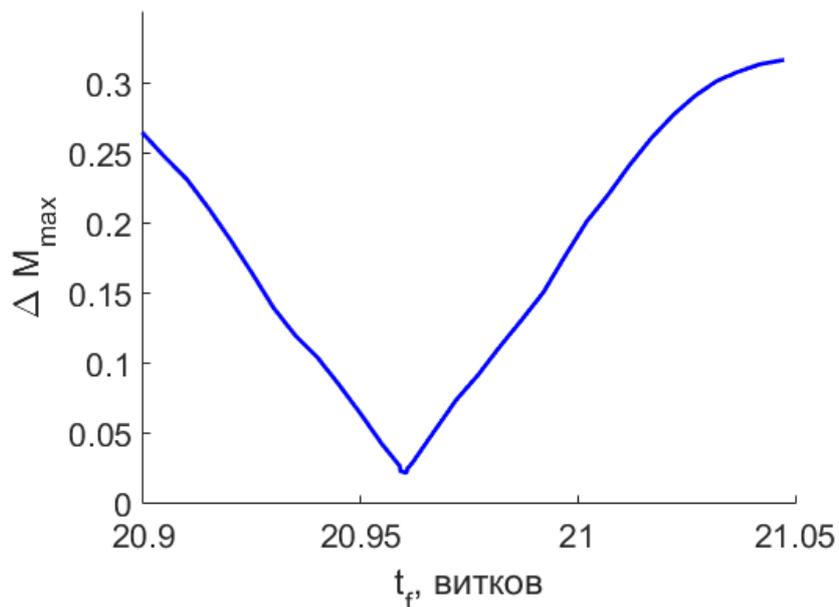


Рис. 16 Скорость распада конфигурации

Здесь по вертикали отложено изменение качества тетраэдра за 20 витков пассивного движения после окончания управления. Для сравнения: при старте из начальных данных без управления скорость распада равна 0.06 за 20 витков.

Поддержание орбиты

Приведём также результаты моделирования для режима поддержания орбиты (рис. 17, 18). Длительность управления составляет 0.8 витка, начальные данные совпадают с опорным движением.

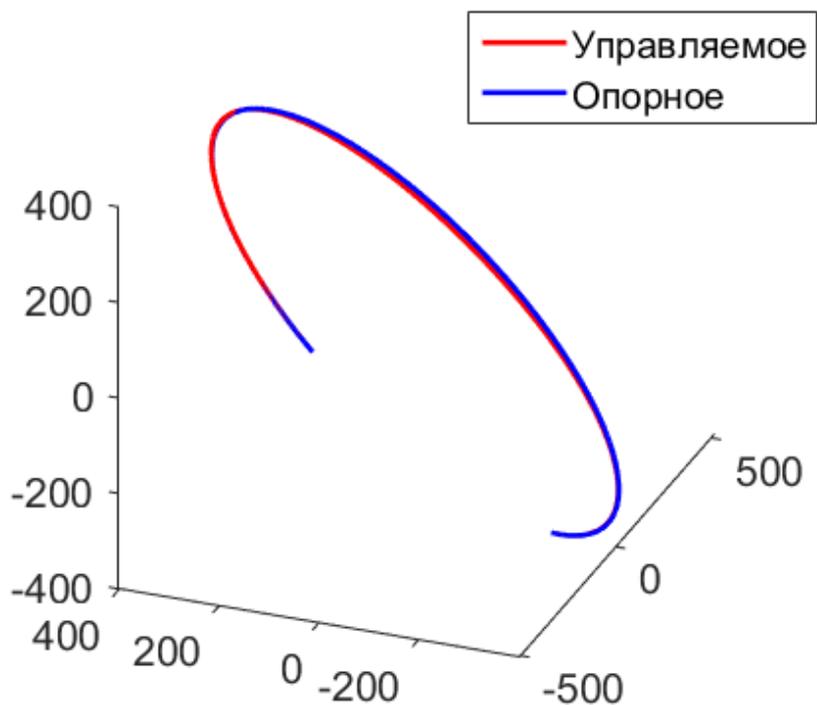


Рис. 17. Возврат первого спутника при одноосном управлении, 0.8 витка

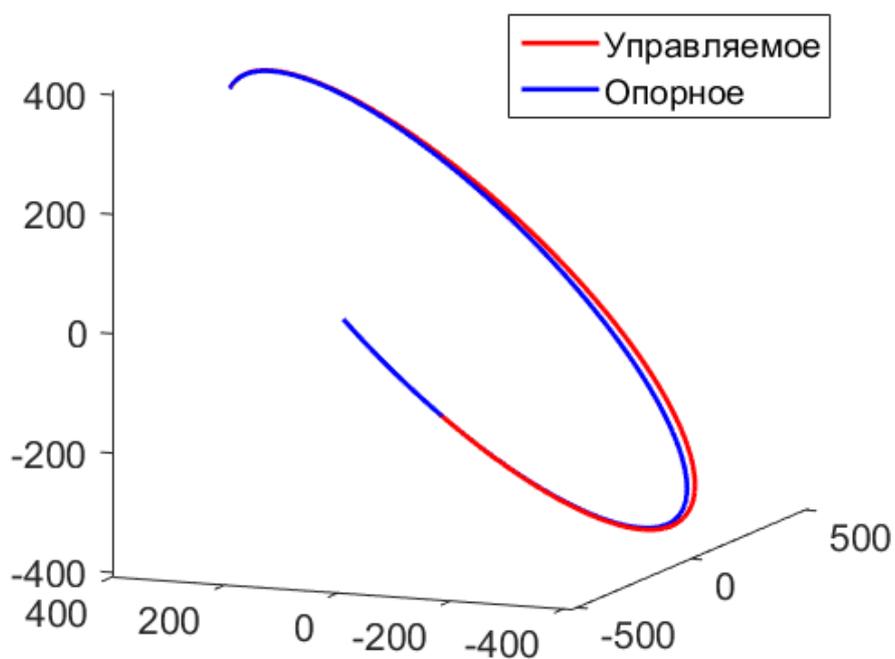


Рис. 18. Возврат второго спутника при одноосном управлении, 0.8 витка

Требуемый запас характеристической скорости составил 0.79 м/с и 5.06 м/с для первого и второго спутников соответственно. Опять-таки требуемый запас характеристической скорости сильно зависит от начальной фазы спутника (рис. 19), поэтому целесообразно начинать управление лишь в некоторых заранее определённых фазах относительного движения.

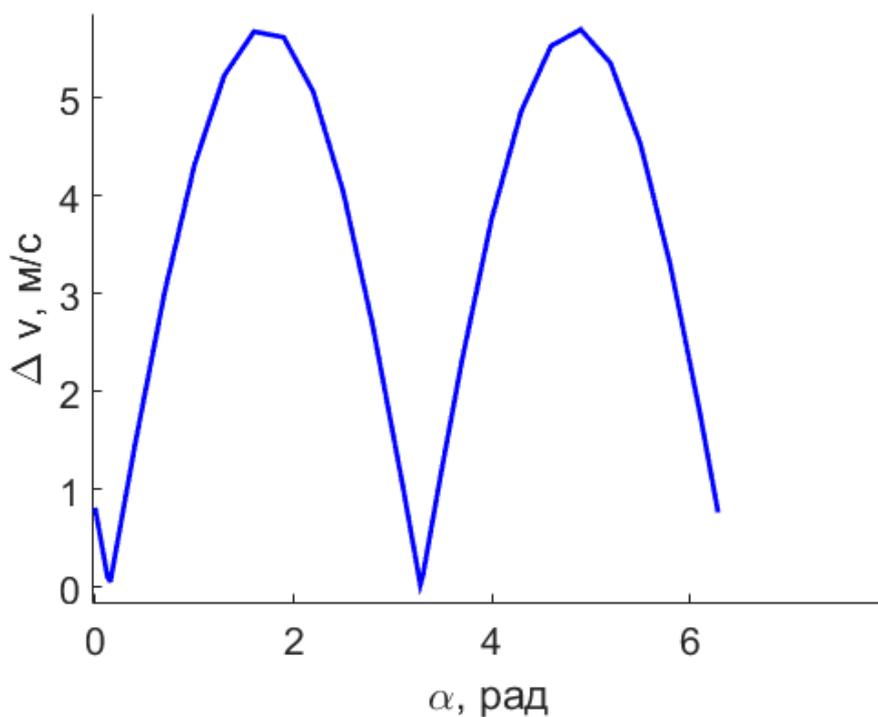


Рис. 19. Зависимость затрат характеристической скорости от начальной фазы спутника

Минимальные затраты характеристической скорости достигаются в районе $\alpha = 3.28$ рад и составляют порядка 0.01 м/с.

Заключение

В работе была рассмотрена задача построения и поддержания тетраэдральной формации группы спутников, летящих по близким околокруговым орбитам. В рамках линейной модели Хилла–Клохесси–Уилтшира найдены опорные орбиты, обеспечивающие сохранение объёма и качества тетраэдра. Помимо этого, предложен алгоритм синтеза управления движением спутников, позволяющий в рамках линейной модели Швайгарта–Седвика поддерживать относительные орбиты спутников. Для нелинейной модели, учитывающей влияние второй гармоники геопотенциала, также построено управление, обеспечивающее поддержание заданных относительных орбит.

Стоит отметить, что в ходе моделирования были обнаружены особенности задачи, которые ещё только предстоит исследовать.

1. Плохая сходимость решения краевой задачи в нелинейной модели в случае, когда управление осуществляется в течение целого витка.
2. Зависимость устойчивости относительных орбит (иными словами – скорости разрушения качества тетраэдра) от конечного момента управления.
3. Сильная зависимость требуемого запаса характеристической скорости от начальной фазы управляемого спутника: разница может достигать нескольких порядков.

Благодарности

Авторы благодарят А.А. Петруковича за формулировку задачи, М.Ю. Овчинникова, Г.В. Смирнова и А. Прадо за полезные обсуждения при её решении.

Литература

1. INTERBALL Satellite [Electronic resource]. URL: <http://www.iki.rssi.ru/interball/>
2. GEOTAIL Satellite [Electronic resource]. URL: <http://pwg.gsfc.nasa.gov/geotail.shtml>
3. THEMIS Satellite [Electronic resource]. URL: http://www.nasa.gov/mission_pages/themis/mission/index.html
4. MMS Satellite [Electronic resource]. URL: <https://mms.gsfc.nasa.gov/>
5. Guzman J.J., Edery A. Mission design for the MMS tetrahedron formation // *Aerosp. Conf. 2004. Proceedings. 2004 IEEE. 2004. Vol. 1. P. 540.*
6. Roscoe W.T. et al. Optimal Formation Design for Magnetospheric Multiscale Mission Using Differential Orbital Elements // *J. Guid. Control. Dyn.* 2011. Vol. 34, № 4. P. 1070–1080.
7. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // *J. Astronaut. Sci.* 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–678.
8. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
9. Guerman A. et al. Closed Relative Trajectories for Formation Flying with Single-Input Control // *Math. Probl. Eng.* 2012. Vol. 2012. P. 20.
10. Guerman A. et al. High-precision single-input control of relative motion in spacecraft formation // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. P. 375–382.

Приложение

Вывод условия сохранения ориентированного объёма

При условии, что $A_2B_1 = A_1B_2$, получаем для ориентированного объёма (опуская постоянные множители):

$$\begin{aligned} V &\propto \sin(nt + \varphi_2)\sin(nt + \psi_1) - \sin(nt + \varphi_1)\sin(nt + \psi_2) = \\ &= \sin^2 nt(\cos \varphi_2 \cos \psi_1 - \cos \varphi_1 \cos \psi_2) + \\ &+ \sin nt \cos nt(\cos \varphi_2 \sin \psi_1 + \sin \varphi_2 \cos \psi_1 - \cos \varphi_1 \sin \psi_2 - \sin \varphi_1 \cos \psi_2) + \\ &+ \cos^2 nt(\sin \varphi_2 \sin \psi_1 - \sin \varphi_1 \sin \psi_2). \end{aligned}$$

Найдём множество значений функции

$$Q(x) = A\sin^2 x + 2B\sin x \cos x + C\cos^2 x.$$

Путём элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{A+C}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{C-A}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) + B\sin 2x = \\ &= \frac{A+C}{2} + \frac{C-A}{2}\cos 2x + B\sin 2x = \frac{A+C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C-A}{2}\right)^2 + B^2} \times \\ &\times \left(\frac{\frac{C-A}{2}}{\sqrt{\left(\frac{C-A}{2}\right)^2 + B^2}} \cos 2x + \frac{B}{\sqrt{\left(\frac{C-A}{2}\right)^2 + B^2}} \sin 2x \right). \end{aligned}$$

Последняя скобка при изменении значения x пробегает отрезок $[-1,1]$, поскольку является синусом некоторого угла. Тогда для функции Q

$$\text{Image}(Q) = \left[\frac{A+C}{2} - \sqrt{\left(\frac{C-A}{2}\right)^2 + B^2}, \frac{A+C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C-A}{2}\right)^2 + B^2} \right].$$

В частности, $Q(x) \equiv \text{const}$ тогда и только тогда, когда $C = A, B = 0$. Объем V постоянен тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 \cos \psi_1 - \cos \varphi_1 \cos \psi_2 &= \sin \varphi_2 \sin \psi_1 - \sin \varphi_1 \sin \psi_2 \\ \cos \varphi_2 \sin \psi_1 + \sin \varphi_2 \cos \psi_1 &= \cos \varphi_1 \sin \psi_2 + \sin \varphi_1 \cos \psi_2 \end{aligned}$$

или, что то же самое, когда $\varphi_2 + \psi_1 = \varphi_1 + \psi_2 + 2\pi k$.

Условие параллельности плоскостей орбит спутников

Нормаль к плоскости, содержащей плоскую параметрически заданную кривую

$$x = C + 2A \cos(nt + \varphi),$$

$$y = B \sin(nt + \psi),$$

$$z = A \sin(nt + \varphi),$$

коллинеарна вектору $\mathbf{n} = (B \sin(\psi - \varphi), -2A, 2B \cos(\psi - \varphi))^T$, так что для двух спутников условие $\varphi_2 + \psi_1 = \varphi_1 + \psi_2 + 2\pi k$ означает параллельность плоскостей их относительных орбит.

Оглавление

Введение	3
Постановка задачи	4
Поиск опорной относительной орбиты	5
Построение управления в линейной модели.....	10
Построение управления в нелинейной модели.....	11
Результаты моделирования	13
Заключение	23
Литература	24
Приложение	25