ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 92 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Истомина М.А., Елизарова Т.Г.

Квазигазодинамический алгоритм для полярной системы координат и пример численного моделирования неустойчивостей в аккреционном диске

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Истомина М.А., Елизарова Т.Г. Квазигазодинамический алгоритм для полярной системы координат и пример численного моделирования неустойчивостей в аккреционном диске // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 92. 25 с. doi:**10.20948/prepr-2016-92**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-92**

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

М.А. Истомина, Т.Г. Елизарова

Квазигазодинамический алгоритм для полярной системы координат и пример численного моделирования неустойчивостей в аккреционном диске

Москва — 2016

Истомина М.А., Елизарова Т.Г.

Квазигазодинамический алгоритм для полярной системы координат и пример численного моделирования неустойчивостей в аккреционном диске

Аннотация

Построены квазигазодинамические уравнения в полярной системе координат и разностная схема конечного объема для их численного решения. В рамках построенного алгоритма выполнено численное моделирование развития крупномасштабной газодинамической неустойчивости в аккреционном газовом диске.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 16-01-00048а и 15-01-03654а.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики в полярных координатах, квазигазодинамический подход, центрально-разностная аппроксимация, аккреционный диск

Maria Alexandrovna Istomina, Tatiana Gennadyevna Elizarova

Quasi-gasdynamic algorithm in the polar coordinate system and a numerical simulation of instabilities in accretion disk flow

Abstract

Quasi gas-dynamic equations in the polar coordinate system together with the finite-volume numerical scheme are constructed. Obtained algorithm is used for the numerical simulation of the large-scale instability development in the gas dynamic accretion disk around a gravity center.

The work is supported by grants 16-01-00048a and 15-01-03654a from the Russian Foundation for Basic Research.

Key words: gas dynamic equations, polar coordinate system, quasi gas dynamic approach, central-difference approximation, accretion disk

1. Введение

Для описания целого ряда течений естественно использовать уравнения гидродинамики, записанные в полярной системе координат. К таким явлениям относятся как задачи с инженерными приложениями, так и описание геофизических и астрофизических процессов, см., например, [1]–[3] и приведенные в этих работах ссылки. В качестве инженерных задач отметим расчеты течений в трубах и зазорах, течения Куэтта–Тейлора между вращающимися цилиндрами, течения во вращающихся сосудах, и в частности, течения в сепараторах. Важным кругом задач является изучение и моделирование охлаждающих систем для газовых турбин, включая микротурбины, [4], [5], [6]. Уравнения в полярных координатах используются для анализа некоторых вихревых атмосферных течений типа циклонов и смерчей, а также ряда астрофизических задач [7] - [13].

Однако большинство существующих разностных алгоритмов решения уравнений гидродинамики построены с использованием декартовой системы координат, а их адаптация для сферических и полярных систем координат оказывается громоздкой, что объясняет ограниченное количество работ в этой области.

В данной работе приведено расширение квазигазодинамических (КГД) [14, 15] уравнений и соответствующего численного алгоритма для уравнений газовой динамики, записанных в полярной системе координат. КГД алгоритм позволяет применять классический вариант метода конечного объема с аппроксимацией всех потоковых слагаемых с помощью центральных разностей в сочетании с явной по времени разностной схемой. Все газодинамические величины относятся к расчетным узлам сетки, а потоки вычисляются на границах ячеек в полуцелых узлах. Для аппроксимации граничных условий используется аппарат фиктивных ячеек. Присутствующая в КГД алгоритме τ-диссипация обеспечивает точность и условную устойчивость разностной схемы.

Для простоты изложения задачи рассматриваются в баротропном приближении. Построенная методика может быть расширена на полные уравнения газовой динамики.

КГД уравнения в полярной системе координат для частного случая баротропных течений — приближения мелкой воды — представлены в препринте [17]. Там же приведено тестирование алгоритма на примере течений, не зависящих от угловой переменной.

В данной работе КГД уравнения для баротропных течений выписаны в виде, удобном для численной реализации, приведена соответствующая разностная схема и рассмотрено течение в аккреционном диске, вращающемся вокруг притягивающего центра.

Аккреционные диски – это газовые образования в окрестности компактных гравитирующих центров, в которых наблюдаются процессы захвата вещества и его выпадения на центральный объект. Такие среды можно описывать на основе уравнений газовой динамики, если рассматривать относительно грубое пространственное разрешение, а именно, разрешение с использованием пространственных сеток, шаг которых многократно превышает характерные длины свободного пробега молекул в газовом диске.

Изучение газодинамических процессов, протекающих в аккреционных дисках различной природы, является одной из активно исследуемых задач астрофизики, что подтверждается большим числом публикаций на эту тему, см., например, работы [1, 2], [7] - [13]. При этом интерес представляет изучение возможности развития крупномасштабных вихревых структур из имеющихся в течении малых возмущений, а также объяснение возникновения узоров в спиральных галактиках факторами газодинамической природы.

Математическое моделирование газодинамических течений в аккреционном диске с использованием новых вычислительных подходов, одним из которых являются КГД алгоритмы, может как подтвердить закономерности, полученные ранее, так и выявить новые особенности эволюции таких течений.

В данной работе численное моделирование эволюции аккреционного диска проводится на основе КГД системы уравнений в баротропном приближении с использованием полярной системы координат. Постановка задачи соответствует ставшим классическим подходу [7].

В параграфе 2 приведены уравнения Навье-Стокса и их КГД аналог для двумерных задач в баротропном случае. В параграфе 3 приведена соответствуюая разностная схема, в параграфе 4 изложена постановка задачи о течении в аккреционном диске, включая выбор для этой задачи равновесного квазистационарного решения, которое используется в качестве начального прближения. В параграфе 5 приведены примеры численных расчетов.

2. Уравнения газовой динамики в баротропном приближении и их КГД аналог

Система уравнений Эйлера в баротропном приближении в полярной системе координат (r, φ) может быть представлена в виде законов сохранения следующим образом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho r u_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho u_\varphi\right)}{\partial \varphi} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho u_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_r u_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \rho f_r, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho u_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \rho u_r u_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\varphi^2)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} = \rho f_\varphi, \tag{3}$$

где $\rho(r, \varphi, t)$ – плотность жидкости, $\mathbf{u} = \{u_r(r, \varphi, t),\, u_\varphi(r, \varphi, t)\}$ – скорость жидкости, $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma = k\rho^\gamma$ – давление газа, $k = p_0/\rho_0^\gamma$ – численный коэффициент, $\gamma = \mathrm{const}$ – показатель адиабаты, f_r и f_φ – радиальная и азимутальная компоненты внешней силы.

Система регуляризованных уравнений Навье-Стокса (КГД система) в полярных координатах может быть построена либо путем замены переменных в КГД системе уравнений, записанных в декартовой системе координат, либо путем осреднения по малому параметру исходной системы уравнений (1)–(3), [16, 17]. В удобном для разностной аппроксимации виде КГД система уравнений в полярных координатах записывается следующим образом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho u_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial \left(r j_{mr} u_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \left(j_{m\varphi} u_r\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = \\
= \left(\rho - \tau \operatorname{div}\left(\rho \mathbf{u}\right)\right) f_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \left(r u_r \rho w_r^*\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \left(\rho u_\varphi w_r^*\right)}{\partial \varphi} + \\
+ \frac{\partial}{\partial r}\left(k\gamma\rho^{\gamma-1}\tau \operatorname{div}\left(\rho \mathbf{u}\right)\right) - \tau\frac{u_\varphi^2}{r}\operatorname{div}\left(\rho \mathbf{u}\right) - 2\rho\frac{u_\varphi}{r} w_\varphi^* + \\
+ \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r},
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho u_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \left(r^2 j_{mr} u_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \left(j_{m\varphi} u_\varphi\right)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \\
= \left(\rho - \tau \operatorname{div}\left(h \mathbf{u}\right)\right) f_\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \left(r^2 \rho u_r w_\varphi^*\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \left(\rho u_\varphi w_\varphi^*\right)}{\partial \varphi} + \\
+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(k\gamma\rho^{\gamma-1}\tau \operatorname{div}\left(\rho \mathbf{u}\right)\right) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\Pi_{r\varphi}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь Π_{ij} — тензор вязких напряжений Навье-Стокса с компонентами

$$\begin{gathered}
\Pi_{rr} = 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \\
\Pi_{\varphi\varphi} = 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right) - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \\
\Pi_{r\varphi} = \Pi_{\varphi r} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right),
\end{gathered}$$

μ — коэффициент вязкости.

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{j}_m = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rj_{mr}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(j_{m\varphi}\right)}{\partial\varphi},\\
&j_{mr} = \rho(u_r - w_r),\\
&j_{m\varphi} = \rho(u_\varphi - w_\varphi),\\
&w_r = \frac{\tau}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\rho u_r^2\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho u_r u_\varphi\right)}{\partial\varphi} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} - \rho f_r\right],\\
&w_\varphi = \frac{\tau}{\rho}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\rho u_r u_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho u_\varphi^2\right)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} - \rho f_\varphi\right],\\
&w_r^* = \tau\left[u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_\varphi\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r\right],\\
&w_\varphi^* = \tau\left[\frac{1}{r}u_r\frac{\partial\left(ru_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi} - f_\varphi\right].
\end{aligned}
$$

КГД система уравнений включает в себя сглаживающие добавки, в которые в качестве малого коэффициента входит параметр τ размерности времени.

Система уравнений (4)–(6) удовлетворяет условиям равновесия, то есть для покоящегося газа система КГД уравнений, также как и система уравнений Навье-Стокса, редуцируется к виду

$$
\frac{\partial p}{\partial r} = \rho f_r, \qquad \frac{\partial p}{\partial\varphi} = r\rho f_\varphi. \tag{7}
$$

В [14] и [16] показано, что регуляризирующие τ-добавки не нарушают выполнение закона сохранения момента импульса.

Свойства параболичности КГД уравнений и их энергетические характеристики изучались в [18, 19]. Консервативные дискретизации регуляризованных уравнений приведены в [20].

Для системы уравнений (4)–(6) выписывается начально-краевая задача. В качестве граничных условий по углу можно поставить условия периодичности. Условие непротекания потока массы $j_{mr} = 0$ через границу $r = r_0$ обеспечивается выполнением на этой границе двух граничных условий — условия непротекания для радиальной скорости $u_r = 0$ и условия на градиент давления в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\Big(\frac{u_\varphi^2}{r} + f_r\Big). \tag{8}$$

3. Разностная схема

Зададим область расчета в виде кольца

$$\Omega = \Omega_r \times \Omega_\varphi = (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \times (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Расчетная сетка в области имеет размер $(0 \div N_r - 1) \times (0 \div N_\varphi - 1)$, при этом внутренними узлами являются узлы с номерами $(1 \div N_r - 2) \times (1 \div N_\varphi - 2)$. Приграничные узлы являются фиктивными и используются для аппроксимации граничных условий. Граница области расположена в полуцелых точках. Шаги по пространству обозначим как Δr и $\Delta\varphi$.

Конечно-разностная аппроксимация КГД уравнений с вычислением всех пространственных производных с помощью центральных разностей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\hat\rho_{i,j} - \rho_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i}\frac{(rj_{mr})_{i+\frac12,j} - (rj_{mr})_{i-\frac12,j}}{\Delta r} + \\ &+\frac{1}{r_i}\frac{(j_{m\varphi})_{i,j+\frac12} - (j_{m\varphi})_{i,j-\frac12}}{\Delta\varphi} = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{(\rho\hat u_r)_{i,j} - (\rho u_r)_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i}\frac{(rj_{mr}u_r)_{i+\frac12,j} - (rj_{mr}u_r)_{i-\frac12,j}}{\Delta r} + \\ &+\frac{1}{r_i}\frac{(j_{m\varphi}u_r)_{i,j+\frac12} - (j_{m\varphi}u_r)_{i,j-\frac12}}{\Delta\varphi} + \frac{p_{i+\frac12,j} - p_{i-\frac12,j}}{\Delta r} - \frac{\rho_{i,j}u^2_{\varphi i,j}}{r_i} =\end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\rho_{i,j} - \tau_{i,j} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})_{i,j}\right) f_{r\,i,j} + \\
&+ \frac{1}{r_i}\frac{(r\rho u_r w_r^*)_{i+\frac{1}{2},j} - (r\rho u_r w_r^*)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} + \frac{1}{r_i}\frac{(\rho u_\varphi w_r^*)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho u_r w_r^*)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \\
&+ \frac{\left(k\gamma\rho^{\gamma-1}\tau \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(k\gamma\rho^{\gamma-1}\tau \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} - \tau_{i,j}\frac{u_{\varphi\,i,j}}{r_i} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})_{i,j} - \\
&- 2\rho_{i,j}\frac{u_{\varphi\,i,j}}{r_i} w^*_{\varphi\,i,j} + \frac{\Pi_{rr\,i+\frac{1}{2},j} - \Pi_{rr\,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} + \frac{1}{r_{i,j}}\frac{\Pi_{r\varphi\,i,j+\frac{1}{2}} - \Pi_{r\varphi\,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \\
&+ \frac{\Pi_{rr\,i,j} - \Pi_{rr\,i,j}}{r_i},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho\hat{u}_\varphi)_{i,j} - (\rho u_\varphi)_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{r_i^2}\frac{(r^2 j_{mr} u_\varphi)_{i+\frac{1}{2},j} - (r^2 j_{mr} u_\varphi)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} + \\
&+ \frac{1}{r_i}\frac{(j_{mr} u_\varphi)_{i,j+\frac{1}{2}} - (j_{mr} u_\varphi)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}} - p_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta r} = \\
&= \left(\rho_{i,j} - \tau_{i,j} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})_{i,j}\right) f_{\varphi\,i,j} + \frac{1}{r_i^2}\frac{(r^2\rho u_r w_\varphi^*)_{i+\frac{1}{2},j} - (r^2\rho u_r w_\varphi^*)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} + \\
&+ \frac{1}{r_i}\frac{(\rho u_\varphi w_\varphi^*)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho u_\varphi w_\varphi^*)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \\
&+ \frac{1}{r_i}\frac{\left(k\gamma\rho^{\gamma-1}\tau \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(k\gamma\rho^{\gamma-1}\tau \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \\
&+ \frac{\Pi_{\varphi r\,i+\frac{1}{2},j} - \Pi_{\varphi r\,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta r} + \frac{1}{r_i}\frac{\Pi_{\varphi\varphi\,i,j+\frac{1}{2}} - \Pi_{\varphi\varphi\,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \frac{2}{r_i}\Pi_{r\varphi\,i,j}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&j_{mr\,i\pm\frac{1}{2},j} = \rho_{i\pm\frac{1}{2},j}(u_{r\,i\pm\frac{1}{2},j} - w_{r\,i\pm\frac{1}{2},j}), \\
&j_{m\varphi\,i,j\pm\frac{1}{2}} = \rho_{i,j\pm\frac{1}{2}}(u_{\varphi\,i,j\pm\frac{1}{2}} - w_{\varphi\,i,j\pm\frac{1}{2}}),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
w_{r\,i+\frac{1}{2},j} = \frac{\tau_{i+\frac{1}{2},j}}{\rho_{i+\frac{1}{2},j}} \left[\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(r\rho u_r^2)_{i+1} - (r\rho u_r^2)_i}{\Delta r} + \right.
$$
$$
+ \frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(\rho u_r u_\varphi)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\rho u_r u_\varphi)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta r} - \frac{(\rho u_\varphi^2)_{i+\frac{1}{2},j}}{r_{i+\frac{1}{2}}} -
$$
$$
\left. -(\rho f_r)_{i+\frac{1}{2},j} \right], \tag{13}
$$

$$
w_{r\,i-\frac{1}{2},j} = \frac{\tau_{i-\frac{1}{2},j}}{\rho_{i-\frac{1}{2},j}} \left[\frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}} \frac{(r\rho u_r^2)_{i} - (r\rho u_r^2)_{i-1}}{\Delta r} + \right.
$$
$$
+ \frac{1}{r_{i-\frac{1}{2}}} \frac{(\rho u_r u_\varphi)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\rho u_r u_\varphi)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta\varphi} + \frac{p_{i} - p_{i-1}}{\Delta r} - \frac{(\rho u_\varphi^2)_{i-\frac{1}{2},j}}{r_{i-\frac{1}{2}}} -
$$
$$
\left. -(\rho f_r)_{i-\frac{1}{2},j} \right], \tag{14}
$$

$$
\begin{gathered}
w_{\varphi\,i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\tau_{i,j+\frac{1}{2}}}{\rho_{i,j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{r_i^2} \frac{(r^2\rho u_r u_\varphi)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (r^2\rho u_r u_\varphi)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \right. \\
\left. + \frac{1}{r_i} \frac{(\rho u_\varphi^2)_{i,j+1} - (\rho u_\varphi^2)_{i,j}}{\Delta\varphi} + \frac{1}{r_i} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta\varphi} - (\rho f_\varphi)_{i,j+\frac{1}{2}} \right],
\end{gathered} \tag{15}
$$

$$
\begin{gathered}
w_{\varphi\,i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\tau_{i,j-\frac{1}{2}}}{\rho_{i,j-\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{r_i^2} \frac{(r^2\rho u_r u_\varphi)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (r^2\rho u_r u_\varphi)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \right. \\
\left. + \frac{1}{r_i} \frac{(\rho u_\varphi^2)_{i,j} - (\rho u_\varphi^2)_{i,j-1}}{\Delta\varphi} + \frac{1}{r_i} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta\varphi} - (\rho f_\varphi)_{i,j-\frac{1}{2}} \right].
\end{gathered} \tag{16}
$$

Построенная разностная аппроксимация удовлетворяет условию "хорошей балансировки"(well-balanced). Последнее означает, что в случае покоящегося газа ($u_r = u_\varphi = 0$) система разностных уравнений (9)-(11) редуцируется к центрально-разностному аналогу выражений (7) для целой или полуцелой пространственной точки.

Регуляризирующий параметр τ вычисляется как $\tau = \mu/p \sim \lambda/c_s$, то есть как отношение характерного малого пространственного масштаба к характерной скорости. Для разреженных течений в качестве характерного пространственного масштаба выбирается средняя длина свободного пробега частиц λ.

Для численного моделирования сред, в которых шаги пространственной сетки существенно больше длин свободного пробега, в качестве характерного пространственного масштаба удобно выбрать характерный размер пространственной ячейки. При рассмотрении течений в полярной системе координат этот размер естественно оценить через площадь пространственной ячейки $\Delta S = r\Delta\varphi\Delta r$, где Δr и $\Delta\varphi$ — шаги пространственной сетки. В качестве характерной скорости естественно выбрать скорость звука $c_s = \sqrt{\gamma RT}$ или характерную скорость течения газа $|\vec{u}|$. В последующих расчетах будем выбирать параметр регуляризации в виде

$$\tau = \alpha \frac{\sqrt{r\Delta\varphi\Delta r}}{c_s + |\vec{u}|}, \tag{17}$$

где α — численный коэффициент, выбираемый из соображений устойчивости и монотонности разностного решения. Этот коэффициент позволяет контролировать величину используемой в КГД методе искусственной диссипации.

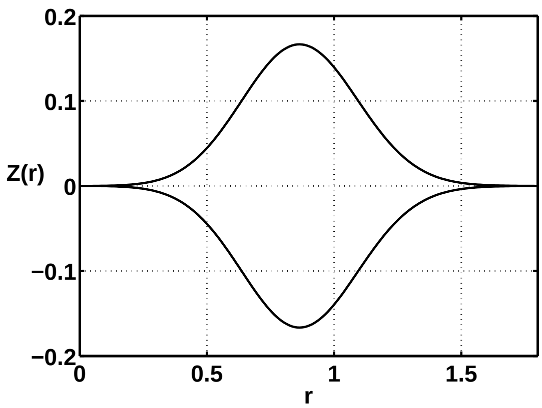
Коэффициент вязкости будем рассматривать также как искусственную величину, которую будем вычислять как

$$\mu = \alpha_\mu p \tau. \tag{18}$$

здесь α_μ — численный коэффициент для дополнительной настройки алгоритма.

Периодические условия по углу φ задаются с помощью присвоения значению в точке 0 значения в точке $N-2$, а значению $N-1$ – значения в точке 1 для точек N_r и N_φ, соответственно.

Тестирование алгоритма проведено на примере решения задач об установлении стационарного профиля жидкости, заключенной в кольцевом слое с твердыми стенками, вращающейся с постоянной угловой скоростью, и о ламинарном течении Куэтта-Тейлора в зазоре. Обе задачи решаются в приближении мелкой воды, то есть для случая $\gamma = 2$, $k = g/2$, где g — ускорение силы тяжести. В качестве граничного условия на твердой стенке ставится разностный аналог условия (8). Для его разностной аппроксимации используется аппарат фиктивных ячеек. Для обеих задач по углу φ поставлены периодические граничные условия.



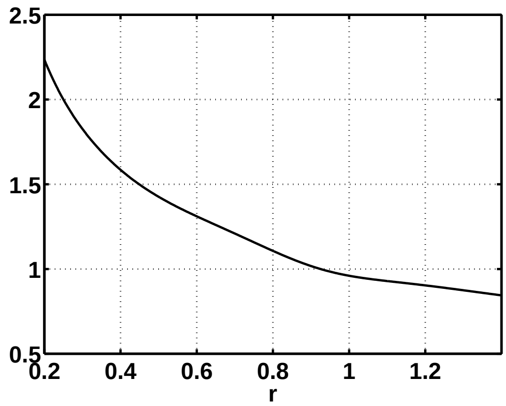


Рис. 1. Граница вещества $Z(r)$ и равновесное распределение азимутальной скорости u_φ.

4. Постановка задачи об эволюции аккреционного диска. Задание равновесного решения

В соответствии с [7, 8] задача решается в безразмерных переменных. Для перехода к безразмерным величинам в качестве масштабных множителей выбраны характерный пространственный размер

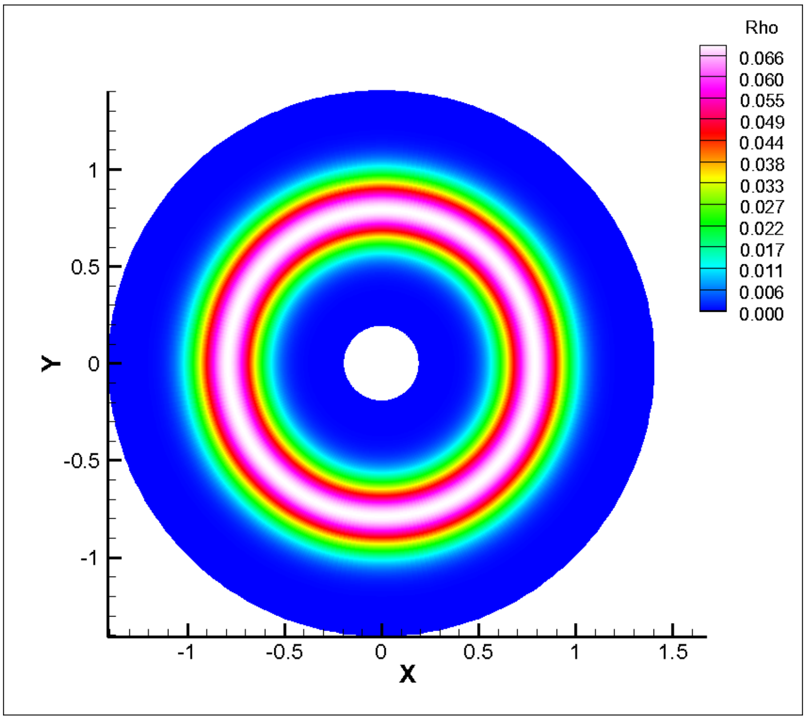


Рис. 2. Начальное распределение плотности в диске. Сетка 80×260.

R, характерная масса M и гравитационная постоянная G. Безразмерные переменные введены в соответствии с формулами

$$r = Rr',\ u_r = u_0 u_r',\ u_\varphi = u_0 u_\varphi',\ t = t_0 t',\ p = p_0 p',\ \rho = \rho_0 \rho'.$$

Множители u_0, t_0, p_0, ρ_0 выражаются следующим образом

$$u_0^2 = \frac{GM}{R},\ t_0^2 = \frac{R^3}{GM},\ \rho_0 = \frac{M}{R^3},\ p_0 = \frac{GM^2}{R^4}.$$

Характерные диапазоны масштабных множителей для астрофизических величин имеют следующий вид:

$$G = 6.67{\times}10^{-8} sm^3 g^{-1} c^{-2}, M = 2 \times 10^{33} - 6 \times 10^{33} g,\ R = 10^{11} - 10^{14} sm.$$

Переход к безразмерным переменным не меняет вида системы газодинамических уравнений.

В качестве начального условия задается стационарное состояние газового диска. Рассматривается стационарная трехмерная (r, φ, z) газовая конфигурация с границей в виде тора, зависящей только от координаты r

$$Z(r) = \pm\, a\, r\, e^{-b(r-r_0)^2}. \tag{19}$$

Стационарное решение для трехмерного течения было построено для системы уравнений Эйлера в баротропном приближении с учетом силы гравитации в предположении осевой симметрии решения $\rho = \rho(r, z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$ и $u_r = u_z = 0$. Вид решения приведен, например, в [8], [9].

При $\gamma > 1$ для указанных уравнений в области $\{(r, z);\, r \in \Omega_r, |z| \leqslant Z(r)\}$ получено стационарное решение, описывающее распределение угловой скорости газа в виде

$$u_\varphi(r)^2 = \frac{1}{r}\left(1 + r\Phi^{'}(r) - \Phi(r)\right),$$

где

$$\Phi(r) = \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + Z(r)^2}}\right),$$

$$\Phi'(r) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + Z(r)^2}} + \frac{r\,(r + Z(r)Z(r)')}{\left(r^2 + Z(r)^2\right)^3},$$

$$Z'(r) = \frac{\partial Z}{\partial r}.$$

Таким образом выражение для угловой скорости принимает вид

$$u_\varphi^2(r) = \frac{1 + a^2 e^{-2b(r-r_0)^2}(1 - 2br(r - r_0))}{r\left(\sqrt{1 + a^2 e^{-2b(r-r_0)^2}}\right)^3}. \tag{20}$$

Равновесная плотность $\rho(r, z)$ распределена согласно соотношению

$$\rho(r,z)=\left(\frac{\gamma-1}{k\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}+\frac{1}{r}\left(\Phi(r)-1\right)\right)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

таким образом

$$\rho(r,z)=\left(\frac{\gamma-1}{k\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2r^2e^{-2b(r-r_0)^2}}}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (21)$$

Относительная толщина аккреционного диска не велика, и основной перенос массы газа происходит в азимутальной плоскости. Поэтому в первом приближении задачу о развитии газодинамических неустойчивостей в диске можно свести к задаче в двумерной осесимметричной постановке путем рассмотрения проинтегрированных по направлению z газодинамических параметров. Согласно [8] и приведенным в этой работе ссылкам, исключим зависимость от координаты z и будем использовать далее проинтегрированную по толщине диска погонную плотность, которая вычисляется как

$$\tilde{\rho}(r,\varphi)=2\int\limits_0^{Z(r)}\rho(r,\varphi,z)dz. \quad (22)$$

Соответствующее проинтегрированное по толине диска давление будем вычислять на основе плотности $\tilde{\rho}$ из уравнения состояния $\tilde{p}=k\tilde{\rho}^{\gamma}$. При этом сила притяжения центрального тела оказывается равной $f_r=-\dfrac{r}{(r^2+Z_*(r)^2)^{3/2}}$, где $Z_*\in[0,Z(r)]$. Далее будем полагать, что $Z_*=0$ и притягивающая сила имеет вид $f_r=-1/r^2$. Как было показано в цитированных работах, такое определение плотности и давления удовлетворяет двумерным уравнениям газовой динамики для описания эволюции газодинамического течения в газовом облаке.

Параметры задачи в соответствие [8] равны $a=0.2$, $b=9.0$, $r_0=0.8$, $\gamma=5/3, k=0.012$. Задача рассматривается в расчетной области

$\Omega = \Omega_r \times \Omega_\varphi$ с границами по радиусу $r_1 = 0.2$ и $r_2 = 1.4$.

На рис. 1 приведена область с границей вещества $Z(r)$ в соответствии с (19) и распределение азимутальной скорости u_φ согласно (20). На рис. 2 ппоказана проинтегрированная по z плотность $\tilde{\rho}(r)$ согласно (22). Интегралы вычислялись с помощью формул левых прямоугольников с разбиением области интегрирования на 10000 интервалов.

5. Результаты численного моделирования

В качестве начального условия в задаче об течении газа в аккреционном диске задаем стационарное распределение газодинамических параметров, приведенное в разделе 4, на фоне которого в начальный момент времени задается возмущение скорости u_φ в виде

$$u^0_\varphi(r, \varphi) = u_\varphi(r, \varphi)(1 + A\sin(N\varphi)). \tag{23}$$

где скорость u_φ вычисляется в соответствии с (20), N — число периодов для внесенного возмущения, коэффициент $A = 0.2$ при $r = 0.8$ и $A = 0$ для остальных значений r, [7]. Таким образом, возмущение азимутальной скорости задается в одной пространственной ячейке по r, в которой достигается максимальное значение потности газа. Такое возмущение в виде δ-функции по радиусу вызывает сложности для начала численного расчета.

Значения плотности и давления на границах расчетной области $r = r_1$ и $r = r_2$ для равновесного решения очень малы, а именно, $\rho(r_1) \sim \rho(r_2) \sim 10^{-7}$, $p(r_1) \sim p(r_2) \sim 10^{-12}$. Скорость звука в центральной части облака составляет $c_s = \sqrt{\gamma p/\rho} \sim 0.12$, а вблизи границы облака ~ 0.01. Таким образом, число Маха в центральной части облака $Ma \sim u_\varphi/c_s \sim 8$ и возрастает до ~ 100 на периферии диска. Согласно приведеным оценкам течение газа является существенно гиперзвуковым, что может создавать проблемы при его численном моделировании.

В рассматриваемой задаче $|u_r| \ll u_\varphi$ и скорость звука c_s мала, поэтому параметр регуляризации τ удобно аппроксимировать в виде

$$\tau = \alpha \frac{\sqrt{r \Delta r \Delta \varphi}}{c_s + \sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2}} \sim \alpha \frac{\sqrt{r \Delta r \Delta \varphi}}{u_\varphi}. \tag{24}$$

Коэффициент настройки α варьировался в пределах $0.01 - 1$, и его оптимальным значением является величина 0.1. При больших значениях этого коэффициента решение оказывается более сглаженным, при меньших значениях начинают появляться численные неустойчивости. Оптимальное значение численного коэффициента $\alpha_\mu = 100$.

В качестве граничных условий по углу на границе $(0, 2\pi)$ по переменным r и φ для всех газодинамических величин ставятся периодические граничные условия.

На внутренней и внешней границах $r = r_1$ и $r = r_2$ проверялись различные варианты постановки граничных условий. В частности, использовались мягкие граничные условия сноса для плотности, давления и обоих скоростей. Применялись условия непротекания совместно с условием скольжения для азимутальной компоненты скорости в виде

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial r}\right|_{r=r_1,r_2} = 0, \; u_r\big|_{r=r_1,r_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right|_{r=r_1,r_2} = 0.$$

Для обеспечения выполнения условия непротекания потока массы через границы области дополнительно применялось условие $\tau\,\big|_{r=r_1,r_2} = 0$, которое позволяет занулить дополнительные КГД потоки массы на границе. Использовались также условия, обеспечивающие равновесное значение давления на границе в виде разностной аппроксимации уравнения (8) в полуцелой точке, которая соответствует положению границы, с использованием фиктивных ячеек.

Все опробованные варианты граничных условий приводили к очень близким численным результатам.

Время завершения расчетов соответствует моменту, когда возмущения из центральной зоны достигают границы расчетной области. Это время для разных вариантов расчета и различных способов выбора граничных условий несколько различалось. Максимальное время расчета составляло $t \sim 8.0$. Для сравнения укажем, что безразмерное время одного оборота внутренней части диска составляет ~ 0.6, для внешней части диска это время ~ 11.

Для наглядного представления результатов расчета переменные в полярных координатах пересчитываются в декартовы координаты. В частности, координаты и компоненты скорости пересчитываются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} &x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \\ &u_x = u_r\cos\varphi - u_\varphi\sin\varphi, \qquad u_y = u_r\sin\varphi - u_\varphi\cos\varphi. \end{aligned} \tag{25}$$

Для представления полей скорости и плотности используется программа TecPlot. Строятся линии тока, значение завихренности $\operatorname{rot}\vec{u}$ и распределение углового момента $M(r,t) = r\rho(r,t)u_\varphi(r,t)$ при некотором заданном угле φ_0.

В расчетах используются равномерные пространственные сетки. Далее представлены результаты, полученные на сетках с числом узлов $N_r \times N_\varphi$, составляющих 80×260, что соответствует ряду результатов, представленных в работах [7] - [9] и [10]. Для качественной оценки точности численного решения приведены результаты для сетки 160×420.

На рис. 3, 4 и 5 приведены распределения плотности для моментов времени $t = 1$, 2 и 3, рассчитанные на двух сетках для числа возмущений $N = 10$.

В наших расчетах α=0.1, $\alpha_m = 100$, шаг по времени $\Delta t = 0.001$ для сетки 80×260 и $\Delta t = 0.0002$ для сетки 160×420. На рис. 3 виден начальный этап развития крупномасштабной неустойчивости, которая впоследствии может приводить к формированию так называемых "рукавов зарождение которых заметно на рис. 5 справа. Видно, что при сгущении пространственной сетки картина вихревых структур оказывается более выраженной.

На рис. 6 приведена эволюция распределения углового момента для тех же моментов времени $t = 1.0, 2.0, 3.0$, которая показывает незначительный отток углового момента из центральной части диска к его переферии.

Сравнение с [7] и [10] для времени $t = 2.0$ и 3.0 показывает качественное соответствие полученных картин (рис. 5, рис. 6).

В [10] для численного моделирования ряда задач о развитии неустойчивостей в дисках использована явная по времени схема, в которой потоки с первым порядком точности вычисляются путем приближенного решения задачи о распаде разрыва методом Роу с энтропийной коррекцией Эйнфельдта. Для повышения порядка точности схемы до третьего используется коррекция потоков с лимитерами методом Ошера. В этой работе на примере схемы типа Роу первого и повышенного порядков точности (схема Роу-Эйнфельдта-Ошера с ограничителями потоков третьего порядка точности по пространству и второго по времени) показано, что увеличение точности схемы позволяет получить четкую структуру развития возмущений в аккреционном диске, в то время как схема первого порядка такую структуру практически не разрешает. В наших расчетах используется КГД алгоритм первого порядка точности, который, однако, существенно точнее схемы Роу первого порядка и позволяет описать начальный этап развития крупномасштабной неустойчивости в газовом диске. Другой причиной не полного соответствия результатов является тот факт, что в КГД постановке используется система уравнений газовой динамики в баротропном приближении, в то время как в цикле работ авторов [7] решается система уравнений Эйлера для идеального политропного газа.

Для оценки вычислительной эффективности КГД алгоритма проводились замеры реального времени его работы. В качестве основного показателя укажем, что время расчета на сетке 80×260 с количеством шагов по времени $N = 5000$, на персональном компьютере с процессором типа Intel(R) Xeon(R) 2.1 ГГц составляет около 10 минут. Указанное число шагов соответствует безразмерному времени $t = 5.0$. При этом шаг по времени $\Delta t = 0.001$.

Таким образом, для численного моделирования данного типа задач на основе КГД алгоритма возможно использование персонального компьютера. Однако при сгущении пространственной сетки вычислительные затраты резко увеличиваются - так сгущение пространственной сетки в 2 раза увеличивает время счета практически в 10 раз за счет дополнительного уменьшения шага по времени. Отметим, что структура алгоритма и его программная реализация допускают распараллеливание для использования компьютеров с большим числом процессоров.

Выводы

Приведена запись КГД уравнений в полярной системе координат и построена конечно-разностная схема для решения построенных уравнений. Схема пригодна для расчета течений невязкого и вязкого газа как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом режимах.

Разностная схема опробована на задаче численного моделирования эволюции аккреционного диска, вращающегося вокруг притягивающего центра. Данное течение характеризуется очень большими перепадами плотности и давления, а также гиперзвуковыми азимутальными скоростями движения газа.

Полученные результаты в целом соответствуют решениям, полученным ранее на основе схемы с ограничителями потоков третьего порядка точности по пространству и второго по времени при существенно более скромных вычислительных затратах КГД алгоритма.

Авторы выражают благодарность В.М. Чечеткину и А.Ю. Луговскому за обсуждение постановки задачи и полученных при ее решении результатов.

Список литературы

[1] *О.М. Белоцерковский, А.М. Опарин, В.М. Чечеткин.* Турбулентность. Новые подходы – Москва: Наука, 2003. 286 с., гл. 3, 4.

[2] *О.М. Белоцерковский, В.В. Денисенко, А.В. Конюхов, А.М. Опарин, О.В. Трошкин, В.М. Чечеткин.* Численное исследование устойчивости течения Тейлора между двумя цилиндрами в двумерном случае // ЖМВиМФ, 2009 г., т. 49, № 4, с. 754 – 768.

[3] *М.А. Шеремет.* Нестационарная сопряженная задача термогравитационной конвекции в горизонтальном цилиндре // Вестник Томского государственного универститета, 2010 г., № 2(10), с. 102 – 111.

[4] *J. Owen.* Air-cooled gas turbine discs: A review of recent research // Int. J. Heat Fluid Flow, V. 9, 354, 1988

[5] *R.T. Deam, E. Lemma, B. Mace, R. Collins.* On scaling down turbines to millimeter size // J. Eng. Gas Turbines Power, v. 130, 052301, (2008)

[6] *B. Herrmann-Priesnitz, W.R.Calderon-Munoz, E.A. Salas, A. Vargas-Uscategni, M.A. Duarte-Mermoud, D.A. Torres.* Hydrodynamic structure of the boundary layer in a rotating cylindrical cavity with radial inflow // Phys. Fluids, 28, 033601 (2016)

[7] *Е.П. Велихов, А.Ю. Луговский, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Чечеткин.* Роль крупномасштабной турбулентности в перераспределении углового момента в аккреционных звездных дисках // Астрономический журнал, 2007 г., т. 84, № 2, с. 1 – 8.

[8] *М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Чечеткин.* Газодинамические процессы в аккреционном диске двойной звездной системы // Математическое моделирование, 1998 г., т. 10, № 5, с. 35 – 47.

[9] *М.В. Абакумов, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Чечеткин.* Исследование равновесных конфигураций газового облака вблизи гравитирующего центра. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1995. №33.

URL: `http://library.keldysh.ru//preprint.asp?lg=r&id=1995-33`

[10] *А.Ю. Луговский, Ю.П. Попов.* Использование схемы Роу-Эйнфельдта-Ошера при математическом моделировании аккреционных звездных дисков на компьютерах с параллельной архитектурой // ЖМВиМФ, 2015 г., т. 55, № 8, с. 1444 – 1456.

[11] *Д.Н. Раздобурдин, В.В. Журавлев.* Оптимальный рост малых возмущений в тонких газовых дисках // Письма в астрономический журнал, 2012, т. 38, №1, с. 1–11.

[12] *А.М. Фридман, Д.В. Бисикало.* Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность // УФН. 2008. т. 178, №6,с. 577–603.

[13] *Л.Г. Страховская.* Модель эволюции самогравитирующего газового диска. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 80.

URL: `http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_80.pdf`

[14] *Ю.В. Шеретов.* Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

[15] *Т.Г. Елизарова.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.

[16] *Т.Г. Елизарова* Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т. 51, № 11, с. 2096-2105.

[17] *Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина.* Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 65.

URL: `http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_65.pdf`

[18] *А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 3, с. 445–472.

[19] *А.А. Злотник* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо– и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 2, с. 325–337.

[20] *А.А. Злотник* О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 2, с. 301–317.

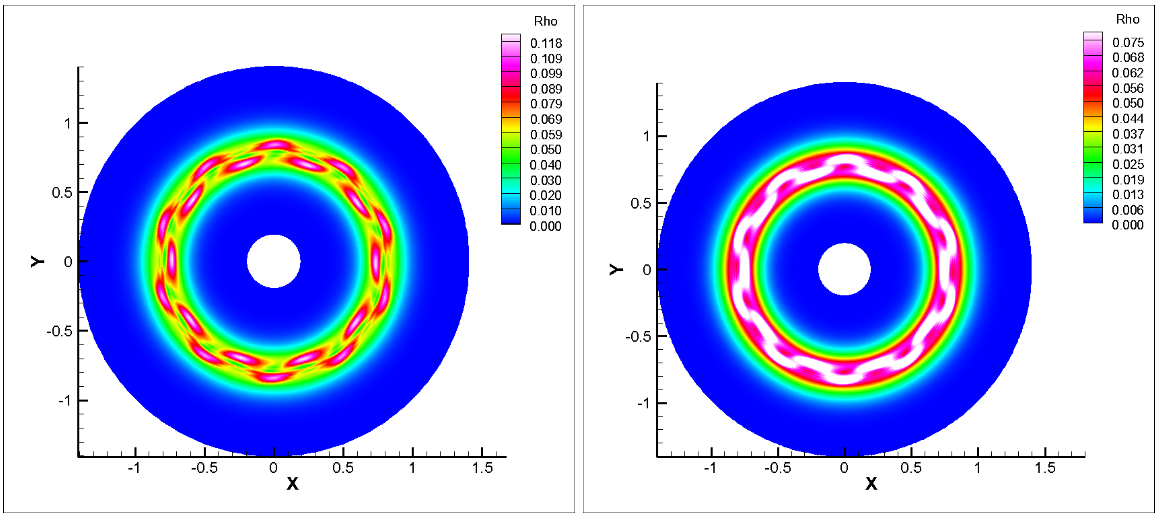


Рис. 3. Распределение плотности при $t = 1.0$ на сетках 80×260 (слева) и 160×420 (справа).

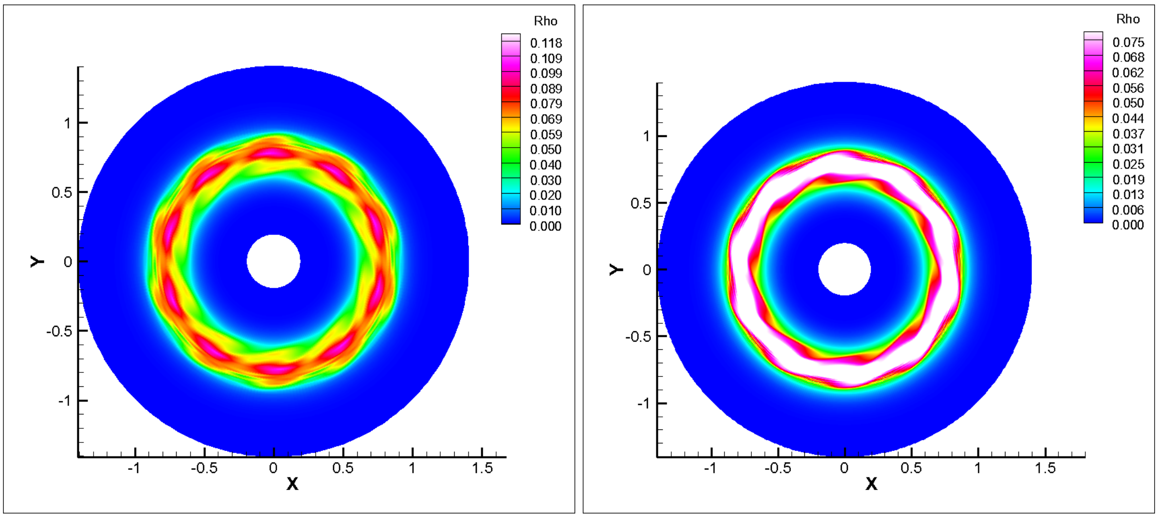


Рис. 4. Распределение плотности при $t = 2.0$ на сетках 80×260 (слева) и 160×420 (справа).

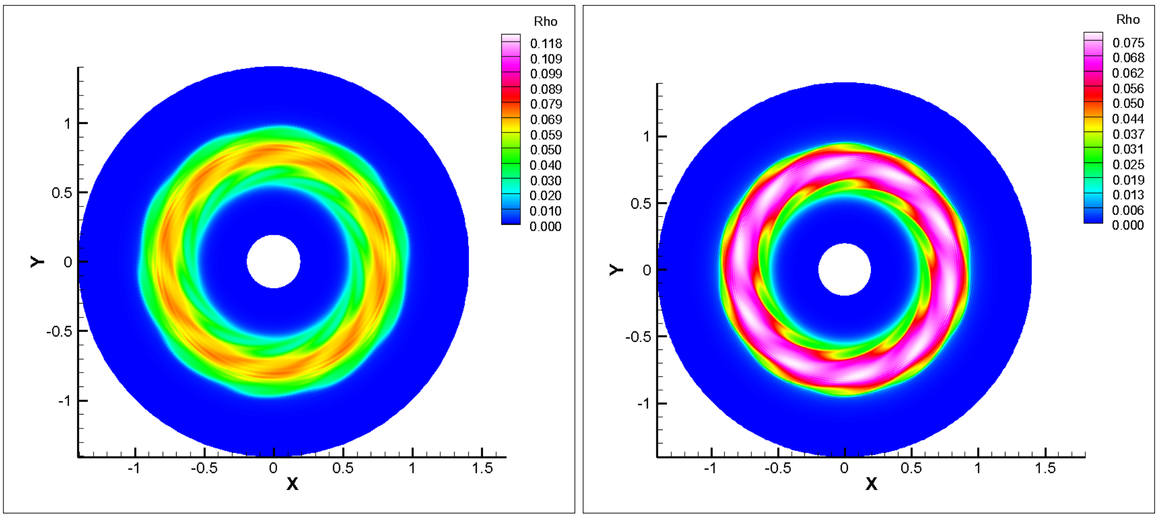


Рис. 5. Распределение плотности при $t = 3.0$ на сетках 80×260(слева) и 160×420 (справа).

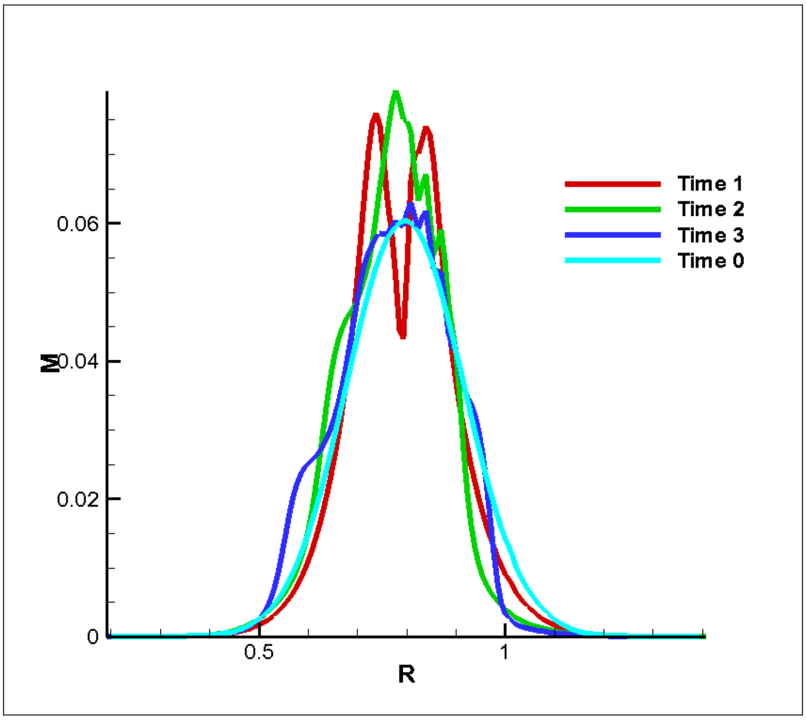


Рис. 6. Распределение углового момента на сетке 80×260.