ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 90 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ильин А. А., Рыков Ю. Г.

О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений. Линейный случай

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин А. А., Рыков Ю. Г. О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений. Линейный случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 90. 14 с. doi:**10.20948/prepr-2016-90**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-90**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.А.Ильин, Ю.Г.Рыков

О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений. Линейный случай

Москва — 2016

УДК 517.9

А.А.Ильин, Ю.Г.Рыков

О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений. Линейный случай.

На модельном примере линейного гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной по времени показывается, что близость индивидуальных траекторий к динамике предельного параболического уравнения существенным образом зависит от спектров Фурье начальных данных. Доказываются явные оценки близости в равномерных нормах и в нормах пространств Соболева любой гладкости. Рассмотрен как многомерный периодический случай, так и случай ограниченной области.

Ключевые слова: квазигазодинамические уравнения, гиперболизация, спектр Фурье, близость траекторий.

A.A. Ilyin, Yu.G. Rykov

On the closeness of trajectories for model quasi-gasdynamic equations. Linear case.

On a model example of a linear hyperbolic equation with small parameter multiplying the highest time derivative it is shown that the closeness of individual trajectories to the dynamics of the limiting parabolic equation essentially depends on the Fourier spectra of the initial data. We prove explicit estimates for the closeness of the solutions in the uniform norms and in the norms of the Sobolev spaces of arbitrary smoothness. We consider both the mutidimensional space-periodic case, and the case of a bounded domain.

Key words: quasi-gasdynamic equations, hyperbolization, Fourier spectrum, closeness of trajectories.

Исследование первого автора поддержано грантом РФФИ (грант 15-01-03587). Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00025).

1. Введение

При математическом моделировании сложных газодинамических процессов часто полезно использовать квазигазодинамическую (КГД) систему уравнений и связанные с ней кинетические разностные схемы. Это связано с существованием пределов детализации в моделях сплошных сред (см. основополагающую работу [1]). В работах [2], [3] была описана новая модификация КГД, содержащая вторые производные по времени с малым параметром.

С вычислительной точки зрения полезность гиперболизации уравнений Навье-Стокса может быть описана следующим образом (в иллюстративных целях достаточно сначала рассмотреть случай одной пространственной переменной). Если система уравнений имеет вид

$$\partial_t \mathbf{u} + A\partial_x \mathbf{u} = \nu \partial^2_{xx} \mathbf{u}, \tag{1.1}$$

то использование явной схемы (которая может оказаться наиболее точной для описания течений сложной структуры) предполагает шаг по времени $\tau \sim h^2$, где h — характерный размер пространственной ячейки. При гиперболизации рассматривается система уравнений типа

$$\varepsilon \partial^2_{tt} \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} + A\partial_x \mathbf{u} = \nu \partial^2_{xx} \mathbf{u}, \tag{1.2}$$

при малых ε, и тогда временной шаг $\tau \sim h\sqrt{\varepsilon}$. Если брать ε порядка h, то получается заметный выигрыш по времени расчета.

Возникает естественный вопрос, насколько близки решения исходного параболического уравнения (1.1) и его КГД модификации (1.2). В данной работе, являющейся более подробным изложением части результатов статьи авторов [4] и препринтов [5], [6], а также их обобщением на многомерный случай, исследуется вопрос о близости индивидуальных траекторий для линейных модельных уравнений типа (1.1) и (1.2) в терминах условий только на начальные данные в норме C^k и в норме пространства Соболева произвольной гладкости. Рассматривается как многомерный периодический случай, так и случай ограниченной области. Переход к модельной линейной системе уравнений осуществляется естественным образом на основе расщепления на совокупность соответствующих уравнений.

В работе [7] получена оценка близости решений в норме $L_2(0,T;H^1) \cap L_\infty(0,T;L_2)$ для линейного уравнения с переменными коэффициентами при условии ограниченности L_2-норм второй производной по времени решений аналога (1.2). В [8] результат о близости решений в норме L_2 и в норме C получен при условии ограниченности норм второй производной по времени решений аналога (1.1) в L_2 и C, соответственно. Оценки для индивидуальных мод, возникающих из дисперсионного соотношения, были получены в [5], [6].

Итак, пусть в (1.1), (1.2) $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, ε и ν — диагональные и положительно определенные матрицы, а A — $(n \times n)$-матрица, обладающая полным набором собственных чисел и векторов. Тогда при помощи умножения на соответствующие левые собственные векторы многомерные аналоги систем (1.1), (1.2) приводятся к набору линейных уравнений типа

$$\partial_t u + a \cdot \nabla u = \nu \Delta u, \tag{1.3}$$

и

$$\varepsilon \partial_{tt}^2 u + \partial_t u + a \cdot \nabla u = \nu \Delta u, \tag{1.4}$$

соответственно. Здесь ε и ν — положительные, вообще говоря, малые, числа; a является некоторым постоянным вектором. Таким образом, достаточно изучить вопрос о близости индивидуальных траекторий для уравнений (1.3) и (1.4).

Мы используем стандартные обозначения, стоит лишь упомянуть что ниже $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2}$.

2. Периодический случай

Мы рассмотрим вопрос о близости индивидуальных траекторий для линейных уравнений (1.3), (1.4) и сначала рассмотрим d-мерный периодический случай:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \partial_t^2 u + \partial_t u + a \cdot \nabla u = \nu \Delta u, \\ &u(0) = u^0, \quad \partial_t u(0) = \dot{u}^0, \quad x \in [0,2\pi]^d = \mathbb{T}^d. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Будем использовать ряды Фурье и представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_k(t) e^{ik\cdot x}, \quad \text{где} \quad u_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} u(t,x) e^{-ik\cdot x} dx.$$

Мы хотим сравнить решения этого уравнения с решениями предельного уравнения (с $\varepsilon = 0$):

$$\begin{aligned} &\partial_t \bar{u} + a \cdot \nabla \bar{u} = \nu \Delta \bar{u}, \\ &\bar{u}(0) = u(0) = u^0, \quad x \in [0,2\pi]^d. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В силу линейности для каждого коэффициента u_k в (2.1) получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\varepsilon \ddot{u}_k + \dot{u}_k + i(a\cdot k) u_k = -\nu |k|^2 u_k, \\ &u_k(0) = u_k^0, \quad \dot{u}_k(0) = \dot{u}_k^0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda + i a\cdot k + \nu |k|^2 = 0 \tag{2.4}$$

имеет корни
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp D}{2\varepsilon}, \tag{2.5}$$
где
$$D = D(\varepsilon, k) = \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu|k|^2 - 4\varepsilon i a \cdot k}. \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\varepsilon \in [0, \frac{\nu}{|a|^2}]$, *если* $a \neq 0$, *и* ε *произвольно, если* $a = 0$. *Тогда*
$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \leq 0.$$

Доказательство. Если $a = 0$, то $\operatorname{Re} D \leq 1$ и утверждение очевидно, так что рассмотрим случай $a \neq 0$.

Перенормируем k и ε, полагая
$$k' = k\sqrt{4\varepsilon\nu}, \quad \varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}\frac{2|a|}{\sqrt{\nu}} \in [0{,}2]. \tag{2.7}$$

Тогда
$$D = \sqrt{1 - |k'|^2 - i\varepsilon'\delta|k'|}, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{a\cdot k'}{|a||k'|}, |\delta| \leq 1,$$
и надо показать, что $\operatorname{Re} D \leq 1$. Но
$$\operatorname{Re} D = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + |k'|^4 - |k'|^2(2 - \varepsilon'^2\delta^2)} + 1 - |k'|^2}{2}},$$
и элементарные вычисления показывают, что $\operatorname{Re} D \leq 1$ при $\varepsilon' \leq 2$. □

Выпишем решение $u_k(t)$:
$$u_k(t) = u_k^0 \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \dot{u}_k^0 \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} =$$
$$u_k^0 \left[\frac{1}{2}e^{\frac{-1-D}{2\varepsilon}t} + \frac{1}{2}e^{\frac{-1+D}{2\varepsilon}t} + e^{-\frac{1}{2\varepsilon}t}\left[\frac{e^{\frac{D}{2\varepsilon}t} - e^{-\frac{D}{2\varepsilon}t}}{2D}\right]\right] +$$
$$+\dot{u}_k^0 2\varepsilon e^{-\frac{1}{2\varepsilon}t}\left[\frac{e^{\frac{D}{2\varepsilon}t} - e^{-\frac{D}{2\varepsilon}t}}{2D}\right] =$$
$$u_k^0 \left[\frac{1}{2}e^{\frac{-1-D}{2\varepsilon}t} + \frac{1}{2}e^{\frac{-1+D}{2\varepsilon}t} + be^{-b}\frac{\sinh Db}{Db}\right] + \dot{u}_k^0 2\varepsilon b e^{-b}\frac{\sinh Db}{Db},$$
где $b := \frac{t}{2\varepsilon} \in [0, \infty)$, а D определено в (2.6). Выпишем решение $\bar{u}_k(t)$:
$$\bar{u}_k(t) = u_k^0 e^{-\varkappa(k)t}, \qquad \varkappa(k) = ia\cdot k + \nu|k|^2 \tag{2.8}$$

и составим их разность

$$\Lambda(k,\varepsilon,t) := |u_k(t) - \bar{u}_k(t)| =$$
$$\left| u_k^0 \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{D+1}{2\varepsilon}t} + \frac{1}{2} e^{\frac{D-1}{2\varepsilon}t} - e^{-\varkappa(k)t} + be^{-b}\frac{\sinh Db}{Db} \right] + \varepsilon \dot{u}_k^0 2be^{-b}\frac{\sinh Db}{Db} \right|.$$

Предложение 2.1. *Пусть* $\varepsilon \in [0, \frac{\nu}{|a|^2}]$. *Тогда равномерно по* $t \geq 0$ *и* $k \in \mathbb{Z}^d$ *выполняется неравенство*

$$\Lambda(k,\varepsilon,t) \leq 3|u_k^0| + 2\varepsilon|\dot{u}_k^0|. \tag{2.9}$$

Доказательство. Рассмотрим коэффициент при u_k^0 (коэффициент при $\dot{u}_k^0$ рассматривается совершенно аналогично):

$$u_k^0 \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{D+1}{2\varepsilon}t} + \frac{1}{2} e^{\frac{D-1}{2\varepsilon}t} - e^{-\varkappa(k)t} + be^{-b}\frac{\sinh Db}{Db} \right].$$

Модуль суммы первых трех слагаемых не превосходит 2 в силу леммы 2.1 и неравенства $\operatorname{Re}\kappa(k) \leq 0$. В силу доказываемой ниже леммы 2.2 модуль четвертого слагаемого не превосходит 1. □ □

Лемма 2.2. *Пусть* $\varepsilon \in [0, \frac{\nu}{|a|^2}]$ *и* $D = D(\varepsilon,k) = \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu|k|^2 - 4\varepsilon i a\cdot k}$ *определено в* (2.6). *Тогда равномерно по* $b \in [0,\infty)$ *и* $k \in \mathbb{Z}^d$ *выполняется неравенство*

$$\left| be^{-b}\frac{\sinh Db}{Db} \right| \leq 1. \tag{2.10}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала одномерный случай $k \in \mathbb{Z}$.

Предположим пока, что $a = 0$. Ясно, что можно считать, что $k \geq 0$. При изменении k от 0 до $1/\sqrt{4\varepsilon\nu}$, D изменяется от 1 до 0 (и действительно). Далее, при изменении k от $1/\sqrt{4\varepsilon\nu}$ до $+\infty$, D изменяется от $i0$ до $+i\infty$ (и чисто мнимо).

Зафиксируем $b \geq 0$. При действительных $x \in [0,c]$, $\frac{\sinh x}{x}$ возрастает от 1 до $\frac{\sinh c}{c}$. Если $k \in (0,1/\sqrt{4\varepsilon\nu})$, то $D \in [0,1]$ и поэтому

$$be^{-b}\frac{\sinh Db}{Db} \leq be^{-b}\frac{\sinh b}{b} = \sinh b \cdot e^{-b} = \frac{1-e^{-2b}}{2} < \frac{1}{2}.$$

Если $k \in (1/\sqrt{4\varepsilon\nu}, +\infty)$, то $D = iy$, $y \in [0,\infty)$ и

$$be^{-b}\frac{\sinh Db}{Db} = be^{-b}\frac{\sinh iyb}{iyb} = be^{-b}\frac{\sin by}{by} \leq be^{-b} \leq e^{-1} < \frac{1}{2}.$$

Заметим, что эти оценки вообще от ε не зависят.

Пусть теперь $a > 0$. Из формулы (2.11) ниже следует, что и сейчас достаточно рассмотреть случай $k \geq 0$. Вновь перенормируем k и ε

$$k' = k\sqrt{4\varepsilon\nu} \in [0, \infty), \quad \varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}\frac{2a}{\sqrt{\nu}} \in [0{,}2].$$

Отбрасывая штрихи, получаем

$$D(k, \varepsilon) = \sqrt{1 - k^2 - i\varepsilon k}, \quad k \in [0, \infty), \quad \varepsilon \in [0{,}2].$$

Заменим x на iz в известном выражении $\sin x$ в виде бесконечного произведения. Получим

$$\frac{\sinh z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\sinh bD(k, \varepsilon)}{bD(k, \varepsilon)}\right| = \left|\frac{\sinh b\sqrt{1 - k^2 - i\varepsilon k}}{b\sqrt{1 - k^2 - i\varepsilon k}}\right| = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + b^2 \frac{1 - k^2 - i\varepsilon k}{\pi^2 n^2}\right| = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{[\pi^2 n^2 + b^2(1 - k^2)]^2 + \varepsilon^2 k^2}}{\pi^2 n^2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Каждый сомножитель справа строго возрастает по ε, поэтому строго возрастает и левая часть, и при $\varepsilon \in [0{,}2]$ выполняется

$$\left|\frac{\sinh bD(k, \varepsilon)}{bD(k, \varepsilon)}\right| \leq \left|\frac{\sinh bD(k{,}2)}{bD(k{,}2)}\right|.$$

Далее, для действительных u и v имеем (учитывая $\sinh u < \cosh u$)

$$|\sinh(u + iv)| = \sqrt{\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v} \leq \cosh u.$$

При $\varepsilon = 2$ имеем

$$D(k{,}2) = \sqrt{1 - k^2 - 2ik} = 1 - ik,$$

и, стало быть,

$$|D(k{,}2)| = \sqrt{1 + k^2}, \quad \operatorname{Re} D(k{,}2) = 1.$$

Собирая все вместе, получаем

$$\begin{aligned} &\left|be^{-b}\frac{\sinh bD(k, \varepsilon)}{bD(k, \varepsilon)}\right| \leq e^{-b}\frac{|\sinh bD(k{,}2)|}{|D(k{,}2)|} = \\ &= e^{-b}\frac{|\sinh(b - ibk)|}{\sqrt{1 + k^2}} < e^{-b}\cosh b < 1. \end{aligned}$$

Многомерный случай $k \in \mathbb{Z}^d$ сводится к рассмотренному одномерному, поскольку из аналога формулы (2.11) следует оценка

$$\left|\frac{\sinh b\sqrt{1-4\varepsilon\nu|k|^2-4\varepsilon i a\cdot k}}{b\sqrt{1-4\varepsilon\nu|k|^2-4\varepsilon i a\cdot k}}\right| \le \left|\frac{\sinh b\sqrt{1-4\varepsilon\nu|k|^2-4\varepsilon i|a||k|}}{b\sqrt{1-4\varepsilon\nu|k|^2-4\varepsilon i|a||k|}}\right|.$$

□

Перейдем к вопросу рассмотрения близости решений уравнений (2.1) и (2.2). Сначала рассмотрим конечномерный случай, а именно, предположим, что

$$u_0(x) = \sum_{|k|\le k_0} u_k^0 e^{ikx}, \quad \dot u_0(x) = \sum_{|k|\le k_0} \dot u_k^0 e^{ikx}.$$

Предложение 2.2. *Пусть T произвольно и фиксировано пусть $k_0 = \mathrm{const} < \infty$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решения уравнений (2.1) и (2.2) равномерно близки на отрезке $[0,T]$:*

$$\|u(t) - \bar u(t)\|_E \le C(T, k_0, E)\cdot\varepsilon, \tag{2.12}$$

где $\|\cdot\|_E$ — любая норма в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^{2k_0+1}$.

Доказательство. Из (2.4) и (2.5) находим

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\varepsilon} + \varkappa(k) + O(\varepsilon), \quad \lambda_2 = -\varkappa(k) + O(\varepsilon).$$

Поэтому

$$u_k(t) = \frac{u_k^0\lambda_2 - \dot u_k^0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t} + \frac{-u_k^0\lambda_1 + \dot u_k^0}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t} =$$
$$(-u_k^0\varkappa(k) - \dot u_k^0)O(\varepsilon)e^{(-1/\varepsilon+\varkappa(k)+O(\varepsilon))t} + (u_k^0 + O(\varepsilon))e^{(-\varkappa(k)+O(\varepsilon))t} =$$
$$u_k^0 e^{-\varkappa(k)t} + O(\varepsilon).$$

Сравнивая это с (2.8), с учетом конечномерности получаем (2.12). □

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть для целого $l \ge 0$ выполняется*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |k|^l(|u_k^0| + |\dot u_k^0|) < \infty. \tag{2.13}$$

Тогда для любого фиксированного $T > 0$ выполняется

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - \bar u(t)\|_{C^l(\mathbb{T}^d)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.14}$$

Доказательство. Из предложения 2.1 и (2.13) следует, что для любого $t \geq 0$ и $\varepsilon \leq 1$ выполняется

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |k|^l |u_k(t) - \bar{u}_k(t)| \leq 3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |k|^l (|u_k^0| + |\dot{u}_k^0|) < \infty.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$ найдется такое число k_0, что

$$\sum_{|k|>k_0} |k|^l |u_k(t) - \bar{u}_k(t)| \leq \delta/2.$$

Теперь остается в (2.12) выбрать ε столь малым, чтобы выполнялось неравенство $C(T, k_0, E) \cdot \varepsilon \leq \delta/2$. Здесь

$$\|v\|_E := \sum_{|k|\leq k_0} |k|^l |v_k|.$$

$\square$

Совершенно аналогично доказывается соответствующий результат о близости в пространствах Соболева $H^s(\mathbb{T}^d)$ с нормой

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1 + |k|^{2s}) |u_k|^2.$$

Теорема 2.2. *Пусть для $s \geq 0$ выполняется*

$$u_0,\ \dot{u}_0 \in H^s(\mathbb{T}^d). \tag{2.15}$$

Тогда для любого фиксированного $T > 0$ выполняется

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.16}$$

Доказательство. Действительно, из предложения 2.1 следует, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1 + |k|^{2s}) |u_k(t) - \bar{u}_k(t)|^2 \leq 18 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (1 + |k|^{2s})(|u_k^0|^2 + |\dot{u}_k^0|^2).$$

$\square$

Замечание 2.1. Мы рассмотрели однородные уравнения с нулевыми правыми частями. Теоремы о близости верны и в неоднородном случае, то есть для уравнений

$$\varepsilon\partial_t^2 u + \partial_t u + a \cdot \nabla u = \nu\Delta u + f,$$

и

$$\partial_t \bar{u} + a \cdot \nabla \bar{u} = \nu \Delta \bar{u} + f,$$

где для простоты будем считать, что f не зависит от времени. Тогда уравнение для коэффициентов (2.3) переходит в

$$\varepsilon \ddot{u}_k + \dot{u}_k + \varkappa(k) u_k = f_k, \quad u_k(0) = u_k^0, \quad \dot{u}_k(0) = \dot{u}_k^0.$$

где $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f_k e^{ik\cdot x}$.

Поскольку f_k не зависит от t, то решение этого уравнения есть

$$u_k(t) = \left(u_k^0 - \frac{f_k}{\varkappa(k)}\right) \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \dot{u}_k^0 \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f_k}{\varkappa(k)},$$

а соответствующий коэффициент $\bar{u}_k(t)$ есть

$$\bar{u}_k(t) = \left(u_k^0 - \frac{f_k}{\varkappa(k)}\right) e^{-\varkappa(k)t} + \frac{f_k}{\varkappa(k)},$$

и (2.9) переходит в

$$\Lambda(k, \varepsilon, t) \le 3(|u_k^0| + |f_k|/|\varkappa(k)|) + 2\varepsilon |\dot{u}_k^0|. \tag{2.17}$$

Поскольку $|\varkappa(k)| \sim |k|^2$, то для справедливости сходимости (2.14) в теореме 2.1 в дополнение к (2.13) достаточно потребовать, чтобы

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |k|^{l-2} |f_k| < \infty.$$

Соответственно в теореме 2.2 в неоднородном случае сходимость (2.16) имеет место, если дополнительно $f \in H^{s-2}(\mathbb{T}^d)$.

3. Случай ограниченной области

Можно также рассмотреть случай, когда уравнения рассматриваются в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Однако, в рамках нашего подхода мы ограничиваемся случаем $a = 0$, поскольку при $a \ne 0$ приходится либо иметь дело с несамосопряженным оператором, либо искать представление оператора $a \cdot \nabla$ в собственном ортонормированном базисе, что существенно осложняет рассмотрения.

Итак, рассмотрим

$$\begin{aligned} &\varepsilon \partial_t^2 u + \partial_t u = \nu \Delta u, \\ &u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = \dot{u}_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

и

$$\begin{aligned} &\partial_t \bar{u} = \nu \Delta \bar{u}, \\ &\bar{u}(0) = u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

причем оба уравнения рассматриваются при $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ с краевым условием Дирихле: $u_{|\partial\Omega} = 0$.

Обозначим через $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $0 < \mu_1 < \mu_2 \le \mu_3 \dots \to \infty$ ортонормированные собственные функции и собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Дирихле

$$-\Delta\varphi_n = \mu_n\varphi_n, \quad \varphi_{|\partial\Omega} = 0.$$

Представляя решение в виде ряда по орнонормированной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, вместо (2.3) получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon \ddot{u}_k + \dot{u}_k = -\nu\mu_k u_k, \\ &u_k(0) = u_0^k, \quad \dot{u}_k(0) = \dot{u}_0^k, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x), \qquad u_k(t) = \int_\Omega u(t,x)\varphi_k(x)dx.$$

Таким образом, как и раньше,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp D}{2\varepsilon}, \qquad D = D(\varepsilon, k) = \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu\mu_k},$$

и ясно, что

$$\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \le 0.$$

Далее, для разности коэффициентов Фурье решений имеем оценку

$$\Lambda(k,\varepsilon,t) = |u_k(t) - \bar{u}_k(t)| \le \frac{3}{2}|u_k^0| + \varepsilon|\dot{u}_k^0|,$$

так как в силу первой части леммы 2.2 выполняется неравенство

$$\left| b e^{-b} \frac{\sinh Db}{Db} \right| \le \frac{1}{2}.$$

Пространства Соболева определим с помощью степеней оператора Лапласа с краевым условием Дирихле $-\Delta_D$:

$$\|u\|_\alpha^2 = \|u\|^2_{\mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}))} := \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \mu_k^\alpha. \tag{3.4}$$

Как хорошо известно,

$$\|u\|_0 = \|u\|, \quad \|u\|_1 = \|\nabla u\| \sim \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Совершенно аналогично теореме 2.2 верна следующая теорема (например, для $\alpha = 1$).

Теорема 3.1. *Пусть*

$$u_0,\ \dot{u}_0 \in H_0^1(\Omega).$$

Тогда для любого фиксированного $T > 0$ *выполняется*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla(u(t) - \bar{u}(t))\| \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Для получения сходимости в равномерной норме C необходимо оценить в этой норме собственные функции оператора Лапласа. Для этого нам понадобится интерполяционное неравенство

$$\|\varphi\|_\infty \le c(\Omega)\|\varphi\|^{1-d/4}\|\Delta\varphi\|^{d/4}, \quad \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad d = 2{,}3, \tag{3.5}$$

где $c(\Omega)$ — безразмерная постоянная, зависящая лишь от формы области Ω: $c(t\Omega) = c(\Omega)$, $t > 0$. Тогда для нормированной собственной функции $\varphi = \varphi_k$, $\|\varphi_k\| = 1$ отсюда следует, что

$$\|\varphi_k\|_\infty \le c(\Omega)\, \mu_k^{d/4}.$$

Используя эту оценку, аналогично теореме 2.1 получаем следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть* $d = 2{,}3$ *и пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{d/4}(|u_k^0| + |\dot{u}_k^0|) < \infty. \tag{3.6}$$

Тогда для любого фиксированного $T > 0$ *выполняется*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{C(\Omega)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Замечание 3.1. Из известной асимптотики

$$\mu_k \sim \left(\frac{(2\pi)^d}{\omega_d|\Omega|}\right)^{2/d} k^{2/d} \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{3.7}$$

где ω_d — объем единичного шара в $\mathbb{R}^d$, а $|\Omega|$ — d-мерный объем области Ω, следует, что условие (3.6) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}(|u_k^0| + |\dot{u}_k^0|) < \infty.$$

Замечание 3.2. Аналогично замечанию 2.1 рассматривается неоднородные уравнения (3.1) и (3.2). Для справедливости утверждения о сходимости в теореме 3.1 достаточно потребовать, чтобы правая часть $f \in L_2(\Omega)$.

Для справедливости утверждения о сходимости теоремы 3.2 достаточно потребовать, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|}{\mu_k^{1-d/4}} < \infty.$$

Из (3.4) и (3.7) следует, что это условие будет выполнено в двумерном случае, если $\|f\|_\alpha < \infty$ при $\alpha > 0$, и в трехмерном случае, если $\|f\|_\alpha < \infty$ при $\alpha > 1$.

Замечание 3.3. Интерполяционные неравенства (3.5) вида $L_\infty - L_2 - L_2$ подробно изучены в [9].

Авторы выражают признательность Б.Н. Четверушкину, В.Ф. Тишкину и Д.Н. Тулякову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред. *Матем. моделирование* **24**:11 (2012), 33–52.

[2] Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-ого порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них. *Журнал вычислительной математики и математической физики* **48**:3 (2008), 445–472.

[3] Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений.* Москва, Научный мир, 2007.

[4] Ильин А.А., Рыков Ю.Г. О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений. *Доклады АН.* **470**:4 (2016), 380–383.

[5] Ильин А.А., Рыков Ю.Г. Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений. *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2012. № 12.

[6] Ильин А.А., Рыков Ю.Г. Об одном модельной системе с малым параметром при старшей производной по времени, возникающей при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений. *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2012. № 75.

[7] Репин С.И., Четверушкин Б.Н. Оценка разности приближенных решений задач Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром. *Доклады АН.* **451**:3 (2013), 255–258.

[8] Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **55**:8 (2015), 1299–1304.

[9] Зелик С.В., Ильин А.А. Асимптотика функций Грина и точные интерполяционные неравенства. *Успехи матем. наук.* **69**:2 (2014), 23–76.