ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 87 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Пичужкина А.В., Ролдугин Д.С.

Использование моделей геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пичужкина А.В., Ролдугин Д.С. Использование моделей геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 87. 30 с. doi:10.20948/prepr-2016-87
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-87

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Пичужкина, Д.С. Ролдугин

Использование моделей геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли

Москва — 2016

Пичужкина А.В., Ролдугин Д.С.

Использование моделей геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли

Рассматриваются четыре модели геомагнитного поля: IGRF, наклонный и прямой диполи, осредненная модель. Для каждой модели приводятся выражения вектора индукции в разных системах координат, проводится сравнение моделей. Исследуются преимущества этих моделей при проведении аналитических исследований. Приводятся примеры моделирования углового движения спутника с магнитной системой ориентации в рамках различных моделей поля. Представлены соображения по использованию моделей в разных случаях.

Ключевые слова: магнитная система ориентации, геомагнитное поле

Alyona Pichuzhkina, Dmitry Roldugin

Geomagnetic field models for satellite angular motion

Four geomagnetic field models are discussed. These models are IGRF, inclined and right dipoles and averaged one. Geomagnetic induction vector is provided in different reference frames for these models. The vector motion is compared for different models. Models are used for analytical and numerical analysis. Preferred models for different cases are outlined.

Key words: magnetic attitude control system, geomagnetic field model

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-31-20058.

Оглавление

Введение

Магнитные катушки и пассивная магнитная система, состоящая из постоянного магнита, гистерезисных стержней, сферического магнитного демпфера, активно используются с начала космической эры [1–5]. Первый спутник с пассивной магнитной системой – Transit 1B [6], запущен 13 апреля 1960 года, первый спутник с активной системой – Tiros II [7], запущен 23 ноября 1960 года, в целях определения ориентации магнитное поле впервые использовалось на третьем советском спутнике, запущенном 15 мая 1958 года [8]. В настоящее время такие системы вновь стали актуальными благодаря кубсатам (спутники массой в один килограмм) и другим малым спутникам. И хотя обзор магнитных систем ориентации не является целью данной работы, выделим несколько актуальных исследований в этой области.

Демпфирование угловой скорости спутника – задача, наиболее часто решаемая магнитной системой. Гашение угловой скорости с помощью гистерезисных стержней было предложено и развито в работах [6,9–13]. Среди современных работ, посвященных исследованию или применению гистерезисных стержней, выделим [14–18]. Использование сферического магнитного демпфера [19] практически прекратилось.

Активные системы в настоящее время в большинстве случаев предпочтительны, так как магнитные катушки, имеющие невысокие энергопотребление, массу, стоимость, доступны даже для кубсатов. Наиболее распространен алгоритм демпфирования «-Bdot», впервые опубликованный в широкой печати в [20], хотя первое упоминание алгоритма содержится в [21], его автором является инженер Центра космических исследований им. Годдарда Сеймор Кант. Работа магнитной системы в случае быстро вращающегося спутника аналогична действию вихревых токов [4,22,23]. Исследование алгоритма «-Bdot» и анализ его работы на борту малых спутников являются актуальными и сейчас [24–29].

Использование магнитной системы для обеспечения конкретной ориентации аппарата можно разделить на три группы: спутники, стабилизируемые вращением, использующие дополнительные исполнительные элементы и использующие лишь магнитную систему. Приобретение быстро вращающимся спутником специфического свойства – аппарат ведет себя как гироскоп – позволяет решить проблему неуправляемости (невозможно создать момент вдоль вектора индукции) при обеспечении ориентации оси закрутки спутника. Обычно для управления используются схемы, предложенные в [30,31]. Показательные примеры применения или анализа работы системы управления представлены в [7,20,32–39], отдельный интерес представляют подходы к оптимальной переориентации оси вращения спутника [40–42].

Использование дополнительных исполнительных элементов, обычно гравитационной штанги [5,43] или тангажного маховика с постоянной скоростью вращения [43–47], позволяет обеспечить заданную ориентацию в орбитальных осях. При необходимости произвольной ориентации может использоваться только магнитная система [48–53]. Это относительно новое направление исследований особенно актуально для миниатюрных спутников.

В случае применения активной магнитной системы необходимо наличие модели геомагнитного поля для определения ориентации и расчета управляющего воздействия. В случае использования пассивной системы знание ориентации не требуется для ее работы, но оно может быть необходимо для интерпретации данных, получаемых полезной нагрузкой. Наконец, модель геомагнитного поля необходима на этапе проектирования спутника для конструирования алгоритмов управления и определения ориентации, оценки достижимой точности ориентации и времени переходных процессов.

Цель данной работы – кратко описать существующие модели геомагнитного поля, используемые при обеспечении ориентации спутников, и на основе типичных примеров определить рамки их использования на этапе проектирования системы ориентации и при проведении аналитических и численных исследований.

1. Модели геомагнитного поля

Системы координат

В работе будут рассмотрены четыре модели геомагнитного поля: IGRF, наклонный и прямой диполи и осредненная модель. Вектор геомагнитной индукции будем задавать в нескольких системах координат, обычно используемых при рассмотрении углового движения спутника.

$O_aY_1Y_2Y_3$ – инерциальная система, где O_a – центр масс Земли, ось O_aY_3 направлена по оси вращения Земли, O_aY_1 лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты спутника (считаем орбиту круговой), O_aY_2 дополняет систему до правой.

$O_aJ_1J_2J_3$ – инерциальная система J2000, ось O_aJ_3 направлена по оси вращения Земли, O_aJ_1 лежит в плоскости земного экватора и направлена в точку весеннего равноденствия эпохи 2000.0, O_aJ_2 дополняет систему до правой. Переход от системы $O_aJ_1J_2J_3$ к системе $O_aY_1Y_2Y_3$ задается с помощью поворота на среднее гринвичское время t_g относительно оси O_aJ_3, если не учитывать прецессию оси вращения Земли.

$O_aZ_1Z_2Z_3$ – инерциальная система, полученная из системы $O_aY_1Y_2Y_3$ поворотом на некоторый угол Θ вокруг оси O_aY_1. Величина этого угла будет далее определена с помощью осредненной модели.

$O_aS_1S_2S_3$ – система, связанная с положением орбиты спутника в инерциальном пространстве. Ось O_aS_3 направлена по нормали к плоскости орбиты, O_aS_1 направлена в восходящий узел орбиты, O_aS_2 дополняет систему до правой. Переход между системами $O_aY_1Y_2Y_3$ и $O_aS_1S_2S_3$ задается поворотом на угол i (наклонение орбиты) относительно оси O_aY_1, а между $O_aS_1S_2S_3$ и $O_aZ_1Z_2Z_3$ – на угол $\Theta - i$ относительно оси O_aS_1. Инерциальные системы координат отражены на рис. 1.

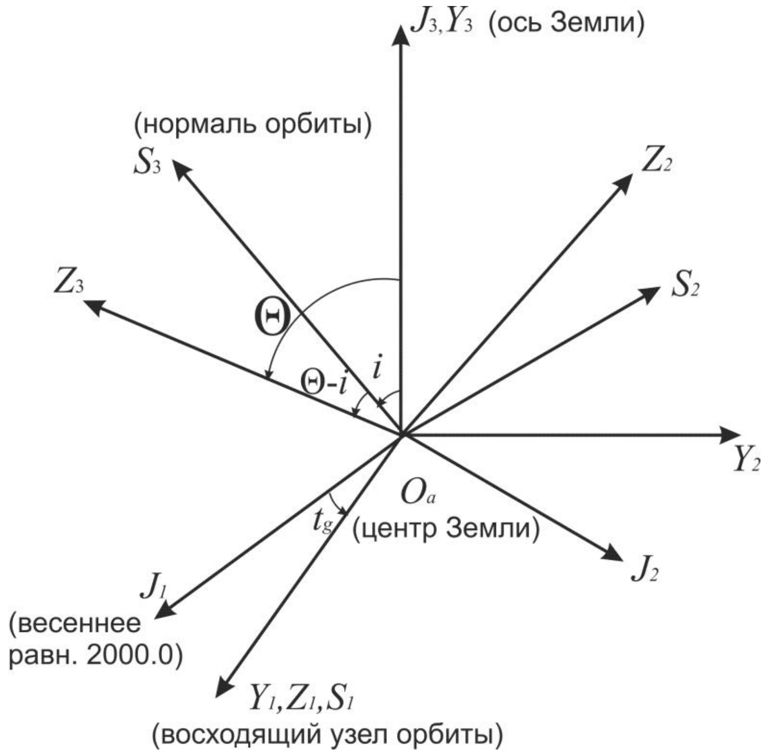

Рис. 1. Инерциальные системы координат

$OX_1X_2X_3$ – орбитальная система координат с центром в центре масс спутника, ось OX_2 лежит в плоскости орбиты и направлена по нормали к радиус-вектору в сторону движения спутника, составляя острый угол с вектором скорости его центра масс (на круговой орбите направление оси совпадает с направлением скорости поступательного движения спутника), ось OX_1 направлена по радиус-вектору центра масс спутника, OX_3 дополняет систему до правой. Отметим, что такой «нетрадиционный» выбор орбитальной системы обусловлен удобством последовательных переходов между системами координат.

$Ox_1x_2x_3$ – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

$OL_1L_2L_3$ – система, связанная с кинетическим моментом спутника. Ось OL_3 направлена по вектору кинетического момента спутника, OL_2 – перпендикулярно OL_3 и лежит в плоскости, параллельной плоскости первых двух осей инерциальной системы, относительно которой описывается движение спутника, и проходящей через O, OL_1 дополняет систему до правой (рис. 7).

Далее для векторов, заданных в разных системах координат, будем использовать индекс с буквой системы. Например, вектор геомагнитной индукции в системе $OL_1L_2L_3$ будет обозначаться как $\mathbf{B}_L$. Матрицы перехода между системами координат

$$\mathbf{A}_{JY} = \begin{pmatrix} \cos t_g & \sin t_g & 0 \\ -\sin t_g & \cos t_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{YZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{YS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{SX} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{YX} = \mathbf{A}_{SX}\mathbf{A}_{YS} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \cos i & \sin u \sin i \\ -\sin u & \cos u \cos i & \cos u \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix},$$

где u – аргумент широты. Переход между системами координат задается как $\mathbf{x}_j = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_i$.

International geomagnetic reference field / World magnetic model

Наиболее полно геомагнитное поле описывают модели IGRF (International geomagnetic reference field) и WMM (World magnetic model). Разложение потенциала поля в ряд, используемое в обеих моделях, было предложено в 1838 К.Ф. Гауссом. Это разложение имеет вид [54,55]

$$V = -R\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{i+1}\sum_{n=0}^{m}\left(g_n^m(t)\cos m\lambda_0 + h_n^m(t)\sin m\lambda_0\right)P_n^m(\cos\vartheta_0),\ \mathbf{B} = \mu_0\nabla V,$$

где λ_0 – долгота точки, в которой определяется вектор напряженности, $\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$, θ_0 – ее широта, r – расстояние от центра Земли, R – средний радиус Земли, g_n^m и h_n^m – коэффициенты Шмидта, определяемые из таблицы [56], $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,кг\cdot м\cdot A^{-2}\cdot c^{-2}$ – магнитная постоянная (или магнитная проницаемость вакуума), P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра. Величины коэффициентов определяются эмпирически. Обе модели отличаются лишь наборами коэффициентов и имеют общие ограничения. Они предназначены для высот до 600 километров над поверхностью Земли (WGS84), хотя могут использоваться и на более высоких орбитах, и применимы до определенного года. В последний год действия модели Международный геодезический и геофизический союз публикует новые коэффициенты IGRF, действующие следующие пять лет. То же проделывает Национальное управление океанических и атмосферных исследований США для модели WMM. Такие сложные модели обычно используются на борту спутника для достижения максимально возможной точности и при численном моделировании его движения на этапе разработки, но не используются при аналитических исследованиях. Стоит отметить, что в части обеспечения ориентации спутников чаще используется модель IGRF.

Наклонный диполь

Модель наклонного диполя, получающаяся из гауссовой при учете первых трех слагаемых [57], описывает поле диполя, наклоненного под небольшим углом к оси, антипараллельной вращению Земли. Точное значение угла наклона постоянно меняется из-за перемещения северного и южного магнитных полюсов, в настоящее время наклон составляет около 11.7 градуса. Поскольку вклад дипольной части в разложение составляет более 90%, такое допущение вполне оправданно. Оно позволяет учесть два основных эффекта, вызывающих изменение геомагнитного поля в точке нахождения спутника – его движение по орбите и суточное вращение Земли. Не учитываются нерегулярные эффекты, например, пролет спутника над богатым рудой горным массивом. Вектор индукции в модели наклонного диполя можно задать выражением [4]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_e}{r^5}\left(\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{kr})\mathbf{r}\right),$$

где $\mathbf{k}$ – единичный вектор в направлении диполя, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс спутника. В системе координат $O_aY_1Y_2Y_3$

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3}\begin{pmatrix} \sin\lambda_2 \sin\delta_1 - 3\xi\cos u \\ -\cos\lambda_2 \sin\delta_1 - 3\xi\cos i \sin u \\ \cos\delta_1 - 3\xi \sin i \sin u \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mu_e = 7.812\cdot 10^6 км^3 \cdot кг \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$ – постоянная земного магнетизма, r – радиус-вектор точки, в которой вычисляется индукция. Углы λ_2, δ_1 показывают ориентацию диполя относительно системы $O_aY_1Y_2Y_3$. Угол $\lambda_2 = \omega_E t + \lambda_{20}$, где ω_E – угловая скорость вращения Земли, показывает вращение диполя относительно $O_aY_1Y_2Y_3$ вместе с Землей,

$\xi = \cos u \sin\delta_1 \sin\lambda_2 - \sin u \cos i \sin\delta_1 \cos\lambda_2 + \sin u \cos\delta_1 \sin i$, $\delta_1 \approx 168.3^\circ$, i – наклонение орбиты. В других системах выражение для вектора можно найти, пользуясь матрицами перехода. Здесь эти громоздкие выкладки опущены. При проведении аналитических исследований эти выражения не используются, а при проведении численного моделирования скорее программируются матрицы перехода, нежели конечные выражения.

Прямой диполь

В дальнейшем упрощении геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения. В этом случае в системе $O_aY_1Y_2Y_3$ вектор направления диполя имеет вид $\mathbf{k} = (0, 0, -1)^T$. Соответственно, выражение для вектора геомагнитной индукции в системе $O_aY_1Y_2Y_3$ можно получить из (1.1), положив $\lambda_2 = \delta_1 = 0$,

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3}\begin{pmatrix} -1.5\sin i \sin 2u \\ -1.5\sin 2i \sin^2 u \\ 1 - 3\sin^2 i \sin^2 u \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Величина вектора индукции меняется при движении спутника и составляет

$$B_{0incl} = \frac{\mu_e}{r^3}\sqrt{1 + 3\sin^2 i \sin^2 u}\,. \quad (1.3)$$

В системе $OX_1X_2X_3$ геомагнитное поле записывается особенно компактно,

$$\mathbf{B}_X = \frac{\mu_e}{r^3}\begin{pmatrix} -2\sin u \sin i \\ \cos u \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

В системе $O_aS_1S_2S_3$ вектор индукции имеет вид

$$\mathbf{B}_S = \frac{\mu_e}{r^3}\begin{pmatrix} -1.5\sin 2u \sin i \\ -3\sin^2 u \sin i + \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Осредненная модель

В модели прямого диполя вектор индукции неравномерно вращается по поверхности практически кругового конуса ($\mathbf{H}$-конус). Поэтому логично ввести следующее упрощение, фактически усредняя это вращение. В осредненной модели геомагнитного поля [58,59], автором которой является Пол Донохо, сотрудник Лаборатории Белла, вектор индукции имеет постоянную длину и равномерно движется по поверхности кругового конуса (Θ-конус). Если перенести этот вектор в центр масс Земли, то конус касается оси O_aY_3 системы $O_aY_1Y_2Y_3$, его ось лежит в плоскости $O_aY_2Y_3$ (рис. 2).

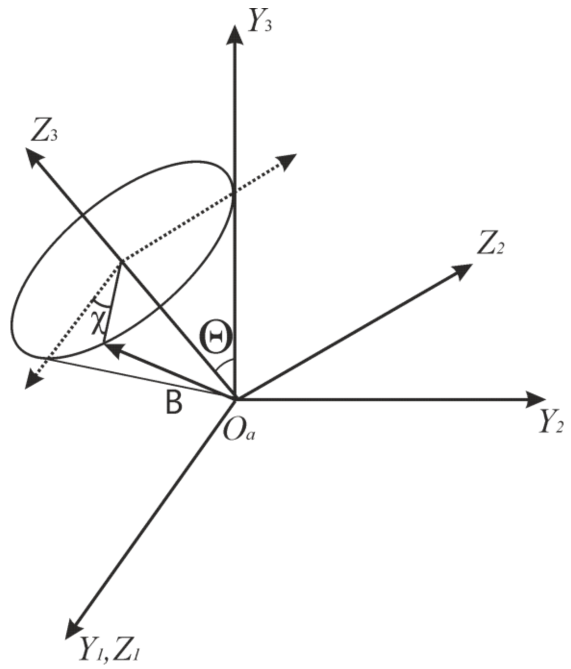

Рис. 2. Осредненная модель геомагнитного поля

Угол полураствора конуса вычисляется из соотношения

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{3\sin 2i}{2\left(1 - 3\sin^2 i + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}\right)}.$$

Скорость вращения вектора – удвоенная орбитальная ω_0, то есть

$$\chi = 2\omega_0 t + \chi_0 = 2u + \chi_0, \tag{1.6}$$

В системе $O_aZ_1Z_2Z_3$ вектор индукции имеет простой вид

$$\mathbf{B}_Z = B_0 \begin{pmatrix} -\sin\Theta\sin\chi \\ \sin\Theta\cos\chi \\ \cos\Theta \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Чтобы определить χ_0, сравним векторы геомагнитной индукции при использовании осредненной модели и прямого диполя. Согласно (1.7), в осредненной модели вектор индукции при $\chi = 0$ имеет вид $\mathbf{B}_Z = B_0\left(0, \sin\Theta, \cos\Theta\right)^T$, то есть вектор $\mathbf{B}$ направлен по оси O_aY_3 (Рис. 2). В модели прямого диполя вектор индукции, согласно (1.2), направлен по этой же оси при $u = 0$, откуда из (1.6) следует, что $\chi_0 = 0$.

Запишем вектор геомагнитной индукции в осредненной модели в разных системах координат:

$$OX_1X_2X_3 \quad \mathbf{B}_X = B_0\begin{pmatrix} \sin i \sin u - 2\sin u \sin\Theta\left(\cos^2 u + \sin^2 u \cos\left(\Theta - i\right)\right) \\ \sin i \cos u + 2\cos u \sin\Theta \sin^2 u\left(1 - \cos\left(\Theta - i\right)\right) \\ -2\sin\Theta \sin^2 u \sin\left(\Theta - i\right) + \cos i \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$O_aZ_1Z_2Z_3 \quad \mathbf{B}_Z = B_0\begin{pmatrix} -\sin\Theta \sin 2u \\ \sin\Theta\cos 2u \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$O_aY_1Y_2Y_3 \quad \mathbf{B}_Y = B_0\begin{pmatrix} -\sin\Theta\sin 2u \\ -\sin 2\Theta \sin^2 u \\ 1 - 2\sin^2\Theta\sin^2 u \end{pmatrix}$$

$$O_aS_1S_2S_3 \quad \mathbf{B}_S = B_0\begin{pmatrix} -\sin\Theta\sin 2u \\ -2\sin\Theta\sin^2 u\cos\left(\Theta - i\right) + \sin i \\ -2\sin\Theta\sin^2 u \sin\left(\Theta - i\right) + \cos i \end{pmatrix}$$

Перейдем к более детальному сравнению прямого диполя и осредненной модели геомагнитного поля. Величину вектора индукции B_0 для осредненной модели обычно находят, опираясь на величину поля в модели прямого диполя (1.3). Она принимается равной либо среднему арифметическому максимального и минимального значений

$$B_0 = \frac{1}{2}\left(B_{0incl}\left(0\right) + B_{0incl}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\mu_e}{2r^3}\left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}\right), \quad (1.10)$$

либо интегральному среднему, взятому за половину витка на орбите,

$$B_0 = \int_0^{\pi} B_{0incl}\left(u\right)du = \frac{\mu_e}{\pi r^3}\int_0^{\pi}\sqrt{1 + 3\sin^2 i \sin^2 u}\,du\,. \quad (1.11)$$

На рис. 3 представлена величина вектора геомагнитной индукции в осредненной модели при использовании соотношений (1.10) и (1.11). Из рис. 3 видно, что разница между обоими подходами незначительна, и только для приполярных орбит достигает 1250 нТл, что составляет примерно 3% от интегрального среднего. Таким образом, в большинстве случаев можно опираться на простое выражение (1.10). Это может упростить аналитические исследования, когда требуется оценить влияние наклонения орбиты на движение спутника в магнитном поле. При численных расчетах возможна небольшая экономия расчетного времени, если аппарат движется по оскулирующей орбите с изменяющимся наклонением. В этом случае для получения текущей величины поля достаточно воспользоваться конечным соотношением (1.10), избегая вычисления интеграла (1.11).

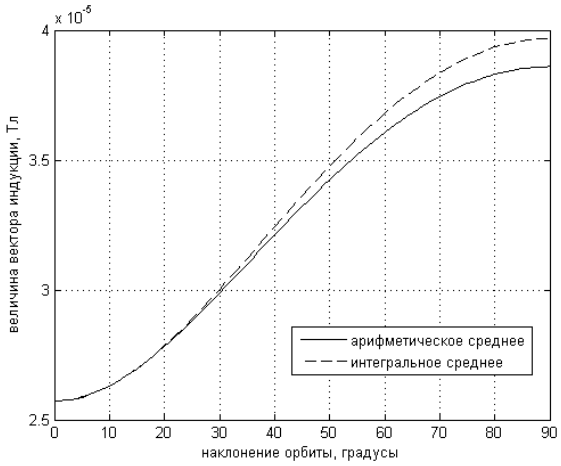

Рис. 3. Величина вектора индукции для осредненной модели на высоте 350 км

При движении спутника по орбите вектор **B** в модели прямого диполя описывает коническую поверхность, замыкающуюся за половину оборота спутника по орбите ($\mathbf{H}$-конус). Направляющие кругового Θ-конуса почти в точности совпадают с направляющими $\mathbf{H}$-конуса. Основания же конусов при этом заметно различаются (рис. 4). Оценим, насколько близки конусы и направления векторов геомагнитной индукции в двух рассматриваемых моделях.

Пусть δ – угловое отклонение вектора **B** от оси *Z*3 в модели прямого диполя. Тогда $\delta \geq \Theta$ при любом *u* ($\delta = \Theta$ при $u = 0$, $u = \pi/2$). Иначе говоря, Θ-конус лежит целиком внутри $\mathbf{H}$-конуса, имея с ним две общие, диаметрально противоположные образующие. На рис. 5 приведена зависимость величины $\delta_{\max}$ – максимальной разницы $\delta - \Theta$ – от наклонения орбиты.

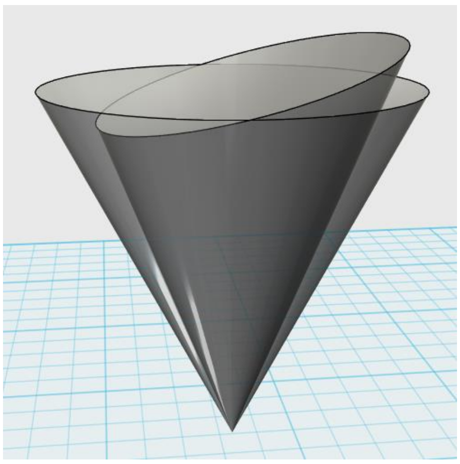

Рис. 4. Сравнение $\mathbf{H}$- и Θ-конусов

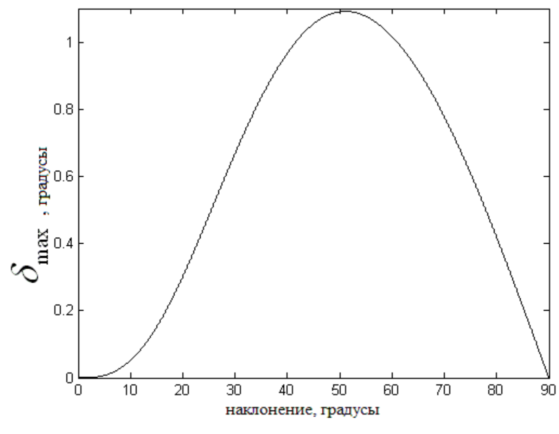

Рис. 5. Макс. отклонение дипольного вектора индукции от Θ-конуса

Скорость движения вектора геомагнитной индукции по $\mathbf{H}$-конусу непостоянна. Сравним векторы индукции в осредненной модели и в модели прямого диполя при различных значениях аргумента широты.

При $u=0$, $u=\pi/2$ они совпадают по направлению, хотя и не равны по модулю. В течение первой четверти витка вектор в модели прямого диполя «обгоняет» вектор индукции осредненной модели. На второй четверти он «запаздывает», пока через половину витка они не совпадут по направлению. При этом угол между векторами никогда не превышает некоторой величины Δ. Чтобы определить этот угол, используем выражения (1.4) и (1.8), задающие векторы индукции в орбитальной системе. Их скалярное произведение

$$\cos\Delta=\frac{1+\sin^2 i\sin^2 u}{\sqrt{1+3\sin^2 i\sin^2 u}}. \qquad (1.12)$$

Производная (1.12) есть

$$\frac{d\cos\Delta}{di}=\frac{\sin^2 u\sin i\cos i\left(3\sin^2 i\sin^2 u-1\right)}{\left(1+3\sin^2 i\sin^2 u\right)^{3/2}}.$$

Ее нули достигаются при $\sin i=0$, $\cos i=0$, $3\sin^2 i\sin^2 u-1=0$, откуда получаем $\sin^2 u=1/\left(3\sin^2 i\right)$. Так как $\sin^2 u\le 1$, то $1/\left(3\sin^2 i\right)\le 1$, откуда следует $1/\sqrt{3}\le\left|\sin i\right|$. При $\sin i=1/\sqrt{3}$ наклонение $i\approx 35^\circ$, при превышении наклонения в 35° график (1.12) выходит на стационарное значение.

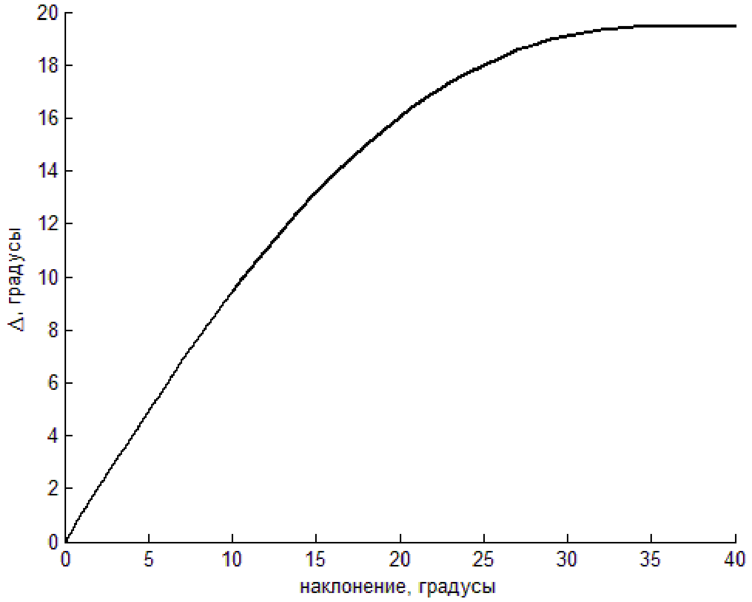

Рис. 6. Зависимость угла Δ от наклонения орбиты.

Рис. 6 показывает, что вектора индукции в осредненной модели и модели прямого диполя могут значительно отличаться по направлению (до 19°, если орбита не приполярная) несмотря на то, что $\mathbf{H}$- и Θ-конуса отличаются незначительно (рис. 5). В целом осредненная модель не позволяет учесть неравномерность вращения местного вектора геомагнитной индукции при движении спутника по орбите (как это учитывает модель прямого диполя) и его суточное изменение (как учитывает модель наклонного диполя). Тем не менее, она позволяет достаточно верно описать основные свойства магнитного поля, влияющие на динамику спутника.

2. Использование моделей в аналитических исследованиях

2.1. Переходные процессы

Для описания движения спутника при большой угловой скорости будем использовать уравнения в оскулирующих переменных $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$. Рассмотрим осесимметричный спутник и введем его тензор инерции $\mathbf{J}_x = diag(A, A, C)$. Считаем, что его центр масс движется по круговой орбите. Движение такого спутника относительно центра масс описывается [60] системой уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dL}{dt} = M_{3L}, \ \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{1L}, \ \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L\sin\rho} M_{2L}, \\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{L}\left(M_{2L}\cos\psi - M_{1L}\sin\psi\right), \\
&\frac{d\varphi}{dt} = L\cos\theta\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{1}{L\sin\theta}\left(M_{1L}\cos\psi + M_{2L}\sin\psi\right), \\
&\frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{1L}\cos\psi\,\mathrm{ctg}\,\theta - \frac{1}{L} M_{2L}\left(\mathrm{ctg}\,\rho + \sin\psi\,\mathrm{ctg}\,\theta\right),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где M_{1L}, M_{2L}, M_{3L} – компоненты вектора суммарного внешнего момента, L – модуль вектора кинетического момента, углы ρ, σ определяют его ориентацию относительно любой инерциальной системы, например, $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ (рис. 7).

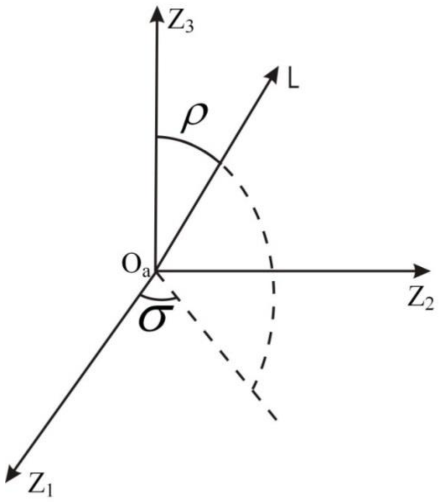

Рис. 7. Ориентация кинетического момента в инерциальном пространстве

Оскулирующие переменные удобно использовать для анализа времени гашения угловой скорости спутника, фактически характеризуемой одной переменной L. Предположим, что управляющий момент мал в смысле малого изменения кинетического момента аппарата за один его оборот вокруг центра масс и за один виток по орбите по сравнению со значением кинетического момента. Тогда можно ввести малый параметр ε и представить уравнения в оскулирующих переменных (2.1) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\varepsilon\mathbf{X}(\mathbf{x},\mathbf{y},t),\ \frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{y}_0(\mathbf{x})+\varepsilon\mathbf{Y}(\mathbf{x},\mathbf{y},t), \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{y}=(\varphi,\psi,u)^T$ – быстрые переменные, $\mathbf{x}=(L,\rho,\sigma,\theta)^T$ – медленные переменные. Порождающим решением для (2.2) является регулярная прецессия. В этом случае среднее по времени совпадает с пространственным средним и для получения усредненных уравнений для медленных переменных достаточно независимо усреднить правые части уравнений по быстрым переменным при условии отсутствия резонанса. В результате на временном интервале порядка $1/\varepsilon$ решение может быть найдено с точностью порядка ε.

Рассмотрим движение спутника под действием момента [21]

$$\mathbf{M}=k(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B},$$

откуда [28]

$$\mathbf{M}_L=\begin{pmatrix}\omega_{3L}B_{1L}B_{3L}-\omega_{1L}B_{3L}^2-\omega_{1L}B_{2L}^2+\omega_{2L}B_{1L}B_{2L}\\ \omega_{1L}B_{1L}B_{2L}-\omega_{2L}B_{1L}^2-\omega_{2L}B_{3L}^2+\omega_{3L}B_{2L}B_{3L}\\ \omega_{2L}B_{2L}B_{3L}-\omega_{3L}B_{2L}^2-\omega_{3L}B_{1L}^2+\omega_{1L}B_{1L}B_{3L}\end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

Следуя далее рассуждениям, приведенным в [28], будем искать эволюционное поведение медленных переменных. Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль порождающего решения. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо определить $\langle M_{iL}\rangle_{u,\varphi,\psi}$, $\langle M_{iL}\cos\psi\rangle_{u,\varphi,\psi}$ и $\langle M_{iL}\sin\psi\rangle_{u,\varphi,\psi}$. Для усреднения (2.3) по u необходимо вычислить выражения

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_i B_j du \;\; \left(i, j = 1, 2, 3\right), \tag{2.4}$$

где B_i – компоненты безразмерного геомагнитного поля.

Вид получаемых усредненных уравнений определяется выражением для вектора геомагнитной индукции. Перейдем к рассмотрению вектора индукции в различных моделях, и в каждой модели будем использовать ту инерциальную систему координат, в которой магнитное поле записывается наиболее компактно. Поскольку основной интерес представляет величина вектора угловой скорости или же величина вектора кинетического момента, использование разных систем не препятствует сравнению получаемых результатов.

Рассмотрим сначала осредненную модель. Для вычисления компонент B_{ij} используем выражение вектора индукции в системе $O_aZ_1Z_2Z_3$ (1.9). В результате получаем

$$B_{11} = B_{22} = p = 1/2\sin^2\Theta,\; B_{33} = q = \cos^2\Theta,\; B_{12} = B_{23} = B_{13} = 0$$

и уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных l, ρ, σ, θ,

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{du} &= -\varepsilon l\left[2p + \left(1-3p\right)\sin^2\rho\right]\left(\cos^2\theta + \frac{C}{A}\sin^2\theta\right),\\
\frac{d\rho}{du} &= \varepsilon\left(3p-1\right)\sin\rho\cos\rho\left(\cos^2\theta + \frac{C}{A}\sin^2\theta\right),\\
\frac{d\sigma}{du} &= 0,\\
\frac{d\theta}{du} &= \frac{1}{2}\varepsilon\left(1-\frac{C}{A}\right)\left[2\left(1-p\right) + \left(3p-1\right)\sin^2\rho\right]\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для (2.5) можно найти [28] полный набор первых интегралов. Тем самым, решение уравнений (2.5) может быть найдено в квадратурах.

Теперь получим усредненные уравнения для прямого диполя, которые будут отличаться компонентами B_{ij}. Для вычисления этих компонент согласно

(2.4) воспользуемся выражением для вектора индукции в системе $O_aS_1S_2S_3$ (1.5). Соответственно, углы ρ,σ теперь задают ориентацию кинетического момента относительно этой системы координат. Для (2.4) получаем

$$B_{11} = a = \frac{9}{8}\sin^2 i,\ \ B_{22} = \frac{11}{9}a = \frac{11}{8}\sin^2 i,\ \ B_{12} = B_{13} = 0,$$

$$B_{23} = d = -\frac{1}{2}\sin i\cos i,\ \ B_{33} = c = \cos^2 i.$$

После усреднения получаем

$$\frac{dl}{du} = -\varepsilon l\left[\frac{20}{9}a + \sin^2\rho\left(c - a\cos^2\sigma - \frac{11}{9}a\sin^2\sigma\right) + 2d\cos^2\rho\sin\sigma\cos\sigma\right]\times$$
$$\times\left(\cos^2\theta + \frac{C}{A}\sin^2\theta\right),$$

$$\frac{d\rho}{du} = \varepsilon\left[\left(\frac{11}{9}a\sin^2\sigma + a\cos^2\sigma - c\right)\sin\rho\cos\rho - d\sin\sigma\cos2\rho\right]\left(\cos^2\theta + \frac{C}{A}\sin^2\theta\right),$$

$$\frac{d\sigma}{du} = \varepsilon\left[\frac{2}{9}a\sin\sigma\cos\sigma + d\cos\sigma\,\mathrm{ctg}\,\rho\right]\left(\cos^2\theta + \frac{C}{A}\sin^2\theta\right),$$

$$\frac{d\theta}{du} = \varepsilon\lambda\left[\frac{20}{9}a + c\left(1+\cos^2\rho\right) + a\sin^2\rho\left(\cos^2\sigma + \frac{11}{9}\sin^2\sigma\right) + 2d\sin\rho\cos\rho\sin\sigma\right]\times$$
$$\times\sin\theta\cos\theta.$$

Вид малого параметра ε меняется, но сохраняется смысл малого изменения кинетического момента. Видно, что в усредненных уравнениях для прямого диполя появляются дополнительные слагаемые из-за наличия ненулевого «недиагонального» элемента B_{ij}. Искать первые интегралы так же легко, как в случае осредненной модели, не получится. Если при использовании осредненной модели полный набор первых интегралов можно найти в виде квадратур, а при дополнительных упрощениях в виде конечных выражений [28], то в случае прямого диполя можно найти лишь некоторые первые интегралы в виде квадратур (разделив выражения для производных ρ, σ и l).

Наконец, рассмотрим наклонный диполь. Следуя [4], будем в (2.4) усреднять дополнительно по времени оборота Земли вокруг своей оси. Для вычисления компонент B_{ij} воспользуемся выражением для вектора индукции в системе $O_aY_1Y_2Y_3$ (1.1). Тогда получаем

$$B_{11}=\frac{11}{16}\sin^2\delta_1+\frac{9}{8}\left(\cos^2\delta_1\sin^2 i+\frac{1}{2}\cos^2 i\sin^2\delta_1\right),$$

$$B_{22}=\frac{1}{2}\sin^2\delta_1-\frac{15}{16}\cos^2 i\sin^2\delta_1+\frac{27}{8}\cos^2 i\left(\cos^2\delta_1\sin^2 i+\frac{1}{2}\cos^2 i\sin^2\delta_1\right),$$

$$B_{33}=\cos^2\delta_1+\frac{9}{16}\sin^2 i\sin^2\delta_1-3\sin^2 i\cos^2\delta_1+\frac{27}{8}\sin^2 i\left(\cos^2\delta_1\sin^2 i+\frac{1}{2}\cos^2 i\sin^2\delta_1\right),$$

$$B_{12}=0,\ B_{13}=0,$$

$$B_{23}=-\frac{3}{2}\sin i\cos i\left(\cos^2\delta_1+\frac{1}{8}\sin^2\delta_1\right)+\frac{27}{8}\sin i\cos i\left(\sin^2 i\cos^2\delta_1+\frac{1}{2}\cos^2 i\sin^2\delta_1\right).$$

Очевидно, что усредненные уравнения в случае наклонного диполя имеют еще более громоздкий вид, чем в случае прямого диполя. Поэтому для описания движения спутника в случае переходных процессов удобнее использовать осредненную модель, так как можно легко получить первые интегралы уравнений движения. Также отметим, что наименьшая точность приближения реального поля модельным не играет здесь существенной роли, так как интерес представляет общее поведение спутника, некие закономерности эволюции его положения и скорости.

2.2. Установившееся движение

Установившееся движение удобно рассматривать при помощи уравнений Эйлера. В этом случае для описания динамики спутника используются переменные $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\alpha,\beta,\gamma$. Здесь ω_i – компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника в системе $Ox_1x_2x_3$ (i=1,2,3), самолетные углы задают ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$. Матрица направляющих косинусов $\mathbf{A}_{Xx}$ имеет вид

$$\mathbf{A}_{Xx}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma\\ \sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma\end{pmatrix}.$$

Уравнения движения спутника с произвольным тензором инерции $\mathbf{J}=\mathrm{diag}\left(A,B,C\right)$ имеют вид

$$A\frac{d\omega_1}{dt}+\left(C-B\right)\omega_2\omega_3=M_{1x},$$
$$B\frac{d\omega_2}{dt}+\left(A-C\right)\omega_1\omega_3=M_{2x},$$
$$C\frac{d\omega_3}{dt}+\left(B-A\right)\omega_1\omega_2=M_{3x},$$

Кинематические соотношения при движении в орбитальной системе координат

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{\cos\beta}\left(\omega_2\cos\gamma-\omega_3\sin\gamma-\omega_0\sin\alpha\sin\beta\right),$$
$$\frac{d\beta}{dt}=\omega_2\sin\gamma+\omega_3\cos\gamma-\omega_0\cos\alpha,$$
$$\frac{d\gamma}{dt}=\omega_1-\operatorname{tg}\beta\left(\omega_2\cos\gamma-\omega_3\sin\gamma\right)+\omega_0\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Плоское движение спутника

Рассмотрим плоское движение спутника, удовлетворяющее условиям $\alpha=\gamma=0$, $\omega_1=\omega_2=0$.

Такое движение существует для некоторых вариантов магнитного управления на полярной орбите, и когда на спутник также действует гравитационный момент. Предположим, что дипольный момент действует вдоль первой оси спутника, то есть $\mathbf{m}=\left(m,\,0,\,0\right)^T$. В частности, в теле спутника может быть установлен постоянный магнит. Тогда

$$\mathbf{M}_{упр}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}_x=B_0\left(0,\,-mB_{x3},\,mB_{x2}\right)^T.$$

Для того, чтобы существовало плоское движение, необходимо $B_{x3}=0$. Такая ситуация наблюдается для прямого диполя и осредненной модели. Для наклонного диполя на полярной орбите $B_{x3}=\cos\lambda_2\sin\delta_1\neq0$. Эта модель не допускает плоского движения, что связано с наклоном оси диполя по сравнению с осью Земли. Таким образом, уже можно констатировать, что использование этой модели в аналитических исследованиях неудобно.

Плоское движение спутника описывается уравнением

$$C\ddot{\beta}=3\omega_0^2\left(A-B\right)\sin\beta\cos\beta+mB_0\left(\cos\left(\beta-u\right)+\kappa\sin u\sin\beta\right),\qquad(2.6)$$

где $\kappa=0$ для осредненной модели и $\kappa=1$ для прямого диполя. При рассмотрении движения с постоянным магнитом особый интерес представляет ориентация спутника вдоль направления магнитного поля. Изучим движение спутника в окрестности такой ориентации. Для этого положим

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta,$$

где β_0 – направление вектора геомагнитной индукции в плоскости орбиты. Рассмотрим сначала это направление в осредненной модели. Тогда $\beta_0 = \arcsin(\cos u)$ и уравнение движения (2.6) в линейном приближении перепишется в виде

$$\Delta\ddot{\beta} + \Delta\beta\left(\lambda^2 + \varepsilon\cos 2u\right) = -\varepsilon/2\cdot\sin 2u, \qquad (2.7)$$

где $\varepsilon = \dfrac{3(A-B)}{C}$, $\lambda^2 = \dfrac{mB_0}{C\omega_0^2}$. Уравнение (2.7) является квазигармонической системой. Рассмотрим свободные колебания, описываемые однородным уравнением

$$\Delta\ddot{\beta} + \Delta\beta\lambda^2\left(1 + \varepsilon/\lambda^2\cos 2u\right) = 0, \qquad (2.8)$$

известным как уравнение Матье. Следуя [61], определим, при каком соотношении между параметрами ε и λ спутник отслеживает движение вектора геомагнитной индукции, а при каком переходит в движение около гравитационно устойчивого положения равновесия. Влияние неоднородной части будет заключаться в ухудшении точности ориентации вдоль вектора геомагнитной индукции.

Составим характеристическое уравнение для (2.8),

$$\rho^2 - 2A\left(\lambda, \varepsilon/\lambda^2\right)\rho + 1 = 0 \qquad (2.9)$$

и найдем его корни

$$\rho\left(\lambda, \varepsilon/\lambda^2\right) = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Областям устойчивости (2.8) соответствуют значения λ, для которых $A^2 < 1$ (два мнимых корня с модулем, равным 1), а областям неустойчивости – значения, для которых $A^2 > 1$ (два вещественных корня). Области устойчивости и неустойчивости разделяются теми значениями λ, для которых выполняется либо

$$A\left(\lambda, \varepsilon/\lambda^2\right) = +1, \qquad (2.10)$$

либо

$$A\left(\lambda, \varepsilon/\lambda^2\right) = -1. \qquad (2.11)$$

Предположим, что на спутник не действует гравитационный момент, то есть $\varepsilon = 0$. Характеристическими показателями при $\varepsilon/\lambda^2 = 0$ являются величины $\pm\lambda i$. Уравнение (2.9) имеет корни

$$\rho_1(\lambda,0) = e^{\pi\lambda i},\ \rho_1(\lambda,0) = e^{-\pi\lambda i},$$

откуда

$$A(\lambda,0) = 1/2(\rho_1 + \rho_2) = \cos\pi\lambda.$$

Коэффициент $A(\lambda,\varepsilon/\lambda^2)$ по теореме Ляпунова [61] является аналитической функцией своих параметров. Чтобы задать коэффициент при небольшой величине гравитационного момента, представим его в виде

$$A(\lambda,\varepsilon/\lambda^2) = \cos\pi\lambda + \varepsilon/\lambda^2 \cdot F(\lambda,\varepsilon/\lambda^2), \tag{2.12}$$

где F – аналитическая функция λ и ε/λ^2.

Равенства (2.10) и (2.11) верны при $\varepsilon/\lambda^2 = 0$ и $\lambda = n$, где n – целое число. Тогда, поскольку ε/λ^2 мало, но отлично от нуля, возможны решения (2.10) в окрестности четных n и решения (2.11) в окрестности нечетных n. Согласно [61] эти решения существуют, они вещественные и являются аналитическими функциями ε/λ^2 в окрестности $\varepsilon/\lambda^2 = 0$. Представим поэтому решения (2.10) и (2.11) в виде ряда

$$\lambda^2 = n^2 + \alpha_1\,\varepsilon/\lambda^2 + \alpha_2\left(\varepsilon/\lambda^2\right)^2 + \ldots \tag{2.13}$$

Если λ удовлетворяет (2.10), то (2.8) имеет π-периодическое решение. Если λ удовлетворяет (2.11), то решение $\Delta\beta = f(t)$ удовлетворяет условию $f(t+\pi) = -f(t)$ и потому является 2π-периодическим. Решение (2.8) будем искать в виде ряда

$$\Delta\beta = \Delta\beta_0(u) + \varepsilon/\lambda^2 \cdot \Delta\beta_1(u) + \left(\varepsilon/\lambda^2\right)^2 \cdot \Delta\beta_2(u) + \ldots \tag{2.14}$$

Здесь $\Delta\beta_0$ – периодическая функция, представляющая решение (2.8) при $\varepsilon/\lambda^2 = 0$, β_i – периодические функции. Определим для (2.8) первую область неустойчивости, соответствующую $n = 1$. После подстановки (2.14) и (2.13) в уравнение (2.8) получаем, что $\alpha_1 = \pm 1/2$, $\alpha_2 = 7/32$. Первая область неустойчивости определяется неравенствами

$$1 - \frac{\varepsilon}{2\lambda^2} + \frac{7}{32}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)^2 + \ldots \le \lambda^2 \le 1 + \frac{\varepsilon}{2\lambda^2} + \frac{7}{32}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)^2 + \ldots$$

Для прямого диполя ($\kappa = 1$) уравнение движения (2.6) при подстановке $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ может быть выписано в конечном виде только вблизи восходящего и нисходящего узлов, где $\beta_0 \approx \arcsin(\cos u) / \sqrt{1 + 3\sin^2 u}$. В этом случае

$$\Delta\ddot{\beta} + \Delta\beta\left(\frac{3\lambda^2}{2} + \frac{2\varepsilon - \lambda^2}{2}\cos 2u\right) = \frac{\lambda^2 - \varepsilon}{2}\sin 2u,$$

где $\lambda^2 = \dfrac{m\mu_e}{r^3 C\omega_0^2}$. Таким образом, снова получено уравнение Матье, имеющее, однако, более сложную зависимость от параметров ε и λ^2. Для первой области неустойчивости имеем

$$1 - \frac{2\varepsilon - \lambda^2}{6\lambda^2} + \frac{7}{32}\left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2}\right)^2 + \ldots \le \lambda^2 \le 1 + \frac{2\varepsilon - \lambda^2}{6\lambda^2} + \frac{7}{32}\left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2}\right)^2 + \ldots$$

Проанализируем вид первой области неустойчивости при использовании осредненного поля и прямого диполя. Чем меньше величины ε/λ^2 (в случае использования осредненной модели) или $\left(2\varepsilon - \lambda^2\right)/3\lambda^2 = 2\varepsilon/3\lambda^2 - 1/3$ (в случае использования прямого диполя), тем меньше область неустойчивости. Для осредненной модели параметр $\varepsilon/\lambda^2 = 3|A - B|\omega_0^2/mB_0$ тем меньше, чем меньше разность между первыми двумя главными моментами инерции. При уменьшении величины гравитационного момента по сравнению с магнитным управляющим уменьшается область неустойчивости. В предельном случае осесимметричного спутника область неустойчивости отсутствует: на спутник действует только управляющий момент.

Для прямого диполя величина $\left(2\varepsilon - \lambda^2\right)/3\lambda^2 = 2|A - B|\omega_0^2/mB_0 - 1/3$ близка к 0 при $|A - B|\omega_0^2/mB_0 \approx 1/6$. Использование модели прямого диполя, таким образом, позволяет уточнить полученный в рамках осредненной модели результат. Область неустойчивости отсутствует уже при $|A - B|\omega_0^2/mB_0 \le 1/6$. Значения допустимых параметров (разница моментов инерции по сравнению с дипольным моментом постоянного магнита) расширяются.

Можно утверждать, что осредненная модель позволяет получить качественно верный и проще интерпретируемый результат. Модель прямого диполя ценой несколько более трудоемких выкладок, дополнительного ограничения (движение вблизи узла) и менее очевидного результата позволяет получить более точную как качественно, так и количественно картину поведения динамической системы.

Пространственное движение

Рассмотрим теперь уравнения движения спутника, оснащенного тангажным маховиком, имеющим постоянную скорость вращения и большой, по сравнению с самим спутником, кинетический момент. Уравнения движения спутника с маховиком, ось вращения которого совпадает с третьей связанной осью, имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \mathbf{M}_{гр} + \mathbf{M}_{упр}, \qquad (2.15)$$

где $\mathbf{h} = (0,\ 0,\ 1)^T$.

При анализе установившегося движения используем метод Пуанкаре [61], представив уравнения (2.15) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – момент гравитационных и гироскопических сил, $\varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x})$ – момент сил, создаваемых за счет действия магнитной системы, ε – малый параметр, вид которого определяется из вида конкретного алгоритма управления. Таким образом, рассматривается действие слабого магнитного момента на движение системы. Представляя решение в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1$, имеем

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{du} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\right) + O\left(\varepsilon^2\right),$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ – матрица Якоби порождающей системы ($F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$). Решение $\mathbf{x}_0 = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ соответствует устойчивому положению равновесия в отсутствие магнитного управления. Управляющий момент вычисляем как [21]

$$\mathbf{M}_{упр} = -k \frac{d\mathbf{B}_x}{dt} \times \mathbf{B}_x .$$

Для вклада магнитной системы в решение $\mathbf{x}_1$ получаем уравнения

$$\frac{d\omega_1}{du} = -\theta_A \omega_2 + \frac{k}{A\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 \sin u \sin i \cos i,$$

$$\frac{d\omega_2}{du} = \theta_B\omega_1 - 3\lambda_B\alpha - 2\frac{k}{B\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 \cos u \sin i \cos i,$$

$$\frac{d\omega_3}{du} = 3\lambda_C\beta + 2\frac{k}{C\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 \sin^2 i,$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \omega_2 - \gamma, \quad \frac{d\beta}{du} = \omega_3, \quad \frac{d\gamma}{du} = \omega_1 + \alpha.$$

Эти уравнения можно разбить на 2 независимые подсистемы. Ограничимся движением в плоскости орбиты, для которого получаем

$$\ddot{\beta} - 3\lambda_C\beta = 2\frac{k}{C\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 \sin^2 i\,.$$

При этом мы предполагаем, что $\lambda_C < 0$, то есть спутник занимает гравитационно устойчивое положение равновесия. Тогда решение однородного уравнения – колебания около требуемого положения. Точность ориентации определяется в первую очередь частным решением

$$\beta = -\frac{2k}{3\lambda_C C\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2 \sin^2 i. \qquad (2.16)$$

Для осредненной модели система уравнений будет иметь довольно громоздкий вид, поэтому мы рассмотрим ее только для полярной орбиты. Тогда для движения в плоскости получаем

$$\ddot{\beta} - 3\lambda_C\beta = \frac{k}{C\omega_0}B_0^2.$$

Частное решение с учетом (1.10) будет иметь вид

$$\beta = -\frac{3k}{4\lambda_C C\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2.$$

Сравним это решение с (2.16), которое после подстановки $i = \pi/2$ примет вид

$$\beta = -\frac{2k}{3\lambda_C C\omega_0}\left(\frac{\mu_e}{r^3}\right)^2.$$

Решения отличаются в 8/9 раза. Следует ожидать, что модель прямого диполя при этом дает более точный результат. Поэтому для определения точности достижения стационарного решения невозмущенной задачи при использовании магнитной системы лучше использовать модель прямого диполя. Заметим, что менее оптимистичная оценка, получаемая с помощью осредненной модели, может использоваться для выбора параметров спутника и системы ориентации с расчетом на худшую точность.

3. Численное моделирование

Приведем здесь несколько примеров численного моделирования движения спутника с использованием разных моделей геомагнитного поля. Стоит ожидать, что модель IGRF окажется при этом предпочтительной за счет своей большей точности. Однако в некоторых случаях использовать ее нет повода даже в численном моделировании. Обратимся сперва к задаче демпфирования угловой скорости аппарата. Сравним эффективность демпфирования, которую мы можем ожидать, опираясь на моделирование. Будем моделировать движение спутника с тензором инерции $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(5750,\, 2450,\, 4000)$ *кг·м*^{2} на орбите высотой 1000 *км*, наклонением 82.5° и коэффициентом усиления в управлении $k = 5\cdot 10^{11}$ *Н·м·с/Тл*^{2} (однако при этом магнитные катушки не могут создать дипольный момент более 250 *А·м*^{2}). Начальные углы ориентации аппарата 60, 130, 230 градусов, последовательность поворотов 1-3-2. Начальная угловая скорость (0.001, 0.002, 0.003) *с*$^{-1}$. Помимо управляющего, учитывается действие только гравитационного момента. Движение происходит в орбитальной системе координат. Переходные процессы представлены на рис. 8.

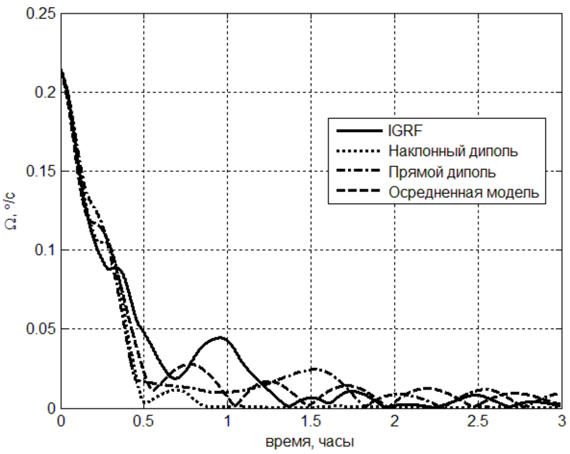

Рис. 8. Демпфирование угловой скорости

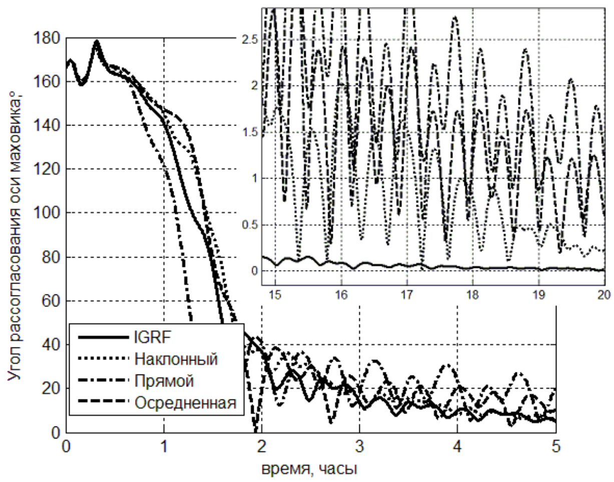

Рис. 9. Переориентация тангажного маховика

Из рис. 8 видно, что время переходных процессов отличается незначительно при использовании разных моделей геомагнитного поля. Наиболее «быстрые» изменения угловой скорости близки. При этом, как и следовало ожидать, две дипольные модели показывают особенно близкий результат, тогда как модель IGRF, практически реальное геомагнитное поле, показывает несколько худший результат. Осредненная модель также отличается от дипольного приближения. В целом же можно утверждать, что использование упрощенных моделей при изучении переходных процессов вполне оправданно. При численном моделировании они предпочтительны. Так, расчет с использованием модели IGRF потребовал 147.7 секунд (из них 128.5 занял расчет поля), использование наклонного диполя потребовало 33.8 секунд, а прямой диполь и осредненная модель потребовали 15 и 14.8 секунд. Рассмотрим еще один пример переходных процессов – приведение оси тангажного маховика к нормали к плоскости орбиты. Угол между осью его установки и нормалью приведен на рис. 9. Кинетический момент маховика 10 *Н·м·с*, коэффициент усиления управления уменьшен в 10 раз, начальные углы 60, 100, 230 градусов, остальные параметры и начальные угловые скорости сохранены. Результат аналогичен представленному на рис. 8.

Уже по рис. 8 и 9 видно, что в случае исследования точности ориентации выбор модели может иметь значение. Для более полного сравнения точности добавим возмущающий момент (постоянное в связанной системе возмущение на уровне $1\cdot10^{-4}$ *Н·м* и случайное на уровне $4\cdot10^{-4}$ *Н·м*) и ошибки определения ориентации (1° систематической ошибки и 2° нормально распределенной по углам ориентации, 0.01 °/с и 0.001 °/с соответственно по угловой скорости). На рис. 10 представлен результат моделирования – максимальный из углов между одноименными осями орбитальной и связанной систем координат при использовании четырех моделей. Начальные углы ориентации 6, 3, 2 градуса, начальные скорости 0.0001 c^{-1} (движение вблизи требуемого положения). Тангажный маховик не используется.

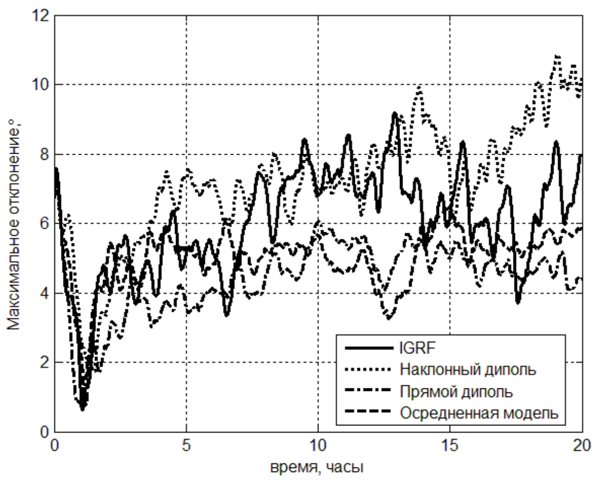

Рис. 10. Точность ориентации в гравитационном поле

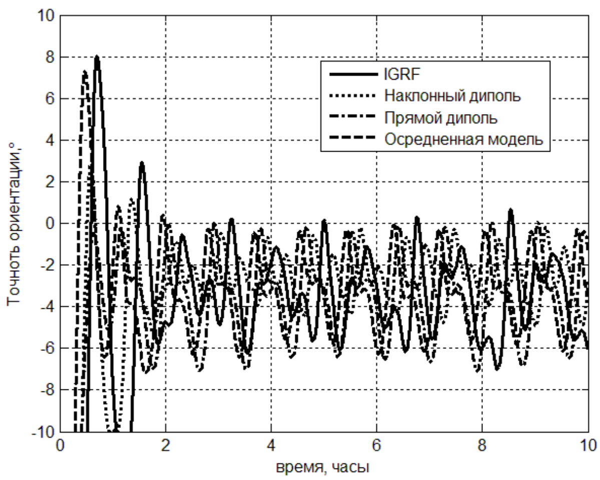

Рис. 11. Точность ориентации, тангажный маховик

Из рис. 10 можно заключить, что при изучении движения спутника вблизи требуемого положения в целом можно использовать упрощенные модели геомагнитного поля. Аналогичный результат дает рис. 11, на котором представлена точность ориентации аппарата с тангажным маховиком. В этом случае задача магнитной системы ориентации – поворот на 40° и удержание аппарата в плоскости орбиты с помощью управления, представленного в [62]. Начальные данные, ошибки и возмущения, параметры спутника сохранены. Стоит, однако, отметить один специфический случай, когда необходимо использовать наиболее точную модель. Параметры алгоритма трехосной магнитной ориентации [53] чрезвычайно чувствительны к характеристикам спутника, его орбиты и магнитного поля. Поэтому после подбора коэффициентов с помощью упрощенной модели необходимо проведение расчетов с моделью IGRF.

4. Сравнение моделей

Суммируем рекомендации по использованию моделей поля:

IGRF/WMM – численное моделирование при необходимости высокой точности, уточнение параметров управления и спутника на последних этапах проектирования аппарата, в особенности при рассмотрении движения вблизи требуемой ориентации;

Наклонный диполь – ускоренное численное моделирование, предшествующее использованию IGRF или заменяющее его, при рассмотрении переходных и установившихся процессов;

Прямой диполь – аналитическое исследование движения в орбитальной системе координат и инерциальной, связанной с орбитой, численное моделирование;

Осредненная модель – аналитическое исследование движения в инерциальном пространстве, в особенности в переходных процессах.

		IGRF/ WMM	Накл. дип.	Прям. дип.	Оср.
Численное моделирование	Уточненное	+	∓	–	–
	Предварительное, примерное	–	+	±	∓
Режим движения	Переходный	+	+	+	+
	Точность ориентации	+	±	±	∓
Аналитические исследования	Орбитальная СК	–	–	+	∓
	Инерциальная СК	–	∓	±	+

Заключение

Рассмотрены четыре модели геомагнитного поля: IGRF, наклонный и прямой диполи, осредненная. Приведены выражения для вектора геомагнитной индукции в различных системах координат. Исследованы преимущества моделей при проведении аналитических и численных исследований. Для получения качественных результатов при исследовании движения спутника в орбитальных и инерциальных осях желательно, соответственно, в силу простоты использовать прямой диполь и осредненную модель. Проведено соответствующее численное моделирование, показавшее, что в переходных процессах результаты, даваемые упрощенными моделями, практически совпадают с таковыми для более точных. При исследовании точности ориентации желательно качественные результаты дополнять моделированием с возможно близким к реальному полем.

Литература

1. Алпатов А.П. и др. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. Москва: Машиностроение, 1978. 200 с.
2. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. Москва: Машиностроение, 1975. 248 с.
3. Rauschenbakh B.V., Ovchinnikov M.Yu., McKenna-Lawlor S. Essential Spaceflight Dynamics and Magnetospherics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 397 p.
4. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. Москва: Наука, 1985. 288 с.
5. Боевкин В.И. и др. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. Москва: Наука, 1976. 304 с.
6. Fischell R.E. Magnetic Damping of the Angular Motions of Earth Satellites // Am. Rocket Soc. J. 1961. V. 31, № 9. pp. 1210–1217.
7. Grasshoff L.H. A Method for Controlling the Attitude of a Spin-Stabilized Satellite // ARS J. 1961. V. 31, № 5. pp. 646–649.
8. Белецкий В.В., Зонов Ю.В. Вращение и ориентация третьего советского спутника // Сборник “Искусственные спутники Земли” АН СССР, 1961. № 7. 32-55 с.
9. Fischell R.E. Passive Magnetic Attitude Control for Earth Satellites // Adv. Astronaut. Sci. 1963. V. 11. pp. 147–176.
10. Сарычев В.А. и др. Движение гравитационно-ориентированного спутника с гистерезисными стержнями в плоскости полярной орбиты // Космические исследования. 1988. Т. 26, № 5. с. 654–668.
11. Сарычев В.А. и др. Влияние гистерезисного стержня, установленного вдоль оси наибольшего момента инерции спутника, на его движение в

режиме гравитационной ориентации // Космические исследования. 1989. Т. 27, № 6. с. 849–860.
12. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации ИСЗ // Итоги науки и техники, Серия “Исследование космического пространства”, Т. 23. Москва: ВИНИТИ, 1985. 104 с.
13. Stopfkuchen K.A. A Comparison of AZUR and ESRO 1 Attitude Control System Performance // Dornier Rep. EER-A 200/69. 1969.
14. Овчинников М.Ю. и др. Наноспутник Reflector. Выбор параметров системы ориентации // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 1. с. 67–84.
15. Ovchinnikov M. et al. Attitude Control System for the First Swedish Nanosatellite “MUNIN” // Acta Astronaut. 2000. V. 46, № 2-6. pp. 319–326.
16. Burton R., Starek J., Rock S. A New Method for Simulating the Attitude Dynamics of Passively Magnetically Stabilized Spacecraft // Adv. Astronaut. Sci. 2012. V. 143. paper AAS 12–169.
17. Santoni F., Zelli M. Passive Magnetic Attitude Stabilization of the UNISAT-4 Microsatellite // Acta Astronaut. 2009. V. 65, № 5-6. pp. 792–803.
18. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Лабораторное исследование магнитных свойств гистерезисных стержней для системы ориентации малогабаритных спутников // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 1. с. 152–171.
19. Садов Ю.А. Периодические движения спутника с магнитным демпфером в плоскости круговой орбиты // Космические исследования. 1969. Т. 7, № 1. с. 51–60.
20. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary Magnetic Attitude Control System // J. Spacecr. Rockets. 1976. V. 13, № 5. pp. 282–287.
21. Stickler A.C. A Magnetic Control System for Attitude Acquisition // Ithaco, Inc., Rep. N 90345. 1972.
22. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оценка влияния диссипативного магнитного момента от вихревых токов на быстрое вращение спутника // Космические исследования. 1982. Т. 20, № 2. с. 297–300.
23. Сазонов В.В., Сарычев В.А. Влияние диссипативного магнитного момента на вращение спутника относительно центра масс // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела. 1983. Т. 2. с. 3–12.
24. Guelman M. et al. Design and Testing of Magnetic Controllers for Satellite Stabilization // Acta Astronaut. 2005. V. 56, № 1-2. pp. 231–239.
25. Guo J., Bouwmeester J., Gill E. In-orbit Results of Delfi-n3Xt: Lessons Learned and Move Forward // Acta Astronaut. 2016. V. 121. pp. 39–50.
26. Candini G.P., Piergentili F., Santoni F. Miniaturized Attitude Control System for Nanosatellites // Acta Astronaut. 2012. V. 81, № 1. pp. 325–334.
27. Avanzini G., Giulietti F. Magnetic Detumbling of a Rigid Spacecraft // J. Guid. Control. Dyn. 2012. V. 35, № 4. pp. 1326–1334.
28. Овчинников М.Ю. и др. Исследование быстродействия алгоритма

активного магнитного демпфирования // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 2. с. 176–183.

29. Psiaki M.L. Nanosatellite Attitude Stabilization Using Passive Aerodynamics and Active Magnetic Torquing // J. Guid. Control. Dyn. 2004. V. 27, № 3. pp. 347–355.
30. Renard M.L. Command Laws for Magnetic Attitude Control of Spin-Stabilized Earth Satellites // J. Spacecr. Rockets. 1967. V. 4, № 2. pp. 156–163.
31. Shigehara M. Geomagnetic Attitude Control of an Axisymmetric Spinning Satellite // J. Spacecr. Rockets. 1972. V. 9, № 6. pp. 391–398.
32. Артюхин Ю.П., Каргу Л.И., Симаев В.Л. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением. Москва: Наука, 1979. 295 с.
33. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическим летательным аппаратом. Москва: Машиностроение, 1964. 402 с.
34. Hur P.S., Melton R.G., Spencer D.B. Meeting Science Requirements for Attitude Determination and Control in a Low-power, Spinning satellite // J. Aerosp. Eng. Sci. Appl. 2008. V. 1, № 1. pp. 25–33.
35. Slavinskis A. et al. High Spin Rate Magnetic Controller for Nanosatellites // Acta Astronaut. 2014. V. 95. pp. 218–226.
36. Avanzini G., de Angelis E.L., Giulietti F. Spin-Axis Pointing of a Magnetically Actuated Spacecraft // Acta Astronaut. 2014. V. 94, № 1. pp. 493–501.
37. Wheeler P.C. Spinning Spacecraft Attitude Control via the Environmental Magnetic Field // J. Spacecr. Rockets. 1967. V. 4, № 12. pp. 1631–1637.
38. Ergin E.I., Wheeler P.C. Magnetic Attitude Control of a Spinning Satellite // AIAA First Annual Meeting. 1964. P. AIAA Paper 64–235.
39. Sorensen J.A. A Magnetic Attitude Control System for an Axisymmetric Spinning Spacecraft // J. Spacecr. Rockets. 1971. V. 8, № 5. pp. 441–448.
40. Junkins J.L., Carrington C.K., Williams C.E. Time-Optimal Magnetic Attitude Maneuvers // J. Guid. Control. Dyn. 1981. V. 4, № 4. pp. 363–368.
41. Sekhavat P. et al. Closed-Loop Time-Optimal Attitude Maneuvering of Magnetically Actuated Spacecraft // J. Astronaut. Sci. 2013. V. 58, № 1. pp. 81–97.
42. Biggs J.D., Horri N. Optimal Geometric Motion Planning for a Spin-Stabilized Spacecraft // Syst. Control Lett. 2012. V. 61, № 4. pp. 609–616.
43. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия: Исследование космического пространства. Т.11 М: ВИНИТИ, 1978. 221 с.
44. Likins P.W. Attitude Stability Criteria for Dual Spin Spacecraft // J. Spacecr. Rockets. 1967. V. 4, № 12. pp. 1638–1643.
45. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Нутационные демпферы спутников с двойным вращением // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1977. V. 15, № 2. pp. 225–242.
46. Landon V.D., Stewart B. Nutational Stability of an Axisymmetric Body

Containing a Rotor // J. Spacecr. Rockets. 1964. V. 1, № 6. pp. 682–684.
47. Sandfry R.A., Hall C.D. Steady Spins and Spinup Dynamics of Axisymmetric Dual-Spin Satellites with Dampers // J. Spacecr. Rockets. 2004. V. 41, № 6. pp. 948–955.
48. Wang P., Shtessel Y., Wang Y. -q. Satellite Attitude Control Using Only Magnetorquers // Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory. Morgantown, West Virginia, 1998. pp. 500–504.
49. Psiaki M.L. Magnetic Torquer Attitude Control via Asymptotic Periodic Linear Quadratic Regulation // J. Guid. Control. Dyn. 2001. V. 24, № 2. pp. 386–394.
50. Jafarboland M. et al. Controlling the Attitude of Linear Time-Varying Model LEO Satellite Using Only Electromagnetic Actuation // IEEE Aerospace Conference Proceedings. Big Sky, Montana, 2002. pp. 2221–2229.
51. Guelman M. et al. The Gurwin-Techsat Microsatellite: Six Years Successful Operation in Space // 4S Symposium: Small Satellites, Systems and Services. La Rochelle. 62 p.
52. Celani F. Robust Three-Axis Attitude Stabilization for Inertial Pointing Spacecraft Using Magnetorquers // Acta Astronaut. 2015. V. 107. pp. 87–96.
53. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-Axis Active Magnetic Attitude Control Asymptotical Study // Acta Astronaut. 2015. Vol. 110. P. 279–286.
54. Гаусс К.Ф. Избранные труды по земному магнетизму. Ленинград: АН СССР, 1952. 343 с.
55. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1978. 592 с.
56. IGRF: http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html WMM: https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/wmm_ddownload.shtml.
57. Antipov K.A., Tikhonov A.A. Multipole Models of the Geomagnetic Field: Construction of the Nth Approximation // Geomagn. Aeron. 2013. V. 53, № 2. pp. 257–267.
58. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // Астрономический журнал. 1973. Т. 50, № 2. с. 327–335.
59. Zajac E.E. Some simple solutions relating to magnetic attitude control of satellites // 4th US National Congress on Applied Mechanics. Berkeley: Pergamon Press, 1962. pp. 449–456.
60. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. Москва: Гостехиздат, 1939. 258 с.
61. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
62. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Движение спутника с двойным вращением в магнитном и гравитационном полях // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 22. 23 с.