ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Ефимов С.С.**, Сидоренко В. В.

# Модельная система, описывающая некоторые свойства динамики небесных тел при резонансе средних движений первого порядка

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Ефимов С.С., Сидоренко В. В. Модельная система, описывающая некоторые свойства динамики небесных тел при резонансе средних движений первого порядка // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 65. 32 с. doi:10.20948/prepr-2016-65
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-65

**Ордена Ленина**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**имени М.В.Келдыша**
**Российской академии наук**

**С.С.Ефимов, В.В.Сидоренко**

# Модельная система, описывающая некоторые свойства динамики небесных тел при резонансе средних движений первого порядка

**Москва — 2016**

*Ефимов С.С., Сидоренко В.В.*

**Модельная система, описывающая некоторые свойства динамики небесных тел при резонансе средних движений первого порядка**

Рассматривается гамильтонова система с двумя степенями свободы, в которой переменные разделяются на быстрые и медленные. Эволюция медленных переменных изучается с помощью метода усреднения. Дано подробное описание различных вариантов эволюции. Указаны проявления квазислучайного поведения системы.

***Ключевые слова:*** гамильтоновы системы, метод усреднения

*Efimov S.S., Sidorenko V.V.*

**Model system describing some aspects of celestial bodies' dynamics in first order mean motion resonance**

Hamiltonian system with two degrees of freedom is considered, in which fast and slow variables can be distinguished. The averaging method is applied to study of slow variables' evolution. Stochastic behavior of the system is indicated.

***Key words:*** Hamiltonian system, averaging method

Работа выполнена при финансовой поддержке 7-й Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

## Оглавление

1. Модельный гамильтониан. Постановка задачи ..... 3
2. Свойства решений быстрой подсистемы при разных значениях медленных переменных (предельный случай $\varepsilon = 0$) ..... 5
3. Построение эволюционных уравнений ..... 13
4. Исследование поведения медленных переменных на основе эволюционных уравнений ..... 16
5. Квазислучайные эффекты ..... 21
6. Заключение ..... 26

## 1. Модельный гамильтониан. Постановка задачи

Одним из направлений исследований задачи трех тел является изучение вековых эффектов при резонансе средних движений (РСД). Если в ограниченном варианте этой задачи «звезда-планета-астероид» за то время, за которое астероид совершает $p$ оборотов вокруг звезды, планета совершает $p+1$ оборот, то такую ситуацию называют «внешним» РСД первого порядка. Характеристика этого РСД как «внешнего» отражает то обстоятельство, что величина большой полуоси орбиты астероида больше большой полуоси орбиты планеты. В Солнечной системе во внешнем РСД первого порядка с Нептуном находятся объекты пояса Койпера, образующие семейства «тутино» (резонанс 1:2) и «плутино» (резонанс 2:3).

При РСД в динамике небесных тел можно выделить процессы трех временных шкал: «быстрые», «полубыстрые» и «медленные». Они соответствуют орбитальному движению, изменению резонансной фазы $\varphi$ (комбинации средних долгот и некоторых оскулирующих элементов) и вековой эволюции орбиты астероида. Характерные времена «быстрых», «полубыстрых» и «медленных» процессов соотносятся как $1:\mu^{-1/2}:\mu^{-1}$, где $\mu \ll 1$ – доля массы планеты в общей массе системы.

В случае движения планеты по круговой орбите при малых значениях эксцентриситета $e$ и наклонения $i$ орбиты астероида изучение вековых эффектов при РСД первого порядка может быть сведено к исследованию гамильтоновой системы с нестандартной симплектической структурой

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial \Xi}{\partial \Phi}, \frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\partial \Xi}{\partial \varphi}, \\ &\frac{dx}{dt}=\varepsilon\frac{\partial \Xi}{\partial y}, \frac{dy}{dt}=-\varepsilon\frac{\partial \Xi}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\varepsilon=\mu^{1/2}$, $x\sim e\cos\omega$, $y\sim e\sin\omega$, а гамильтониан $\Xi$ имеет вид

$$\Xi(x,y,\varphi,\Phi)=\frac{\Phi^2}{2}+W(x,y,\varphi),\ W(x,y,\varphi)=x\cos\varphi+y\sin\varphi+\cos 2\varphi. \qquad (2)$$

Наклонение $i$ орбиты астероида и её эксцентриситет $e$ связаны соотношением

$$\sqrt{1-e^2}\cos i=c,$$

где $c$ – постоянная величина, отражающая сохранение проекции кинетического момента орбитального движения астероида на нормаль к плоскости эклиптики (интеграл Козаи–Лидова).

Общая схема преобразования уравнений движения астероида в систему типа (1) описана в [11, 12]. В качестве первого шага производится усреднение

возмущающей функции задачи трех тел по орбитальному движению, поэтому полученные в конечном итоге уравнения (1) описывают только «полубыстрые» и «медленные» процессы. «Забыв» про «быстрые» процессы в исходной небесно-механической задаче, систему (1) будем называть быстро-медленной (БМ-системой), акцентируя таким образом разделение фазовых переменных на группы с разными скоростями изменения (в общем случае):

$$\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\Phi}{dt} \sim 1, \ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \sim \varepsilon \ll 1.$$

Естественным образом в БМ-системе (1) выделяются «быстрая» подсистема (первое и второе уравнения) и «медленная» подсистема (третье и четвертое уравнения). При $\varepsilon = 0$ уравнения «быстрой» подсистемы совпадают с уравнениями движения частицы единичной массы в потенциале $W(x, y, \varphi)$, где $x, y$ играют роль параметров. Пусть

$$\varphi(t, x, y, \xi), \ \Phi(t, x, y, \xi) \tag{3}$$

является решением «быстрой» подсистемы с «замороженными» $x, y$, лежащим на уровне $\Xi = \xi$. В общем случае изменение резонансной фазы в решении (3) носит вращательный или колебательный характер:

$$\varphi(t + T, x, y, \xi) = \varphi(t, x, y, \xi) \bmod 2\pi,$$

где $T(x, y, \xi)$ – период решения.

Усреднение правых частей уравнений «медленной» подсистемы вдоль решений (3) приводит к эволюционным уравнениям, позволяющим изучить поведение переменных $x$ и $y$ на длительных временных интервалах:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial \Xi}{\partial y} \right\rangle, \ \frac{dy}{dt} = -\varepsilon \left\langle \frac{\partial \Xi}{\partial x} \right\rangle. \tag{4}$$

Скобки $\langle \cdot \rangle$ в (4) обозначают операцию усреднения:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T(x, y, \xi)} \int_0^{T(x, y, \xi)} f(x, y, \varphi(t, x, y, \xi)) dt. \tag{5}$$

Эволюционные уравнения (4) можно интерпретировать как «адиабатическое» приближение [4, 12]. Для этого решению (3) сопоставим интеграл действия

$$J(x, y, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T(x, y, \xi)} \Phi^2(t, x, y, \xi) dt. \tag{6}$$

При $\varepsilon \neq 0$ функция $J(x, y, \xi)$ будет адиабатическим инвариантом (АИ) БМ-системы (1). При заданном $\xi$ фазовые траектории усредненных уравнений (4) лежат на линиях уровня этой функции на плоскости $(x, y)$.

Целью данной работы является «техническая» реализация описанной процедуры построения эволюционных уравнений и подробный анализ поведения медленных переменных при разных значениях гамильтониана $\Xi$. Полученные результаты в дальнейшем предполагается использовать при изучении динамики астероидов в случае РСД первого порядка.

## 2. Свойства решений быстрой подсистемы при разных значениях медленных переменных (предельный случай $\varepsilon = 0$)

**Предварительные замечания.** Если $x$ и $y$ рассматривать как параметры, то $W$ становится «бигармоническим» потенциалом, заданном на окружности $S^1$. Решение уравнений движения частицы единичной массы в таком потенциале можно записать в эллиптических функциях, но необходимо выделить ситуации, когда соответствующие выражения имеют разный вид.

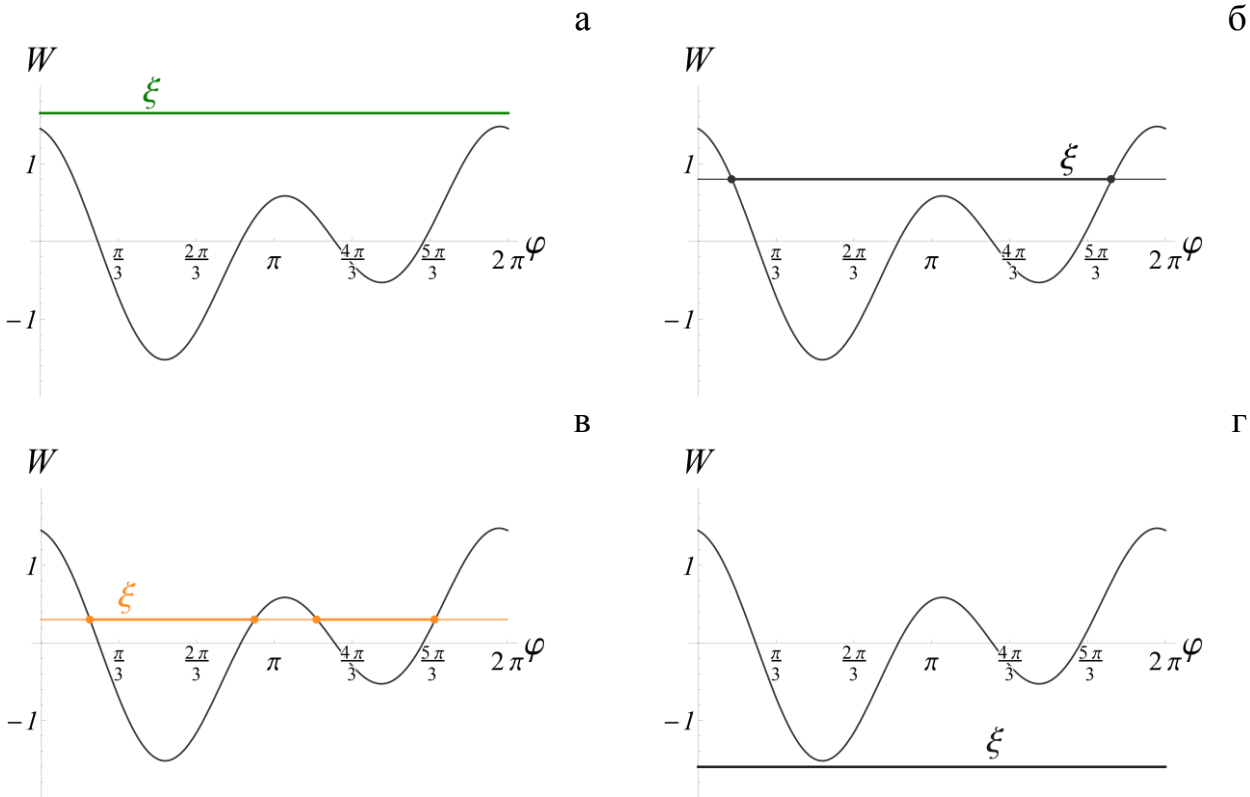


*Рис. 1.* Свойства решений на разных уровнях гамильтониана $\Xi$:
а – вращательное решение, б – одно колебательное решение,
в – два разных колебательных решения,
г – ситуация, когда для взятых значений $x, y$ решений нет

**Множество значений медленных переменных, при которых в быстрой подсистеме могут существовать два различных колебательных решения.** Из рис. 1 видно, что два разных колебательных решения существуют только в том случае, когда потенциал $W(\varphi)$ на окружности $S^1$ имеет четыре экстремума.

Необходимое условие экстремума $\partial W/\partial\varphi = 0$ заменой переменной $\lambda = \mathrm{tg}(\varphi/2)$ приводится к виду

$$y\lambda^4 + 2(x+4)\lambda^3 + 2(x-4)\lambda - y = 0. \qquad (7)$$

На плоскости переменных $(x, y)$ совокупность точек, в которых $W(\varphi)$ имеет четыре экстремума, представляет собой некоторую область $\mathcal{A}$. Внутри этой области уравнение (7) имеет четыре действительных корня, а вне – два. Принимая во внимание то, что на границе области $\mathcal{A}$ без учета кратности число корней равно трём (за исключением конечного числа точек, в которых корень один), уравнение границы $\mathcal{A}$ можно записать как условие равенства нулю дискриминанта (7):

$$x^6 + 3x^4y^2 - 48x^4 + 3x^2y^4 + 336x^2y^2 + 768x^2 + y^6 - 48y^4 + 768y^2 - 4096 = 0. \qquad (8)$$

После выделения полного куба становится понятно, что соотношение (8) является уравнением астроиды в алгебраической форме (рис. 2):

$$\left(x^2 + y^2 - 4^2\right)^3 + 27 \cdot 4^2 x^2 y^2 = 0. \qquad (9)$$

Эту же астроиду задает уравнение

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}.$$

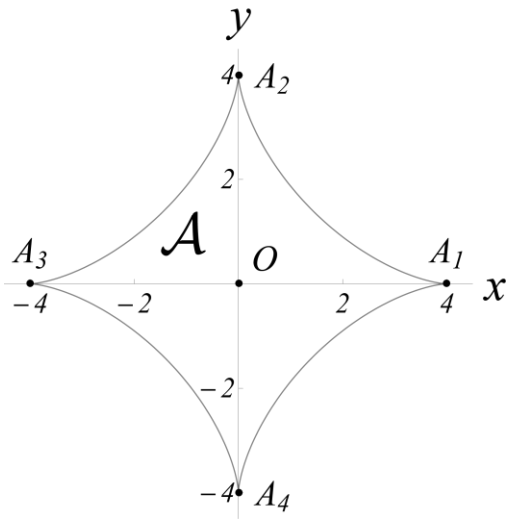


*Рис. 2.* Область $\mathcal{A}$, внутри которой потенциал $W(x, y, \varphi)$ имеет четыре экстремума как функция $\varphi$ на $S^1$. Точки $A_1, \ldots, A_4$ – вершины астроиды (9)

В дальнейшем при описании фазовых портретов эволюционных уравнений (4) нам будет удобно соотносить положение каких-либо траекторий с положением на плоскости $(x,y)$ области $\mathcal{A}$.

**Критическая кривая, разбивающая плоскость медленных переменных на области с разным поведением решений быстрой подсистемы при заданном значении $\xi$.** Введём обозначения $W_{min}(x,y)$ и $W_{max}(x,y)$ для глобальных минимума и максимума потенциала $W$ на $S^1$ при соответствующих значениях медленных переменных. Если $(x,y)\in\mathcal{A}$, то у $W$ будут ещё два экстремума, которые мы будем обозначать $W^*_{min}(x,y)$ и $W^*_{max}(x,y)$.

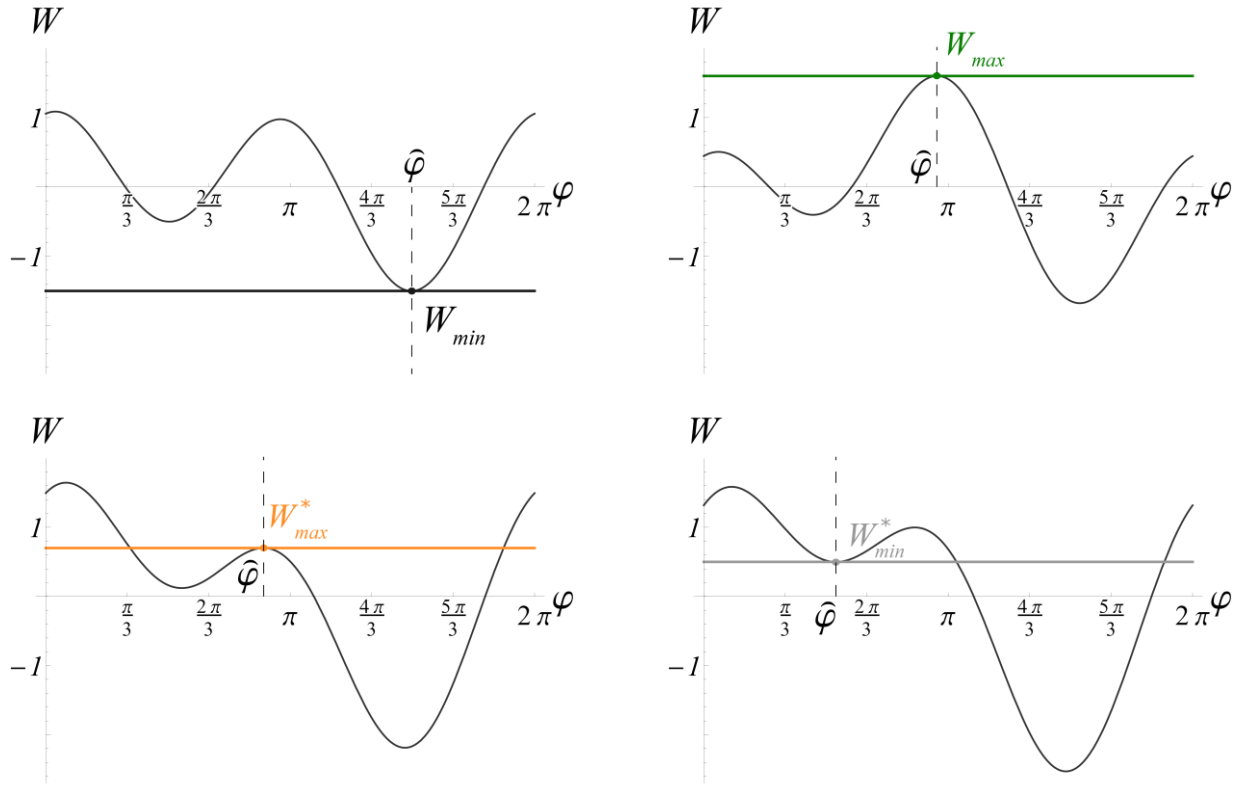


*Рис. 3.* Разные ситуации, реализующиеся на границах областей $Q_0(\xi),\ldots,Q_3(\xi)$

Зафиксировав значения медленных переменных и задав некоторое значение $\xi$ гамильтониана $\Xi$, в общем случае мы окажемся в одной из четырех ситуаций:

- $\xi > W_{max}$ — резонансная фаза вращается (рис. 1а)
- $(x,y)\notin\mathcal{A}$, $\xi\in(W_{min},W_{max})$ или $(x,y)\in\mathcal{A}$, $\xi\in(W_{min},W_{max})\setminus(W^*_{\min},W^*_{max})$ — резонансная фаза колеблется (рис. 1б)
- $(x,y)\in\mathcal{A}$ и $\xi\in(W^*_{min},W^*_{max})$ — существует два различных колебательных режима (рис. 1в)
- $\xi < W_{min}$ — движение невозможно (рис. 1г)

Далее множество значений медленных переменных, при которых для заданного $\xi$ движение невозможно, мы будем называть запрещенной областью и обозначим его $Q_0(\xi)$. Обозначение $Q_1(\xi)$ используем для области, где быстрая подсистема допускает только одно колебательное решение, $Q_2(\xi)$ будет обозначать область существования двух колебательных решений, $Q_3(\xi)$ – область вращательных решений быстрой подсистемы.

На границах областей $Q_0(\xi),...,Q_3(\xi)$ значение потенциала $W$ равно $\xi$ по крайней мере в одной из своих критических точек на $S^1$ (рис. 3).

Уравнение $W=\xi$ после замены $\lambda=\mathrm{tg}(\varphi/2)$ переходит в алгебраическое уравнение

$$(1-\xi-x)\lambda^4+2y\lambda^3-2(\xi+3)\lambda^2+2y\lambda+(x+1-\xi)=0. \qquad (10)$$

Из рис. 3 следует, что точка $(x,y)$ принадлежит какой-либо из границ областей $Q_0(\xi),...,Q_3(\xi)$ тогда, когда уравнение (10) имеет кратные вещественные корни. Необходимым и достаточным условием кратности вещественных корней уравнения (10) является равенство нулю дискриминанта данного уравнения:

$$\begin{aligned} D(x,y,\xi)=&64\xi^4-128\xi^2-x^6+\xi^2x^4-18\xi x^4-3x^4y^2-15x^4+\\ &+16\xi^3x^2-80\xi^2x^2-144\xi x^2-3x^2y^4+2\xi^2x^2y^2+78x^2y^2-48x^2-\\ &-y^6+\xi^2y^4+18\xi y^4-15y^4-16\xi^3y^2-80\xi^2y^2+144\xi y^2-48y^2+64 \end{aligned} \qquad (11)$$

Кривую $\Gamma(\xi)$, задаваемую условием $D(x,y,\xi)=0$, будем называть критической. Она разделяет области $Q_0(\xi),Q_2(\xi),Q_3(\xi)$, на которых $D(x,y,\xi)>0$, и область $Q_1(\xi)$, на которой $D(x,y,\xi)<0$. Положение критической кривой на плоскости медленных переменных при разных значениях $\xi$ показано на рис. 4. При $|\xi|<3$ кривая $\Gamma(\xi)$ имеет точки возврата, которые лежат на астроиде (9). Кроме того, эта кривая может иметь точки самопересечения. Если $-3<\xi<-1$, то точки самопересечения $\Gamma(\xi)$ лежат на оси $x$; их абсциссы являются корнями уравнения

$$x^2+8(\xi+1)=0.$$

Если $1<\xi<3$, точки самопересечения лежат на оси $y$; уравнение для ординат точек самопересечения имеет вид

$$y^2-8(\xi-1)=0.$$

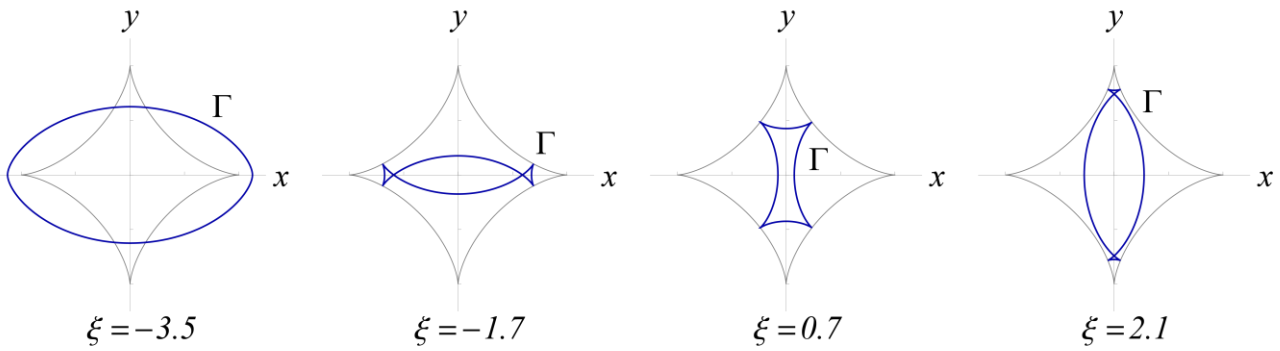


*Рис. 4.* Критическая кривая при разных значениях $\xi$

Кривая $\Gamma(\xi)$ допускает параметрическое представление (рис. 5):

$$\Gamma(\xi)=\left\{x=\cos\varphi(\xi+\cos 2\varphi-2),\ y=\sin\varphi(\xi+\cos 2\varphi+2)\,|\,\varphi\in S^1\right\}. \qquad (12)$$

Параметр $\varphi$ в (12) выбран таким образом, что

$$W(\varphi,x(\varphi,\xi),y(\varphi,\xi))=\xi,$$
$$\frac{\partial W}{\partial\varphi}(\varphi,x(\varphi,\xi),y(\varphi,\xi))=0.$$

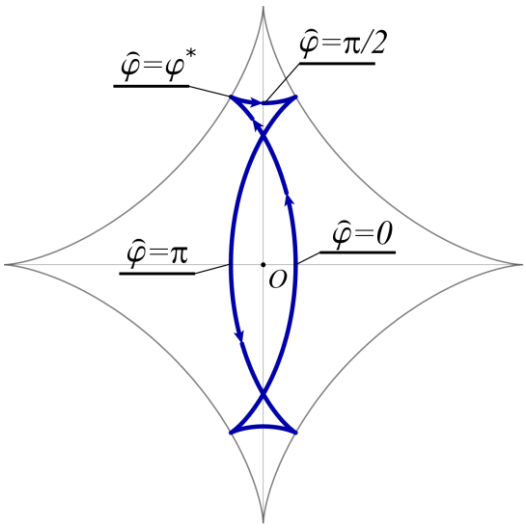


*Рис. 5*. Параметризация критической кривой $\Gamma(\xi)$

Параметрическое представление удобно использовать при описании положения точек возврата и точек самопересечения $\Gamma(\xi)$. В точках возврата $\varphi=\varphi^*$, где $\varphi^*$ удовлетворяют соотношению $tg^2\varphi^*=(3+\xi)/(3-\xi)$. Точки возврата будем обозначать $Y_n$ (индекс $n$ – номер квадранта, которому принадлежит задающий эту точку угол $\varphi$). Точки самопересечения $\Gamma(\xi)$,

лежащие в левой и правой полуплоскостях, обозначим $B_1$ и $B_2$ соответственно $(-3<\xi<-1)$. Точки самопересечения в верхней и нижней полуплоскостях обозначим $S_1$ и $S_2$ $(1<\xi<3)$.

*Примечание 1.* Можно доказать, что кривые $\Gamma(\xi)$ образуют семейство эквидистант. Расстояние между кривыми со значениями параметров $\xi_a$ и $\xi_b$ равно $|\xi_a-\xi_b|$.

**Трансформация областей $Q_0(\xi),...,Q_3(\xi)$ при изменении $\xi$.** Отметим прежде всего, что на плоскости $(x,y)$ область $Q_1(\xi)$ (область существования только одного колебательного решения) присутствует при всех значениях $\xi$. Появление или исчезновение других областей происходит при $\xi=\xi_i$, где

$$\xi_1=-3,\ \xi_2=-1,\ \xi_3=1,\ \xi_4=3.$$

Если $\xi<\xi_1$, то в центре плоскости $(x,y)$ располагается запрещенная область $Q_0(\xi)$, окруженная областью $Q_1(\xi)$.

При $\xi=\xi_1$ слева и справа от области $Q_0(\xi)$ появляются две части области $Q_2(\xi)$ (области существования двух колебательных режимов) (рис. 6).

При $\xi=\xi_2$ область $Q_0(\xi)$ исчезает, область $Q_2(\xi)$ становится связной (рис. 7).

При $\xi=\xi_3$ область $Q_2(\xi)$ опять разделяется на две несвязные части, в центре плоскости появляется область $Q_3(\xi)$ (область вращательного режима быстрой подсистемы) (рис. 8).

При $\xi=\xi_4$ область $Q_2(\xi)$ исчезает (рис. 9). При дальнейшем увеличении $\xi$ мы будем видеть только область $Q_3(\xi)$, окруженную областью $Q_1(\xi)$.

Опишем также трансформацию границ областей $Q_0(\xi),...,Q_3(\xi)$ при изменении $\xi$. Границу областей $Q_0(\xi)$ и $Q_1(\xi)$ мы будем называть кривой существования и обозначать $\Gamma_0(\xi)$. Множеству её точек соответствует условие $W_{min}(x,y)=\xi$. Если $\xi<\xi_1$, то тогда $\Gamma_0(\xi)=\Gamma(\xi)$. В случае $\xi_1<\xi<\xi_2$ кривая $\Gamma_0(\xi)$ образована верхним и нижним участками кривой $\Gamma(\xi)$, лежащими между точками самопересечения $B_1$ и $B_2$.

Модифицировав с учетом специфики рассматриваемой задачи терминологию, традиционно используемую при изучении БМ-систем [4, 12], границу областей $Q_1(\xi)$ и $Q_3(\xi)$ назовем кривой неопределенности первого рода и обозначим $\Gamma_1(\xi)$. Её точки удовлетворяют условию $W_{\max}(x,y)=\xi$. Если $\xi>\xi_4$, то $\Gamma_1(\xi)=\Gamma(\xi)$. В случае $\xi_3<\xi<\xi_4$ кривая $\Gamma_1(\xi)$ образована участками кривой $\Gamma(\xi)$, лежащими между точками самопересечения $S_1$ и $S_2$.

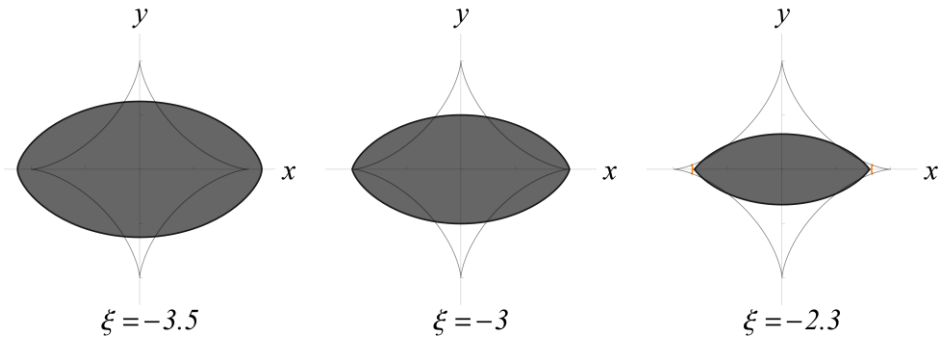


*Рис. 6.* Появление области $Q_2$ при $\xi = \xi_1$. Здесь и далее область $Q_0$ выделена темной заливкой, область $Q_2$ – оранжевой. Остальная (не закрашенная) часть плоскости $(x, y)$ – область $Q_1$

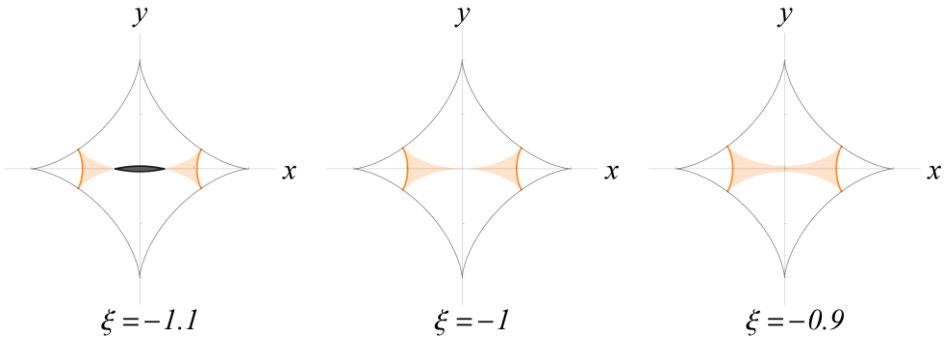


*Рис. 7.* Исчезновение запрещенной области $Q_0$ при $\xi = \xi_2$

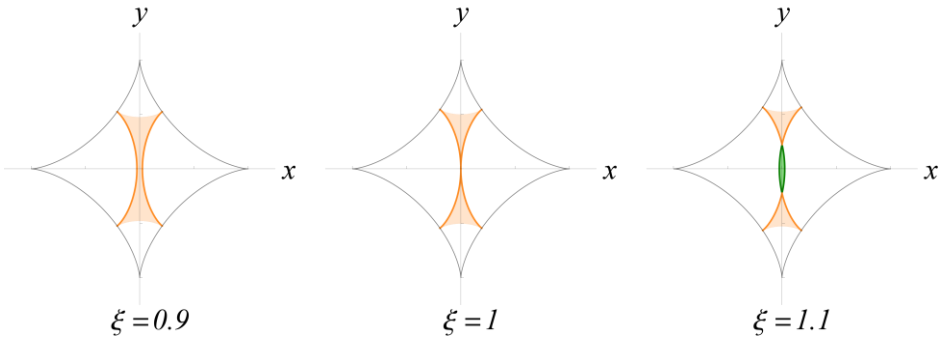


*Рис. 8.* Появление области $Q_3$ (области вращательных решений) при $\xi = \xi_3$. Область $Q_3$ выделена зеленой заливкой

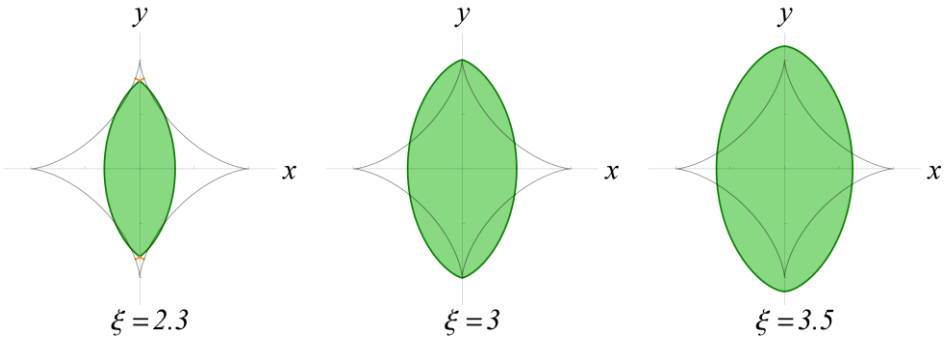


*Рис. 9.* Исчезновение области $Q_2$ при $\xi = \xi_4$

Участок границы между областями $Q_1(\xi)$ и $Q_3(\xi)$, вдоль которого $W^*_{\max}(x,y)=\xi$, назовем кривой неопределенности второго рода и обозначим $\Gamma_2(\xi)$. Если $\xi_1<\xi<\xi_3$, то тогда $\Gamma_2(\xi)=Y_1Y_3\cup Y_2Y_4$, где $Y_1Y_3$ и $Y_2Y_4$ – сегменты кривой $\Gamma(\xi)$ между соответствующими точками возврата. В случае $\xi_1<\xi<\xi_2$ кривая $\Gamma_2(\xi)=S_1Y_1\cup S_1Y_2\cup S_2Y_3\cup S_2Y_4$.

На оставшемся участке границы $Q_1(\xi)$ и $Q_3(\xi)$ выполняется равенство $W^*_{\min}(x,y)=\xi$. Так как какие-либо примечательные динамические эффекты на этом участке границы отсутствуют, мы не будем присваивать ему специального обозначения.

На рис. 10 приведена диаграмма, на которой указаны значения параметра $\varphi$, определяющие положение на кривой $\Gamma(\xi)$ точек возврата и самопересечения, а также отмечены участки, образующие кривую существования и кривые неопределенности. В силу симметрии достаточно ограничиться рассмотрением сегмента $\varphi\in[0,\pi/2]$.

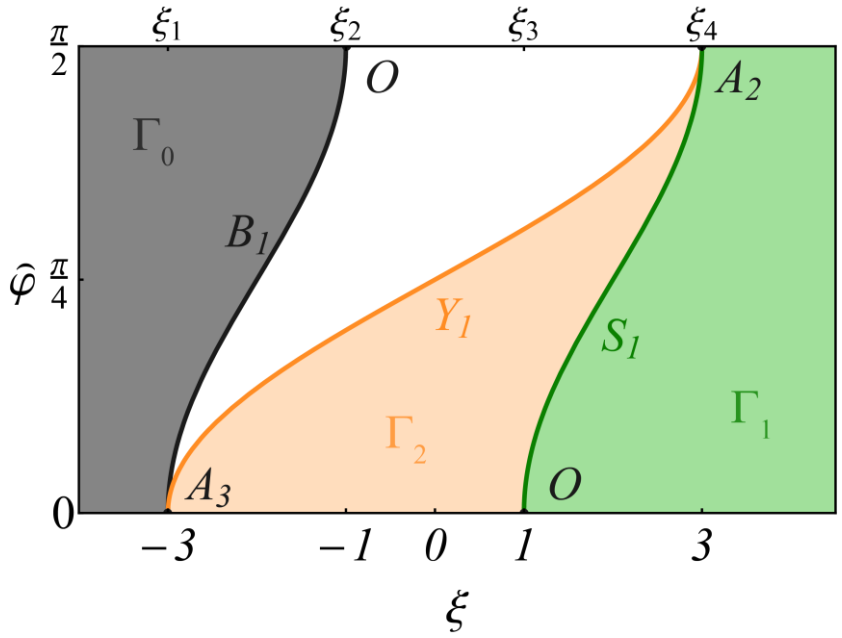


*Рис. 10*. Диаграмма, иллюстрирующая части критической кривой, соответствующие кривой существования $\Gamma_0(\xi)$ и кривым неопределенности $\Gamma_{1,2}(\xi)$

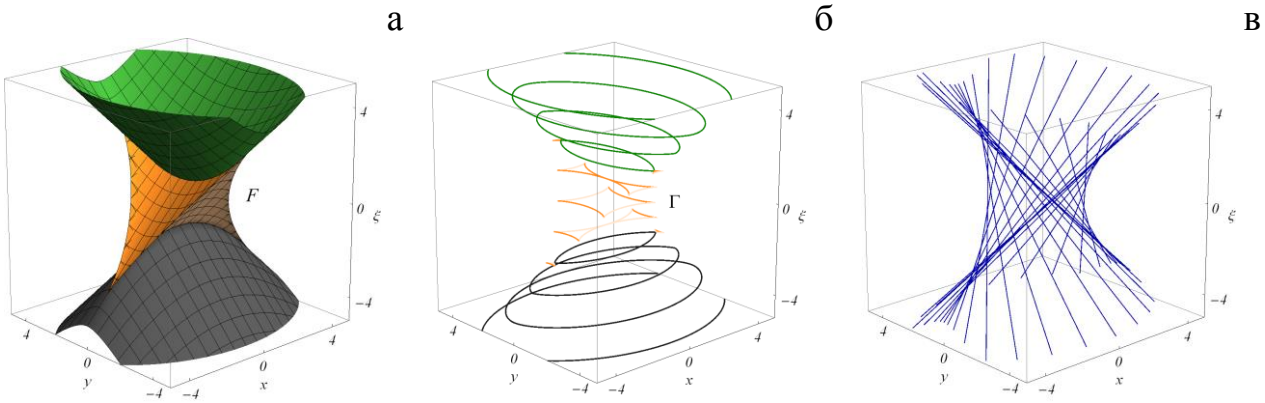


*Рис. 11*. Поверхность $F$, формируемая кривыми $\Gamma(\xi)$ в пространстве $xy\xi$:
а – общий вид поверхности $F$, б – ее сечения плоскостями $\xi = const$,
в – прямолинейные образующие поверхности $F$

**Трехмерное изображение множества кривых $\Gamma(\xi)$.** Кривые $\Gamma(\xi)$ можно интерпретировать как сечения плоскостями $\xi = const$ некоторой поверхности $F$ в пространстве $xy\xi$ (рис. 11а,б). При фиксированном значении параметра $\varphi$ соотношения, фигурирующие в (12), задают прямую в пространстве $xy\xi$. Это означает, что поверхность $F$ является линейчатой (рис. 11в).

*Примечание 2.* Поверхность, совпадающая с $F$ с точностью до масштабирующего преобразования, фигурирует в работе [2], где она разделяет множество значений параметров некой механической системы на области с разным характером устойчивости возможных в данной системе стационарных вращений.

## 3. Построение эволюционных уравнений

**Усреднение вдоль решений быстрой подсистемы.** Так как

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x} = \cos\varphi, \frac{\partial \Xi}{\partial y} = \sin\varphi,$$

построение эволюционных уравнений (4) сводится фактически к вычислению

$$\begin{aligned} \langle \sin\varphi \rangle &= \frac{1}{T(x,y,\xi)} \int_0^{T(x,y,\xi)} \sin\varphi(t,x,y,\xi)\,dt, \\ \langle \cos\varphi \rangle &= \frac{1}{T(x,y,\xi)} \int_0^{T(x,y,\xi)} \cos\varphi(t,x,y,\xi)\,dt. \end{aligned} \qquad (13)$$

Соотношение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi = \pm\sqrt{2\left[\xi - W(x,y,\varphi)\right]}$$

позволяет найти значение периода решения быстрой подсистемы, лежащего на уровне $\Xi = \xi$, и вычислить (после соответствующей замены переменной)

значения интегралов в правой части уравнений (13). Например, для «колебательных» решений

$$T(x,y,\xi)=2\int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\left[\xi-W(x,y,\varphi)\right]}},$$
$$\int_0^{T(x,y,\xi)} f\left(\varphi(t,x,y,\xi)\right)dt=2\int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\frac{f(\varphi)d\varphi}{\sqrt{2\left[\xi-W(x,y,\varphi)\right]}}. \qquad (14)$$

Здесь $\varphi_*$ и $\varphi^*$ обозначают наименьшее и наибольшее значение угла $\varphi$ в колебательном решении, вдоль которого ведется усреднение.

Для рассматриваемой системы интегралы (14) могут быть выражены через полные эллиптические интегралы I и III рода. Далее будет приведено только краткое описание этого процесса. В случае

$$-\pi\le\varphi_*<\varphi^*\le\pi \qquad (15)$$

после стандартной замены $\lambda=\mathrm{tg}\left(\varphi/2\right)$ получим

$$T(x,y,\xi)=4\int_{\lambda_*=tg(\varphi_*/2)}^{\lambda^*=tg(\varphi^*/2)}\frac{d\lambda}{\sqrt{2R_4(\lambda)}},$$
$$\int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{2\left[\xi-W(x,y,\varphi)\right]}}=4\int_{\lambda_*=tg(\varphi_*/2)}^{\lambda^*=tg(\varphi^*/2)}\frac{\lambda d\lambda}{(1+\lambda^2)\sqrt{2R_4(\lambda)}}, \qquad (16)$$
$$\int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2\left[\xi-W(x,y,\varphi)\right]}}=2\int_{\lambda_*=tg(\varphi_*/2)}^{\lambda^*=tg(\varphi^*/2)}\frac{(1-\lambda^2)d\lambda}{(1+\lambda^2)\sqrt{2R_4(\lambda)}}.$$

Функция $R_4(\lambda)$ в (16) является полиномом четвертой степени:

$$R_4(\lambda)=d_0\lambda^4+d_1\lambda^3+d_2\lambda^2+d_3\lambda+d_4.$$

Здесь

$$d_0=\xi-1+x,\ d_1=d_3=-2y,\ d_2=2\xi+6,\ d_4=\xi-1-x.$$

Несложные преобразования позволяют записать интегралы в правой части уравнений (16) следующим образом:

$$T(x,y,\xi)=\frac{4}{\sqrt{2|d_0|}}I_{0,0},\quad \int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{2\left[\xi-W(x,y,\varphi)\right]}}=\frac{4}{\sqrt{2|d_0|}}I_{1,1},$$
$$\int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2\left[\xi-W(x,y,\varphi)\right]}}=\frac{2}{\sqrt{2|d_0|}}\left(2I_{1,0}-I_{0,0}\right). \qquad (17)$$

Обозначение $I_{k,r}$ в (17) используется для интегралов специального вида:

$$I_{k,r}=\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda^*}\frac{\lambda^r d\lambda}{(\lambda^2+1)^k\sqrt{\pm(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)}}, \tag{18}$$

где $a_k$ – корни полинома $R_4(\lambda)$, а выбор знака определяется знаком коэффициента $d_0$. Интегралы (18) являются линейными комбинациями полных эллиптических интегралов I и III рода:

$$\begin{gathered}I_{0,0}=c_{0,0}K(k),\ I_{1,0}=c_{1,1}K(k)+c_{1,3}\Pi\left(h,k\right)+\bar{c}_{1,3}\Pi\left(\bar{h},k\right),\\ I_{1,1}=g_{1,1}K(k)+g_{1,3}\Pi\left(h,k\right)+\bar{g}_{1,3}\Pi\left(\bar{h},k\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Значения коэффициентов $c_{m,l}$, $g_{m,l}$, модулей $k$ и параметров $h$ эллиптических интегралов в (19) зависят от выбора интервала интегрирования и свойств корней полинома $R_4(\lambda)$. Все возможные ситуации разобраны в приложении.

*Примечание 3.* Выражения вида

$$c\Pi(h,k)+\bar{c}\Pi(\bar{h},k)\ (c,h\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{R},\ 0<k^2<1)$$

сводятся к линейной комбинации эллиптических интегралов I-го рода $K(k)$ и эллиптических интегралов III-го рода с вещественным значением параметра [7, 9]. Так как формулы для интегралов $I_{k,r}$ в этом случае становятся более громоздкими, мы сочли такое преобразование в (19) нецелесообразным.

*Примечание 4.* При усреднении вдоль колебательных решений быстрой подсистемы, не удовлетворяющих условию (15), после замены $\lambda=\mathrm{tg}\left(\varphi/2\right)$ интегрирование в (16) будет проводиться по двум полубесконечным интервалам. Например, если $\varphi_*<\pi$, $\varphi^*>\pi$ (и $\varphi^*-\varphi_*<2\pi$), то

$$T(x,y,\xi)=4\left(\int\limits_{-\infty}^{\lambda^*=tg(\varphi^*/2)}\frac{d\lambda}{\sqrt{2R_4(\lambda)}}+\int\limits_{\lambda_*=tg(\varphi_*/2)}^{+\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{2R_4(\lambda)}}\right).$$

Будем подразумевать, что в этом случае $I_{k,r}$ в (17) и (18) является суммой интегралов по двум полубесконечным интервалам.

После всех преобразований эволюционные уравнения (4) приобретают достаточно простой вид:

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon\frac{2I_{1,1}}{I_{0,0}},\ \frac{dy}{dt}=\varepsilon\left[1-\frac{2I_{1,0}}{I_{0,0}}\right]. \tag{20}$$

Отметим, что в области $Q_2(\xi)$ значения правых частей эволюционных уравнений определены неоднозначно: результат усреднения зависит от выбранного колебательного решения быстрой подсистемы. На фазовых портретах системы (4) в $Q_2(\xi)$ будут располагаться два множества фазовых траекторий, соответствующих двум возможным вариантам эволюции медленных переменных при реализации разных колебательных режимов в быстрой подсистеме.

Для приближенного описания ситуаций, когда проекция фазовой точки $\mathbf{z}(t)=(\varphi(t),\Phi(t),x(t),y(t))^T$ на плоскость $(x,y)$ пересекает кривую неопределенности $\Gamma_i(\xi)$, ограничимся формальным продолжением по непрерывности усредненных траекторий, лежащих по разные стороны от данной кривой. Более подробно такие ситуации обсуждаются в [4, 10, 11].

**Переменная «действие» быстрой подсистемы – интеграл эволюционных уравнений.** Адиабатический инвариант БМ-системы $J(x,y,\xi)$ является точным интегралом эволюционных уравнений (4). Выражение (6) для $J(x,y,\xi)$ несложно преобразовать в линейную комбинацию интегралов $I_{k,r}$:

$$J(x,y,\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\Phi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_*}^{\varphi^*}\sqrt{2\left[\xi-W(x,y,\varphi)\right]}d\varphi=\frac{2}{\pi}\int_{\lambda_*}^{\lambda^*}\frac{\sqrt{2R_4(\lambda)}d\lambda}{\left(1+\lambda^2\right)^2}=$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{|d_0|}}\left[d_0I_{0,0}+d_1I_{1,1}+(d_2-2d_0)I_{1,0}+(d_4+d_0-d_2)I_{2,0}\right]. \qquad (21)$$

## 4. Исследование поведения медленных переменных на основе эволюционных уравнений

**Фазовые портреты эволюционных уравнений. Стационарные точки.** Наиболее наглядное представление о качественном поведении медленных переменных дают фазовые портреты системы (4). Самым простым является случай $\xi<\xi_1$: все фазовые траектории замкнутые и охватывают запрещенную область $Q_0(\xi)$ (рис. 12а). Фазовый портрет на рис. 12б является типичным при $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$: к области $Q_0(\xi)$ примыкают компоненты области $Q_2(\xi)$, в которой фазовый портрет «двулистный». Если $\xi\in(\xi_2,\xi_3)$, то на фазовом портрете присутствуют только области $Q_0(\xi)$ и $Q_2(\xi)$ (рис. 12в). В этом случае различие фазовых портретов проявляется прежде всего в поведении фазовых кривых в окрестности кривой неопределенности $\Gamma_2(\xi)$ (более подробное обсуждение приведено в конце раздела).

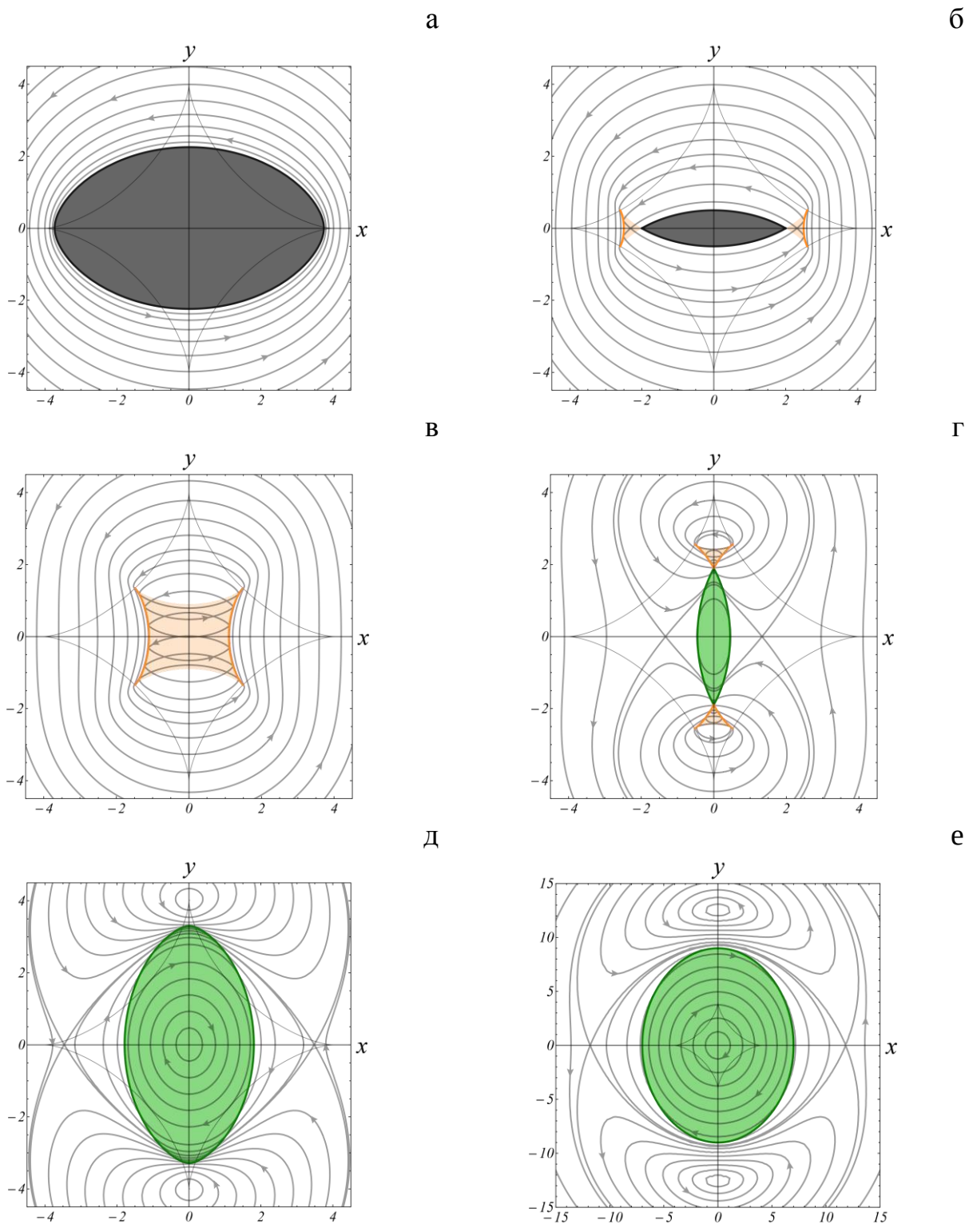


*Рис. 12*. Фазовые портреты эволюционных уравнений:
а – $\xi = -4$, б – $\xi = -1.5$, в – $\xi = -0.1$, г – $\xi = 1.45$, д – $\xi = 3.4$, е – $\xi = 8.0$

Фазовые портреты при $\xi > \xi_3$ характеризуются наличием пяти положений равновесия: начало координат плоскости $(x, y)$ будет положением равновесия типа «центр», еще два положения равновесия такого же типа лежат симметрично на оси $y$, а на оси $x$ располагаются два положения равновесия типа «седло» (рис. 12г,д,е). Описание различий фазовых портретов при $\xi \in (\xi_3, \xi_4)$ дано в конце раздела. Фазовые портреты, изображенные на рис. 12д и рис. 12е, различаются положением сепаратрис «седел» и являются типичными при $\xi \in (\xi_4, \xi_8)$ и $\xi > \xi_8$ соответственно ($\xi_8 \approx 5.57954$).

Ординаты положений равновесий типа «центр», располагающихся сверху и снизу от начала координат, являются корнями уравнения в эллиптических функциях

$$K(m) = 2\Pi(n, m), \tag{22}$$

где

$$m = \frac{U_+}{U_-},\ n = \frac{U_+}{\xi + 1 - |y|},\ U_\pm = \xi - 3 \pm \sqrt{y^2 + 8(1-\xi)}\,.$$

Для отыскания абсцисс положений равновесия типа «седло» на оси $x$ тоже нужно решать уравнение (22), но в этом случае следует взять

$$m = \frac{Q_{+-}}{Q_{--}}\frac{Q_{++}}{Q_{-+}},\ n = \frac{Q_{+-}}{Q_{--}},\ Q_{\pm\pm} = \sqrt{x^2 + 8(1+\xi)} \pm 4 \pm |x|\,.$$

Графики значений координат положений равновесия как функции $\xi$ представлены на рис. 13. Отметим, что положения равновесия типа «центр» при $\xi < \xi_5 = 2$ лежат в области $Q_2$. При $\xi = \xi_5$ они пересекают критическую кривую и переходят в область $Q_1$ (рис. 14).

а б

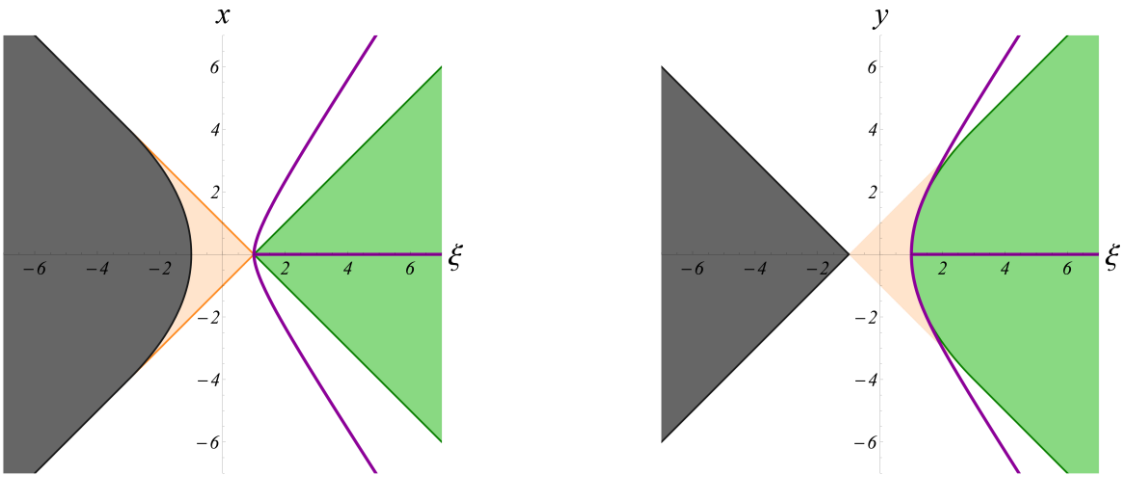


*Рис. 13.* Координаты стационарных решений эволюционных уравнений, лежащих на оси $x$ (а) и на оси $y$ (б). Значения координат как функции $\xi$ изображены фиолетовыми линиями

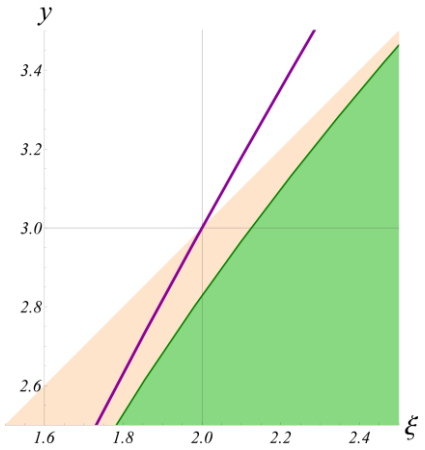


*Рис. 14.* Перемещение положений равновесия типа «центр» из $Q_2(\xi)$ в $Q_1(\xi)$

**Точки кривых неопределенности, являющиеся предельными для семейств фазовых траекторий.** Для полноты описания возможной топологии фазовых портретов системы (4) нам еще необходимо рассмотреть «предельные» точки – точки кривых неопределенности, через которые проходят «особые» траектории, разделяющие семейства траекторий с разным качественным поведением, а также точки, входящие в какие-то семейства в качестве предела при сближении начала и конца траектории на $\Gamma_i(\xi)$.

Предельные точки такого типа присутствуют, например, на фазовом портрете, изображенном на рис. 15. Траектории в $Q_1$, начинающиеся и заканчивающиеся на кривой неопределенности $\Gamma_2$, разбиваются на два подмножества: пересекающие и не пересекающие ось $x$. Точки кривой $\Gamma_2$ естественным образом также разбиваются на два подмножества: точки, принадлежащие пересекающим ось $x$ траекториям, и точки, принадлежащие не пересекающим ось $x$ траекториям. Точки, которые являются граничными для указанных подмножеств, обозначим $R_1,...,R_4$.

Подмножество траекторий, не пересекающих ось $x$, в качестве предельного случая включает траектории, упирающиеся в точки $I_1,...,I_4 \in \Gamma_2$. Траектории, приходящие в точку $I_i$ из области $Q_2$, неизбежно отражаются от границы, не выходя в область $Q_1$.

Другие типы предельных точек охарактеризуем с помощью фазового портрета, приведенного на рис. 16. Предельные точки $K_1,...,K_4 \in \Gamma_2$ связаны траекториями с точками возврата $Y_1,...,Y_4$ критической кривой (эти траектории отделяют семейство траекторий, пересекающих ось $y$ после выхода в $Q_1(\xi)$, от семейства траекторий, возвращающихся к $\Gamma_2$ без пересечения оси $y$). Предельные точки $M_1,...,M_4$ отделяют на кривой $\Gamma_2$ участки, на которых пара траекторий, примыкающих к критической кривой со стороны $Q_2(\xi)$, имеет одинаковые направления по отношению к границе, от участков на которых пара траекторий имеет противоположные направления (см. также рис. 19).

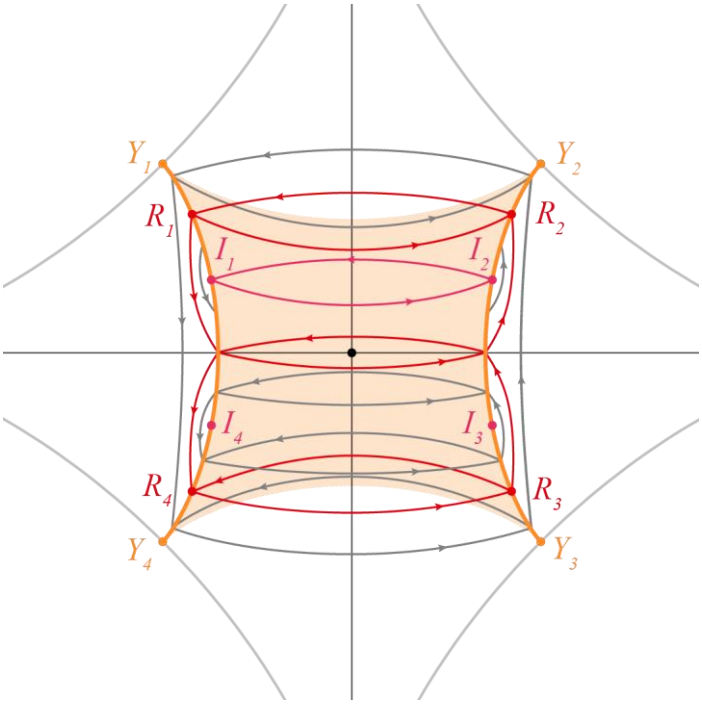


*Рис. 15.* Предельные точки $R_i$ и $I_i$ $(\xi \approx 0)$

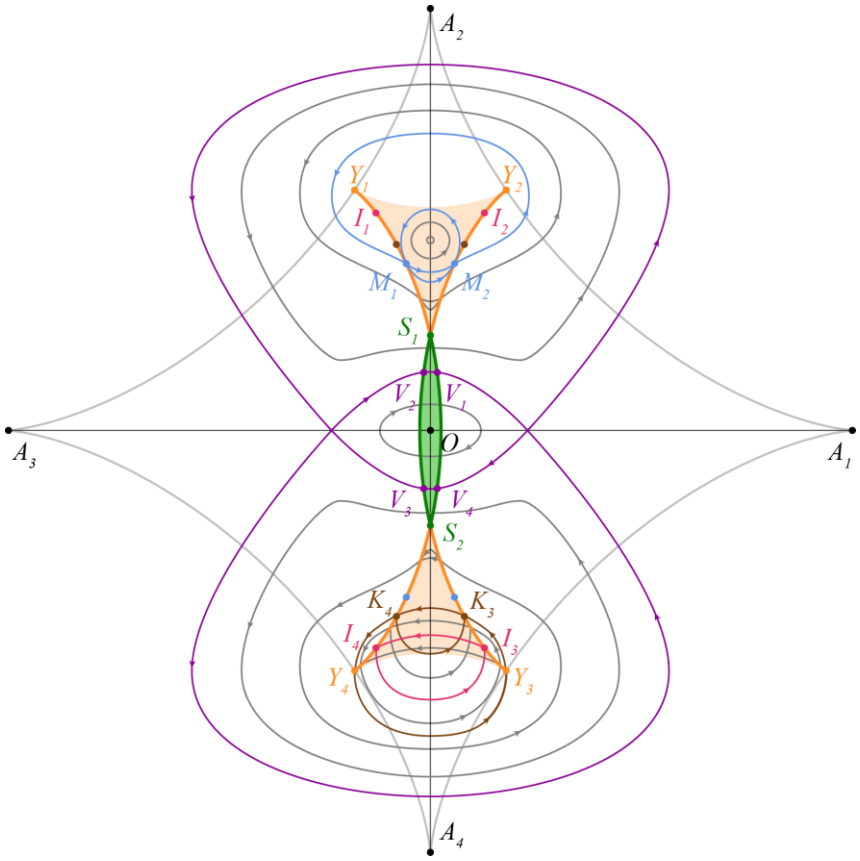


*Рис. 16.* Предельные точки $K_i$, $M_i$ и $V_i$ $(\xi \approx 1.5)$

Еще один тип предельных точек образуют точки $V_1,...,V_4$, в которых кривая неопределенности пересекается сепаратрисами.

Диаграмма на рис. 17 показывает, при каких значениях $\xi$ на фазовом портрете рассматриваемой системы появляются предельные точки и где они располагаются на критической кривой. Точки $R_i$ и $I_i$ появляются при $\xi_6 \approx -0.22073$. На уровне $\xi_7 \approx 0.27704$ точки $R_i$ сливаются с точками возврата $Y_i$; одновременно с этим появляются точки $K_i$. Рождение точек $S_i$, $M_i$ и $V_i$ совпадает с появлением на фазовом портрете области $Q_3$ ($\xi = \xi_3$). Точки $I_i$, $S_i$, $M_i$, $Y_i$ и $K_i$ исчезают при $\xi = \xi_4$, сливаясь в вершинах астроиды. При $\xi = \xi_8$ сливаются друг с другом и исчезают точки $V_i$.

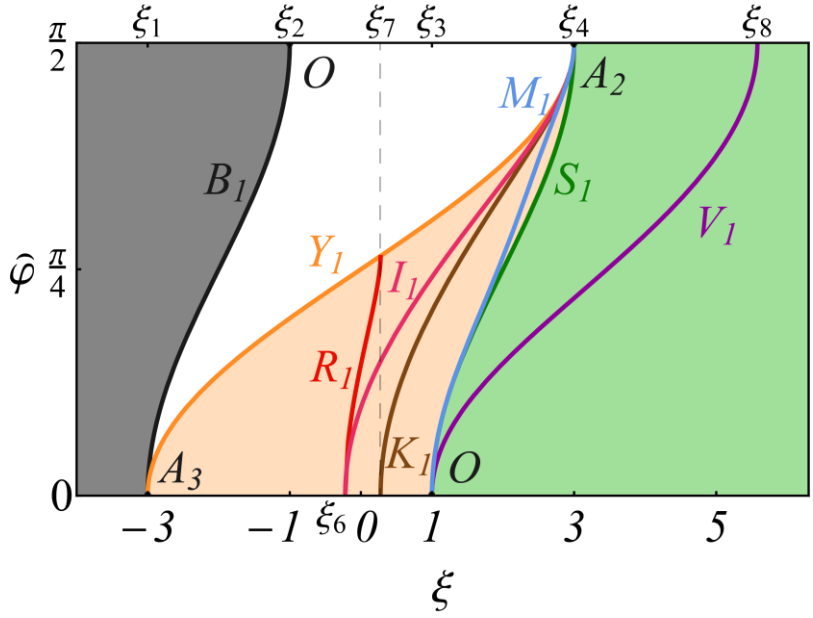


*Рис. 17.* Диаграмма, иллюстрирующая положение предельных точек на критической кривой при разных $\xi$

## 5. Квазислучайные эффекты

**Вероятностное описание смены режима движения на кривой неопределенности второго рода.** В каждой точке $\Gamma_2(\xi)$ стыкуются три траектории – две из области $Q_2(\xi)$ и одна из $Q_1(\xi)$. В том случае, когда две из этих трех траекторий являются «уходящими», смену режима движения можно рассматривать как вероятностное событие: в исходной системе (1) начальные условия $\mathbf{z}(0) = (\varphi(0), \Phi(0), x(0), y(0))^T$, отвечающие разным режимам движения на выходе из окрестности $\Gamma_2(\xi)$, сильно «перемешаны», поэтому даже небольшая неопределенность в задании $\mathbf{z}(0)$ не позволит однозначно предсказать качественный характер движения на длительных временных интервалах. В качестве примера на рис. 18 изображены проекции на плоскость

медленных переменных $(x, y)$ двух траекторий системы (1) с близкими начальными данными: обе подходят к кривой неопределённости $\Gamma_2(\xi)$ вдоль синей линии в точку, располагающуюся чуть выше $I_1$, после чего одна траектория выходит из $Q_2(\xi)$ в $Q_1(\xi)$ вдоль зелёной линии, а вторая траектория остается в $Q_2(\xi)$, покидая границу вдоль красной линии.

В детерминистских системах с сильным «запутыванием» траекторий вероятность какого-то режима определяется как относительная мера множества начальных условий, соответствующих этому режиму, в некоторой достаточно малой области фазового пространства [1, 5]. Для отыскания вероятностей перехода при достижении кривой $\Gamma_2(\xi)$ в точке $(x_*, y_*)$ необходимо вычислить значения вспомогательных величин, имеющих смысл производных площади областей, ограниченных сепаратрисами $(\varphi_1^s(t, x_*, y_*, \xi), \Phi_1^s(t, x_*, y_*, \xi))$ и $(\varphi_2^s(t, x_*, y_*, \xi), \Phi_2^s(t, x_*, y_*, \xi))$ на фазовых портретах быстрой подсистемы [5, 6]:

$$\Theta_{1,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial W_{\max}^*}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W_{\max}^*}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{\varphi_{1,2}^s(t, x_*, y_*, \xi)} dt \qquad (23)$$

В (23) удобно перейти к интегрированию по $\varphi$:

$$\Theta_1 = 2 \int_{\varphi_{\min}^s}^{\bar{\varphi}} \frac{\sin(\varphi - \bar{\varphi})}{\sqrt{2(\xi - W(x_*, y_*, \varphi)}} d\varphi, \quad \Theta_2 = 2 \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi_{\max}^s} \frac{\sin(\varphi - \bar{\varphi})}{\sqrt{2(\xi - W(x_*, y_*, \varphi)}} d\varphi, \quad (24)$$

где $\bar{\varphi}$ – значение $\varphi$, соответствующее седловой точке на фазовом портрете быстрой подсистемы, $\varphi_{\min}^s$ и $\varphi_{\max}^s$ – минимальное и максимальное значение $\varphi$ в асимптотических решениях, стремящихся при $t \to +\infty$ к $\bar{\varphi}$ слева и справа соответственно. Выполнив в (24) замену $\lambda = ctg[(\varphi - \bar{\varphi})/2]$, получим

$$\Theta_{1,2} = \frac{4}{\sqrt{A}} \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \frac{\lambda \, d\lambda}{(1 + \lambda^2)\sqrt{(\lambda - a)(\lambda - b)}}. \qquad (25)$$

Здесь

$$a = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \; b = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$
$$A = \xi + 3\cos(2\bar{\varphi}), \; B = 2\sin(2\bar{\varphi}), \; C = \xi - \cos(2\bar{\varphi}).$$

Интегрирование в (25) производится на интервале $(-\infty, a)$ при вычислении $\Theta_1$ и на интервале $(b, +\infty)$ при вычислении $\Theta_2$. Стоит отметить, что во всех точках кривой $\Gamma_2$ выполняются неравенства $A > 0$ и $B^2 > AC$.

Интегралы (25) берутся методом вычетов [3]:

$$\Theta_1 = \frac{4}{\sqrt{A}}\,\mathrm{Re}\left(\frac{L - i\pi}{\alpha\beta}\right),\ \Theta_2 = \frac{4}{\sqrt{A}}\,\mathrm{Re}\left(\frac{L}{\alpha\beta}\right),$$

где

$$L = \ln\left(\frac{b-a}{(\alpha-\beta)^2}\right),\ \alpha = \sqrt{a+i}\ ,\ \beta = \sqrt{b+i}\ .$$

Ветви комплексных функций выбраны так, что $\mathrm{Im}(L), \mathrm{Arg}(\alpha), \mathrm{Arg}(\beta) \in (0;\pi)$.

Пусть проекция фазовой точки системы на плоскость медленных переменных находится на кривой неопределенности $\Gamma_2(\xi)$. Вероятность того, что в дальнейшем эволюция медленных переменных будет происходить в области $Q_1(\xi)$, обозначим $P_0$. Вероятность эволюции в области $Q_2(\xi)$ с заданным колебательным режимом изменения быстрых переменных обозначим $P_i$ ($i$ – идентификатор одного из двух возможных режимов). Формулы для расчета вероятностей имеют вид [6]

$$P_1 = \max(\Theta_1, 0)/\Theta_\Sigma,\ P_2 = \max(\Theta_2, 0)/\Theta_\Sigma,\ P_0 = 1 - P_1 - P_2, \qquad (26)$$

где

$$\Theta_\Sigma = \max(\Theta_1, 0) + \max(\Theta_2, 0) + \max(-\Theta_1 - \Theta_2, 0).$$

В качестве примера на рис. 18 и рис. 19 представлены рассчитанные по формулам (26) вероятности перехода в разных точках кривой неопределенности второго рода $\Gamma_2$ при $\xi = 0$ и при $\xi = 2.4$. Для упрощения интерпретации справа от графиков показано поведение фазовых траекторий и положение предельных точек при соответствующем значении $\xi$.

**Адиабатический хаос.** Адиабатический хаос возникает из-за нарушений условий применимости адиабатического приближения в окрестности кривой неопределенности. В результате проекция фазовой точки системы (1) на плоскость медленных переменных покидает эту окрестность вдоль траектории, несколько отличающейся от той, которую мы получили бы формальным продолжением входной траектории (рис. 20). Смещение носит характер квазислучайного скачка порядка $\varepsilon\left|\ln\varepsilon\right|$ [4, 8].

Вследствие многократных последовательных скачков, любая траектория, пересекающая кривую неопределённости, на больших временах заполняет собой некоторую область, называемую областью адиабатического хаоса (рис. 21). Геометрически эта область представляет собой совокупность всех траекторий, пересекающих кривую неопределённости.

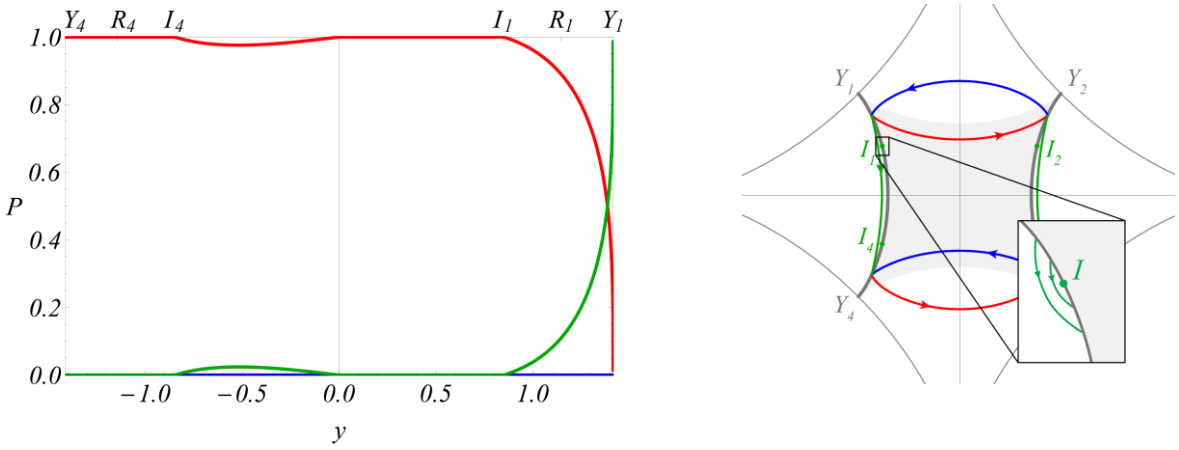


*Рис. 18.* Графики вероятностей различных вариантов эволюции медленных переменных на участке $Y_4Y_1$ кривой неопределенности $\Gamma_2$ при $\xi = 0$. Цвет графиков совпадает с цветом фазовых траекторий, соответствующих данному варианту эволюции на фазовом портрете справа. Графики вероятностей на участке $Y_2Y_3$ можно получить, изменив знак на оси $y$ и поменяв местами синюю и красную кривые

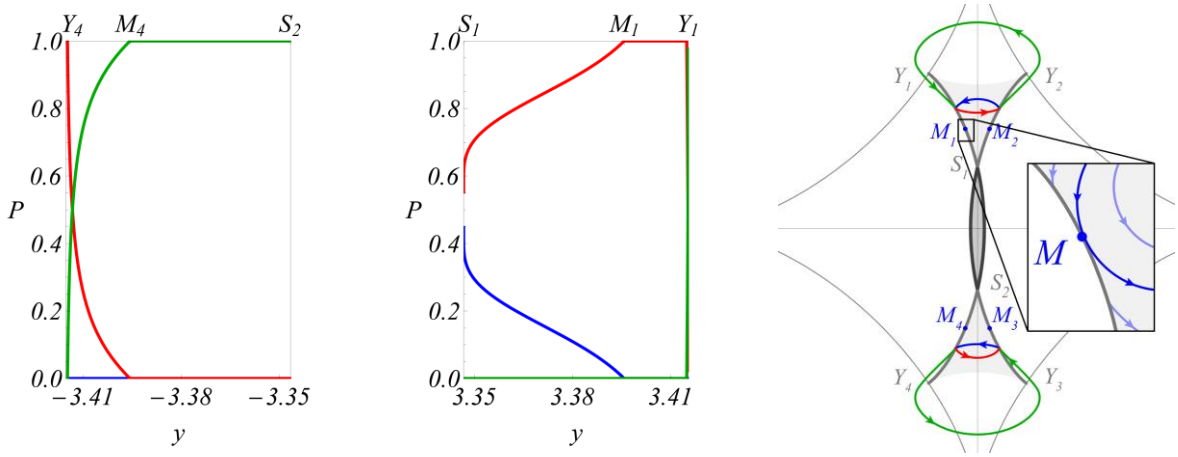


*Рис. 19.* Графики вероятностей различных вариантов эволюции медленных переменных на участках $Y_4S_2$ и $S_1Y_1$ кривой неопределенности $\Gamma_2$ при $\xi = 2.4$

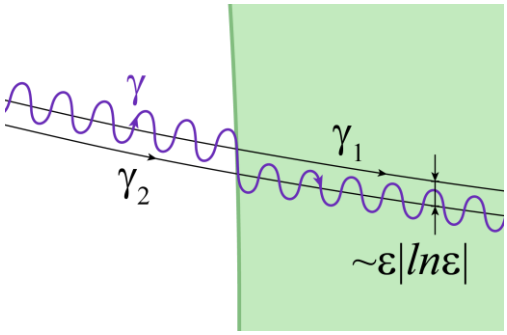


*Рис. 20.* Перескок проекции фазовой точки исходной системы (1) с одной траектории усредненной системы (4) на другую. До кривой неопределённости проекция перемещается вдоль решения $\gamma_1$, после – вдоль решения $\gamma_2$. Расстояние между траекториями $\gamma_1$ и $\gamma_2$ имеет порядок $\varepsilon\left|\ln\varepsilon\right|$

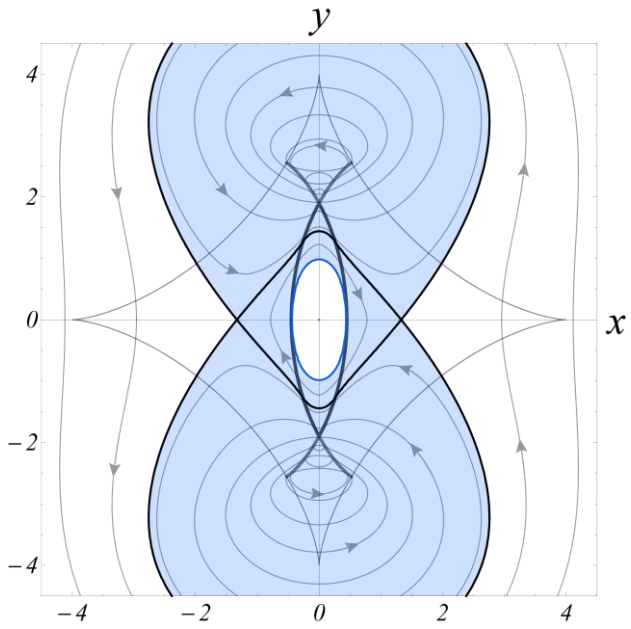


*Рис. 21*. Область адиабатического хаоса ($\xi=1.45$)

Стоит отметить, что при $\xi\in(\xi_3,\xi_8)$ кривую неопределенности пересекают сепаратрисы положений равновесия типа «седло». Система, двигаясь вдоль близкой к сепаратрисе траектории, при пересечении кривой неопределённости может перескочить через сепаратрису и начать двигаться вдоль траектории с совершенно другими свойствами. Например, в изображенном на рис. 21 случае движение проекции фазовой точки $\mathbf{z}(t)$ вокруг начала координат может превратиться в движение, охватывающее положение равновесия системы (4) на оси $y$ в верхней или нижней полуплоскости.

## 6. Заключение

В работе проведён подробный анализ модельной гамильтоновой системы, описывающей некоторые свойства динамики небесных тел при РСД первого порядка. Дана полная классификация фазовых траекторий в пространстве медленных переменных. Найдены критические значения гамильтониана, при которых происходят качественные перестройки фазовых портретов. Описаны стохастические эффекты, проявляющиеся в системе, и найдены соответствующие им вероятности.

В дальнейшем планируется использовать полученные результаты для анализа вековой эволюции при РСД первого порядка в рамках ограниченной круговой задачи трех.

## Приложение. Вычисление интегралов, возникающих при усреднении по периоду быстрой подсистемы

Правые части эволюционных уравнений (4) и формулу для адиабатического инварианта (21) можно записать в виде комбинации интегралов

$$I_{k,r}=\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda^*}\frac{\lambda^r d\lambda}{(\lambda^2+1)^k\sqrt{\pm(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)}},$$

где $k=0,1,2;\ r=0,1$, а пределы интегрирования $\lambda_*$ и $\lambda^*$ могут принимать значения $\pm\infty$ соответственно. Эти интегралы могут быть выражены через эллиптические интегралы I-го, II-го и III-го рода:

$$\begin{aligned}
&I_{0,0}=c_{0,0}K(k),\ \ I_{1,0}=c_{1,1}K(k)+c_{1,3}\Pi\left(h,k\right)+\bar{c}_{1,3}\Pi\left(\bar{h},k\right),\\
&I_{1,1}=g_{1,1}K(k)+g_{1,3}\Pi\left(h,k\right)+\bar{g}_{1,3}\Pi\left(\bar{h},k\right),\\
&I_{2,0}=\frac{1}{2}I_{1,0}+c_{2,1}K(k)+c_{2,2}E(k)+c_{2,3}\Pi\left(h,k\right)+\bar{c}_{2,3}\Pi\left(\bar{h},k\right),\\
&I_{2,1}=g_{2,1}K(k)+g_{2,2}E(k)+g_{2,3}\Pi\left(h,k\right)+\bar{g}_{2,3}\Pi\left(\bar{h},k\right).
\end{aligned}\qquad (\text{П1})$$

Далее приведены формулы для коэффициентов $c_{m,l}$, $g_{m,l}$, модулей $k$ и параметров $h$ эллиптических интегралов в (П1) для разных возможных ситуаций.

**Случай $a_j\in\mathbb{R}^1$ $(j=\overline{1,4})$.** Будем предполагать, что $a_j$ пронумерованы по возрастанию:

$$a_1<a_2<a_3<a_4.$$

Необходимо рассмотреть четыре ситуации:

A. интегрирование по интервалу $(a_1,a_2)$;

B. интегрирование по интервалу $(a_2,a_3)$;

C. интегрирование по интервалу $(a_3,a_4)$;

D. интегрирование по интервалам $(-\infty,a_1)$ и $(a_4,+\infty)$.

*Ситуация A*. Найдем значения интегралов $I_{k,r}$, выбрав в качестве пределов интегрирования $\lambda_*=a_1$ и $\lambda^*=a_2$. При записи выражений для коэффициентов в (П1) используются следующие обозначения:

$$A_0=\frac{2}{\sqrt{(a_4-a_2)(a_3-a_1)}},\ C_0=\frac{1}{a_2-i},\alpha^2=\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1},\ \alpha_1^2=\frac{(a_2-a_1)(i-a_3)}{(a_3-a_1)(i-a_2)}.$$

Значение модуля эллиптических интегралов в (П1)

$$k=\sqrt{\frac{(a_4-a_3)(a_2-a_1)}{(a_4-a_2)(a_3-a_1)}},$$

параметр $h=\alpha_1^2$.

Для отыскания коэффициентов в (П1) мы рассматривали такие линейные комбинации $I_{k,r}$, которые сводятся к интегралу (253.39) из справочного руководства [7]:

$$\begin{aligned} I_{1,1}+iI_{1,0}&=\int_{a_1}^{a_2}\frac{d\lambda}{(\lambda-i)\sqrt{-(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)}},\\ I_{2,0}-iI_{2,1}-\frac{1}{2}I_{1,0}&=-\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{d\lambda}{(\lambda-i)^2\sqrt{-(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)}}. \end{aligned} \qquad (П2)$$

С помощью несложных вычислений можно найти:

$$\begin{aligned} &g_{1,1}=\mathrm{Re}C_1,\ c_{1,1}=\mathrm{Im}C_1,\ C_1=\frac{A_0C_0\alpha^2}{\alpha_1^2},\\ &g_{1,3}=\frac{A_0C_0}{2}\left(1-\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}\right),\ c_{1,3}=-ig_{1,3},\\ &c_{2,1}=-\mathrm{Re}C_2,\ g_{2,1}=\mathrm{Im}C_2,\ C_2=\frac{A_0C_0^2}{2\alpha_1^4}\left[\alpha^4+\frac{(\alpha_1^2-\alpha^2)^2}{2(\alpha_1^2-1)}\right],\\ &c_{2,2}=-\mathrm{Re}C_3,\ g_{2,2}=\mathrm{Im}C_3,\ C_3=\frac{A_0C_0^2(\alpha_1^2-\alpha^2)^2}{4\alpha_1^2(\alpha_1^2-1)(k^2-\alpha_1^2)},\\ &c_{2,3}=-\frac{A_0C_0^2(\alpha_1^2-\alpha^2)}{4\alpha_1^4}\left[2\alpha^2+\frac{(2\alpha_1^2k^2+2\alpha_1^2-\alpha_1^4-3k^2)(\alpha_1^2-\alpha^2)}{2(\alpha_1^2-1)(k^2-\alpha_1^2)}\right],\ g_{2,3}=ic_{2,3}. \end{aligned} \qquad (П3)$$

Воспользовавшись формулой (253.00) из [7], получим

$$c_{0,0}=A_0. \qquad (П4)$$

*Ситуация B*. Если интегрирование проводится по интервалу $(a_2,a_3)$, то в формулах для коэффициентов (П3) и (П4) следует брать другие значения для величин $\alpha^2$, $\alpha_1^2$:

$$\alpha^2=\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1},\ \alpha_1^2=\frac{(a_3-a_2)(i-a_1)}{(a_3-a_1)(i-a_2)}.$$

По другой формуле вычисляется и значение модуля эллиптических интегралов:

$$k = \sqrt{\frac{(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)}{(a_4 - a_2)(a_3 - a_1)}}.$$

*Ситуация C.* Для интервала интегрирования $(a_3, a_4)$ в формулах (П3) и (П4) следует полагать

$$C_0 = \frac{1}{a_3 - i},\ \alpha^2 = \frac{a_4 - a_3}{a_4 - a_2},\ \alpha_1^2 = \frac{(a_4 - a_3)(i - a_2)}{(a_4 - a_2)(i - a_3)}.$$

Модуль эллиптических интегралов вычисляется по той же формуле, что и при интегрировании на интервале $(a_1, a_2)$.

*Примечание 5.* Из равенства $k$ и $c_{0,0}$ для ситуаций A и C следует, что при существовании двух ям, периоды колебаний в них на одном уровне энергии оказываются одинаковыми. Это справедливо и в том случае, если ямам соответствует пара ситуаций B-D, так как замена $\lambda = tg[(\varphi - \tilde{\varphi})/2]$ позволяет избавиться от необходимости использовать неограниченные интервалы интегрирования. Одинаковый результат в обеих ямах дает и усреднение косинусов в (17). Интегралы синусов при любых $x$ и $y$ отличаются на $\pi$, а значения адиабатического инварианта – на $y/\sqrt{2}$.

*Ситуация D.* При записи результата интегрирования по двум полубесконечным интервалам в виде (П1) в выражениях (П3) следует взять

$$C_0 = \frac{1}{a_4 - i},\ \alpha^2 = \frac{a_4 - a_1}{a_3 - a_1},\ \alpha_1^2 = \frac{(a_4 - a_1)(i - a_3)}{(a_3 - a_1)(i - a_4)}.$$

Модуль эллиптических интегралов вычисляется по той же формуле, что и при интегрировании на интервале $(a_2, a_3)$.

**Случай** $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^1$ $(a_1 < a_2)$, $a_3, a_4 \in \mathbb{C}^1$ $(a_3 = \bar{a}_4)$**.** В этом случае необходимо различать две ситуации:

A. интегрирование по интервалу $(a_1, a_2)$;

B. интегрирование по интервалам $(-\infty, a_1)$ и $(a_2, +\infty)$.

*Ситуация A.* При записи выражений для коэффициентов $c_{m,l}$, $g_{m,l}$ будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{(a_1 A_2 - a_2 A_1) - (A_2 - A_1)i}{(a_1 A_2 + a_2 A_1) - (A_2 + A_1)i},\ \alpha_1 = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1},$$

$$C_0 = \frac{A_1 + A_2}{(A_2 a_1 - A_1 a_2) - (A_2 - A_1)i}.$$

Здесь

$$a_0 = \mathrm{Re}\, a_3,\ b_0 = \mathrm{Im}\, a_3,$$
$$A_1 = \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + b_0^2},\ A_2 = \sqrt{(a_2 - a_0)^2 + b_0^2},\ A_0 = 1/\sqrt{A_1 A_2}.$$

Воспользовавшись соотношениями (П2) и формулами (259.04), (341.01) – (341.04)[1] из [7], найдем

$$\begin{aligned}
&c_{0,0} = 2A_0,\ g_{1,1} = \mathrm{Re}\, C_1,\ c_{1,1} = \mathrm{Im}\, C_1,\ C_1 = 2A_0 C_0 \alpha_1,\\
&c_{1,3} = -\frac{i(\alpha - \alpha_1)}{(1-\alpha^2)} A_0 C_0,\ g_{1,3} = i c_{1,3},\\
&c_{2,1} = -\mathrm{Re}\, C_2,\ g_{2,1} = \mathrm{Im}\, C_2,\ C_2 = A_0 C_0^2 \left[ \alpha_1^2 + \frac{(\alpha - \alpha_1)^2}{\alpha^2 - 1} \right],\\
&c_{2,2} = -\mathrm{Re}\, C_3,\ g_{2,2} = \mathrm{Im}\, C_3,\ C_3 = \frac{-A_0 C_0^2 \alpha^2 (\alpha - \alpha_1)^2}{(\alpha^2 - 1)(k^2 + \alpha^2 k'^2)},\\
&c_{2,3} = \frac{A_0 C_0^2}{2} \frac{(\alpha - \alpha_1)}{(\alpha^2 - 1)} \left\{ 2\alpha_1 + \frac{(\alpha - \alpha_1)\left[ \alpha^2 (2k - 1) - 2k^2 \right]}{(\alpha^2 - 1)(k^2 + \alpha^2 k'^2)} \right\},\ g_{2,3} = i c_{2,3}.
\end{aligned} \qquad (П5)$$

Модуль и параметр эллиптических интегралов вычисляются по формулам

$$k = \sqrt{\frac{(a_2 - a_1)^2 - (A_2 - A_1)^2}{4 A_1 A_2}},\ h = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}.$$

*Ситуация B.* При записи результата интегрирования по двум полубесконечным интервалам выражения (П5) для коэффициентов $c_{m,l}$, $g_{m,l}$ сохраняют свой вид, для вычисления вспомогательных величин следует использовать другие формулы:

$$\alpha = \frac{(a_2 A_1 + a_1 A_2) - (A_2 + A_1) i}{(a_2 A_1 - a_1 A_2) + (A_2 - A_1) i},\ \alpha_1 = \frac{A_2 + A_1}{A_1 - A_2},$$
$$C_0 = \frac{A_1 - A_2}{(A_2 a_1 + A_1 a_2) - (A_2 + A_1) i}.$$

Другое значение имеет и модуль эллиптических интегралов:

$$k = \sqrt{\frac{(A_2 + A_1)^2 - (a_2 - a_1)^2}{4 A_1 A_2}}.$$

---

[1] Следует отметить, что в [7] в формуле (259.04) допущена опечатка – отсутствует множитель $g$ (в обозначениях авторов).

**Случай** $a_j \in \mathbb{C}^1$ $(j=\overline{1,4})$**.** В этом случае произведение мономов под радикалом в (19) удобно преобразовать в произведение двух полиномов второй степени:

$$I_{k,r}=\int_{\lambda_*}^{\lambda^*}\frac{\lambda^r d\lambda}{(\lambda^2+1)^k\sqrt{\left[(\lambda-a_1)^2+b_1^2\right]\left[(\lambda-a_2)^2+b_2^2\right]}}.$$

Примем для определенности, что $a_1<a_2$, $b_1>0$, $b_2>0$ ($b_1<b_2$, если $a_1=a_2$). При записи выражений для $c_{m,l}$, $g_{m,l}$ используем следующие вспомогательные обозначения:

$$A_1=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2},\ A_2=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2+b_1)^2},\ A_0=2/(A_1+A_2),$$

$$g_1=\sqrt{\frac{4b_1^2-(A_2-A_1)^2}{(A_2+A_1)^2-4b_1^2}},\ \alpha=\frac{b_1+g_1(a_1-i)}{a_1-b_1g_1-i},\ g_1=\sqrt{\frac{4b_1^2-(A_2-A_1)^2}{(A_2+A_1)^2-4b_1^2}},\ \alpha=\frac{b_1+g_1(a_1-i)}{a_1-b_1g_1-i}.$$

Действуя так же, как и в предыдущих случаях, найдем:

$$\begin{aligned}
&c_{0,0}=2A_0,\ c_{1,1}=\mathrm{Im}C_1,\ g_{1,1}=\mathrm{Re}C_1,\ C_1=\frac{2\alpha(1+g_1\alpha)}{1+\alpha^2}A_0C_0,\\
&g_{1,3}=\frac{\alpha^2(\alpha-g_1)A_0C_0}{1+\alpha^2},\ c_{1,3}=-ig_{1,3},\\
&c_{2,1}=-\mathrm{Re}C_2,\ g_{2,1}=\mathrm{Im}C_2,\\
&C_2=A_0C_0^2\left[g_1^2+\frac{2g_1(\alpha-g_1)}{1+\alpha^2}+\frac{(\alpha-g_1)^2}{(1+\alpha^2)(\alpha^2+k'^2)}\left(\frac{2k'^2+2\alpha^2-\alpha^2k^2}{1+\alpha^2}-k'^2\right)\right],\\
&c_{2,2}=\mathrm{Re}C_3,\ g_{2,2}=-\mathrm{Im}C_3,\ C_3=\frac{A_0C_0^2(\alpha-g_1)^2\alpha^2}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+k'^2)},\\
&c_{2,3}=-\frac{A_0C_0^2}{2}\frac{(\alpha-g_1)\alpha^2}{(\alpha^2+1)}\left[2g_1+\frac{(\alpha-g_1)(2k'^2+2\alpha^2-\alpha^2k^2)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+k'^2)}\right],g_{2,3}=ic_{2,3}.
\end{aligned}\qquad (П6)$$

Значения модуля и параметра эллиптических интегралов:

$$k=\frac{2\sqrt{A_1A_2}}{A_1+A_2},\ h=\alpha^2+1.$$

# Литература


1. Арнольд, В.И.: Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. УМН, 18, 92-192 (1963)
2. Батхин, А.Б.: Устойчивость одной многопараметрической системы Гамильтона. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. **69** (2011)
3. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В.: Методы теории функций комплексной переменной. М.: Наука. 736 с. (1973)
4. Нейштадт, А.И.: Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису и происхождение люка Кирквуда 3:1. ДАН, **295**, 47- (1987)
5. Нейштадт, А.И.: Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису в системах с двумя степенями свободы. ПММ, 51, 750-757 (1987)
6. Artemyev, A.V., Neishtadt, A.I., Zelenyi, L.M.: Ion motion in the current sheet with sheared magnetic field – Part 1: Quasi-adiabatic theory. Nonlin. Processes Geophys., **20**, 163-178 (2013)
7. Byrd, P.F., Friedman, M.D.: Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag (1954)
8. Cary, J.R., Escande, D.F., Tennyson, J.L.: Adiabatic-invariant change due to separatrix crossing. Phys. Rev. A, 34, 4256-4275 (1986)
9. Lang, H.A., Stevens, D.F.: On the evaluation of certain complex elliptic integrals. Mathematics of Computation, **4**, 195–199 (1960)
10. Neishtadt, A.I., Sidorenko, V.V.: Wisdom system: dynamics in the adiabatic approximation. Celest. Mech. Dyn. Astron., **90**, 307-330 (2004).
11. Sidorenko, V.V., Neishtadt, A.I., Artemyev, A.V., Zelenyi, L.M.: Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1:1 mean motion resonance. Perturbative treatment. Celest. Mech. Dyn. Astron., **120**, 131-162 (2014).
12. Wisdom, J.: A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability. Icarus, **63**, 272-286 (1985)