ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф.

Нестационарная модель сил воздействия воды на прямоугольный плот

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф. Нестационарная модель сил воздействия воды на прямоугольный плот // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 53. 40 с. doi:10.20948/prepr-2016-53
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-53

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев

Нестационарная модель сил воздействия воды на прямоугольный плот

Москва – 2016

УДК 531.38

Голубев Ю.Ф. **Нестационарная модель сил воздействия воды на прямоугольный плот**

Предлагается модель сил сопротивления, действующих со стороны спокойной воды на плот, находящийся в произвольном нестационарном движении. Получены конечные расчетные формулы для суммарных сил сопротивления и их моментов, учитывающие действие архимедовых сил, а также сил вязкого трения, волнового сопротивления и сопротивления формы. Эта модель служит развитием известной модели сопротивления воды для установившегося движения на случай произвольного нестационарного движения плота как твердого тела на спокойной воде.

Ключевые слова: плот, архимедова сила, сопротивление воды, вязкое трение

Yury Filippovich Golubev. **Non-Stationary Model of Forces for Water Influence on a Rectangular Raft**

The model of forces which are acting from the calm water to a raft during its any unsteady motion is proposed. The finite formulas are obtained for the total resistance forces and moments, taking into account the effect of buoyancy forces as well as viscous forces, wave and form resistance. This model is the development of the well-known model of water resistance for steady movement to the case of an arbitrary non-stationary motion of the raft as a solid body on the calm water surface.

Key words: raft, buoyancy force, water resistance, viscous forces

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 16-01-00131).

Содержание

Введение

Исследование свойств алгоритмов управления движущимися объектами средствами компьютерного моделирования предполагает наличие как математической модели самого движущегося объекта, так и среды, в которой будет происходить изучаемое движение и с элементами которой объект будет взаимодействовать [1]. Автономный мобильный робот может активно использовать местные предметы как средство для выполнения поставленных перед ним задач [2 − 7]. При этом необходимо иметь математические модели силового взаимодействия робота с элементами среды, а также и элементов среды между собой, если эти элементы могут совершать самостоятельное движение. В работах [8, 9] при моделировании движения робота на свободно катающихся шарах использовались модель сухого трения при взаимодействии стоп ног робота с шарами и модель трения качения шаров по плоскости.

Для отработки способов преодоления препятствий в виде водной преграды потребуются модели, описывающие воздействие воды на перемещающиеся в ней тела. Пусть наземный автономный мобильный робот не имеет плавучести и не приспособлен к функционированию в водной среде. Тогда для него подходящим способом преодоления широкой водной преграды будет применение какого-нибудь плавучего предмета достаточного размера и обладающего устойчивостью на водной поверхности. Одним из таких простейших и естественных предметов может служить прямоугольный плот, имеющий достаточную горизонтальную поверхность. На плот, плавающий по поверхности воды, помимо силы тяжести и архимедовой силы действуют силы сопротивления воды движению [10]. Эти силы классифицируются как силы вязкого трения, пропорциональные скорости движения плота относительно потока, сопротивление формы, сопротивление волнообразования, которые пропорциональны квадрату скорости. Все эти силы сопротивления направлены противоположно скорости плота относительно воды. Даже в случае стационарного установившегося движения потока теоретический расчет этих сил весьма затруднен из-за наличия угловых точек поверхности плота и вихреобразования [11]. Одним из действенных способов оценить силы сопротивления воды может служить проведение необходимых экспериментов с применением соответствующих методов подобия [12 − 14]. Но и в этом случае неизбежным остается предположение об установившемся стационарном движении воды. Вместе с тем плот при движении по нему робота может совершать сложное как угловое, так и поступательное движение относительно воды, вызывая взаимное неустановившееся движение водных масс.

Заметим, что при постановке компьютерных экспериментов по исследованию робастности алгоритмов управления движением роботов нет необходимости стремиться к абсолютно точному согласованию используемых математических моделей с реальным движением. Да это и невозможно. Модель сил сопротивления воды движению плота, предназначенная для отработки алгоритмов управления движением наземных автономных мобильных роботов, должна обладать свойством правдоподобности описания взаимодействия плота с водной средой, а также разумным быстродействием для возможности проведения достаточно большой серии численных экспериментов за приемлемое время. Кроме того, данная модель должна допускать возможность учета оперативного изменения как самой формы плота и его гидродинамических свойств, так и характеристик движения плота относительно его центра масс вместе с движением центра масс при перемещении по нему дополнительной нагрузки.

Предлагаемая ниже модель сил сопротивления воды движению плота основывается на гипотезе о струйном характере воздействия воды на отдельные элементы плота. Другими словами, поверхность плота разбивается на небольшие элементы и предполагается, что на каждый такой элемент набегает струя воды с скоростью, обратной скорости этого элемента, и отдает ему часть своего количества движения, а также воздействует на него силой вязкого трения. Эта гипотеза не противоречит повсеместно эксплуатируемой модели сопротивления воды для поступательного движения, но позволяет учесть также произвольное нестационарное движение плота относительно его центра масс.

1. Равновесие плота на поверхности воды

Предполагается, что однородный плот в форме прямоугольного параллелепипеда лежит на спокойной поверхности воды под действием вертикальной нагрузки $\mathbf{F}$, силового момента $\mathbf{M}$ относительно центра масс C_p плота и архимедовой силы. Размеры плота $2a$ – длина, $2b$ – ширина, $2d$ – толщина. Удельный вес воды обозначим γ. Под действием указанных сил плот находится в равновесии в некотором положении относительно уровня спокойной воды. Для того чтобы найти это положение, выберем неподвижный декартов репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ так, что единичный горизонтальный вектор $\mathbf{e}_1$ направлен по длине не нагруженного плота, единичный горизонтальный вектор $\mathbf{e}_2$ – по его ширине, а единичный вектор $\mathbf{e}_3$ – вертикально вверх, когда плот находится на поверхности воды под действием только силы тяжести и архимедовой силы. В качестве начала координат O назначим вертикальную проекцию на поверхность воды центра масс C_p ненагруженного плота. Поскольку горизонтальных сил нет, то под действием силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$ центр масс плота не будет смещаться в горизонтальном направлении. С плотом жестко свяжем подвижный декартов репер $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ так, чтобы направления единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ соответственно совпали в положении ненагруженного плота. Под действием силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$ плот примет наклонное положение. Для наклонного положения плота направляющие векторы свяжем соотношениями

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\mathbf{e}'_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

где коэффициенты (a_{ij}) образуют ортогональную матрицу. Пусть центр масс плота смещен относительно уровня воды на расстояние ζ так, что его радиус-вектор в репере $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ выражается формулой $\mathbf{r}_c = -\zeta\mathbf{e}_3$. Другими словами, если $\zeta > 0$, то центр масс плота погружен в воду, а если $\zeta < 0$, то центр масс плота находится над водой. Радиус-вектор точки O в репере $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\rho}_o = \zeta\sum_{j=1}^{3} a_{3j}\mathbf{e}'_j,$$

а проекция этой точки на третью ось репера $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ составит ζa_{33}. Представим радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ произвольной точки поверхности воды в репере $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ в виде

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{e}'_1 + y\mathbf{e}'_2 + z\mathbf{e}'_3.$$

Тогда в репере $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ уровень воды можно выразить с помощью уравнения

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \zeta',$$

где $\zeta' = \zeta a_{33}$. Примем, что $a_{33} \neq 0$. Это значит, что поверхность плота и горизонтальная плоскость не перпендикулярны. Тогда в репере $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ уровень воды задается равенством

$$z = \frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}}. \tag{1.1}$$

Точки, расположенные на дне плота, выражаются радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho}_b = x\mathbf{e}'_1 + y\mathbf{e}'_2 - d\mathbf{e}'_3.$$

Расстояние от точки плота, находящейся на уровне воды, до дна плота можно представить в виде

$$z + d = \frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d.$$

С точностью до малых второго порядка архимедова сила, действующая на элемент плота размера (dx, dy), отнесенный к точке дна с координатами

(x, y), задается формулой

$$\mathbf{F}'_a = \gamma \mathbf{e}_3 \left[\frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d \right] dxdy.$$

Из-за однородности столба жидкости, вытесненной элементарным объемом, эта сила приложена к точке, определенной радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho}_a = x\mathbf{e}'_1 + y\mathbf{e}'_2 + \left(\frac{z-d}{2} \right) \mathbf{e}'_3.$$

Суммарная архимедова сила, действующая на плот, вычисляется с помощью выражения

$$\mathbf{F}_a = \gamma \mathbf{e}_3 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \left[\frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d \right] dxdy,$$

а ее момент относительно центра масс плота дается формулой

$$\mathbf{M}_a = \gamma \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \left[\frac{\zeta' - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}} + d \right] \boldsymbol{\rho}_a dxdy \times \mathbf{e}_3.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_a = \gamma \mathbf{e}_3 (\zeta + d) 4ab = \gamma (\zeta + d) 4ab (a_{31}\mathbf{e}'_1 + a_{32}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3), \\ &\mathbf{M}_a = \gamma [(I_y a_{33} - I_z a_{32})\mathbf{e}'_1 + (I_z a_{31} - I_x a_{33})\mathbf{e}'_2 + (I_x a_{32} - I_y a_{31})\mathbf{e}'_3], \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$\begin{aligned} I_x &= -\frac{4a_{31}}{3a_{33}} a^3 b, \\ I_y &= -\frac{4a_{32}}{3a_{33}} ab^3, \\ I_z &= \frac{ab}{2} \left(\zeta^2 - d^2 + \frac{4a_{31}^2 a^2}{3a_{33}^2} + \frac{4a_{32}^2 b^2}{3a_{33}^2} \right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Формулы (1.2) получены в предположении, что плот не имеет частей, полностью погруженных в воду, а дно плота целиком находится под водой. Учитывая то, что заданная сила $\mathbf{F}$ вертикальна, т.е. $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_3$, с помощью (1.2) получаем четыре условия равновесия плота

$$\begin{aligned} &\gamma(\zeta + d) 4ab = -F, \\ &\gamma a_{32} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[\left(2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} = M_x, \\ &\gamma a_{31} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[\left(2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2} (\zeta^2 - d^2) \right\} = -M_y, \\ &\gamma \frac{4a_{31}a_{32}ab}{3a_{33}} (a^2 - b^2) = M_z, \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из первого уравнения (1.4) нетрудно найти положение центра масс плота относительно уровня воды:

$$\zeta = -\frac{F}{4\gamma ab} - d. \tag{1.5}$$

Из этой формулы следует, что если $F > 0$, расстояние от центра плота до уровня воды будет превосходить высоту плота, что нереально. В дальнейшем будет рассмотрен случай $F < 0$, т.е. активная сила направлена вниз.

Умножим второе уравнение системы (1.4) на a_{31}, третье уравнение этой системы – на a_{32}, и после этого из третьего уравнения вычтем второе. После преобразований получим

$$\gamma \frac{4a_{31}a_{32}ab}{3}(a^2 - b^2) = -M_x a_{31} - M_y a_{32}.$$

Сравнив этот результат с четвертым уравнением (1.4), найдем условие согласования

$$a_{31}M_x + a_{32}M_y + a_{33}M_z = 0, \tag{1.6}$$

которое означает, что проекция силового момента на направление вертикали отсутствует. Если это условие не выполнено, то равновесие очевидно невозможно, т.к. архимедовы силы не могут компенсировать вертикальную составляющую момента. Если же условие согласования выполнено, то четвертое уравнение есть следствие второго и третьего уравнений и его можно не рассматривать. Считая величину ζ найденной с помощью формулы (1.5), имеем следующую систему уравнений для определения величин a_{31}, a_{32}, a_{33}:

$$\begin{aligned}
&\gamma a_{32}ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}\right)b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}a^2\right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right\} = M_x,\\
&\gamma a_{31}ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}\right)a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}b^2\right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right\} = -M_y,\\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Последним добавлено условие того, что вектор $\mathbf{e}_3$ является единичным.

Остальные компоненты матрицы A можно получить следующим образом. Будем рассматривать поворот неподвижной системы координат относительно системы координат, связанной с плотом. В результате наклона плота происходит относительное вращение репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в репере $C_p\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ на угол $\gamma = \arccos(a_{33})$ вокруг оси

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_3' \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_3' \times \mathbf{e}_3|} = \frac{1}{|\sin\gamma|}(-a_{32}\mathbf{e}_1' + a_{31}\mathbf{e}_2' + 0\mathbf{e}_3').$$

Для определения угловых положений векторов репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в репере $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ воспользуемся известными формулами [15]:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i + \sin\gamma(\mathbf{e}\times\mathbf{e}'_i) + \mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{e}'_i)(1-\cos\gamma). \tag{1.8}$$

Заметив, что

$$\mathbf{e}\times\mathbf{e}'_1 = -\frac{a_{31}}{|\sin\gamma|}\mathbf{e}'_3, \quad \mathbf{e}\times\mathbf{e}'_2 = -\frac{a_{32}}{|\sin\gamma|}\mathbf{e}'_3, \quad \mathbf{e}\times\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{|\sin\gamma|}(a_{31}\mathbf{e}'_1+a_{32}\mathbf{e}'_2+0\mathbf{e}'_3)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{e}'_1) &= -\frac{1}{\sin^2\gamma}(a_{31}^2\mathbf{e}'_1 + a_{31}a_{32}\mathbf{e}'_2 + 0\mathbf{e}'_3),\\
\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{e}'_2) &= -\frac{1}{\sin^2\gamma}(a_{31}a_{32}\mathbf{e}'_1 + a_{32}^2\mathbf{e}'_2 + 0\mathbf{e}'_3),\\
\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{e}'_3) &= -\frac{a_{31}^2+a_{32}^2}{\sin^2\gamma}\mathbf{e}'_3,
\end{aligned}$$

получим, считая $\sin\gamma > 0$,

$$\begin{array}{lll}
a_{11} = \left(1 - \dfrac{a_{31}^2}{1+a_{33}}\right), & a_{12} = -\dfrac{a_{31}a_{32}}{1+a_{33}}, & a_{13} = -a_{31},\\
a_{21} = -\dfrac{a_{31}a_{32}}{1+a_{33}}, & a_{22} = \left(1 - \dfrac{a_{32}^2}{1+a_{33}}\right), & a_{23} = -a_{32},\\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}.
\end{array} \tag{1.9}$$

Компоненты (1.9) удовлетворяют условиям ортогональности матрицы A и могут быть приняты в качестве точного решения задачи о равновесии плота под действием внешней вертикальной нагрузки.

Учтем, что в реальности, с точки зрения возможности применения плота в качестве средства переправы, плот должен иметь небольшие угловое отклонение от горизонтальной плоскости. Тогда уместным будет предположение о малости углов отклонений плота под действием нагрузки от исходного горизонтального положения. Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$$

есть вектор малого поворота репера $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ относительно репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Тогда между соответствующими базисными векторами справедливы следующие соотношения [15]:

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e}_i, \quad i=\overline{1,3}.$$

Отсюда получаются приближенные выражения для компонент матрицы A через малые углы поворота, справедливые с точностью до членов второго порядка малости

$$
\begin{aligned}
&a_{11} \approx 1, && a_{12} \approx -\alpha_3, && a_{13} \approx \alpha_2, \\
&a_{21} \approx \alpha_3, && a_{22} \approx 1, && a_{23} \approx -\alpha_1, \\
&a_{31} \approx -\alpha_2, && a_{32} \approx \alpha_1, && a_{33} \approx 1.
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Дополнительно приняв предположение о том, что плот не вращается вокруг третьей оси, положим $\alpha_3 = 0$. В итоге матрица направляющих косинусов примет особенно простой вид

$$
\begin{aligned}
&a_{11} \approx 1, && a_{12} \approx 0, && a_{13} \approx \alpha_2, \\
&a_{21} \approx 0, && a_{22} \approx 1, && a_{23} \approx -\alpha_1, \\
&a_{31} \approx -\alpha_2, && a_{32} \approx \alpha_1, && a_{33} \approx 1.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

С помощью выражений (1.11) два первых уравнения (1.7) можно с точностью до членов второго порядка малости представить в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\gamma\alpha_1 ab[8b^2 + 3(\zeta^2 - d^2)] = M_x, \\
&\frac{1}{6}\gamma\alpha_2 ab[8a^2 + 3(\zeta^2 - d^2)] = M_y.
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

Таким образом, задача о равновесии плота сводится к решению системы (1.7) или системы (1.12), правые части которых будут иметь разные выражения в конкретных случаях. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

1.1. Постоянный внешний момент в осях, связанных с плотом

В этом случае компоненты M_x, M_y, M_z не зависят от ориентации плота относительно направления вертикали. Если робот взаимодействует с плотом только силами $\mathbf{F}_\nu$ в точках опоры ног, определенных радиус-векторами $\mathbf{r}_\nu$, $\nu = \overline{1, n}$, то условие согласования (1.6) примет вид

$$
\mathbf{e}_3 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} (\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{F}_\nu \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_\nu) = 0.
$$

Следовательно, для равновесия плота необходимо, чтобы сумма проекций сил, развиваемых роботом в точках опоры, на направления горизонтальных перпендикуляров к радиус-векторам точек опоры, умноженная на горизонтальную составляющую радиус-векторов точек опоры, была равна нулю.

Уравнения (1.7) можно представить в виде

$$
a_{31} = -\frac{M_y}{k_1}, \quad a_{32} = \frac{M_x}{k_2}, \tag{1.13}
$$

где

$$k_2 = \gamma ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2+\frac{a_{32}^2}{1-a_{31}^2-a_{32}^2}\right)b^2+\frac{a_{31}^2}{1-a_{31}^2-a_{32}^2}a^2\right]+\frac{1}{2}(\zeta^2-d^2)\right\},$$
$$k_1 = \gamma ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2+\frac{a_{31}^2}{1-a_{31}^2-a_{32}^2}\right)a^2+\frac{a_{32}^2}{1-a_{31}^2-a_{32}^2}b^2\right]+\frac{1}{2}(\zeta^2-d^2)\right\}, \tag{1.14}$$

и решать их численно по методу простой итерации, когда в правую часть подставляются значения, вычисленные для предыдущей итерации. В качестве нулевого приближения следует принять $a_{31}^{(0)} = a_{32}^{(0)} = 0$.

Рассмотрим малые отклонения плота от горизонтальной плоскости. Воспользуемся формулами (1.11) для компонент матрицы A:

$$\alpha_1 = \frac{M_x}{\bar{k}_2}, \quad \alpha_2 = \frac{M_y}{\bar{k}_1}, \tag{1.15}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{k}_1 &= \frac{1}{6}\gamma ab[8b^2+3(\zeta^2-d^2)],\\ \bar{k}_2 &= \frac{1}{6}\gamma ab[8a^2+3(\zeta^2-d^2)].\end{aligned} \tag{1.16}$$

Видим, что если горизонтальные размеры плота мало отличаются друг от друга, то ось вращения плота практически будет направлена по внешнему моменту.

1.2. Внешний момент, постоянный в абсолютном пространстве

Предположим, что момент M сохраняет свое значение в абсолютной системе координат, связанной с уровнем воды. Тогда $\mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2$ из-за того, что внешний момент $\mathbf{M}$ должен быть перпендикулярен вертикальной оси $\mathbf{e}_3$.

$$M_x = M_1a_{11} + M_2a_{21}, \quad M_y = M_1a_{12} + M_2a_{22}, \quad M_z = M_1a_{13} + M_2a_{23}.$$

Система (1.7) принимает вид

$$\gamma a_{32}ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2+\frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}\right)b^2+\frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}a^2\right]+\frac{1}{2}(\zeta^2-d^2)\right\} = M_1a_{11}+M_2a_{21},$$
$$\gamma a_{31}ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2+\frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}\right)a^2+\frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}b^2\right]+\frac{1}{2}(\zeta^2-d^2)\right\} = -(M_1a_{12}+M_2a_{22}),$$
$$a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2 = 1. \tag{1.17}$$

Компоненты a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} выражаются через искомые переменные по формулам (1.9). Уравнения (1.17) можно численно решать методом простой итерации, представив их в виде

$$a_{31} = -\frac{M_1 a_{12} + M_2 a_{22}}{k_1}, \quad a_{32} = \frac{M_1 a_{11} + M_2 a_{21}}{k_2}, \tag{1.18}$$

где k_1, k_2 даются формулами (1.14).

В рамках гипотезы о малых отклонениях плота от горизонтальной плоскости получим решения

$$\alpha_2 = \frac{M_2}{\bar{k}_1}, \quad \alpha_1 = \frac{M_2}{\bar{k}_2}, \tag{1.19}$$

где $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ определены формулами (1.16).

1.3. Равнодействующая системы $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$ приложена к плоту

Пусть $\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_3$ и равнодействующая системы сил $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$ приложена в точке плота S, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}_s = x_s\mathbf{e}'_1 + y_s\mathbf{e}'_2 + z_s\mathbf{e}'_3$, где x_s, y_s,z_s – постоянны. Тогда $\mathbf{M} = \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}$ и

$$M_x = P(a_{32}z_s - a_{33}y_s), M_y = P(a_{33}x_s - a_{31}z_s), M_z = P(a_{31}y_s - a_{32}x_s). \tag{1.20}$$

Система уравнений (1.7) представится в виде

$$\begin{aligned}
&\gamma a_{32} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[\left(2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} \right) b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} a^2 \right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\} = P(a_{32}z_s - a_{33}y_s),\\
&\gamma a_{31} ab \left\{ \frac{2}{3} \left[\left(2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2} \right) a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2} b^2 \right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2) \right\} = P(a_{31}z_s - a_{33}x_s),\\
&a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Первое и второе уравнения этой системы без учета ее третьего уравнения допускают неоднозначное решение. Их новые решения получаются из какого-нибудь одного посредством умножения (мультипликативность) всех компонент исходного решения на произвольный отличный от нуля коэффициент. С учетом свойства мультипликативности можно немного упростить поиск компонент a_{31}, a_{32}, a_{33}, положив, например, $a_{33} = \hat{a}_{33} = 1$ и решив полученную систему второго и третьего уравнений относительно переменных $\hat{a}_{31}$, $\hat{a}_{32}$ по методу простой итерации в соответствии с формулами

$$(\hat{a}_{31})_\nu = -x_s/(\mu_1)_{\nu-1}, \quad (\hat{a}_{32})_\nu = -y_s/(\mu_2)_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, ... \tag{1.22}$$

где

$$\mu_1 = \frac{\gamma ab}{P}\left\{\frac{2}{3}[(2+\hat{a}_{31}^2)a^2 + \hat{a}_{32}^2 b^2] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right\} - z_s,$$
$$\mu_2 = \frac{\gamma ab}{P}\left\{\frac{2}{3}[(2+\hat{a}_{32}^2)b^2 + \hat{a}_{31}^2 a^2] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right\} - z_s.$$

Причем

$$\begin{aligned}(\mu_1)_0 = æ_2 = \frac{\gamma ab}{P}\left[\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right] - z_s,\\ (\mu_2)_0 = æ_1 = \frac{\gamma ab}{P}\left[\frac{4}{3}b^2 + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right] - z_s,\end{aligned} \tag{1.23}$$

а в качестве $(\mu_1)_{\nu-1}$, $(\mu_2)_{\nu-1}$ используются коэффициенты μ_1, mu_2, вычисленные по значениям $(\hat{a}_{31})_{\nu-1}$, $(\hat{a}_{32})_{\nu-1}$. Итерации выполняются до тех пор, когда разность между последовательными приближениями станет меньше заданной точности.

Искомое решение получается из решения системы (1.22) после нормировки:

$$a_{31} = k\hat{a}_{31}, \quad a_{32} = k\hat{a}_{32}, \quad a_{33} = k, \quad k = (\hat{a}_{31}^2 + \hat{a}_{32}^2 + 1)^{-1/2}. \tag{1.24}$$

Если допустить возможность применения предположения (1.10) о существенной малости углового смещения плота, то уравнения (1.22) упрощаются и получается решение

$$\alpha_1 = -y_s/æ_1, \quad \alpha_2 = x_s/æ_2, \quad \alpha_3 = 0. \tag{1.25}$$

Пусть центр масс робота смещен на вектор $\boldsymbol{\delta} = \delta_x \mathbf{e}'_1 + \delta_y \mathbf{e}'_2$ относительно точки C_p в опорной плоскости плота. Тогда получим

$$\mathbf{r}_s = \frac{P_r}{P}\boldsymbol{\delta}. \tag{1.26}$$

Из формул (1.25) следует, в частности, что если центр масс робота проецируется в первый квадрант горизонтальной плоскости, то плот поворачивается вокруг первой оси по ходу часовой стрелки, вокруг второй оси – против хода часовой стрелки, а вокруг третьей оси вращение отсутствует.

Можно убедиться в том, что в первом приближении положение равновесия плота будет устойчивым относительно углов α_1 и α_2 и безразличным по углу α_3. Обозначим $\bar{\alpha}_i$, $i = \overline{1,3}$, отклонения соответствующих углов от положения равновесия. Действительно, с точностью до малых второго порядка уравнения малых колебаний плота в окрестности положения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}A\ddot{\bar{\alpha}}_1 &= -æ_2\bar{\alpha}_1,\\ B\ddot{\bar{\alpha}}_2 &= -æ_1\bar{\alpha}_2,\\ C\ddot{\bar{\alpha}}_3 &= 0,\end{aligned} \tag{1.27}$$

где A, B, C – моменты инерции плота относительно осей его симметрии, что и доказывает высказанное утверждение.

Оценим допустимые размеры отклонения центра масс робота от середины плота. С этой целью потребуем, чтобы было

$$|\alpha_1| = |y_s|/\text{æ}_1 < \varepsilon, \quad |\alpha_2| = |x_s|/\text{æ}_2 < \varepsilon,$$

где ε есть допустимое с точки зрения малости угловое отклонение плота от горизонтальной плоскости. Тогда получим

$$|\delta_x| < \varepsilon \frac{\text{æ}_2 P}{P_r} \quad |\delta_y| < \varepsilon \frac{\text{æ}_1 P}{P_r}, \tag{1.28}$$

Причем, как видно из формул (1.23), $\text{æ}_2 > \text{æ}_1$, если $a > b$. С учетом сказанного предпочтительным для опоры робота будет плот, расположенный наибольшей стороной по ходу движения робота, поскольку именно в этом направлении будут наибольшие отклонения центра масс робота от центра плота.

2. Нестационарная модель сопротивления воды

Возьмем репер $C_p\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, жестко связанный с плотом. При движении плота на него помимо архимедовой силы, внешних сил и моментов действуют силы сопротивления воды. Для расчета этих сил предположим, что удельная сила сопротивления воды $\mathbf{R}_{sp}$, действующая на каждый элемент погруженной в воду части плота, выражается формулой

$$\mathbf{R}_{sp} = -\text{æ}\mathbf{v}_\tau - \text{æ}_1\boldsymbol{\nu}|v_\nu|v_\nu = -\text{æ}\mathbf{v} - \boldsymbol{\nu}(\text{æ}_1|v_\nu| - \text{æ})v_\nu, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость характерной точки этого элемента, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности плота, $\mathbf{v}_\tau$ – составляющая скорости, касательная к элементу плота, $v_\nu = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v}$ – перпендикулярная к площадке составляющая скорости, $\text{æ} \geq 0$ и $\text{æ}_1 \geq 0$ – соответствующие коэффициенты пропорциональности, причем по имеющимся экспериментальным данным для воды $\text{æ}_1 \gg \text{æ}$.

Формула (2.1) дает весьма приближенное, но качественно верное представление о силах сопротивления воды при движении элементарной плоской площадки плота, хотя и не учитывает процесс обтекания плота водой и процесс волнообразования [10, 11]. Вместе с тем, при колебаниях плота на воде скорости точек плота относительно воды будут невелики, но характер обтекания не будет установившимся, а поэтому точный расчет сил сопротивления составит значительные вычислительные трудности и невозможен без привлечения экспериментальных данных. Для возможности приемлемо простого с вычислительной точки зрения и вместе с тем правдоподобного моделирования возмущений из-за влияния сопротивления воды на плот воспользуемся в дальнейшем приближением формулы (2.1). Из этой формулы, в частности, следует, что для значений $0 < |v_\nu| < æ/æ_1$ множитель при $\boldsymbol{\nu}$ в ней будет пренебрежимо мал.

Поскольку в норме верхняя часть плота находится над водой, будем считать, что силы сопротивления воды приложены только к днищу плота и к его боковым поверхностям.

Для элементов днища плота получим

$$\mathbf{R}_{sp} = -æ\mathbf{v} + \mathbf{e}_3'(æ_1|v_z| - æ)v_z, \tag{2.2}$$

т.к. для этих элементов $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{e}_3'$ и $v_z = \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{v}$. При этом характерная точка днища плота имеет радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}_d = (x, y, -d)$.

Допустим, что при воздействии сил сопротивления воды на боковую поверхность плота членом $æ\mathbf{v}_\tau$ в формуле (2.1) можно пренебречь. Для боковых поверхностей плота, идущих вдоль вектора $\mathbf{e}_1'$, получим

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{cases} \mathbf{e}_2' & \text{при} \quad v_y \geq 0, \\ -\mathbf{e}_2' & \text{при} \quad v_y < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда элементарная сила сопротивления воды выражается формулой

$$\mathbf{R}_{sp} = -æ_1\mathbf{e}_2'|v_y|v_y, \tag{2.4}$$

а радиус-векторы $\boldsymbol{\rho}_a$ соответствующих точек боковой поверхности имеют координаты

$$\boldsymbol{\rho}_a = \begin{cases} (x, b, z) & \text{при} \quad v_y \geq 0, \\ (x, -b, z) & \text{при} \quad v_y < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Аналогично для боковых поверхностей плота, идущих вдоль вектора $\mathbf{e}_2'$, получим

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{cases} \mathbf{e}_1' & \text{при} \quad v_x \geq 0, \\ -\mathbf{e}_1' & \text{при} \quad v_x < 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

а элементарная сила сопротивления воды выражается формулой

$$\mathbf{R}_{sp} = -æ_1\mathbf{e}_1'|v_x|v_x. \tag{2.7}$$

Радиус-векторы $\boldsymbol{\rho}_b$ соответствующих точек боковой поверхности имеют вид

$$\boldsymbol{\rho}_b = \begin{cases} (a, y, z) & \text{при} \quad v_y \geq 0, \\ (-a, y, z) & \text{при} \quad v_y < 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Для подсчета боковых сил и моментов пренебрежем перекосами плота относительно его центра и будем считать, что $-d \leq z \leq \zeta_0$, причем ζ_0 соответствует равновесному положению плота, при котором архимедова сила и вертикальная составляющая $\mathbf{F}_{eq}$ активной силы, отвечающая горизонтальному равновесному положению плота, компенсируются:

$$\zeta_0 = -\frac{(\mathbf{F}_{eq} \cdot \mathbf{e}_3)}{4\gamma ab} - d. \tag{2.9}$$

Для силы $\mathbf{R}$ и момента $\mathbf{N}$ сопротивления воды относительно центра масс плота C_p получим выражения

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^a + \mathbf{A}^b, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B}^d + \mathbf{B}^a + \mathbf{B}^b, \tag{2.10}$$

где

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}^d = -æ\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\mathbf{v}dxdy - \mathbf{e}_3'\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}(æ_1|v_z| - æ)v_z dydx,\\
\mathbf{A}^a = -æ_1\mathbf{e}_2'\int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-a}^{a}|v_y|v_y dxdz, \quad \mathbf{A}^b = -æ_1\mathbf{e}_1'\int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-b}^{b}|v_x|v_x dydz,\\
\mathbf{B}^d = -æ\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{v}dydx - \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}_3'(æ_1|v_z| - æ)v_z dydx,\\
\mathbf{B}^a = -æ_1\int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-a}^{a}\boldsymbol{\rho}_a \times \mathbf{e}_2'|v_y|v_y dxdz,\ \mathbf{B}^b = -æ_1\int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_b \times \mathbf{e}_1'|v_x|v_x dydz,
\end{gathered} \tag{2.11}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_1' + q\mathbf{e}_2' + r\mathbf{e}_3'$ есть угловая скорость плота в репере $C_p\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, $\mathbf{v}_p$ – скорость центра C_p плота, составляющие скорости, перпендикулярные к поверхностям плота, даются выражениями

$$\begin{aligned}
v_x &= V_x + qz - ry, \quad V_x = \dot{\xi}a_{11} + \dot{\eta}a_{21} - \dot{\zeta}a_{31},\\
v_y &= V_y + rx - pz, \quad V_y = \dot{\xi}a_{12} + \dot{\eta}a_{22} - \dot{\zeta}a_{32},\\
v_z &= V_z + py - qx, \quad V_z = \dot{\xi}a_{13} + \dot{\eta}a_{23} - \dot{\zeta}a_{33},
\end{aligned}$$

причем $\mathbf{r}_p = \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2 - \zeta\mathbf{e}_3$ – радиус-вектор центра масс плота в репере $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Вычислим интегралы, входящие в формулы (2.11).

1. Для первой формулы (2.11) получим

$$\mathbf{A}^d = -æ\mathbf{S} - \mathbf{e}_3'J^d, \quad \mathbf{S} = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\mathbf{v}dxdy, \quad J^d = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}(æ_1|v_z| - æ)v_z dydx. \tag{2.12}$$

Возьмем $\mathbf{S}$ и $\mathbf{e}_3'$ в неподвижном репере $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$: $\mathbf{S} = S_\xi \mathbf{e}_1 + S_\eta \mathbf{e}_2 + S_\zeta \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3' = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$. Интеграл J^d представим в виде

$$J^d = æ_1 J_1^d - æ J_2^d, \quad J_1^d = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} |v_z| v_z dy dx, \quad J_2^d = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} v_z dy dx. \tag{2.13}$$

После интегрирования имеем

$$\begin{aligned} S_\xi &= 4ab[\ \ \dot{\xi} + (qa_{11} - pa_{12})d], \\ S_\eta &= 4ab[\ \ \dot{\eta} + (qa_{21} - pa_{22})d], \\ S_\zeta &= 4ab[-\dot{\zeta} + (qa_{31} - pa_{32})d], \\ J_2^d &= 4abV_z. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Выражения для компонент составляющей $\mathbf{A}^d$ силы сопротивления можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_\xi^d &= -4æab\left[\dot{\xi} + (qa_{11} - pa_{12})d - a_{13}V_z\right] - æ_1 J_1^d a_{13}, \\ A_\eta^d &= -4æab\left[\dot{\eta} + (qa_{21} - pa_{22})d - a_{23}V_z\right] - æ_1 J_1^d a_{23}, \\ A_\zeta^d &= \ \ \ 4æab\left[\dot{\zeta} - (qa_{31} - pa_{32})d + a_{33}V_z\right] - æ_1 J_1^d a_{33}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

При вычислении интеграла J_1^d необходимо учесть, что значение v_z может изменить знак в области интегрирования. Рассмотрим возможные случаи.

1.1. $p = q = 0$. Тогда, очевидно, $v_z \equiv V_z$, и

$$J_1^d = 4ab|V_z|V_z. \tag{2.16}$$

1.2. $p = 0$. $q \neq 0$. Тогда $v_z = V_z - qx$, и

$$J_1^d = 2b|q|q\int\limits_{-a}^{a}\left|\frac{V_z}{q} - x\right|\left(\frac{V_z}{q} - x\right)dx.$$

Следовательно,

$$J_1^d = 2b|q|q\begin{cases} -\dfrac{2a}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_z}{q} < -a, \\ \dfrac{2V_z}{3q}\left[\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + 3a^2\right], \text{если} \quad -a \le \dfrac{V_z}{q} < a, \\ \dfrac{2a}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_z}{q} \ge a. \end{cases} \tag{2.17}$$

1.3. $p \neq 0$, $q = 0$. Тогда $v_z = V_z + py$, и

$$J_1^d = 2a|p|p\int\limits_{-b}^{b}\left|\frac{V_z}{p} + y\right|\left(\frac{V_z}{p} + y\right)dy.$$

Поэтому

$$J_1^d = 2a|p|p \begin{cases} -\dfrac{2b}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{p}\right)^2 + b^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_z}{p} < -b, \\ \dfrac{2V_z}{3p}\left[\left(\dfrac{V_z}{p}\right)^2 + 3b^2\right], \text{если} \quad -b \le \dfrac{V_z}{p} < b, \\ \dfrac{2b}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{p}\right)^2 + b^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_z}{p} \ge b. \end{cases} \tag{2.18}$$

1.4. $p \neq 0$, $q \neq 0$. Тогда

$$J_1^d = |q|q \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-a}^{a} \left|\frac{V_z}{q} + \frac{p}{q}y - x\right| \cdot \left(\frac{V_z}{q} + \frac{p}{q}y - x\right) dxdy.$$

Для того чтобы учесть возможность разных знаков p и q, заменим y на другую переменную

$$s = \begin{cases} y, & \text{при} \quad pq > 0, \\ -y, & \text{при} \quad pq < 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

С учетом свойств определенных интегралов получим

$$J_1^d = |q|q \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-a}^{a} \left|\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| s - x\right| \cdot \left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| s - x\right) dxds.$$

Обозначим

$$f(s) = \int\limits_{-a}^{a} \left|\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| s - x\right| \cdot \left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| s - x\right) dx.$$

Интегрирование дает

$$f(s) = \begin{cases} -\dfrac{2a}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q} + \left|\dfrac{p}{q}\right| s\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_z}{q} + \left|\dfrac{p}{q}\right| s < -a, \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{V_z}{q} + \left|\dfrac{p}{q}\right| s\right)\left[\left(\dfrac{V_z}{q} + \left|\dfrac{p}{q}\right| s\right)^2 + 3a^2\right], \text{если} \quad -a \le \dfrac{V_z}{q} + \left|\dfrac{p}{q}\right| s < a, \\ \dfrac{2a}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q} + \left|\dfrac{p}{q}\right| s\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_z}{q} + \left|\dfrac{p}{q}\right| s \ge a. \end{cases}$$

После интегрирования по s получим

1.4.1. Для $|p/q| < a/b$:

$$J_1^d = |q|q \begin{cases} -\dfrac{4ab}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{pb}{q}\right)^2 + a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{V_z}{q} < -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ D_1, \quad \text{при} \quad -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < -a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ 4\dfrac{V_z}{q} b \left\{\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{pb}{q}\right)^2\right] + a^2\right\}, \text{при} -a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ D_2, \quad \text{при} \quad a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ \dfrac{4ab}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{pb}{q}\right)^2 + a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{V_z}{q} \ge a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \end{cases} \tag{2.20}$$

где

$$D_1 = \left|\frac{q}{p}\right| \left\{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| b\right)^4 + a^4\right] + a^2\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| b\right)^2 + \frac{2a}{3}\left[\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right| b\right)^3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + a^2\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right| b\right)\right]\right\},$$

$$D_2 = \left|\frac{q}{p}\right| \left\{\frac{2a}{3}\left[\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| b\right)^3 + a^2\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| b\right)\right] - \frac{1}{6}\left[\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right| b\right)^4 + a^4\right] - \right.$$
$$\left. - a^2\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right| b\right)^2\right\}.$$

1.4.2. Для $|p/q| \ge a/b$:

$$J_1^d = |q|q \begin{cases} -\dfrac{4ab}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{pb}{q}\right)^2 + a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{V_z}{q} < -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ D_1, \quad \text{при} \quad -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ \dfrac{4a|q|}{3|p|}\dfrac{V_z}{q}\left[\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + 3\left(\dfrac{p}{q}b\right)^2 + a^2\right], \text{ при } a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < \left|\dfrac{p}{q}\right| b - a, \\ D_2, \quad \text{при} \quad \left|\dfrac{p}{q}\right| b - a \le \dfrac{V_z}{q} < a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ \dfrac{4ab}{3}\left[3\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{pb}{q}\right)^2 + a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{V_z}{q} \ge a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b. \end{cases} \tag{2.21}$$

2. Для второй формулы (2.11) будем иметь

$$\mathbf{A}^a = -æ_1 \mathbf{e}_2' J^a, \quad J^a = \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-a}^{a} |V_y + rx - pz|(V_y + rx - pz)dxdz. \tag{2.22}$$

Рассмотрим отдельные случаи.

2.1. $p = r = 0$. Тогда, с учетом равенства (2.9),

$$J^a = -\frac{(\mathbf{F}_{eq} \cdot \mathbf{e}_3)}{2\gamma b}|V_y|V_y. \tag{2.23}$$

2.2. $p \neq 0$, $r = 0$. Тогда

$$J^a = \frac{2a}{3}|p|p \begin{cases} \left(\dfrac{V_y}{p} - \zeta_0\right)^3 - \left(\dfrac{V_y}{p} + d\right)^3 \text{если} \quad \dfrac{V_y}{p} < -d, \\ \left(\dfrac{V_y}{p} - \zeta_0\right)^3 + \left(\dfrac{V_y}{p} + d\right)^3, \text{если} \quad -d \leq \dfrac{V_y}{p} < \zeta_0, \\ \left(\dfrac{V_y}{p} + d\right)^3 - \left(\dfrac{V_y}{p} - \zeta_0\right)^3, \text{если} \quad \zeta_0 \leq \dfrac{V_y}{p}. \end{cases} \tag{2.24}$$

2.3. $p = 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$J^a = \frac{2(\zeta_0 + d)}{3}|r|r \begin{cases} -a\left[3\left(\dfrac{V_y}{r}\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_y}{r} < -a, \\ \dfrac{V_y}{r}\left[\left(\dfrac{V_y}{r}\right)^2 + 3a^2\right], \text{если} \quad -a \leq \dfrac{V_y}{r} < a, \\ a\left[3\left(\dfrac{V_y}{r}\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{V_y}{r} > a. \end{cases} \tag{2.25}$$

2.4. $p \neq 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$J^a = |r|r \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-a}^{a} \left|\frac{V_y}{r} - \frac{p}{r}z + x\right| \cdot \left(\frac{V_y}{r} - \frac{p}{r}z + x\right) dx dz.$$

С целью уменьшения числа исследуемых вариантов сделаем симметричными пределы интегрирования по z с помощью замены переменной

$$\hat{z} = z - \frac{\zeta_0 - d}{2}, \quad \hat{d} = \frac{\zeta_0 + d}{2} > 0. \tag{2.26}$$

С помощью новой переменной $\hat{z}$ выражение для J^a представляется в виде

$$J^a = |r|r \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-a}^{a} \left|\frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r}\hat{z} + x\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r}\hat{z} + x\right) dx d\hat{z}, \quad \hat{V}_y = V_y - p\frac{\zeta_0 - d}{2}. \tag{2.27}$$

Вместо $\hat{z}$ введем новую переменную интегрирования

$$\hat{s} = \begin{cases} -\hat{z}, & \text{при} \quad pr > 0, \\ \hat{z}, & \text{при} \quad pr < 0. \end{cases}$$

С учетом свойств определенных интегралов получим

$$J^a = |r|r \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-a}^{a} \left| \frac{\hat{V}_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right| \hat{s} + x \right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right| \hat{s} + x \right) dx d\hat{s}.$$

Обозначим

$$\hat{f}(\hat{s}) = \int\limits_{-a}^{a} \left| \frac{\hat{V}_z}{r} + \left|\frac{p}{r}\right| \hat{s} + x \right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_z}{r} + \left|\frac{p}{r}\right| \hat{s} + x \right) dx.$$

Интегрирование дает

$$\hat{f}(\hat{s}) = \begin{cases} -\dfrac{2a}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r} + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{s}\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{\hat{V}_y}{r} + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{s} < -a, \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r} + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{s}\right)\left[\left(\dfrac{\hat{V}_z}{r} + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{s}\right)^2 + 3a^2\right], \text{если} \quad -a \le \dfrac{\hat{V}_z}{q} + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{s} < a, \\ \dfrac{2a}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r} + \left|\dfrac{p}{r}\right|s\right)^2 + a^2\right], \text{если} \quad \dfrac{\hat{V}_y}{r} + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{s} \ge a. \end{cases}$$

После интегрирования по $\hat{s}$ получим

2.4.1. Для $|p/r| < a/\hat{d}$:

$$J^a = |r|r \begin{cases} -\dfrac{4a\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{p\hat{d}}{r}\right)^2 + a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_y}{r} < -a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \hat{D}_1, \quad \text{при} \quad -a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{\hat{V}_y}{r} < -a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ 4\dfrac{\hat{V}_y}{r}\hat{d}\left\{\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{p\hat{d}}{r}\right)^2\right] + a^2\right\}, \text{при} -a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{\hat{V}_y}{r} < a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \hat{D}_2, \quad \text{при} \quad a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{\hat{V}_y}{r} < a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{4a\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{p\hat{d}}{r}\right)^2 + a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_y}{r} \ge a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \end{cases} \tag{2.28}$$

где

$$\hat{D}_1=\left|\frac{r}{p}\right|\left\{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\hat{V}_y}{r}+\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^4+a^4\right]+a^2\left(\frac{\hat{V}_y}{r}+\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^2+\frac{2a}{3}\left[\left(\frac{\hat{V}_y}{r}-\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3+\right.\right.$$
$$\left.\left.+a^2\left(\frac{\hat{V}_y}{r}-\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)\right]\right\},$$
$$\hat{D}_2=\left|\frac{r}{p}\right|\left\{\frac{2a}{3}\left[\left(\frac{\hat{V}_y}{r}+\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3+a^2\left(\frac{\hat{V}_y}{r}+\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)\right]-\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\hat{V}_y}{r}-\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^4+a^4\right]-\right.$$
$$\left.-a^2\left(\frac{\hat{V}_y}{r}-\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^2\right\}.$$

2.4.2. Для $|p/r| > a/\hat{d}$:

$$J^a=|r|r\begin{cases}-\dfrac{4a\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^2+\left(\dfrac{p\hat{d}}{r}\right)^2+a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_y}{r}<-a-\left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d},\\ \hat{D}_1, \quad \text{при} \quad -a-\left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}\le\dfrac{\hat{V}_y}{r}<a-\left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d},\\ \dfrac{4a|r|}{3|p|}\dfrac{\hat{V}_y}{r}\left[\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^2+3\left(\dfrac{p}{r}\hat{d}\right)^2+a^2\right], \text{при } a-\left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}\le\dfrac{\hat{V}_y}{r}<\left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}-a,\\ \hat{D}_2, \quad \text{при} \quad \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}-a\le\dfrac{\hat{V}_y}{r}<a+\left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d},\\ \dfrac{4a\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^2+\left(\dfrac{p\hat{d}}{r}\right)^2+a^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_y}{r}\ge a+\left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}.\end{cases} \tag{2.29}$$

3. Для второй формулы (2.11) будем иметь

$$\mathbf{A}^b=-æ_1\mathbf{e}_1'J^b, \quad J^b=\int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-b}^{b}|V_x+qz-ry|(V_x+qz-ry)dydz, \tag{2.30}$$

Рассмотрим отдельные случаи.

3.1. $q=r=0$. Тогда, с учетом равенства (2.9),

$$J^b=-\frac{(\mathbf{F}_{eq}\cdot\mathbf{e}_3)}{2\gamma a}|V_x|V_x. \tag{2.31}$$

3.2. $q \neq 0$, $r = 0$. Тогда

$$J^b = \frac{2b}{3}|q|q \begin{cases} \left(\frac{V_x}{q} - \zeta_0\right)^3 - \left(\frac{V_x}{q} + d\right)^3, \text{если} \quad \frac{V_x}{q} < -d, \\ \left(\frac{V_x}{q} - \zeta_0\right)^3 + \left(\frac{V_x}{q} + d\right)^3, \text{если} \quad -d \leq \frac{V_x}{q} < \zeta_0, \\ \left(\frac{V_x}{q} + d\right)^3 - \left(\frac{V_x}{q} - \zeta_0\right)^3, \text{если} \quad \zeta_0 \leq \frac{V_x}{q}. \end{cases} \tag{2.32}$$

3.3. $q = 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$J^b = \frac{2(\zeta_0 + d)}{3}|r|r \begin{cases} -b\left[3\left(\frac{V_x}{r}\right)^2 + b^2\right], \text{если} \quad \frac{V_x}{r} < -b, \\ \frac{V_x}{r}\left[\left(\frac{V_x}{r}\right)^2 + 3b^2\right], \text{если} \quad -b \leq \frac{V_x}{r} < b, \\ b\left[3\left(\frac{V_x}{r}\right)^2 + b^2\right], \text{если} \quad \frac{V_x}{r} > b. \end{cases} \tag{2.33}$$

3.4. $q \neq 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$J^b = |r|r \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-b}^{b} \left|\frac{V_x}{r} + \frac{q}{r}z - y\right| \cdot \left(\frac{V_x}{r} + \frac{q}{r}z - y\right) dydz.$$

С помощью замены переменной (2.26) представим выражение для J^b в виде

$$J^b = |r|r \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-b}^{b} \left|\frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r}\hat{z} - y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r}\hat{z} - y\right) dyd\hat{z}, \quad \hat{V}_x = V_x + q\frac{\zeta_0 - d}{2}. \tag{2.34}$$

Вместо $\hat{z}$ введем другую переменную интегрирования

$$\tilde{s} = \begin{cases} \hat{z}, & \text{при} \quad pr > 0, \\ -\hat{z}, & \text{при} \quad pr < 0. \end{cases}$$

С учетом свойств определенных интегралов получим

$$J^b = |r|r \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-b}^{b} \left|\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\tilde{s} - y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\tilde{s} - y\right) dyd\tilde{s}.$$

Обозначим

$$\tilde{f}(\tilde{s}) = \int\limits_{-b}^{b} \left|\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\tilde{s} - y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\tilde{s} - y\right) dy.$$

Интегрирование дает

$$\tilde{f}(\tilde{s}) = \begin{cases} -\dfrac{2b}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r} + \left|\dfrac{q}{r}\right|\tilde{s}\right)^2 + b^2\right], \text{если} \quad \dfrac{\hat{V}_x}{r} + \left|\dfrac{q}{r}\right|\tilde{s} < -b, \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r} + \left|\dfrac{q}{r}\right|\tilde{s}\right)\left[\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r} + \left|\dfrac{q}{r}\right|\tilde{s}\right)^2 + 3b^2\right], \text{если} \quad -b \le \dfrac{\hat{V}_x}{q} + \left|\dfrac{q}{r}\right|\tilde{s} < b, \\ \dfrac{2b}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r} + \left|\dfrac{q}{r}\right|\tilde{s}\right)^2 + b^2\right], \text{если} \quad \dfrac{\hat{V}_x}{r} + \left|\dfrac{q}{r}\right|\tilde{s} > b. \end{cases}$$

После интегрирования по $\tilde{s}$ получим

3.4.1. Для $|q/r| < b/\hat{d}$:

$$J^b = |r|r\begin{cases} -\dfrac{4b\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{q\hat{d}}{r}\right)^2 + b^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_x}{r} < -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \tilde{D}_1, \quad \text{при} \quad -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{\hat{V}_x}{r} < -b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ 4\dfrac{\hat{V}_x}{r}\hat{d}\left\{\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{q\hat{d}}{r}\right)^2\right] + b^2\right\}, \text{при} -b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{\hat{V}_x}{r} < b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \tilde{D}_2, \quad \text{при} \quad b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{\hat{V}_x}{r} < b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{4b\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{q\hat{d}}{r}\right)^2 + b^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_x}{r} \ge b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \end{cases} \tag{2.35}$$

где

$$\tilde{D}_1 = \left|\frac{r}{q}\right|\left\{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^4 + b^4\right] + b^2\left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^2 + \frac{2b}{3}\left[\left(\frac{\hat{V}_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b^2\left(\frac{\hat{V}_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)\right]\right\},$$

$$\tilde{D}_2 = \left|\frac{r}{q}\right|\left\{\frac{2b}{3}\left[\left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^3 + b^2\left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)\right] - \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\hat{V}_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^4 + b^4\right] - \right.$$
$$\left. - b^2\left(\frac{\hat{V}_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^2\right\}.$$

3.4.2. Для $|q/r| > b/\hat{d}$:

$$J^b = |r|r\begin{cases} -\dfrac{4b\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{q\hat{d}}{r}\right)^2 + b^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_x}{r} < -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \tilde{D}_1, \quad -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \leq \dfrac{\hat{V}_x}{r} < b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{4b|r|}{3|q|}\dfrac{\hat{V}_x}{r}\left[\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^2 + 3\left(\dfrac{q}{r}\hat{d}\right)^2 + b^2\right], \text{ при } b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \leq \dfrac{\hat{V}_x}{r} < \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} - b, \\ \tilde{D}_2, \quad \text{при} \quad \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} - b \leq \dfrac{\hat{V}_x}{r} < b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{4b\hat{d}}{3}\left[3\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{q\hat{d}}{r}\right)^2 + b^2\right], \text{при} \quad \dfrac{\hat{V}_x}{r} > b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}. \end{cases} \qquad (2.36)$$

Перейдем к вычислению моментов сил сопротивления, определенных формулами (2.10). При этом будем считать, что сила сопротивления приложена к той стороне плота, для которой скорость соответствующего элемента плота направлена в сторону внешней нормали. Четвертую формулу (2.11) можно представить в виде

$$\mathbf{B}^d = -\mathbf{B}_1^d - \mathbf{B}_2^d,$$

где

$$\mathbf{B}_1^d = æ\left(\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{v}dydx - \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}_3 v_z dydx\right),$$

$$\mathbf{B}_2^d = æ_1\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}_3'|v_z|v_z dydx.$$

Выражение для момента $\mathbf{B}_1^d$ можно переписать в виде

$$\mathbf{B}_1^d = æ\left[\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d dxdy \times \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\rho_d^2 dxdy - \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_d)dxdy - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}_3' v_z\, dxdy\right].$$

Выполняя интегрирование, найдем для $\mathbf{B}_1^d = B_{1x}^d\mathbf{e}_1' + B_{1y}^d\mathbf{e}_2' + B_{1z}^d\mathbf{e}_3'$:

$$\begin{aligned} B_{1x}^d &= 4æab[d(\dot{\xi}a_{12} + \dot{\eta}a_{22} - \dot{\zeta}a_{32}) + pd^2], \\ B_{1y}^d &= 4æab[-d(\dot{\xi}a_{11} + \dot{\eta}a_{21} - \dot{\zeta}a_{31}) + qd^2], \\ B_{1z}^d &= \frac{4}{3}æabr(a^2 + b^2). \end{aligned} \qquad (2.37)$$

4. Вычислим $\mathbf{B}_2^d = B_{2x}^d \mathbf{e}_1' + B_{2y}^d \mathbf{e}_2' + B_{2z}^d \mathbf{e}_3'$. Учтем, что $\boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}_3' = y\mathbf{e}_1' - x\mathbf{e}_2'$. Поэтому $B_{2z}^d = 0$. Чтобы получить формулы для других компонент, рассмотрим возможные случаи.

4.1. $p = q = 0$. Тогда $\mathbf{B}_2^d = 0$.

4.2. $p = 0$, $q \neq 0$. Тогда, очевидно,

$$B_{2x}^d = æ_1 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} y|V_z - qx|(V_z - qx)dydx = æ_1 \int\limits_{-a}^{a} |V_z - qx|(V_z - qx) \int\limits_{-b}^{b} ydydx = 0.$$

$$B_{2y}^d = -æ_1 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} x|V_z - qx|(V_z - qx)dydx = -2æ_1 b|q|q \int\limits_{-a}^{a} x \left|\frac{V_z}{q} - x\right| \left(\frac{V_z}{q} - x\right) dx.$$

Следовательно,

$$B_{2y}^d = -2æ_1 b|q|q \begin{cases} \dfrac{4}{3}\dfrac{V_z}{q}a^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{q} < -a, \\ \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^4 - 6a^2\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 - 3a^4\right], \text{ если } -a \leq \dfrac{V_z}{q} < a, \\ -\dfrac{4}{3}\dfrac{V_z}{q}a^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{q} \geq a. \end{cases} \quad (2.38)$$

4.3. $p \neq 0$, $q = 0$. Тогда, очевидно,

$$B_{2x}^d = æ_1 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} y|V_z + py|(V_z + py)dydx = 2æ_1 a|p|p \int\limits_{-b}^{b} y \left|\frac{V_z}{p} + y\right| \left(\frac{V_z}{p} + y\right) dy.$$

$$B_{2y}^d = -æ_1 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} x|V_z + py|(V_z + py)dydx = -æ_1 \int\limits_{-b}^{b} |V_z + py|(V_z + py) \int\limits_{-a}^{a} xdxdy = 0.$$

Следовательно,

$$B_{2x}^d = -2æ_1 a|p|p \begin{cases} \dfrac{4}{3}\dfrac{V_z}{p}b^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{p} < -b, \\ \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{V_z}{p}\right)^4 - 6b^2\left(\dfrac{V_z}{p}\right)^2 - 3b^4\right], \text{ если } -b \leq \dfrac{V_z}{p} < b, \\ -\dfrac{4}{3}\dfrac{V_z}{p}b^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{p} \geq b. \end{cases} \quad (2.39)$$

4.4. $q \neq 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$B_{2x}^d = æ_1 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} y|V_z + py - qx|(V_z + py - qx)dydx.$$

$$B_{2y}^d = -æ_1 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} x|V_z + py - qx|(V_z + py - qx)dydx.$$

С помощью замен переменных, аналогичных (2.19),

$$s_y = \begin{cases} y, & \text{при} \quad pq > 0, \\ -y, & \text{при} \quad pq < 0, \end{cases} \qquad s_x = \begin{cases} x, & \text{при} \quad pq > 0, \\ -x, & \text{при} \quad pq < 0, \end{cases}$$

преобразуем выражения для B_{2x}^d и B_{2y}^d к виду

$$B_{2x}^d = æ_1|p|p \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} y \left| \frac{V_z}{p} - \left|\frac{q}{p}\right| s_x + y \right| \left(\frac{V_z}{p} - \left|\frac{q}{p}\right| s_x + y \right) dyds_x,$$

$$B_{2y}^d = -æ_1|q|q \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-a}^{a} x \left| \frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| s_y - x \right| \left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right| s_y - x \right) dxds_y.$$

Обозначим

$$V_z^x = V_z - \left|\frac{q}{p}\right| ps_x, \quad V_z^y = V_z + \left|\frac{p}{q}\right| qs_y.$$

Пусть, кроме того,

$$f_x(s_x) = \int\limits_{-b}^{b} y \left| \frac{V_z^x}{p} + y \right| \cdot \left(\frac{V_z^x}{p} + y \right) dy,$$

$$f_y(s_y) = \int\limits_{-a}^{a} x \left| \frac{V_z^y}{q} - x \right| \cdot \left(\frac{V_z^y}{q} - x \right) dx.$$

Тогда

$$f_x(s_x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{3}\dfrac{V_z^x}{p}b^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_z^x}{p} < -b, \\ -\dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{V_z^x}{p}\right)^4 - 6b^2\left(\dfrac{V_z^x}{p}\right)^2 - 3b^4\right], \ \text{если} \ -b \le \dfrac{V_z^x}{p} < b, \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{V_z^x}{p}b^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_z^x}{p} \ge b. \end{cases} \tag{2.40}$$

$$f_y(s_y) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\dfrac{V_z^y}{q}a^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_z^y}{q} < -a, \\ \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{V_z^y}{q}\right)^4 - 6a^2\left(\dfrac{V_z^y}{q}\right)^2 - 3a^4\right], \ \text{если} \ -a \le \dfrac{V_z^y}{q} < a, \\ -\dfrac{4}{3}\dfrac{V_z^y}{q}a^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_z^y}{q} \ge a. \end{cases} \tag{2.41}$$

После повторного интегрирования правых частей формулы (2.40) по s_x и формулы (2.41) по s_y будем иметь

4.4.1. $|p/q| < a/b$:

$$B_{2x}^d = æ_1|p|p \begin{cases} -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{p}ab^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{p} < -b - \left|\dfrac{q}{p}\right| a, \\ L_1, \text{ если } -b - \left|\dfrac{q}{p}\right| a \le \dfrac{V_z}{p} < b - \left|\dfrac{q}{p}\right| a, \\ \left|\dfrac{4p}{3q}\right| b^3 \left[\left(\dfrac{V_z}{p}\right)^2 + \left(\dfrac{q}{p}a\right)^2 + \dfrac{b^2}{5}\right], \text{ если } b - \left|\dfrac{q}{p}\right| a \le \dfrac{V_z}{p} < \left|\dfrac{q}{p}\right| a - b, \\ L_2, \text{ если } \left|\dfrac{q}{p}\right| a - b \le \dfrac{V_z}{p} < b + \left|\dfrac{q}{p}\right| a, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{p}ab^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{p} \ge b + \left|\dfrac{q}{p}\right| a, \end{cases} \tag{2.42}$$

где

$$L_1 = \frac{1}{6}\left|\frac{p}{q}\right| \left\{ \frac{1}{5}\left[4b^5 - \left(\frac{V_z}{p} + \left|\frac{q}{p}\right| a\right)^5\right] + 2b^2\left(\frac{V_z}{p} + \left|\frac{q}{p}\right| a\right)^3 + 3b^4\left(\frac{V_z}{p} + \left|\frac{q}{p}\right| a\right) + \right.$$
$$\left. + 4b^3\left(\frac{V_z}{p} - \left|\frac{q}{p}\right| a\right)^2 \right\}.$$
$$L_2 = \frac{1}{6}\left|\frac{p}{q}\right| \left\{ \frac{1}{5}\left[4b^5 + \left(\frac{V_z}{p} - \left|\frac{q}{p}\right| a\right)^5\right] - 2b^2\left(\frac{V_z}{p} - \left|\frac{q}{p}\right| a\right)^3 - 3b^4\left(\frac{V_z}{p} - \left|\frac{q}{p}\right| a\right) + \right.$$
$$\left. + 4b^3\left(\frac{V_z}{p} + \left|\frac{q}{p}\right| a\right)^2 \right\}.$$

Далее

$$B_{2y}^d = æ_1|q|q \begin{cases} \dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{q}ba^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{q} < -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ \mathcal{L}_1, \text{если } -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < \left|\dfrac{p}{q}\right| b - a, \\ \mathcal{L}_2, \text{если } \left|\dfrac{p}{q}\right| b - a \le \dfrac{V_z}{q} < a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ \mathcal{L}_3, \text{если } a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{q}ba^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{q} \ge a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \end{cases} \tag{2.43}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{6}\left|\frac{q}{p}\right|\left\{4a^3\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^2 - \frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^5 - 4a^5\right] + 2a^2\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^3 + \right.$$
$$\left. +3a^4\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right|b\right)\right\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{6}\left|\frac{q}{p}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^5 - \left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^5\right] + 2a^2\left[\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^3 - \left(\frac{V_z}{q} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^3\right] + 6a^4\left|\frac{p}{q}\right|b\right\},$$

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{6}\left|\frac{q}{p}\right|\left\{4a^3\left(\frac{V_z}{q} + \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^2 + \frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^5 + 4a^5\right] + 2a^2\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right|b\right)^3 - \right.$$
$$\left. -3a^4\left(\frac{V_z}{q} - \left|\frac{p}{q}\right|b\right)\right\}.$$

4.4.2. $|p/q| > a/b$:

$$B^d_{2x} = æ_1|p|p\begin{cases} -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{p}ab^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{p} < -b - \left|\dfrac{q}{p}\right|a, \\ L_1, \text{ если } -b - \left|\dfrac{q}{p}\right|a \le \dfrac{V_z}{p} < -b + \left|\dfrac{q}{p}\right|a, \\ L_3, \text{ если } -b + \left|\dfrac{q}{p}\right|a \le \dfrac{V_z}{p} < b - \left|\dfrac{q}{p}\right|a, \\ L_2, \text{ если } \quad b - \left|\dfrac{q}{p}\right|a \le \dfrac{V_z}{p} < b + \left|\dfrac{q}{p}\right|a, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{p}ab^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{p} \ge b + \left|\dfrac{q}{p}\right|a, \end{cases} \tag{2.44}$$

где

$$L_3 = \frac{1}{6}\left|\frac{p}{q}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_z}{p} - \left|\frac{q}{p}\right|a\right)^5 - \left(\frac{V_z}{p} + \left|\frac{q}{p}\right|a\right)^5\right] + 2b^2\left[\left(\frac{V_z}{p} + \left|\frac{q}{p}\right|a\right)^3 - \left(\frac{V_z}{p} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \left|\frac{q}{p}\right|a\right)^3\right] + 6b^4\left|\frac{q}{p}\right|a\right\},$$

$$B_{2y}^d = æ_1|q|q \begin{cases} \dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{q}ba^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{q} < -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ \mathcal{L}_1, \text{если } -a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ -\left|\dfrac{4q}{3p}\right| a^3 \left[\left(\dfrac{V_z}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{q}b\right)^2 + \dfrac{a^2}{5}\right], \text{ если } a - \left|\dfrac{p}{q}\right| b \le \dfrac{V_z}{q} < \left|\dfrac{p}{q}\right| b - a, \\ \mathcal{L}_3, \text{если } \left|\dfrac{p}{q}\right| b - a \le \dfrac{V_z}{q} < a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b, \\ -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_z}{q}ba^3, \text{ если } \dfrac{V_z}{q} \ge a + \left|\dfrac{p}{q}\right| b. \end{cases} \quad (2.45)$$

Перейдем к вычислению моментов сил сопротивления, действующих на боковые стороны.

5. Пятую формулу (2.11) можно представить в виде

$$\mathbf{B}^a = -æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-a}^{a} \boldsymbol{\rho}_a \times \mathbf{e}_2' |v_y| v_y dx dz = B_x^a \mathbf{e}_1' + B_z^a \mathbf{e}_3',$$

где

$$B_x^a = æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-a}^{a} z|v_y|v_y dx dz, \quad B_z^a = -æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-a}^{a} x|v_y|v_y dx dz, \quad v_y = V_y + rx - pz.$$

Воспользуемся заменой переменных (2.26). Тогда

$$B_x^a = æ_1 \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-a}^{a} \hat{z}|\hat{V}_y - p\hat{z} + rx| \cdot (\hat{V}_y - p\hat{z} + rx) dx d\hat{z} + æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a,$$

$$B_z^a = -æ_1 \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-a}^{a} x|\hat{V}_y - p\hat{z} + rx| \cdot (\hat{V}_y - p\hat{z} + rx) dx d\hat{z},$$

где J^a определено формулой (2.22), а $\hat{V}_y$ – формулой (2.27).

Рассмотрим отдельные случаи.

5.1. $p = r = 0$. Тогда

$$B_x^a = æ_1 a(\zeta_0^2 - d^2)|V_y|V_y, \quad B_z^a = 0. \quad (2.46)$$

5.2. $p \ne 0$, $r = 0$. Тогда

$$B_x^a = 2æ_1 a \mathcal{B}_x^a + æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a, \quad B_z^a = 0, \quad (2.47)$$

где

$$\mathcal{B}_x^a = \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z}|\hat{V}_y - p\hat{z}| \cdot (\hat{V}_y - p\hat{z})d\hat{z} = |p|p \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left|\frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z}\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z}\right) d\hat{z},$$

а J^a вычисляется по формулам (2.24). После интегрирования получим

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p \begin{cases} \dfrac{4}{3}\dfrac{\hat{V}_y}{p}\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_y}{p} < -\hat{d}, \\ \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{\hat{V}_y}{p}\right)^4 - 6\hat{d}^2\left(\dfrac{\hat{V}_y}{p}\right)^2 - 3\hat{d}^4\right], \text{ если } -\hat{d} \le \dfrac{\hat{V}_y}{p} < \hat{d}, \\ -\dfrac{4}{3}\dfrac{\hat{V}_y}{p}\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_y}{p} \ge \hat{d}. \end{cases} \tag{2.48}$$

5.3. $p = 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$B_x^a = æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a, \quad B_z^a = -2æ_1 \hat{d}\mathcal{B}_z^a, \tag{2.49}$$

где

$$\mathcal{B}_z^a = \int\limits_{-a}^{a} x|\hat{V}_y + rx| \cdot (\hat{V}_y + rx)dx = |r|r \int\limits_{-a}^{a} x \left|\frac{\hat{V}_y}{r} + x\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{r} + x\right) dx.$$

Отсюда

$$\mathcal{B}_z^a = -|r|r \begin{cases} \dfrac{4}{3}\dfrac{\hat{V}_y}{r}a^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_y}{r} < -a, \\ \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^4 - 6a^2\left(\dfrac{\hat{V}_y}{r}\right)^2 - 3a^4\right], \text{ если } -a \le \dfrac{\hat{V}_y}{r} < a, \\ -\dfrac{4}{3}\dfrac{\hat{V}_y}{r}a^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_y}{r} \ge a. \end{cases} \tag{2.50}$$

5.4. $p \neq 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$B_x^a = æ_1 \mathcal{B}_x^a + æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^a, \quad B_z^a = -æ_1 \mathcal{B}_z^a, \tag{2.51}$$

где

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left|\frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \frac{r}{p}x\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \frac{r}{p}x\right) d\hat{z}dx,$$

$$\mathcal{B}_z^a = |r|r \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} x \left|\frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r}\hat{z} + x\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{r} - \frac{p}{r}\hat{z} + x\right) d\hat{z}dx.$$

С помощью замен переменных, аналогичных (2.19),

$$s_x = \begin{cases} x, & \text{при} \quad pr > 0, \\ -x, & \text{при} \quad pr < 0, \end{cases} \qquad s_z = \begin{cases} \hat{z}, & \text{при} \quad pr > 0, \\ -\hat{z}, & \text{при} \quad pr < 0 \end{cases}$$

преобразуем выражения для $\mathcal{B}_x^a$ и $\mathcal{B}_z^a$ к виду

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \left|\frac{r}{p}\right| s_x \right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{p} - \hat{z} + \left|\frac{r}{p}\right| s_x \right) d\hat{z} ds_x,$$

$$\mathcal{B}_z^a = |r|r \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} x \left| \frac{\hat{V}_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right| s_z + x \right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right| s_z + x \right) ds_z dx.$$

Обозначим

$$V_y^x = \hat{V}_y + \left|\frac{r}{p}\right| p s_x, \quad V_y^z = \hat{V}_y - \left|\frac{p}{r}\right| r s_z.$$

Пусть, кроме того,

$$f_x^a(s_x) = \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{V_y^x}{p} - \hat{z} \right| \cdot \left(\frac{V_y^x}{p} - \hat{z} \right) d\hat{z},$$

$$f_z^a(s_z) = \int\limits_{-a}^{a} x \left| \frac{V_y^z}{r} + x \right| \cdot \left(\frac{V_y^z}{r} + x \right) dx.$$

Тогда

$$f_x^a(s_x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3} \dfrac{V_y^x}{p} \hat{d}^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_y^x}{p} < -\hat{d}, \\ \dfrac{1}{6} \left[\left(\dfrac{V_y^x}{p} \right)^4 - 6\hat{d}^2 \left(\dfrac{V_y^x}{p} \right)^2 - 3\hat{d}^4 \right], \ \text{если} \ -\hat{d} \le \dfrac{V_y^x}{p} < \hat{d}, \\ -\dfrac{4}{3} \dfrac{V_y^x}{p} \hat{d}^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_y^x}{p} \ge \hat{d}. \end{cases} \tag{2.52}$$

$$f_z^a(s_z) = \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \dfrac{V_y^z}{r} a^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_y^z}{r} < -a, \\ -\dfrac{1}{6} \left[\left(\dfrac{V_y^z}{r} \right)^4 - 6a^2 \left(\dfrac{V_y^z}{r} \right)^2 - 3a^4 \right], \ \text{если} \ -a \le \dfrac{V_y^z}{r} < a, \\ \dfrac{4}{3} \dfrac{V_y^z}{r} a^3, \ \text{если} \ \dfrac{V_y^z}{r} \ge a. \end{cases} \tag{2.53}$$

После повторного интегрирования правых частей формулы (2.52) по s_x и формулы (2.53) по s_z будем иметь

5.4.1. $|r/p| < \hat{d}/a$:

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p\begin{cases} \dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{p}a\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{p} < -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \\ \mathcal{L}_1^a, \text{если } -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a \leq \dfrac{V_y}{p} < \left|\dfrac{r}{p}\right|a - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_2^a, \text{если } \left|\dfrac{r}{p}\right|a - \hat{d} \leq \dfrac{V_y}{p} < \hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \\ \mathcal{L}_3^a, \text{если } \hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a \leq \dfrac{V_y}{p} < \hat{d} + \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \\ -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{p}a\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{p} \geq \hat{d} + \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \end{cases} \tag{2.54}$$

где

$$\mathcal{L}_1^a = \frac{1}{6}\left|\frac{p}{r}\right|\left\{4\hat{d}^3\left(\frac{V_y}{p} - \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^2 - \frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_y}{p} + \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^5 - 4\hat{d}^5\right] + 2\hat{d}^2\left(\frac{V_y}{p} + \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^3 + \right.$$
$$\left. +3\hat{d}^4\left(\frac{V_y}{p} + \left|\frac{r}{p}\right|a\right)\right\}.$$

$$\mathcal{L}_2^a = \frac{1}{6}\left|\frac{p}{r}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_y}{p} - \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^5 - \left(\frac{V_y}{p} + \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^5\right] + 2\hat{d}^2\left[\left(\frac{V_y}{p} + \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^3 - \left(\frac{V_y}{p} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^3\right] + 6\hat{d}^4\left|\frac{r}{p}\right|a\right\},$$

$$\mathcal{L}_3^a = \frac{1}{6}\left|\frac{p}{r}\right|\left\{4\hat{d}^3\left(\frac{V_y}{p} + \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^2 + \frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_y}{p} - \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^5 + 4\hat{d}^5\right] + 2\hat{d}^2\left(\frac{V_y}{p} - \left|\frac{r}{p}\right|a\right)^3 - \right.$$
$$\left. -3\hat{d}^4\left(\frac{V_y}{p} - \left|\frac{r}{p}\right|a\right)\right\}.$$

$$\mathcal{B}_z^a = |r|r\begin{cases} -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{r}\hat{d}a^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{r} < -a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ L_1^a, \text{ если } -a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \leq \dfrac{V_y}{r} < a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \left|\dfrac{4r}{3p}\right|a^3\left[\left(\dfrac{V_y}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{r}\hat{d}\right)^2 + \dfrac{a^2}{5}\right], \text{если } a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \leq \dfrac{V_y}{r} < \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} - a, \\ L_2^a, \text{ если } \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} - a \leq \dfrac{V_y}{r} < a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{r}\hat{d}a^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{r} \geq a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \end{cases} \tag{2.55}$$

где

$$L_1^a = \frac{1}{6}\left|\frac{r}{p}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[4a^5 - \left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^5\right] + 2a^2\left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3 + 3a^4\left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right) + \right.$$
$$\left. + 4a^3\left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^2\right\}.$$
$$L_2^a = \frac{1}{6}\left|\frac{r}{p}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[4a^5 + \left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^5\right] - 2a^2\left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3 - 3a^4\left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right) + \right.$$
$$\left. + 4a^3\left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^2\right\}.$$

Далее

5.4.2. $|r/p| > \hat{d}/a$:

$$\mathcal{B}_x^a = |p|p\begin{cases} \dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{p}a\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{p} < -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \\ \mathcal{L}_1^a, \text{если } -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a \le \dfrac{V_y}{p} < \hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \\ -\left|\dfrac{4p}{3r}\right|\hat{d}^3\left[\left(\dfrac{V_y}{p}\right)^2 + \left(\dfrac{r}{p}a\right)^2 + \dfrac{\hat{d}^2}{5}\right], \text{ если } \hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right|a \le \dfrac{V_y}{p} < \left|\dfrac{r}{p}\right|a - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_3^a, \text{если } \left|\dfrac{r}{p}\right|a - \hat{d} \le \dfrac{V_y}{p} < \hat{d} + \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \\ -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{p}a\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{p} \ge \hat{d} + \left|\dfrac{r}{p}\right|a, \end{cases} \tag{2.56}$$

$$\mathcal{B}_z^a = |r|r\begin{cases} -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{r}\hat{d}a^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{r} < -a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ L_1^a, \text{ если } -a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{V_y}{r} < -a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ L_3^a, \text{ если } -a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{V_y}{r} < a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ L_2^a, \text{ если } \quad a - \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{V_y}{r} < a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{V_y}{r}\hat{d}a^3, \text{ если } \dfrac{V_y}{r} \ge a + \left|\dfrac{p}{r}\right|\hat{d}, \end{cases} \tag{2.57}$$

где

$$L_3^a = \frac{1}{6}\left|\frac{r}{p}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_y}{r} - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^5 - \left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^5\right] + 2a^2\left[\left(\frac{V_y}{r} + \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3 - \left(\frac{V_y}{r} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right)^3\right] + 6a^4\left|\frac{p}{r}\right|\hat{d}\right\}.$$

6. Шестую формулу (2.11) можно представить в виде

$$\mathbf{B}^b = -æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-b}^{b} \boldsymbol{\rho}_b \times \mathbf{e}_1' |v_x| v_x dydz = B_y^b \mathbf{e}_2' + B_z^b \mathbf{e}_3',$$

где

$$B_y^b = -æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-b}^{b} z |v_x| v_x dydz, \quad B_z^a = æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0} \int\limits_{-b}^{b} y |v_x| v_x dydz, \quad v_x = V_x + qz - ry.$$

Воспользуемся заменой переменных (2.26). Тогда

$$B_y^b = -æ_1 \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-b}^{b} \hat{z} |\hat{V}_x + q\hat{z} - ry| \cdot (\hat{V}_x + q\hat{z} - ry) dyd\hat{z} - æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b,$$

$$B_z^b = æ_1 \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \int\limits_{-b}^{b} y |\hat{V}_x + q\hat{z} - ry| \cdot (\hat{V}_y + q\hat{z} - ry) dyd\hat{z},$$

где J^b определено формулой (2.30), а $\hat{V}_x$ – формулой (2.34).

Рассмотрим отдельные случаи.

6.1. $q = r = 0$. Тогда

$$B_y^b = -æ_1 b (\zeta_0^2 - d^2) |V_x| V_x, \quad B_z^b = 0. \tag{2.58}$$

6.2. $q \neq 0$, $r = 0$. Тогда

$$B_y^b = -2æ_1 b \mathcal{B}_y^b - æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b, \quad B_z^b = 0, \tag{2.59}$$

где

$$\mathcal{B}_y^b = \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} |\hat{V}_x + q\hat{z}| \cdot (\hat{V}_x + q\hat{z}) d\hat{z} = |q| q \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left| \frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} \right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} \right) d\hat{z},$$

а J^b вычисляется по формулам (2.32). После интегрирования получим

$$\mathcal{B}_y^b = |q| q \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \dfrac{\hat{V}_x}{q} \hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_x}{q} < -\hat{d}, \\ -\dfrac{1}{6} \left[\left(\dfrac{\hat{V}_x}{q} \right)^4 - 6\hat{d}^2 \left(\dfrac{\hat{V}_x}{q} \right)^2 - 3\hat{d}^4 \right], \text{ если } -\hat{d} \leq \dfrac{\hat{V}_x}{q} < \hat{d}, \\ \dfrac{4}{3} \dfrac{\hat{V}_x}{q} \hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_x}{q} \geq \hat{d}. \end{cases} \tag{2.60}$$

6.3. $q = 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$B_y^b = -æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b, \quad B_z^b = 2æ_1 \hat{d} \mathcal{B}_z^b, \tag{2.61}$$

где J^b вычисляется по формулам (2.33),

$$\mathcal{B}_z^b = \int\limits_{-b}^{b} y|\hat{V}_x - ry| \cdot (\hat{V}_x - ry)dx = |r|r \int\limits_{-b}^{b} y \left|\frac{\hat{V}_x}{r} - y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{r} - y\right) dy.$$

Отсюда

$$\mathcal{B}_z^b = |r|r \begin{cases} \dfrac{4}{3}\dfrac{\hat{V}_x}{r} b^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_x}{r} < -b, \\ \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^4 - 6b^2\left(\dfrac{\hat{V}_x}{r}\right)^2 - 3b^4\right], \text{ если } -b \leq \dfrac{\hat{V}_x}{r} < b, \\ -\dfrac{4}{3}\dfrac{\hat{V}_x}{r} b^3, \text{ если } \dfrac{\hat{V}_x}{r} \geq b. \end{cases} \tag{2.62}$$

6.4. $q \neq 0$, $r \neq 0$. Тогда

$$B_y^b = -æ_1 \mathcal{B}_y^b - æ_1 \frac{\zeta_0 - d}{2} J^b, \quad B_z^b = æ_1 \mathcal{B}_z^b, \tag{2.63}$$

где

$$\mathcal{B}_y^b = |q|q \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} \hat{z} \left|\frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} - \frac{r}{q}y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{q} + \hat{z} - \frac{r}{q}y\right) d\hat{z}dy,$$

$$\mathcal{B}_z^b = |r|r \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} y \left|\frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r}\hat{z} - y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{r} + \frac{q}{r}\hat{z} - y\right) d\hat{z}dy.$$

С помощью замен переменных, аналогичных (2.19),

$$s_y = \begin{cases} -y, & \text{при} \quad qr > 0, \\ y, & \text{при} \quad qr < 0, \end{cases} \qquad s_z = \begin{cases} -\hat{z}, & \text{при} \quad qr > 0, \\ \hat{z}, & \text{при} \quad qr < 0 \end{cases}$$

преобразуем выражения для $\mathcal{B}_y^b$ и $\mathcal{B}_z^b$ к виду

$$\mathcal{B}_y^b = -|q|q \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} t_z \left|\frac{\hat{V}_x}{q} - t_z + \left|\frac{r}{q}\right| s_y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{q} - t_z + \left|\frac{r}{q}\right| s_y\right) dt_z ds_y,$$

$$\mathcal{B}_z^a = -|r|r \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-\hat{d}}^{\hat{d}} t_y \left|\frac{\hat{V}_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right| s_z + t_y\right| \cdot \left(\frac{\hat{V}_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right| s_z + t_y\right) ds_z dt_y,$$

где $t_z = -\hat{z}$, $t_y = -y$. Тогда для получения окончательного результата можно воспользоваться результатами раздела 5.4 с заменой

$$V_y \longrightarrow V_x, \quad a \longrightarrow b, \quad p \longrightarrow q.$$

В итоге будем иметь

6.4.1. $|r/q| < \hat{d}/b$:

$$\mathcal{B}_y^b = -|q|q \begin{cases} \dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{q}b\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{q} < -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right| b, \\ \mathcal{L}_1^b, \text{если } -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right| b \le \dfrac{V_x}{q} < \left|\dfrac{r}{p}\right| b - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_2^b, \text{если } \left|\dfrac{r}{p}\right| b - \hat{d} \le \dfrac{V_x}{q} < \hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right| b, \\ \mathcal{L}_3^b, \text{если } \hat{d} - \left|\dfrac{r}{p}\right| b \le \dfrac{V_x}{q} < \hat{d} + \left|\dfrac{r}{p}\right| b, \\ -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{q}b\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{q} \ge \hat{d} + \left|\dfrac{r}{p}\right| b, \end{cases} \tag{2.64}$$

где

$$\mathcal{L}_1^b = \frac{1}{6}\left|\frac{q}{r}\right|\left\{4\hat{d}^3\left(\frac{V_x}{q} - \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^2 - \frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_x}{q} + \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^5 - 4\hat{d}^5\right] + 2\hat{d}^2\left(\frac{V_x}{q} + \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^3 + \right.$$
$$\left. +3\hat{d}^4\left(\frac{V_x}{q} + \left|\frac{r}{q}\right| b\right)\right\}.$$
$$\mathcal{L}_2^b = \frac{1}{6}\left|\frac{q}{r}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_x}{q} - \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^5 - \left(\frac{V_x}{q} + \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^5\right] + 2\hat{d}^2\left[\left(\frac{V_x}{q} + \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^3 - \left(\frac{V_x}{q} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^3\right] + 6\hat{d}^4\left|\frac{r}{q}\right| b\right\},$$
$$\mathcal{L}_3^b = \frac{1}{6}\left|\frac{q}{r}\right|\left\{4\hat{d}^3\left(\frac{V_x}{q} + \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^2 + \frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_x}{q} - \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^5 + 4\hat{d}^5\right] + 2\hat{d}^2\left(\frac{V_x}{q} - \left|\frac{r}{q}\right| b\right)^3 - \right.$$
$$\left. -3\hat{d}^4\left(\frac{V_x}{q} - \left|\frac{r}{q}\right| b\right)\right\}.$$

$$\mathcal{B}_z^b = -|r|r\begin{cases} -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{r}\hat{d}b^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{r} < -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ L_1^b, \text{ если } -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{V_x}{r} < b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \left|\dfrac{4r}{3p}\right| b^3\left[\left(\dfrac{V_x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{q}{r}\hat{d}\right)^2 + \dfrac{b^2}{5}\right], \text{ если } b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \le \dfrac{V_x}{r} < \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} - b, \\ L_2^b, \text{ если } \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} - b \le \dfrac{V_x}{r} < b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{r}\hat{d}b^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{r} \ge b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \end{cases} \tag{2.65}$$

где

$$L_1^b = \frac{1}{6}\left|\frac{r}{q}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[4b^5 - \left(\frac{V_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^5\right] + 2b^2\left(\frac{V_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^3 + 3b^4\left(\frac{V_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right) + \right.$$
$$\left. + 4b^3\left(\frac{V_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^2\right\}.$$
$$L_2^b = \frac{1}{6}\left|\frac{r}{q}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[4b^5 + \left(\frac{V_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^5\right] - 2b^2\left(\frac{V_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^3 - 3b^4\left(\frac{V_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right) + \right.$$
$$\left. + 4b^3\left(\frac{V_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^2\right\}.$$

Далее

6.4.2. $|r/q| > \hat{d}/b$:

$$\mathcal{B}_y^b = -|q|q\begin{cases} \dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{q}b\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{q} < -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{q}\right|b, \\ \mathcal{L}_1^b, \text{если } -\hat{d} - \left|\dfrac{r}{q}\right|b \le \dfrac{V_x}{q} < \hat{d} - \left|\dfrac{r}{q}\right|b, \\ -\left|\dfrac{4q}{3r}\right|\hat{d}^3\left[\left(\dfrac{V_x}{q}\right)^2 + \left(\dfrac{r}{q}b\right)^2 + \dfrac{\hat{d}^2}{5}\right], \text{ если } \hat{d} - \left|\dfrac{r}{q}\right|b \le \dfrac{V_x}{q} < \left|\dfrac{r}{q}\right|b - \hat{d}, \\ \mathcal{L}_3^b, \text{если } \left|\dfrac{r}{q}\right|b - \hat{d} \le \dfrac{V_x}{q} < \hat{d} + \left|\dfrac{r}{q}\right|b, \\ -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{q}b\hat{d}^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{q} \ge \hat{d} + \left|\dfrac{r}{q}\right|b, \end{cases} \tag{2.66}$$

$$\mathcal{B}_z^b = -|r|r \begin{cases} -\dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{r}\hat{d}b^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{r} < -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ L_1^b, \text{ если } -b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \leq \dfrac{V_x}{r} < -b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ L_3^b, \text{ если } -b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \leq \dfrac{V_x}{r} < b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ L_2^b, \text{ если } \quad b - \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d} \leq \dfrac{V_x}{r} < b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{V_x}{r}\hat{d}b^3, \text{ если } \dfrac{V_x}{r} \geq b + \left|\dfrac{q}{r}\right|\hat{d}, \end{cases} \tag{2.67}$$

где

$$L_3^b = \frac{1}{6}\left|\frac{r}{q}\right|\left\{\frac{1}{5}\left[\left(\frac{V_x}{r} - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^5 - \left(\frac{V_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^5\right] + 2b^2\left[\left(\frac{V_x}{r} + \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^3 - \left(\frac{V_x}{r} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right)^3\right] + 6b^4\left|\frac{q}{r}\right|\hat{d}\right\}.$$

Заключение

Представлена математическая модель сил воздействия спокойной воды на произвольно плавающий по ее поверхности прямоугольный монолитный плот, учитывающая размеры, форму и глубину погружения плота, а также вязкое и волновое сопротивление. Модель предназначена для компьютерного исследования работоспособности алгоритмов управления мобильными роботами в условиях сложной пересеченной местности. Эта модель служит обобщением повсеместно принятых для практического использования законов сопротивления воды и дает возможность исследовать влияние воды не только на поступательное движение плота, но также и на его относительное нестационарное движение вокруг центра масс.

Список литературы

1. Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем. URL: `http://www.umlab.ru` (дата обращения: 18.06.2015).

2. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Управление инсектоморфным роботом при залезании на вершину вертикального угла и при движении по приставной лестнице // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 1. С. 148-157;
Golubev Yu.F., Koryanov V.V. A Control for an Insectomorphic Robot

in Climbing to the Top of a Vertical Corner and in Moving on a Step Ladder. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2008. Vol. 47, No. 1. Pp. 139-148.

3. *Golubev Yu.F., Koryanov V.V.* Motion design for an insectomorphic robot on unstable obstacles // Proc. 11-th Intern. Conf. CLAWAR-2008. Coimbra, Portugal: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008. P. 654-661.

4. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Управление движением инсектоморфного робота на подвижном шаре // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 5. С. 131-142;
Golubev Yu.F., Koryanov V.V. Motion Control for an Insectomorphic Robot on a Movable Ball. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2009. Vol. 48, No. 5. Pp. 801-813.

5. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Залезание инсектоморфного робота на свободно катающийся шар // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 6. С. 182-192;
Golubev Yu.F., Koryanov V.V. Insectomorphic Robot Climbing a Freely Rolling Ball. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2010. Vol. 49, No. 6. Pp. 1009-1019.

6. *Golubev Yu.F., Korianov V.V., Pavlovsky V.E., Panchenko A.V.* Motion Control for the 6-legged Robot in Extreme Conditions. // Proc. of the 16-th Intern. Conf. CLAWAR-2013. Nature-Inspired Mobile Robotics: Sydney. Australia: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013. P. 427-434.

7. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Перелезание инсектоморфного робота через свободно катающийся шар // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 5. С.116-125;
Golubev Yu.F., Koryanov V.V. An Insectomorphic Robot Climbing over a Freely Rolling Ball. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and System Sciences International. 2014. Vol. 53, No 5. Pp. 733-742.

8. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Движение инсектоморфного робота с использованием незакрепленных шаров//Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 50. 24с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-50

9. *Голубев Ю. Ф., Корянов В. В.* Маневрирование инсектоморфного робота на свободно катающихся шарах. Изв. РАН. ТиСУ. 2016. №1. С. 134-146. Golubev Yu. F., Koryanov V. V. Insectomorphic Robot Maneuvering on Freely Rolling Balls. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and Systems Sciences International. 2016. Vol. 55, No. 1. Pp. 125-137.

10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI Гидродинамика. 5-е Издание, стереотипное. М.: Физматлит, 2015. 736 с.

11. *Кочин Н.Е.,Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика., Учебник. Под ред. И.А. Кибеля. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.

12. *Ватлина Я.В., Суров Г.Я.* Результаты исследования сопротивления воды движению лесотранспортных единиц. ИВУЗ. "Лесной журнал". 2014. № 2. С. 52-60.

13. *Митрофанов А.А.* Лесосплав. Новые технологии, научное и техническое обеспечение. Архангельск: Изд-во АГТУ, 2007. 492 с.

14. *Мурашова О.В., Митрофанов А.А.* Исследование гидродинамических характеристик плоских сплоточных единиц на моделях и в натурных условиях. ИВУЗ. "Лесной журнал". 2007. № 1. С. 58-66.

15. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.