ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 50 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 50. 16 с. doi:10.20948/prepr-2016-50
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-50

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

К. А. Попков

О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина

Москва — 2016

Попков К. А.

О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина

Рассматривается задача синтеза неизбыточных схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, реализующих булевы функции от n переменных и допускающих короткие единичные диагностические тесты относительно константных неисправностей типа 0 на выходах элементов. Для каждой булевой функции найдено минимально возможное значение длины такого теста. В частности, доказано, что оно не превосходит двух.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, неисправность, единичный диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

On single diagnostic tests for logic circuits in the Zhegalkin basis

We consider a problem of synthesis of irredundant logic circuits in the basis $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ which implement Boolean functions on n variables and allow short single diagnostic tests regarding constant faults of type 0 at outputs of gates. For each Boolean function, the minimal possible length value of such a test is found. In particular, it is proved that this value does not exceed two.

Key words: logic circuit, fault, single diagnostic test

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S, реализующая булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(x_1, \ldots, x_n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_2(x_1, \ldots, x_n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество T, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный диагностический тест для некоторой схемы S. Введём следующие обозначения: $D^B_{s,diagn}(T)$ — длина теста T; $D^B_{s,diagn}(S) = \min D^B_{s,diagn}(T)$, где минимум берётся по всем единичным диагностическим тестам T для схемы S; $D^B_{s,diagn}(f) = \min D^B_{s,diagn}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{s,diagn}(n) = \max D^B_{s,diagn}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B_{s,diagn}(f)$. Функция $D^B_{s,diagn}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного диагностического теста. По аналогии с функциями $D^B_{s,diagn}$ можно ввести функции $D^B_{s,detect}$, $D^B_{c,detect}$ и $D^B_{c,diagn}$ для соответственно единичного проверяющего, полного проверяющего и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{c,detect}(f)$ и $D^B_{c,diagn}(f)$ не требуется предполагать неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{c,detect}(n)$ — функция Шеннона длины полного проверяющего теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «$\{0,1\}$», «$\{0\}$» или «$\{1\}$» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0 или типа 1 на выходах элементов. Будем считать, что если в базисе содержатся булевы константы (одна или обе), то они подаются со входов схемы, не являются функциональными элементами и, соответственно, не могут быть неисправны.

В работе С. М. Редди [5] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ была получена оценка $D^{B_1;\{0,1\}}_{s,detect}(n) \leqslant n+3$. В дальнейшем результат работы [5] был обобщён С. С Колядой в [6] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д. С. Романовым, который в [7] для любого функционально полного базиса B получил оценку $D^{B;\{0,1\}}_{s,detect}(n) \leqslant 4$. Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин в [8, 9] для любого полного конечного базиса B получил оценку $D^{B;\{0,1\}}_{c,detect}(n) \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n\right)$; Д. С. Романов в [10] доказал, что существует базис B_2, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, в котором $2 \leqslant D^{B_2;\{0,1\}}_{c,detect}(n) \leqslant 4$. В [4] (с. 113, теорема 9) с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что для любого полного базиса B функция $D^{B;\{0,1\}}_{s,diagn}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$; аналогично можно показать, что $D_{s,diagn}^{B;\{p\}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, $p = 0, 1$. Для базиса $B_3 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [11, 12] получил оценки $D_{c,detect}^{B_3;\{p\}}(n) \leqslant n$ и $D_{s,diagn}^{B_3;\{p\}}(n) \leqslant 2n+1$ для $p = 0, 1$. Первая из этих двух оценок впоследствии была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [13] установила, что $D_{c,detect}^{B_3;\{p\}}(n) = 2$; вторая оценка улучшена в [14], где, в частности, доказано, что $D_{s,diagn}^{B_3;\{p\}}(n) = 2$. Ю. В. Бородиной в базисе Жегалкина B_1 удалось найти точное значение функций Шеннона $D_{s,detect}^{B_1;\{1\}}(n) = 1$ [15] и $D_{c,detect}^{B_1;\{0\}}(n) = 1$ [16] (совместно с П. А. Бородиным).

Поскольку в данной работе будут рассматриваться только единичные диагностические тесты, вместо $D_{s,diagn}^{B;\{p\}}(f)$, $D_{s,diagn}^{B;\{p\}}(n)$ для краткости будем писать соответственно $D_p^B(f)$, $D_p^B(n)$, где B — произвольный функционально полный базис, $p = 0, 1$.

Формулировки и доказательства основных результатов

Рассмотрим базис Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$. В качестве неисправностей функциональных элементов будем рассматривать однотипные константные неисправности типа 0 на выходах элементов, т.е. конъюнкторов и сумматоров (напомним, что константы 0 и 1, согласно предположению, подаются со входов схемы). Выделим два возможных представления функции f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ 1 \text{ или } x_i, \tag{$*$}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$$f(x_1, \ldots, x_n) = L_1 \& \ldots \& L_m, \tag{$**$}$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель L_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x_{i_j}}$, либо $x_{i_j} \oplus x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство*

$$D_0^{B_1}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (*), \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (**), \text{ но не в виде } (*), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ не представима ни в одном из видов } (*), (**). \end{cases}$$

Следствие 1. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_0^{B_1}(n) = 2$.*

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что функция $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ при $n \geqslant 2$ не представима ни в одном из видов $(*), (**)$.

Доказательство теоремы 1. Вместо $D_0^{B_1}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Если функция f представима в виде $(*)$, то её, очевидно, можно реализовать схемой, не содержащей конъюнкторов и сумматоров. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому пустое множество для неё является единичным диагностическим тестом, откуда следует равенство $D(f) = 0$.

Пусть теперь функция f представима в виде $(**)$ и не представима в виде $(*)$. Каждый множитель L_j вида $\overline{x_{i_j}} = x_{i_j} \oplus 1$ или $x_{i_j} \oplus x_{i'_j}$ реализуем с использованием одного сумматора, на входы которого подадим соответственно переменную x_{i_j} и базисную функцию 1 или переменные x_{i_j} и $x_{i'_j}$. Затем выходы всех построенных элементов и все входы «x_{i_j}», отвечающие множителям L_j вида x_{i_j}, соединим цепочкой из конъюнкторов. Очевидно, что полученная схема реализует функцию f, а единственной её функцией неисправности является тождественный нуль. Отсюда следует, что данная схема неизбыточна и множество, состоящее из любого одного единичного набора функции f (т.е. набора, на котором f принимает значение 1), является для этой схемы единичным диагностическим тестом длины 1. Поэтому $D(f) \leqslant 1$. С другой стороны, так как функция f не представима в виде $(*)$, то выход любой схемы, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема будет реализовывать тождественный нуль, который надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D(f) \geqslant 1$. В итоге получаем равенство $D(f) = 1$.

Пусть, наконец, функция f не представима ни в одном из видов $(*)$, $(**)$. Докажем сначала, что $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено. Предположим, что $D(f) \leqslant 1$. Аналогично предыдущему случаю показывается, что $D(f) \geqslant 1$, поэтому $D(f) = 1$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема, реализующая функцию f, для которой $D(S) = D(f) = 1$. Тогда для этой схемы существует единичный диагностический тест, состоящий из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$.

Лемма 1. *В указанных предположениях функция, реализуемая на выходе любого элемента схемы S, не меньше f.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т.е. значение функции h, реализуемой на выходе некоторого элемента E схемы S, на каком-то наборе $\tilde{\delta}$ меньше значения функции f на этом же наборе. Тогда $f(\tilde{\delta}) = 1$ и $h(\tilde{\delta}) = 0$. В таком случае при переходе элемента E в неисправное состояние значение на выходе любого элемента схемы S (в том числе выходного) на наборе $\tilde{\delta}$ не изменится, и, следовательно, значение получающейся функции неисправности g схемы S на наборе $\tilde{\delta}$ будет равно $f(\tilde{\delta}) = 1$. Так как схема S неизбыточна, то $g \not\equiv f$. Далее, при неисправности выходного элемента схемы S получающаяся схема будет реализовывать тождественный нуль, причём $0 \not\equiv f$ по предположению случая и $0 \not\equiv g$ в силу того, что $g(\tilde{\delta}) = 1$. Таким образом, функции f, g и 0 попарно различны. На наборе $\tilde{\sigma}$ по крайней мере две из них принимают одинаковое значение, однако это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — единичный диагностический тест для схемы S. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ — все такие входные переменные схемы S, каждая из которых подаётся в ней на вход какого-то конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $k = 0$). На выходах этих конъюнкторов реализуются функции, меньшие либо равные соответственно $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, а тогда по лемме 1 имеем $x_{i_1} \geqslant f, \ldots, x_{i_k} \geqslant f$. Следовательно,

$$x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_k} \geqslant f \tag{1}$$

(в случае $k = 0$ полагаем $x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_k} = 1$).

Далее, пусть $x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{k+r}}$ — все такие входные переменные схемы S, что каждая переменная $x_{i_{k+j}}$, $j = 1, \ldots, r$, подаётся в ней на вход какого-то сумматора E_j, другой вход которого соединён с выходом некоторого функционального элемента E'_j (если таких переменных нет, полагаем $r = 0$). Пусть на выходе элемента E'_j в схеме S реализуется булева функция φ_j, тогда на выходе элемента E_j реализуется функция $\varphi_j \oplus x_{i_{k+j}}$. Из леммы 1 следует, что $\varphi_j \geqslant f$ и $\varphi_j \oplus x_{i_{k+j}} \geqslant f$, а тогда

$$f \leqslant \varphi_j(\varphi_j \oplus x_{i_{k+j}}) = \varphi_j \oplus \varphi_j x_{i_{k+j}} = \varphi_j(1 \oplus x_{i_{k+j}}) = \varphi_j \overline{x_{i_{k+j}}} \leqslant \overline{x_{i_{k+j}}},$$

т.е. $\overline{x_{i_{k+j}}} \geqslant f$, откуда

$$\overline{x_{i_{k+1}}} \& \ldots \& \overline{x_{i_{k+r}}} \geqslant f \tag{2}$$

(в случае $r = 0$ полагаем $\overline{x_{i_{k+1}}} \& \ldots \& \overline{x_{i_{k+r}}} = 1$).

Пусть теперь $(x_{i_{k+r+1}}, x_{i_{k+r+2}}), \ldots, (x_{i_{k+r+2s-1}}, x_{i_{k+r+2s}})$ — все такие неупорядоченные пары входных переменных схемы S, что обе переменные из каждой пары подаются в ней на входы какого-то одного и того же сумматора (если таких пар переменных нет, полагаем $s = 0$). На выходах этих сумматоров реализуются функции $x_{i_{k+r+1}} \oplus x_{i_{k+r+2}}, \ldots, x_{i_{k+r+2s-1}} \oplus$ $\oplus\, x_{i_{k+r+2s}}$, каждая из которых по лемме 1 не меньше f. Поэтому

$$(x_{i_{k+r+1}} \oplus x_{i_{k+r+2}}) \& \ldots \& (x_{i_{k+r+2s-1}} \oplus x_{i_{k+r+2s}}) \geqslant f \tag{3}$$

(в случае $s = 0$ полагаем $(x_{i_{k+r+1}} \oplus x_{i_{k+r+2}}) \& \ldots \& (x_{i_{k+r+2s-1}} \oplus x_{i_{k+r+2s}}) = 1$).

Отметим, что хотя бы одно из чисел k, r, s больше нуля, так как в противном случае ни одна входная переменная схемы S не подаётся в ней на вход ни одного функционального элемента и функция, реализуемая данной схемой, имеет вид $(*)$, что невозможно по предположению.

Из (1)–(3) получаем соотношение $f' \geqslant f$, где

$$f' = x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_k} \& \overline{x_{i_{k+1}}} \& \ldots \& \overline{x_{i_{k+r}}} \& \\ \&(x_{i_{k+r+1}} \oplus x_{i_{k+r+2}}) \& \ldots \&(x_{i_{k+r+2s-1}} \oplus x_{i_{k+r+2s}}). \quad (4)$$

Если $f' \equiv f$, то функция f представима в виде $(**)$, что противоречит предположению рассматриваемого случая. Поэтому $f' > f$, т.е. существует такой набор $\tilde{\pi}$, что $f'(\tilde{\pi}) = 1$, $f(\tilde{\pi}) = 0$. Тогда значение на выходе выходного элемента схемы S на наборе $\tilde{\pi}$ равно 0. Из этого следует существование в схеме S такого элемента E, что на наборе $\tilde{\pi}$ значение на его выходе равно 0, а значение на выходе любого элемента E', расположенного в схеме S выше элемента E (если такой элемент существует) равно 1. (Считаем, что элемент E' расположен в схеме S выше элемента E, если в ней существует ориентированный путь от E' к E). Возможны шесть случаев.

1. Элемент E — конъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S с выходами функциональных элементов. В этом случае в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на обоих входах элемента E равно единице, а значение на его выходе — нулю, что невозможно.

2. Элемент E — конъюнктор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом функционального элемента, а другой — со входом схемы S, отвечающим некоторой переменной x_i. Тогда в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E равно единице, а значение на его выходе — нулю, следовательно, на этом наборе $x_i = 0$. Но $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (4). Противоречие.

3. Элемент E — конъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S со входами этой схемы. В силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на выходе этого элемента равно нулю, следовательно, на этом наборе значение хотя бы одной из двух входных переменных схемы S, подающихся на входы элемента E, равно нулю (обозначим эту переменную через x_i). Но $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (4). Противоречие.

4. Элемент E — сумматор, и оба его входа соединены в схеме S с выходами функциональных элементов. Пусть на выходах этих двух элементов в схеме S реализуются функции φ и ψ, тогда на выходе элемента E реализуется функция $\varphi \oplus \psi$. Из леммы 1 следует, что $\varphi \geqslant f$, $\psi \geqslant f$,

и также из этой леммы $\varphi \oplus \psi \geqslant f$, а тогда $f \leqslant \varphi\psi(\varphi \oplus \psi) = \varphi\psi \oplus \varphi\psi = 0$, т.е. $f \equiv 0$. Противоречие.

5. Элемент E — сумматор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом функционального элемента, а другой — со входом схемы S, отвечающим некоторой переменной x_i. Тогда в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E равно единице, а значение на его выходе — нулю, следовательно, на этом наборе $x_i = 1$. Но $i \in \{i_{k+1}, \ldots, i_{k+r}\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (4). Противоречие.

6. Элемент E — сумматор, и оба его входа соединены в схеме S со входами этой схемы, отвечающими каким-то переменным x_i, $x_{i'}$. В силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на выходе этого элемента равно нулю, следовательно, на этом наборе $x_i \oplus x_{i'} = 0$. Но $(i, i') \in \{(i_{k+r+1}, i_{k+r+2}), \ldots, (i_{k+r+2s-1}, i_{k+r+2s})\}$ по определению этих индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (4). Противоречие.

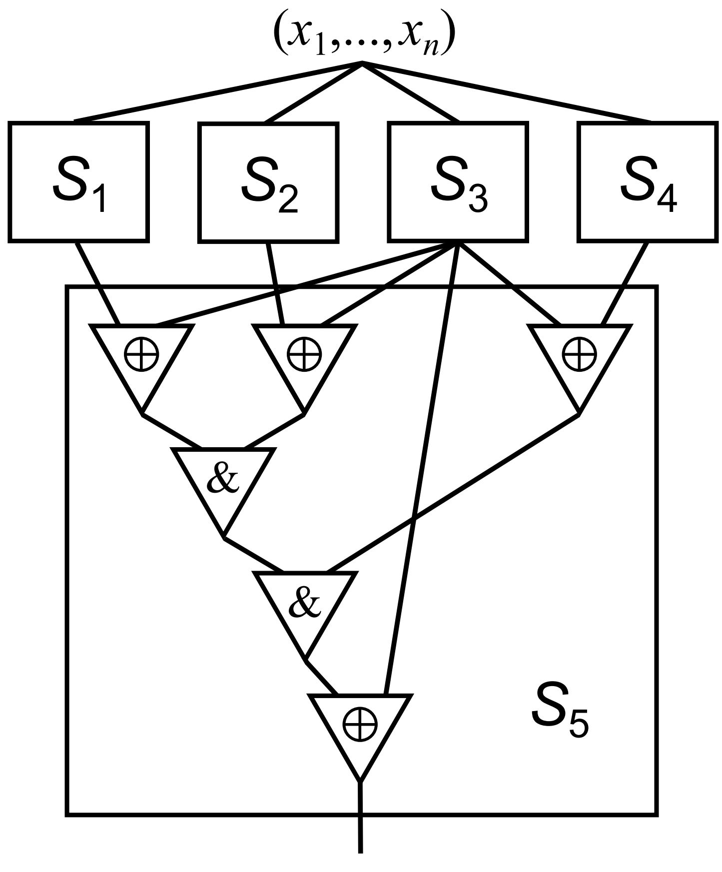
Во всех случаях получено противоречие, значит, исходное предположение было неверно и $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено.

Докажем теперь, что $D(f)$ определено и $D(f) \leqslant 2$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция от n переменных, отличная от констант; $\tilde{\sigma}$ — произвольный единичный набор функции $h(x_1, \ldots, x_n)$, содержащий наименьшее число единиц. Из предложения 1 работы [16] и рассуждений, проведённых в ней на с. 130 выше этого предложения, следует, что функцию h можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1, для которой множество $\{\tilde{\sigma}\}$ является единичным (и даже полным) проверяющим тестом.

Заметим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 1 хотя бы на двух наборах в силу того, что $f \not\equiv 0$ и f не представима в виде $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, являющемся частным случаем вида $(**)$. Пусть $\tilde{\sigma}_1$ — произвольный единичный набор функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, содержащий наименьшее число единиц. Тогда функцию f можно реализовать неизбыточной схемой S_1 в базисе B_1, для которой множество $\{\tilde{\sigma}_1\}$ является единичным проверяющим тестом. Пусть S_2 — копия схемы S_1.

Для любого двоичного набора $\tilde{\sigma}$ длины n через $\chi_{\tilde{\sigma}}(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать булеву функцию, равную единице на наборе $\tilde{\sigma}$ и нулю на всех остальных наборах. Функция $f_1(x_1, \ldots, x_n) = f \oplus \chi_{\tilde{\sigma}_1}(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 0 на наборе $\tilde{\sigma}_1$ и значение 1 хотя бы на одном наборе. Пусть $\tilde{\sigma}_2$ — произвольный единичный набор функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, содержащий наименьшее число единиц, тогда $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$ и существует неизбыточная схема S_3 в базисе B_1, реализующая функцию f_1, для которой множество $\{\tilde{\sigma}_2\}$ является единичным проверяющим тестом. Пусть $f_2(x_1, \ldots, x_n) = f \oplus \chi_{\tilde{\sigma}_2}(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что $f_2 = f$ на всех наборах длины n, кроме набора $\tilde{\sigma}_2$; при этом $f(\tilde{\sigma}_2) = (f_1 \oplus \chi_{\tilde{\sigma}_1})(\tilde{\sigma}_2) = f_1(\tilde{\sigma}_2) = 1$, а $f_2(\tilde{\sigma}_2) = (f \oplus \chi_{\tilde{\sigma}_2})(\tilde{\sigma}_2) = f(\tilde{\sigma}_2) \oplus 1 = 0$. Отсюда $f_2 < f$ и $f_2(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, следовательно, $\tilde{\sigma}_1$ является единичным набором функции $f_2(x_1, \ldots, x_n)$, содержащим наименьшее число единиц. Тогда функцию f_2 можно реализовать неизбыточной схемой S_4 в базисе B_1, для которой множество $\{\tilde{\sigma}_1\}$ является единичным проверяющим тестом. Будем считать, что все функциональные элементы, содержащиеся в схемах S_1, S_2, S_3 и S_4, попарно различны.

Пусть S — схема, состоящая из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (см. рисунок). Подсхемы S_1–S_4 определены ранее; подсхема S_5 имеет четыре входа v_1, v_2, v_3, v_4 и один выход, содержит четыре сумматора и два конъюнктора и реализует на выходе булеву функцию $\theta(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \oplus y_3)(y_2 \oplus y_3)(y_3 \oplus \oplus y_4) \oplus y_3$, где y_1, y_2, y_3, y_4 — значения, подаваемые на её входы v_1, v_2, v_3, v_4 соответственно. Вход v_i подсхемы S_5, $i = 1, 2, 3, 4$, в схеме S соединяется с выходом подсхемы S_i.



Отметим некоторые свойства функции $\theta(y_1, y_2, y_3, y_4)$:

(i) на любом двоичном наборе длины 4, не менее трёх компонент которого равны α, она равна α;

(ii) $\theta(0, 1, 0, 1) = \theta(1, 0, 0, 1) = \theta(1, 1, 0, 0) = 0$;

(iii) $\theta(0, 1, 1, 0) = \theta(1, 0, 1, 0) = 1$.

Докажем, что схема S реализует булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\tilde\sigma$ — произвольный двоичный набор длины n. На выходах подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 на наборе $\tilde\sigma$ по построению реализуются значения соответственно $f(\tilde\sigma), f(\tilde\sigma), f_1(\tilde\sigma) = f(\tilde\sigma) \oplus \chi_{\tilde\sigma_1}(\tilde\sigma)$ и $f_2(\tilde\sigma) = f(\tilde\sigma) \oplus \chi_{\tilde\sigma_2}(\tilde\sigma)$, а на выходе всей схемы S — значение $\theta(f(\tilde\sigma), f(\tilde\sigma), f(\tilde\sigma) \oplus \chi_{\tilde\sigma_1}(\tilde\sigma), f(\tilde\sigma) \oplus \chi_{\tilde\sigma_2}(\tilde\sigma))$. В силу выполнения хотя бы одного из равенств $\chi_{\tilde\sigma_1}(\tilde\sigma) = 0$, $\chi_{\tilde\sigma_2}(\tilde\sigma) = 0$ и свойства (i) это значение равно $f(\tilde\sigma)$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что схема S неизбыточна и множество $\{\tilde\sigma_1, \tilde\sigma_2\}$ является для неё единичным диагностическим тестом. При неисправности выходного элемента подсхемы S_5 функция неисправности схемы S будет равна тождественному нулю. Легко видеть, что при неисправности любого элемента подсхемы S_5, отличного от выходного, функция, реализуемая подсхемой S_5, будет равна y_3 (где y_3 — значение, подаваемое на её вход v_3), а функция неисправности всей схемы S — равна f_1.

Предположим, что неисправен некоторый элемент в одной из подсхем S_1, S_2, S_4. Тогда на любом наборе $\tilde\sigma$, отличном от наборов $\tilde\sigma_1$ и $\tilde\sigma_2$, оставшиеся три из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 будут выдавать значение $f(\tilde\sigma)$, и по свойству (i) такое же значение будет на выходе всей схемы S. Ранее было показано, что $f(\tilde\sigma_2) = 1$. На наборе $\tilde\sigma_2$ в случае исправной работы всех элементов в схеме S на выходах подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 реализуются значения соответственно $f(\tilde\sigma_2), f(\tilde\sigma_2), f(\tilde\sigma_2) \oplus \chi_{\tilde\sigma_1}(\tilde\sigma_2), f(\tilde\sigma_2) \oplus \chi_{\tilde\sigma_2}(\tilde\sigma_2)$, т.е. $1, 1, 1, 0$, значит, на входы подсхемы S_5 подаётся набор $(1, 1, 1, 0)$. При наличии неисправного элемента в одной из подсхем S_1, S_2, S_4 в этом наборе может измениться не более одной из 1-й, 2-й и 4-й компонент, а 3-я компонента остаётся неизменной. Тогда на выходе всей схемы S будет реализовано значение $1 = f(\tilde\sigma_2)$, так как $\theta(1,1,1,0) = \theta(0,1,1,0) = \theta(1,0,1,0) = \theta(1,1,1,1) = 1$ (см. свойства (i), (iii)).

Далее, на наборе $\tilde\sigma_1$ в случае исправной работы всех элементов в схеме S на выходах подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 реализуются значения соответственно $f(\tilde\sigma_1), f(\tilde\sigma_1), f(\tilde\sigma_1) \oplus \chi_{\tilde\sigma_1}(\tilde\sigma_1), f(\tilde\sigma_1) \oplus \chi_{\tilde\sigma_2}(\tilde\sigma_1)$, т.е. $1, 1, 0, 1$, значит, на входы подсхемы S_5 подаётся набор $(1, 1, 0, 1)$. При наличии неисправного элемента в одной из подсхем S_1, S_2, S_4 в этом наборе изменится соответствующая компонента, так как множество $\{\tilde\sigma_1\}$ является единичным проверяющим тестом для каждой из неизбыточных схем S_1, S_2, S_4. Остальные три компоненты набора $(1, 1, 0, 1)$ останутся неизменными. Тогда на выходе всей схемы S будет реализовано значение $0 \neq f(\tilde\sigma_1)$, так как $\theta(0,1,0,1) = \theta(1,0,0,1) = \theta(1,1,0,0) = 0$ (см. свойство (ii)). В итоге получаем, что функция, реализуемая схемой S при неисправности любого элемента в любой из подсхем S_1, S_2, S_4, отличается от функции $f(x_1, \dots, x_n)$ только на наборе $\tilde\sigma_1$, т.е. равна f_1.

Предположим, наконец, что неисправен некоторый элемент в подсхеме S_3. Тогда на любом наборе $\tilde{\sigma}$, отличном от наборов $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, подсхемы S_1, S_2, S_4 будут выдавать значение $f(\tilde{\sigma})$, и по свойству (i) такое же значение будет на выходе всей схемы S. На наборе $\tilde{\sigma}_1$ подсхемы S_1, S_2, S_4 будут выдавать значения соответственно $f(\tilde{\sigma}_1), f(\tilde{\sigma}_1), f(\tilde{\sigma}_1) \oplus \chi_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{\sigma}_1)$, т.е. $1, 1, 1$, значит, на входы подсхемы S_5 будет подаваться один из наборов $(1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)$, а тогда на выходе всей схемы S будет реализовано значение $1 = f(\tilde{\sigma}_1)$, так как $\theta(1, 1, 0, 1) = \theta(1, 1, 1, 1) = 1$ (см. свойство (i)).

Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_2$ в случае исправной работы всех элементов в схеме S на входы подсхемы S_5 подаётся набор $(1, 1, 1, 0)$ (см. выше). При наличии неисправного элемента в подсхеме S_3 в этом наборе изменится 3-я компонента, так как множество $\{\tilde{\sigma}_2\}$ является единичным проверяющим тестом для неизбыточной схемы S_3. Остальные три компоненты набора $(1, 1, 1, 0)$ останутся неизменными. Тогда на выходе всей схемы S будет реализовано значение $0 \neq f(\tilde{\sigma}_2)$, так как $\theta(1, 1, 0, 0) = 0$ (см. свойство (ii)). В итоге получаем, что функция, реализуемая схемой S при неисправности любого элемента в подсхеме S_3, отличается от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ только на наборе $\tilde{\sigma}_2$, т.е. равна f_2.

Из приведённых рассуждений следует, что у схемы S есть только три функции неисправности — $g \equiv 0$, f_1 и f_2. Каждая из них отлична от функции f, поэтому схема S неизбыточна и значение $D(f)$ определено. На наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ функции f, f_1, f_2 и g принимают пары значений соответственно $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(0, 0)$. Поэтому на этих наборах функцию f можно отличить от каждой из функций неисправности, а любые две функции неисправности — друг от друга. Это означает, что $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$ — единичный диагностический тест для схемы S. Его длина равна 2, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При рассмотрении вместо базиса B_1 базиса $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$, где константа 1 подаётся со входов схемы, результат теоремы 1 остаётся верен для всех булевых функций f, кроме $f \equiv 0$; значение $D_0^{B_1'}(0)$ не определено. Действительно, на входы схем, использованных в доказательстве теоремы 1 и допускающих единичный диагностический тест длины $D_0^{B_1}(f)$, за исключением случая $f \equiv 0$, не подавалась константа 0. Это следует из построения этих схем, в частности, из метода синтеза схем, используемого в работе [16] при доказательстве теоремы 2. Поэтому $D_0^{B_1'}(f) \leqslant D_0^{B_1}(f)$ при $f \not\equiv 0$. С другой стороны, $D_0^{B_1}(f) \leqslant D_0^{B_1'}(f)$ в силу того, что любая (неизбыточная) схема в базисе B_1' является (неизбыточной) схемой в базисе B_1. Если же $f \equiv 0$, то выход произвольной схемы S в базисе B_1', реализующей функцию f, очевидно, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать тождественный нуль, т.е. схема S избыточна. Получаем, что неизбыточных схем, реализующих константу 0, не существует и, следовательно, значение $D_0^{B_1'}(0)$ не определено.

Замечание 2. Если предполагать, что булевы константы в базисах B_1, B_1' являются функциональными элементами и элемент «константа 1» может быть неисправен и реализовывать тождественный нуль, и обозначить соответствующие базисы через $\hat{B}_1$, $\hat{B}_1'$, то результат теоремы 1 и аналогичный ей результат из замечания 1 остаются верны для всех булевых функций f, кроме $f \equiv 1$; вместе с тем $D_0^{\hat{B}_1}(1) = D_0^{\hat{B}_1'}(1) = 1$. Докажем это. При $f \equiv 1$ схема, состоящая из одного элемента «константа 1», неизбыточна и допускает единичный диагностический тест из одного (пустого) набора; с другой стороны, выход любой схемы, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов (в силу предположения замечания 2), поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности этого элемента получающаяся схема будет реализовывать тождественный нуль, который надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе. Отсюда следуют равенства $D_0^{\hat{B}_1}(1) = D_0^{\hat{B}_1'}(1) = 1$. Если $f \equiv 0$, то значение $D_0^{\hat{B}_1'}(f)$ по аналогии с замечанием 1 не определено, а $D_0^{\hat{B}_1}(f) = 0$, так как схема, состоящая из одного элемента «константа 0», не имеет ни одной функции неисправности. Если функция f равна какой-то переменной, то её можно реализовать схемой без использования функциональных элементов, поэтому $D_0^{\hat{B}_1}(f) = D_0^{\hat{B}_1'}(f) = 0$.

Пусть теперь функция f отлична от констант и переменных. Рассмотрим неизбыточную схему S в базисе B_1', реализующую функцию f, для которой $D_0^{B_1'}(S) = D_0^{B_1'}(f)$. Ясно, что в схеме S содержится выходной элемент. Преобразуем эту схему следующим образом. Все входы элементов схемы S, на которые подавалось значение 1 со входов этой схемы, соединим с выходом элемента E_1 типа «константа 1». Далее, добавим к получившейся схеме конъюнктор $E_\&$, один из входов которого соединим с бывшим выходом схемы S, а второй — с выходом элемента E_1. Выход элемента $E_\&$ будем считать выходом получившейся схемы, которую обозначим S'. Данная схема, очевидно, реализует функцию f. Легко заметить, что при неисправности любого элемента схемы S', кроме E_1 и $E_\&$, получающаяся функция неисправности схемы S' будет совпадать с функцией неисправности схемы S при неисправности в ней соответствующего элемента. Если же неисправен один из элементов E_1, $E_\&$, то схема S' будет реализовывать тождественный нуль, но такая же функция неисправности есть и у схемы S при неисправности её выходного элемента. Получаем, что любая функция неисправности схемы S' является функцией неисправности схемы S, поэтому $D_0^{\hat{B}'_1}(S') \leqslant D_0^{B'_1}(S) = D_0^{B'_1}(f)$ и $D_0^{\hat{B}_1}(f) \leqslant D_0^{\hat{B}'_1}(f) \leqslant D_0^{\hat{B}'_1}(S') \leqslant D_0^{B'_1}(f) = D_0^{B_1}(f)$ (неравенство $D_0^{\hat{B}_1}(f) \leqslant D_0^{\hat{B}'_1}(f)$ следует из того, что $\hat{B}_1 \supset \hat{B}'_1$, а последнее равенство — из замечания 1). С другой стороны, при наличии дополнительных возможных неисправностей в схемах (а именно, неисправности типа 0 на выходе любого элемента «константа 1») значения величин $D_0^{B_1}(f)$ и $D_0^{B'_1}(f)$, очевидно, не могут уменьшиться. Следовательно, $D_0^{\hat{B}_1}(f) = D_0^{B_1}(f)$ и $D_0^{\hat{B}'_1}(f) = D_0^{B'_1}(f)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь в качестве неисправностей функциональных элементов однотипные константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Выделим ещё одно возможное представление функции f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = L_1^* \vee \ldots \vee L_m^*, \qquad (***)$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель L_j^*, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x_{i_j}}$, либо $x_{i_j} \sim x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Используя теорему 1, замечания 1, 2 и принцип двойственности (см., например, [17], с. 19, утверждение 3), а именно, рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теоремы 1 и замечаний 1 и 2 на двойственные, нетрудно получить двойственные им результаты для базисов $B_1^* = B_1'^* = \{\vee, \sim, 0, 1\}$, $\hat{B}_1^* = \hat{B}_1'^* = \{\vee, \sim, 0\}$ (в базисах без штрихов булевы константы подаются со входов схемы, в базисах со штрихами — являются функциональными элементами). В частности, справедлива следующая

Теорема 2. *Для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство*

$$D_1^{B_1^*}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (*), \\ 1, & \text{если функция } f \text{ представима в виде } (***), \text{ но не в виде } (*), \\ 2, & \text{если функция } f \text{ не представима ни в одном из видов } (*), (***). \end{cases}$$

Следствие 2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_1^{B_1^*}(n) = 2$.*

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

5. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — V. 21. — No. 1. — P. 124–141.

6. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

7. Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

8. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — №1. — С. 72–74.

9. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

10. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

11. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — №2. — С. 17–21.

12. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — №5. — С. 43–46.

13. Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — №5. — С. 49–52.

14. Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — №74. — 20 с.

15. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — №1. — С. 40–44.

16. Бородина Ю. В., Бородин П.А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

17. Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008.