



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 46 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Сорокин В.Н.

Об асимптотических
режимах совместных
многочленов Мейкснера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сорокин В.Н. Об асимптотических режимах совместных многочленов Мейкснера // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 46. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2016-46](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-46)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-46>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

В. Н. Сорокин

Об асимптотических режимах
совместных многочленов Мейкснера

Москва, 2016

УДК 517.53

В. Н. Сорокин. E-mail: vladimirs1957@gmail.com.

Об асимптотических режимах совместных многочленов Мейкснера.

Аннотация. Исследовано асимптотическое поведение многочленов совместной ортогональности для двух мер Мейкснера с различным экспоненциальным убыванием. Результаты представлены в терминах задач равновесия теории логарифмического потенциала и в терминах мероморфных функций на римановых поверхностях.

Ключевые слова: многочлены Мейкснера, задачи равновесия, метод перевала, римановы поверхности

V. N. Sorokin. E-mail: vladimirs1957@gmail.com.

On asymptotic regimes for the multiple Meixner polynomials.

Abstract. The asymptotic behavior of the multiple orthogonal polynomials for two Meixner measures of different exponential decay is investigated. The results are represented in terms of the equilibrium problems of the logarithmic potential theory and in terms of the meromorphic functions on Riemann surfaces.

Cit. 21 items. Fig. 11.

Key words: Meixner polynomials, equilibrium problems, saddle point method, Riemann surfaces.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00604).

§1. Введение и предшествующие результаты

1.1. Классические многочлены Мейкснера

Определим дискретную меру $\mu(x) = \mu(c, \beta; x)$, помещая в каждую точку $m \in \mathbb{Z}_+$ массу величины $j_m = j_m(c, \beta)$, где

$$j_m(c, \beta) = c^m \frac{(\beta)_m}{m!}, \quad (1.1)$$

$(\beta)_m = \beta(\beta + 1) \dots (\beta + m - 1)$ – символ Похгаммера. Эта мера зависит от двух параметров $0 < c < 1$ и $\beta > 0$.

Через $M_n(x)$ обозначим многочлены, ортогональные по этой мере. А именно, M_n – не равный тождественно нулю многочлен степени не выше n , удовлетворяющий следующим соотношениям ортогональности

$$\int M_n(x) x^k d\mu(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Этими условиями многочлен M_n определен единственным образом (с точностью до нормировки). Он имеет степень n . Все его нули простые и лежат на промежутке $\Delta = [0, +\infty)$. Кроме того, по теореме Чебышева-Маркова-Стилтьеса нули этого многочлена разделены целыми точками, т.е. на любом отрезке $[m, m+1]$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, лежит не более одного нуля.

Многочлены $M_n(x)$ впервые изучал Ж. Мейкснер [1], [2]. В частности, им был получен следующий дискретный аналог формулы Родрига

$$M_n(x)G(c, \beta; x) = \frac{1}{n!} \Delta^n G(c, \beta + n; x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где мероморфная функция G определена формулой

$$G(c, \beta; x) = c^x \frac{\Gamma(\beta + x)}{\Gamma(1 + x)},$$

Δ – оператор левой разности

$$(\Delta f)(x) = f(x) - f(x-1).$$

Здесь и далее Γ – гамма-функция (интеграл Эйлера второго рода).

Поставим вопрос о слабой асимптотике многочленов Мейкснера, равносильный вопросу о предельном распределении их нулей. В соответствии с известными результатами Е. А. Рахманова [3] для получения качественной картины распределения нулей необходимо сделать масштабирование

$$M_n^*(x) = C_n^M M_n(nx), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где нормировочная постоянная C_n^M выбрана так, чтобы старший коэффициент многочлена M_n^* был равен единице. Слабой асимптотикой мы будем называть следующий предел

$$V_M(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \log |M_n^*(x)|, \quad (1.2)$$

если он существует. Через $\chi(M_n^*)$ обозначим дискретную меру, считающую нули многочлена M_n^* . А именно, в каждый нуль этого многочлена мы помещаем массу величины $1/n$. Существование предела (1.2) равносильно существованию предела считающих мер в $*$ - слабой топологии:

$$\chi(M_n^*) \xrightarrow{*} \lambda^M.$$

Меру λ^M называют *предельной мерой распределения нулей* многочленов $\{M_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Это – вероятностная мера с компактным носителем $S(\lambda^M)$ на промежутке Δ . В случае своего существования предел (1.2) равен логарифмическому потенциалу меры λ^M :

$$V_M(x) = V^{\lambda^M}(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus S(\lambda^M),$$

где

$$V^{\lambda^M}(x) = \int \log \frac{1}{|x-t|} d\lambda^M(t), \quad x \in \mathbb{C},$$

см. [4].

1.2. Предельное распределение нулей классических многочленов Мейкснера

Поставим следующую задачу равновесия теории логарифмического потенциала.

Задача 1. *Требуется найти положительную меру λ^M , такую, что*

- 1) *носитель этой меры $S(\lambda^M)$ лежит на промежутке $\Delta = [0, +\infty)$;*
- 2) *полная вариация меры равна единице: $\|\lambda^M\| = 1$;*
- 3) *эта мера удовлетворяет следующему ограничению (констрейну):*

$$\lambda^M \leq \chi_\Delta, \tag{1.3}$$

где χ_Δ – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

- 4) *с некоторой постоянной w_M выполняется условие равновесия*

$$W_M = 2V^{\lambda^M} + \phi \begin{cases} \leq w_M & \text{на } S(\lambda^M), \\ \geq w_M & \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda^M) \setminus S(\chi_\Delta - \lambda^M)), \end{cases}$$

где внешнее поле ϕ определено формулой

$$\phi(x) = -x \log c. \tag{1.4}$$

Применение таких задач равновесия к изучению асимптотики ортогональных многочленов с переменным весом было начато в работах А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [5], [6] (см. также [7]). Внешнее поле ϕ происходит из экспоненциального убывания меры μ на бесконечности. Ограничение (1.3) означает, что заряд, равный разности мер $\chi_\Delta - \lambda^M$, также является положительной мерой. Появление констрейна было обнаружено Е. А. Рахмановым в работе [8]. Констрейн происходит из теоремы о разделении нулей.

Задача 1 имеет единственное решение λ^M , и эта мера является предельной мерой распределения нулей масштабированных многочленов Мейкснера. Этот факт был получен нами в качестве вспомогательного результата в работе [9]. Там же был найден явный вид этой предельной меры.

Меры мы будем определять их марковскими функциями:

$$h_{\lambda^M}(x) = \int \frac{d\lambda^M(t)}{x-t}, \quad x \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}(\lambda^M).$$

Положим

$$x_-^M = \frac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}}, \quad x_+^M = \frac{1 + \sqrt{c}}{1 - \sqrt{c}}.$$

Через \mathfrak{K} обозначим двулистную риманову поверхность, которая получается склейкой двух экземпляров сферы Римана \mathfrak{K}_- и \mathfrak{K}_+ , разрезанных вдоль отрезка $E^M = [x_-^M, x_+^M]$. На этой поверхности определим мероморфную функцию $\kappa : \mathfrak{K} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Она имеет следующий дивизор. У нее есть простой нуль в точке $x = 0$ на листе \mathfrak{K}_- и простой полюс в точке $x = 0$ на листе \mathfrak{K}_+ . Нормируем эту функцию условием $\kappa = 1$ в точке $x = \infty$ на листе \mathfrak{K}_- . Функция κ осуществляет конформное отображение поверхности \mathfrak{K} на сферу Римана. Через κ_j обозначим однозначную ветвь функции κ на проекции листа \mathfrak{K}_j , где $j = -, +$. Алгебраическая функция κ удовлетворяет квадратному уравнению

$$x\kappa^2 + ((q-1) - (q+1)x)\kappa + qx = 0, \quad q = 1/c.$$

На рис.1 показан график функции κ на вещественной оси.

Положим

$$h_{\lambda^M}(x) = \log \kappa_-(x). \tag{1.5}$$

Эта функция голоморфна в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0, x_+^M]$. Однозначную ветвь логарифма выделяем условием

$$h_{\lambda^M}(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Доказано, что функция (1.5) является марковской функцией предельной меры λ^M . Плотность абсолютно непрерывной меры λ^M восстанавливается по формуле Ю. В. Сохоцкого

$$\lambda^{M'}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} h_{\lambda^M}(x - i \cdot 0), \quad 0 < x < x_+^M.$$

Носителем меры служит отрезок $[0, x_+^M]$. Мера достигает констрейн (1.3) на отрезке $[0, x_-^M]$.

Если $c \nearrow 1$, т.е. внешнее поле слабое, то $x_-^M \searrow 0$, $x_+^M \nearrow +\infty$. Таким образом, нули масштабированных многочленов Мейкснера в пределе заполняют весь промежуток Δ . Если $c \searrow 0$, т.е. внешнее поле сильное, то $x_-^M \nearrow 1$, $x_+^M \searrow 1$. Таким образом, нули многочленов в пределе равномерно заполняют отрезок $[0, 1]$. В этом случае констрейн достигается на всем носителе.

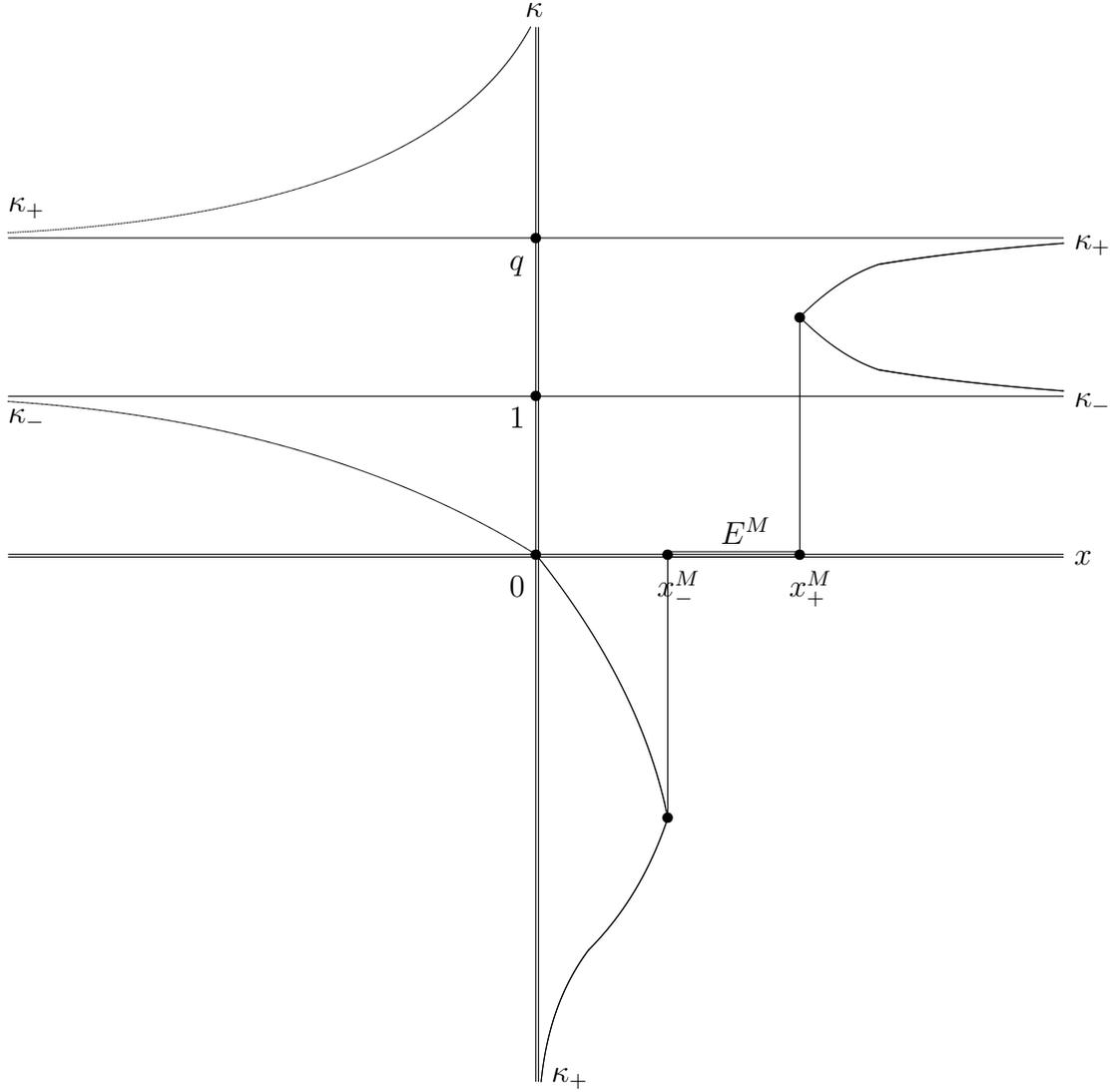


Рис. 1.

1.3. Обобщенные многочлены Мейкснера

В связи с многочисленными применениями аппроксимаций Эрмита-Паде [10] в теории чисел, математической физике и других областях активно развивается теория многочленов совместной ортогональности. В цитированной выше работе [9] (см. также [11]) мы рассмотрели два класса таких многочленов, обобщающих многочлены Мейкснера. Пр процитируем один из этих результатов.

Пусть

$$0 < c < 1, \quad 0 < \beta_2 < \beta_1 < \beta_2 + 1.$$

Определим две меры

$$\mu_j(x) = \mu(c, \beta_j; x), \quad j = 1, 2.$$

Через B_n , где $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим ненулевой многочлен степени не выше $2n$, удовлетворяющий следующим соотношениям ортогональности

$$\int B_n(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.6)$$

Этими условиями многочлен B_n определен единственным образом (с точностью до нормировки). Он имеет степень $2n$. Все его нули простые, лежат на промежутке Δ и разделены целыми точками. Для этих многочленов справедлива формула Родрига

$$B_n(x) = \mathcal{D}^{(n)}(c, \beta_2; x) \mathcal{D}^{(n)}(c, \beta_1; x) 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.7)$$

где $\mathcal{D}^{(n)}(c, \beta; x)$ – следующий разностный оператор

$$\mathcal{D}^{(n)}(c, \beta; x) = \frac{1}{G(c, \beta; x)} \frac{1}{n!} \Delta^n G(c, \beta + n; x).$$

При этом, операторы в (1.7) коммутируют.

Изучение асимптотического поведения многочленов B_n проводится по схеме, предложенной Е. М. Никишиным [12]. Существует отношение мер – производная Радона-Никодима

$$u(x) = \frac{d\mu_2(x)}{d\mu_1(x)}, \quad x \in \mathbb{Z}_+.$$

Функция $u(x)$, изначально определенная в целых неотрицательных точках, может быть продолжена на всю комплексную плоскость формулой

$$u(x) = \frac{\Gamma(\beta_2 + x)}{\Gamma(\beta_1 + x)}$$

как мероморфная функция, имеющая простые полюсы в точках

$$x_k = -\beta_2 - k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

с вычетами

$$\nu_k = \operatorname{res}_{x=x_k} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1 - \beta_2)} \frac{(\beta_2 - \beta_1 + 1)_k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Справедливо следующее разложение Миттаг-Лефлера этой функции в сумму главных лорановских частей:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{x - x_k}. \quad (1.8)$$

Определим дискретную меру ν , помещая массу ν_k в точку x_k , где $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда разложение (1.8) можно переписать как преобразование Коши этой меры

$$u(x) = \int \frac{d\nu(t)}{x - t}.$$

Все сказанное означает, что пара мер (μ_1, μ_2) образует систему Никишина. Поэтому соотношения ортогональности (1.6) могут быть переписаны другим способом. А именно, существует единственная последовательность многочленов $\{\tilde{B}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ степени n с единичным старшим коэффициентом, удовлетворяющих соотношениям ортогональности

$$\int B_n(x) x^l \frac{d\mu_1(x)}{\tilde{B}_n(x)} = 0, \quad l = 0, \dots, 2n - 1,$$

$$\int \tilde{B}_n(t) t^l \left(\int \frac{(B_n(x))^2}{t - x} \frac{d\mu_1(x)}{\tilde{B}_n(x)} \right) \frac{d\nu(t)}{B_n(t)} = 0, \quad l = 0, \dots, n - 1.$$

Все нули многочлена \tilde{B}_n простые, лежат на промежутке $F = (-\infty, 0]$ и разделены точками x_k . Нули многочленов \tilde{B}_n являются так называемыми дополнительными точками интерполяции.

1.4. Предельное распределение нулей обобщенных многочленов Мейкснера
Масштабируем многочлены B_n и \tilde{B}_n :

$$B_n^*(x) = C_n^B B_n(nx), \quad \tilde{B}_n^*(x) = C_n^{\tilde{B}} \tilde{B}_n(nx), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Считаем, что старшие коэффициенты этих многочленов равны единице. Нас интересуют предельные меры распределения нулей многочленов B_n^* и \tilde{B}_n^* . Обозначим эти меры через λ_Δ^B и λ_F^B соответственно. Поставим следующую задачу равновесия.

Задача 2. Требуется найти две положительные меры λ_Δ^B и λ_F^B , такие, что

1) $S(\lambda_\Delta^B) \subset \Delta = [0, +\infty)$, $S(\lambda_F^B) \subset F = (-\infty, 0]$;

2) $\|\lambda_\Delta^B\| = 2$, $\|\lambda_F^B\| = 1$;

3) выполняются ограничения

$$\lambda_\Delta^B \leq \chi_\Delta, \quad \lambda_F^B \leq \chi_F,$$

где χ_Δ и χ_F – классические меры Лебега на промежутках Δ и F соответственно;

4) с некоторыми постоянными w_Δ^B и w_F^B справедливы следующие условия равновесия:

a) на промежутке Δ

$$W_\Delta^B = 2V^{\lambda_\Delta^B} - V^{\lambda_F^B} + \phi \begin{cases} \leq w_\Delta^B & \text{на } S(\lambda_\Delta^B), \\ \geq w_\Delta^B & \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda_\Delta^B) \setminus S(\chi_\Delta - \lambda_\Delta^B)), \end{cases}$$

b) на промежутке F

$$W_F^B = 2V^{\lambda_F^B} - V^{\lambda_\Delta^B} \begin{cases} \leq w_F^B & \text{на } S(\lambda_F^B), \\ \geq w_F^B & \text{на } F \setminus (S(\lambda_F^B) \setminus S(\chi_F - \lambda_F^B)), \end{cases}$$

где внешнее поле ϕ определено формулой (1.4).

Задача 2 имеет единственное решение. Меры λ_Δ^B и λ_F^B являются предельными мерами распределения нулей многочленов B_n^* и \tilde{B}_n^* соответственно. В работе [9] был найден явный вид этих мер. Рассмотрим кубический многочлен

$$Q^B(x) = x^3 - \frac{3(5q+4)}{4(q-1)}x^2 + 3x + 1, \quad q = \frac{1}{c}. \quad (1.9)$$

При всех $q > 1$ он имеет один отрицательный и два положительных корня. Обозначим их

$$-\infty < x_0^B < 0 < x_-^B < x_+^B < +\infty.$$

Они зависят от параметра c . Если $c \searrow 0$, то

$$x_0^B \searrow -1/4, \quad x_-^B \nearrow 2, \quad x_+^B \searrow 2.$$

Если $c \nearrow 1$, то

$$x_0^B \nearrow 0, \quad x_-^B \searrow 0, \quad x_+^B \nearrow +\infty.$$

Через \mathfrak{B} обозначим трехлистную риманову поверхность, которая получается склейкой следующих листов

$$\mathfrak{B}_F = \mathbb{C} \setminus (-\infty, x_0^B], \quad \mathfrak{B}_* = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, x_0^B] \sqcup [x_-^B, x_+^B]), \quad \mathfrak{B}_\Delta = \bar{\mathbb{C}} \setminus [x_-^B, x_+^B].$$

На этой поверхности определим мероморфную функцию $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ ее дивизором. Она имеет простые нули в точке $x = 0$ на листах \mathfrak{B}_F и \mathfrak{B}_Δ и полюс второго порядка в точке $x = 0$ на листе \mathfrak{B}_* . Нормируем эту функцию условием $\varkappa = 1$ в точке $x = \infty$ на листе \mathfrak{B}_Δ . Функция \varkappa удовлетворяет кубическому уравнению

$$x^2 \varkappa^3 - ((2x^2 - 2x - 1)q + (x + 1)^2) \varkappa^2 + qx((x - 2)q + 2(x + 1)) \varkappa - x^2 q^2 = 0.$$

Многочлен (1.9) – дискриминант этого уравнения. Через \varkappa_F , \varkappa_* , \varkappa_Δ обозначим соответствующие однозначные ветви алгебраической функции \varkappa . На рис. 2 изображен график этой функции на вещественной оси.

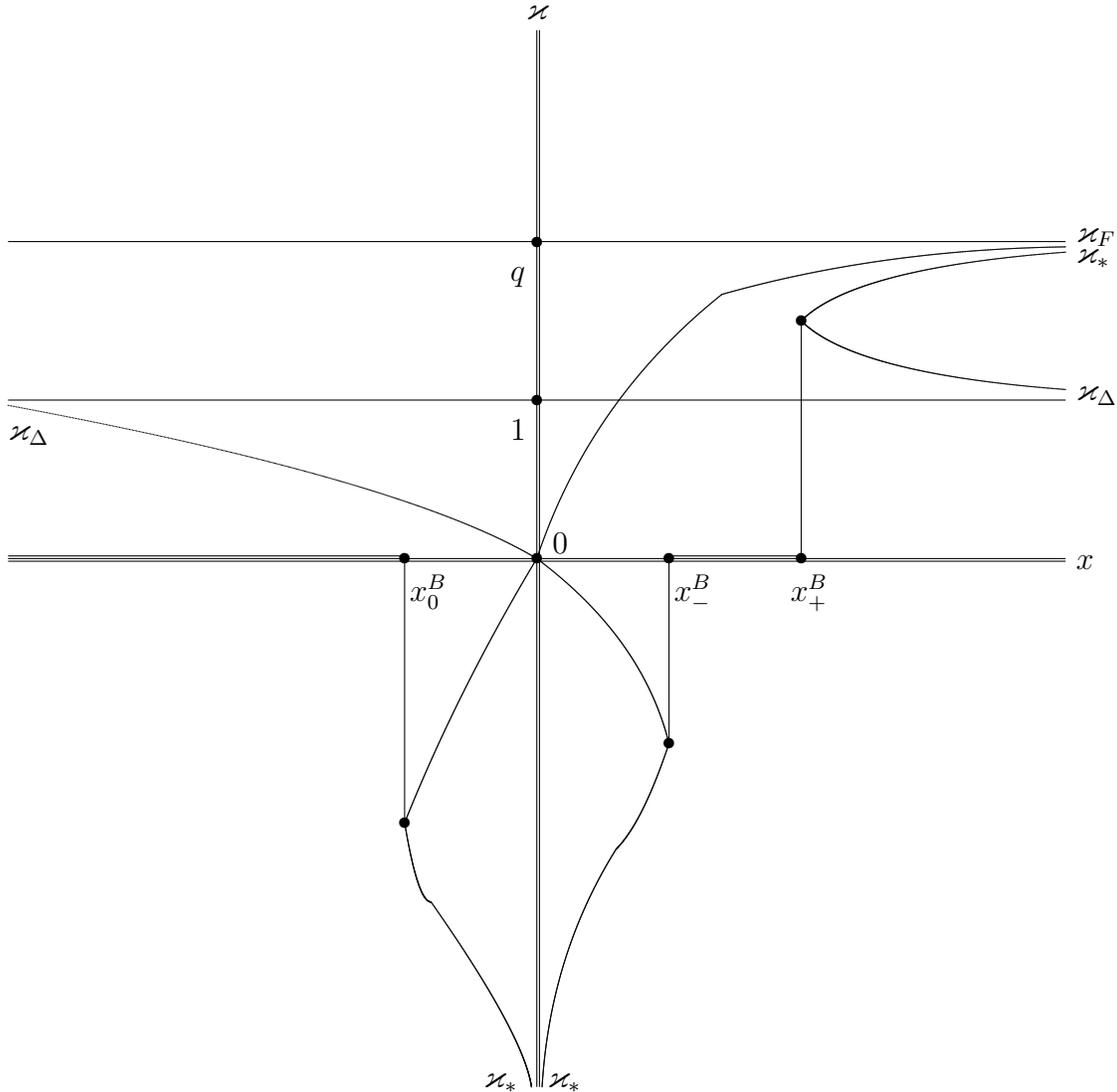


Рис. 2.

Марковская функция меры λ_{Δ}^B равна

$$h_{\lambda_{\Delta}^B}(x) = \log \varkappa_{\Delta}(x).$$

Она голоморфна в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0, x_+^B]$. Ветвь логарифма выделяем условием

$$h_{\lambda_{\Delta}^B}(x) \sim \frac{2}{x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Носителем меры λ_{Δ}^B служит отрезок $[0, x_+^B]$. Она достигает констрейн на отрезке $[0, x_+^B]$. Если $c \rightarrow 1$, то эта мера в пределе заполняет весь промежуток Δ и констрейн не достигается. Если $c \rightarrow 0$, то мера λ_{Δ}^B в пределе равномерно заполняет отрезок $[0, 2]$ и констрейн достигается на всем этом отрезке.

Марковская функция меры λ_F^B равна

$$h_{\lambda_F^B}(x) = -\log(c\varkappa_F(x)).$$

Она голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus F$. Ветвь логарифма выделяем условием

$$h_{\lambda_F^B}(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Носителем меры λ_F^B служит весь промежуток F . Она достигает констрейн на отрезке $[x_0^B, 0]$. Если $c \rightarrow 1$, то констрейн в пределе не достигается. Если $c \rightarrow 0$, то мера λ_F^B достигает констрейн на максимальном отрезке $[-1/4, 0]$.

1.5. Многочлены Мейкснера совместной ортогональности

В настоящей работе мы будем изучать следующие многочлены совместной ортогональности, обобщающие многочлены Мейкснера. Пусть $\beta > 0$, и $0 < c_2 < c_1 < 1$. Определим две дискретные меры

$$\mu_j(x) = \mu(c_j, \beta; x), \quad j = 1, 2.$$

Через $Q_n(x)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим ненулевой многочлен степени не выше $2n$, удовлетворяющий соотношениям ортогональности

$$\int Q_n(x)x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.10)$$

Пара функций (c_1^x, c_2^x) образует АТ-систему на всей вещественной оси [13]. Следовательно, имеют место следующие результаты.

Предложение 1. *Соотношениями ортогональности (1.10) многочлен $Q_n(x)$ определен единственным образом (с точностью до нормировки). Он имеет степень $2n$. Все его нули простые, лежат на промежутке $\Delta = [0, +\infty)$ и разделены целыми точками.*

Предложение 2. *Справедлив дискретный аналог формулы Родрига*

$$Q_n(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(\beta+x)} \frac{1}{(2n)!} \Delta^n c_2^x c_1^{-x} \Delta^n c_1^x \frac{\Gamma(\beta+2n+x)}{\Gamma(1+x)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.11)$$

Это предложение доказывается стандартным способом – суммированием по Абелю. Многочлены (1.11) были введены в работе [14]. Там изучались их алгебраические свойства. В частности, были получены формула Родрига и рекуррентные соотношения.

Сделаем масштабирование

$$Q_n^*(x) = C_n Q_n(nx), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где нормировочная постоянная C_n выбрана так, чтобы старший коэффициент многочлена Q_n^* был равен единице. Нас интересует предельная мера распределения нулей этих многочленов. В следующем параграфе мы сформулируем основные результаты работы.

Поставленная нами задача уже изучалась А. И. Аптекаревым и Ж. Арвесу в работе [15]. Ими был полностью исследован один из трех случаев асимптотического поведения многочленов Q_n^* . Два других случая не рассматривались. В настоящей работе мы устраним этот пробел – дадим полное решение задачи. Мы используем методы, отличные от методов работы [15].

В заключение отметим следующую аналогию. Геометрическое распределение (1.1) можно рассматривать как дискретный аналог экспоненциального распределения, относительно которого ортогональны многочлены Лагерра. Совместные многочлены Лагерра, аналогичные введенным выше совместным многочленам Мейкснера, изучались в работе В. Г. Лысова [16] (см. также [17], [18]). В асимптотическом поведении таких многочленов присутствуют общие моменты. Но есть и различия, связанные с дискретностью меры, а именно, появление констрейнов.

§2. Основные результаты работы

2.1. Задача равновесия Никишина

Поскольку $0 < c_2 < c_1 < 1$, то точка $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ принадлежит треугольнику T , изображенному на рис. 3. Рассмотрим следующий многочлен от двух переменных

$$\begin{aligned} q(c_1, c_2) = & (c_1 + c_2)^3(1 + c_1^3 c_2^3) - 6(1 + c_1^2 c_2^2)(c_1^4 - 7c_1^3 c_2 + 20c_1^2 c_2^2 - 7c_1 c_2^3 + c_2^4) + \\ & + 3(1 + c_1 c_2)(4c_1^5 - 31c_1^4 c_2 + 47c_1^3 c_2^2 + 47c_1^2 c_2^3 - 31c_1 c_2^4 + 4c_2^5) - \\ & - 2(4c_1^6 - 21c_1^5 c_2 - 30c_1^4 c_2^2 + 174c_1^3 c_2^3 - 30c_1^2 c_2^4 - 21c_1 c_2^5 + 4c_2^6). \end{aligned}$$

Уравнение $q(c_1, c_2) = 0$ определяет в треугольнике T алгебраическую кривую S . Она монотонно возрастает от точки $(1/2, 0)$ до точки $(1, 1)$ и разбивает треугольник T на две области N и A . Соответственно, будем рассматривать два случая:

- (N) $\mathbf{c} \in N \sqcup S$,
- (A) $\mathbf{c} \in A \sqcup S$.

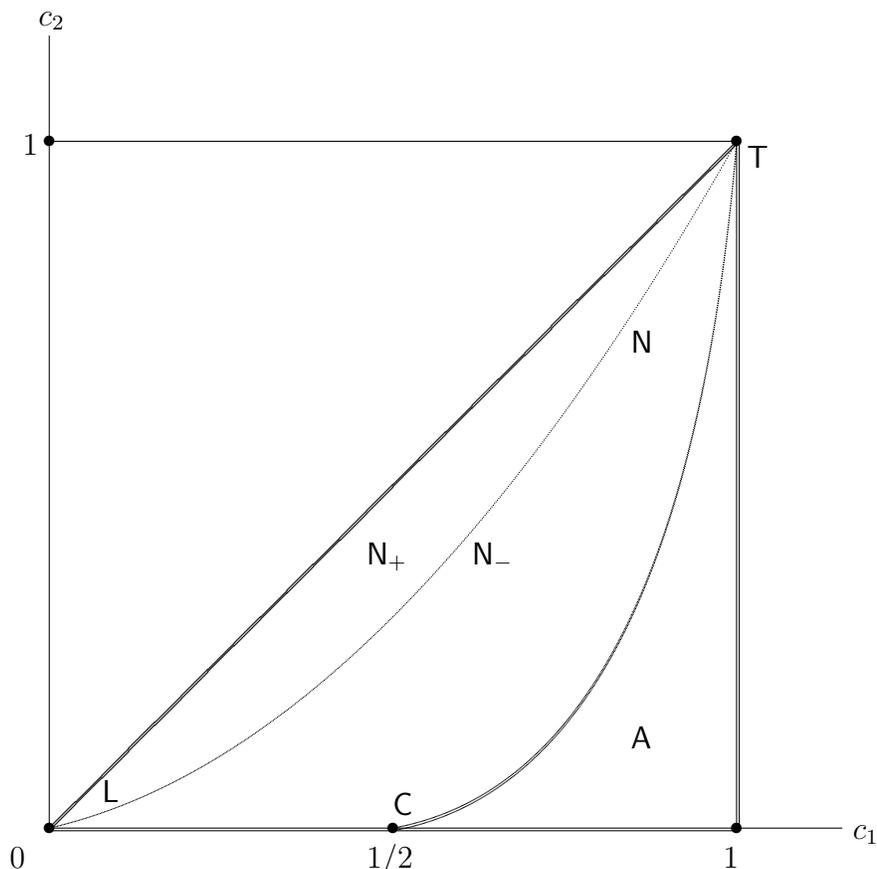


Рис. 3.

В работе [15] была определена алгебраическая кривая L , которая возрастает в треугольнике T от точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$ и разбивает область N на две области N_+ и N_- . Соответственно, случай N разбивается на два подслучая:

- (N_+) $\mathbf{c} \in N_+ \sqcup L$,
- (N_-) $\mathbf{c} \in L \sqcup N_- \sqcup S$.

В дальнейшем мы увидим, что случай (N_+) непрерывно переходит в (N_-) , когда $\mathbf{c} \in L$,

а случай (N_-) непрерывно переходит в (A) , когда $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$. Кривая L имеет следующее уравнение:

$$(\sqrt{2} - 1)c_1 - (\sqrt{2} + 1)c_2 + 2c_1c_2 = 0.$$

Случай (N_+) .

Определим класс кривых \mathfrak{J}_+ . Он состоит из простых кусочно аналитических дуг, симметричных относительно вещественной оси и пересекающих эту ось в некоторой точке $x_* \leq 0$. Зафиксируем кривую $\gamma \in \mathfrak{J}_+$ и поставим следующую задачу равновесия Никишина с внешними полями и констрейном.

Задача 3. Требуется найти две положительные меры λ_Δ и λ_γ , такие, что

- 1) $S(\lambda_\Delta) \subset \Delta$, $S(\lambda_\gamma) \subset \gamma$;
- 2) $\|\lambda_\Delta\| = 2$, $\|\lambda_\gamma\| = 1$;
- 3) выполняется ограничение (констрейн)

$$\lambda_\Delta \leq \chi_\Delta,$$

где χ_Δ – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

4) с некоторыми постоянными w_Δ и w_γ выполняются следующие условия равновесия:

а) на промежутке Δ

$$W_\Delta = 2V^{\lambda_\Delta} - V^{\lambda_\gamma} + \Phi_\Delta \begin{cases} \leq w_\Delta & \text{на } S(\lambda_\Delta), \\ \geq w_\Delta & \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda_\Delta) \setminus S(\chi_\Delta - \lambda_\Delta)), \end{cases} \quad (2.1)$$

б) на кривой γ

$$W_\gamma = 2V^{\lambda_\gamma} - V^{\lambda_\Delta} + \Phi_\gamma \begin{cases} \leq w_\gamma & \text{на } S(\lambda_\gamma), \\ \geq w_\gamma & \text{на } \gamma, \end{cases} \quad (2.2)$$

где внешние поля Φ_Δ и Φ_γ определены формулами

$$\Phi_\Delta(x) = x \log \frac{1}{c_1}, \quad \Phi_\gamma(x) = \operatorname{Re} x \log \frac{c_1}{c_2}.$$

Предложение 3. Задача 3 имеет единственное решение.

Это предложение вытекает из результатов А. А. Гончара и Е. А. Рахманова (см. [5, 6, 7, 8]).

Определение. Кривая $\Gamma \in \mathfrak{J}_+$ обладает S -свойством (свойством симметрии), если

- 1) $\Gamma \subset S(\lambda_\Gamma)$,
- 2) нормальные производные обобщенного потенциала W_Γ на противоположных берегах кривой Γ равны:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_+} W_\Gamma = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_-} W_\Gamma \quad \text{на } \Gamma.$$

Такую кривую Γ мы также будем называть *экстремальной*.

Предложение 4. *Если $\mathbf{c} \in \mathbf{N}_+$, то в классе \mathfrak{J}_+ существует единственная экстремальная кривая Γ .*

На доказательстве единственности экстремальной кривой мы в этой работе останавливаться не будем. Аналогичные вопросы изучались, например, в работах [19, 20, 21]. Везде в дальнейшем речь идет об экстремальной кривой Γ .

Теорема 1. *Пара мер $(\lambda_\Delta, \lambda_\Gamma)$ является решением задачи 3 для экстремальной кривой Γ тогда и только тогда, когда λ_Δ – предельная мера распределения нулей масштабированных совместных многочленов Мейкснера.*

Замечание. Мера λ_Γ – это предельная мера распределения соответствующих дополнительных точек интерполяции.

2.2. Предельная мера в случае Никишина

Укажем явный вид мер λ_Δ и λ_Γ . Рассмотрим следующий многочлен:

$$\begin{aligned} Q(x) = & (2 - c_1 - c_2)^2(c_1 + c_2 - 2c_1c_2)^2 + \\ & + 2(1 - c_1c_2)((5c_1^3 + 3c_1^2c_2 + 3c_1c_2^2 + 5c_2^3) - 2(1 + c_1c_2)(3c_1^2 - 2c_1c_2 + 3c_2^2))x + \\ & + ((13c_1^2 - 22c_1c_2 + 13c_2^2) - 2(1 + c_1c_2)(5c_1^3 - c_1^2c_2 - c_1c_2^2 + 5c_2^3)) - \\ & - 2(c_1^4 - 13c_1^3c_2 + 12c_1^2c_2^2 - 13c_1c_2^3 + c_2^4) + 13c_1^2c_2^2(c_1^2 + c_2^2) - 22c_1^3c_2^3)x^2 - \\ & - 6(1 - c_1)(1 - c_2)(c_1 - c_2)^2(1 - c_1c_2)x^3 + (1 - c_1)^2(1 - c_2)^2(c_1 - c_2)^2x^4. \end{aligned}$$

Многочлен \mathfrak{q} является дискриминантом многочлена Q . Если $\mathbf{c} \in \mathbf{N}$, то многочлен $Q(x)$ имеет два положительных и два комплексносопряженных корня. Обозначим их $0 < a < b < +\infty$, а также ζ_+ и ζ_- , которые лежат в верхней и нижней полуплоскости соответственно. Корни зависят от двух параметров c_1 и c_2 . Положим $E = [a, b]$.

Предложение 5. *Точки ζ_\pm служат концами экстремальной кривой Γ .*

Через \mathfrak{R} обозначим трехлистную риманову поверхность, которая получается склейкой следующих листов

$$\mathfrak{R}_E = \bar{\mathbb{C}} \setminus E, \quad \mathfrak{R}_{E\Gamma} = \bar{\mathbb{C}} \setminus (E \sqcup \Gamma), \quad \mathfrak{R}_\Gamma = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma.$$

Мероморфную функцию $\theta : \mathfrak{R} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ определим ее дивизором. Она имеет простой нуль в точке $x = 0$ на листе \mathfrak{R}_E и простой полюс в точке $x = 0$ на листе $\mathfrak{R}_{E\Gamma}$. Таким образом, функция θ осуществляет конформное отображение поверхности \mathfrak{R} на сферу Римана. Нормируем эту функцию условием $\theta = 1$ в точке $x = \infty$ на листе \mathfrak{R}_E . Через $\theta_E, \theta_{E\Gamma}, \theta_\Gamma$ будем обозначать соответствующие однозначные ветви алгебраической функции θ . Эта функция удовлетворяет следующему кубическому уравнению:

$$c_1c_2x\theta^3 + ((c_1 + c_2)(1 - x) - c_1c_2(2 + x))\theta^2 + ((c_1 + c_2)(x + 1) + (x - 2))\theta - x = 0. \quad (2.3)$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Марковская функция меры λ_Δ равна*

$$h_{\lambda_\Delta}(x) = \log \theta_E(x). \quad (2.4)$$

Она голоморфна в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0, b]$. Ветвь логарифма выделяется условием

$$h_{\lambda_\Delta}(x) \sim \frac{2}{x} \quad \text{при } x \longrightarrow \infty.$$

Носителем меры λ_Δ служит отрезок $[0, b]$. Эта мера достигает констрейн на отрезке $[0, a]$.

2°. *Марковская функция меры λ_Γ равна*

$$h_{\lambda_\Gamma}(x) = -\log(c_2\theta_\Gamma(x)). \quad (2.5)$$

Она голоморфна в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Ветвь логарифма выделяется условием

$$h_{\lambda_\Gamma}(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при } x \longrightarrow \infty.$$

Носителем меры λ_Γ служит экстремальная кривая Γ .

2.3. Задача равновесия Анжелеско-Никишина

Случай (N₋).

Определим класс кривых \mathfrak{J}_- так же, как \mathfrak{J}_+ , только теперь точка пересечения кривой с вещественной осью – точка $x_* \geq 0$. Зафиксируем кривую $\gamma \in \mathfrak{J}_-$ и поставим следующую смешанную задачу равновесия Анжелеско-Никишина с внешними полями и констрейнами.

Задача 4. *Требуется найти три положительные меры λ_L , λ_R и λ_γ , такие, что*

$$1) \mathcal{S}(\lambda_L) \subset E_L^* = [0, x_*], \quad \mathcal{S}(\lambda_R) \subset \Delta^* = [x_*, +\infty), \quad \mathcal{S}(\lambda_\gamma) \subset \gamma;$$

$$2) \|\lambda_L\| + \|\lambda_R\| = 2, \quad \|\lambda_L\| + \|\lambda_\gamma\| = 1;$$

3) *выполняются ограничения (констрейны)*

$$\lambda_L \leq \chi_\Delta, \quad \lambda_R \leq \chi_\Delta,$$

где χ_Δ – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

4) *с некоторыми постоянными w_L , w_R и w_γ справедливы следующие условия равновесия:*

a) *для меры λ_L*

$$W_L = 2V^{\lambda_L} + V^{\lambda_R} + V^{\lambda_\gamma} + \Phi_L \begin{cases} \leq w_L & \text{на } \mathcal{S}(\lambda_L), \\ \geq w_L & \text{на } E_L^* \setminus (\mathcal{S}(\lambda_L) \setminus \mathcal{S}(\chi_\Delta - \lambda_L)), \end{cases}$$

b) *для меры λ_R*

$$W_R = 2V^{\lambda_R} + V^{\lambda_L} - V^{\lambda_\gamma} + \Phi_R \begin{cases} \leq w_R & \text{на } \mathcal{S}(\lambda_R), \\ \geq w_R & \text{на } \Delta^* \setminus (\mathcal{S}(\lambda_R) \setminus \mathcal{S}(\chi_\Delta - \lambda_R)), \end{cases}$$

с) для меры λ_γ

$$W_\gamma = 2V^{\lambda_\gamma} + V^{\lambda_L} - V^{\lambda_R} + \Phi_\gamma \begin{cases} \leq w_\gamma & \text{на } S(\lambda_\gamma), \\ \geq w_\gamma & \text{на } \gamma; \end{cases}$$

где внешние поля определены формулами

$$\Phi_L(x) = x \log \frac{1}{c_2}, \quad \Phi_R(x) = x \log \frac{1}{c_1}, \quad \Phi_\gamma(x) = \operatorname{Re}(x) \log \frac{c_1}{c_2}.$$

Эта задача имеет единственное решение. Определение экстремальной кривой $\Gamma \in \mathfrak{L}$ прежнее. Концами этой кривой служат точки ζ_\pm .

Теорема 3. Меры λ_L , λ_R , λ_Γ являются решением задачи 4 тогда и только тогда, когда $\lambda_\Delta = \lambda_L + \lambda_R$ – предельная мера распределения нулей масштабированных совместных многочленов Мейкснера.

По прежнему справедлива формула (2.4) для меры λ_Δ . Как и раньше, носителем этой меры будет отрезок $[0, b]$, а на отрезке $[0, a]$ достигается констрейн.

2.4. Задача равновесия Анжелеско

Случай (А)

Если $\mathbf{c} \in \mathbf{A}$, то многочлен \mathbf{Q} имеет четыре положительных корня. Обозначим их

$$0 < a_L < b_L < a_R < b_R < +\infty.$$

Они зависят от параметров c_1 и c_2 . Если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$, то многочлен \mathbf{Q} имеет три положительных корня, один из которых второго порядка, а именно, $b_L = a_R$. Поставим следующую задачу равновесия Анжелеско с внешними полями и констрейнами.

Задача 5. Требуется найти две положительные меры λ_L и λ_R , такие, что

1) для $\Delta = [0, +\infty)$ имеем

$$S(\lambda_L) \subset \Delta, \quad S(\lambda_R) \subset \Delta,$$

при этом, $b_* \leq a_*$, где

$$b_* = \sup S(\lambda_L), \quad a_* = \inf S(\lambda_R);$$

2) $\|\lambda_L\| = 1, \quad \|\lambda_R\| = 1;$

3) выполняются ограничения (констрейны)

$$\lambda_L \leq \chi_\Delta, \quad \lambda_R \leq \chi_\Delta,$$

где χ_Δ – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

4) с некоторыми постоянными w_L и w_R справедливы следующие условия равновесия:
а) на носителе $S(\lambda_L)$

$$W_L = 2V^{\lambda_L} + V^{\lambda_R} + \Phi_L \begin{cases} \leq w_L & \text{на } S(\lambda_L), \\ \geq w_L & \text{на } [0, a_*] \setminus (S(\lambda_L) \setminus S(\chi_\Delta - \lambda_L)), \end{cases} \quad (2.6)$$

b) на носителе $S(\lambda_R)$

$$W_R = 2V^{\lambda_R} + V^{\lambda_L} + \Phi_R \begin{cases} \leq w_R & \text{на } S(\lambda_R), \\ \geq w_R & \text{на } [b_*, +\infty) \setminus (S(\lambda_R) \setminus S(\chi_\Delta - \lambda_R)), \end{cases} \quad (2.7)$$

где внешние поля определены формулами

$$\Phi_L(x) = -x \log c_2, \quad \Phi_R(x) = -x \log c_1.$$

Предложение 6. *Задача 4 имеет единственное решение.*

Теорема 4. *Пара мер (λ_L, λ_R) является решением задачи 4 тогда и только тогда, когда $\lambda_\Delta = \lambda_L + \lambda_R$ — предельная мера распределения нулей масштабированных совместных многочленов Мейкснера.*

2.5. Предельная мера в случае Анжелеско

Укажем явный вид предельной меры λ_Δ . Положим

$$E_L = [a_L, b_L], \quad E_R = [a_R, b_R].$$

Обозначим через \mathfrak{R} трехлистную риманову поверхность, которая получается склейкой следующих листов

$$\mathfrak{R}_L = \bar{\mathbb{C}} \setminus E_L, \quad \mathfrak{R}_* = \bar{\mathbb{C}} \setminus (E_L \cup E_R), \quad \mathfrak{R}_R = \bar{\mathbb{C}} \setminus E_R.$$

На этой поверхности определим мероморфную функцию θ ее дивизором. Она имеет простой нуль в точке $x = 0$ на листе \mathfrak{R}_* и простой полюс в точке $x = 0$ на листе \mathfrak{R}_L . Условие нормировки следующее: $\theta = 1$ в точке $x = \infty$ на листе \mathfrak{R}_* . Через $\theta_L, \theta_*, \theta_R$ будем обозначать соответствующие однозначные ветви алгебраической функции θ . Эта функция по-прежнему удовлетворяет уравнению (2.3). На рис. 5 показан график функции θ на вещественной оси.

Теорема 5. *Справедливы следующие утверждения.*

1°. *Марковская функция меры λ_L равна*

$$h_{\lambda_L}(x) = -\log(c_2 \theta_L(x)).$$

Она голоморфна в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus [0, b_L]$. Ветвь логарифма выделяется условием

$$h_{\lambda_L}(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Носителем меры λ_L служит отрезок $[0, b_L]$. Эта мера достигает констрейн на отрезке $[0, a_L]$.

2°. *Марковская функция меры λ_R равна*

$$h_{\lambda_R}(x) = -\log(c_1 \theta_R(x)).$$

Она голоморфна в области $\bar{\mathbb{C}} \setminus E_R$. Ветвь логарифма выделяется условием

$$h_{\lambda_R}(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Носителем меры λ_R служит отрезок E_R . Эта мера констрейн не достигает.

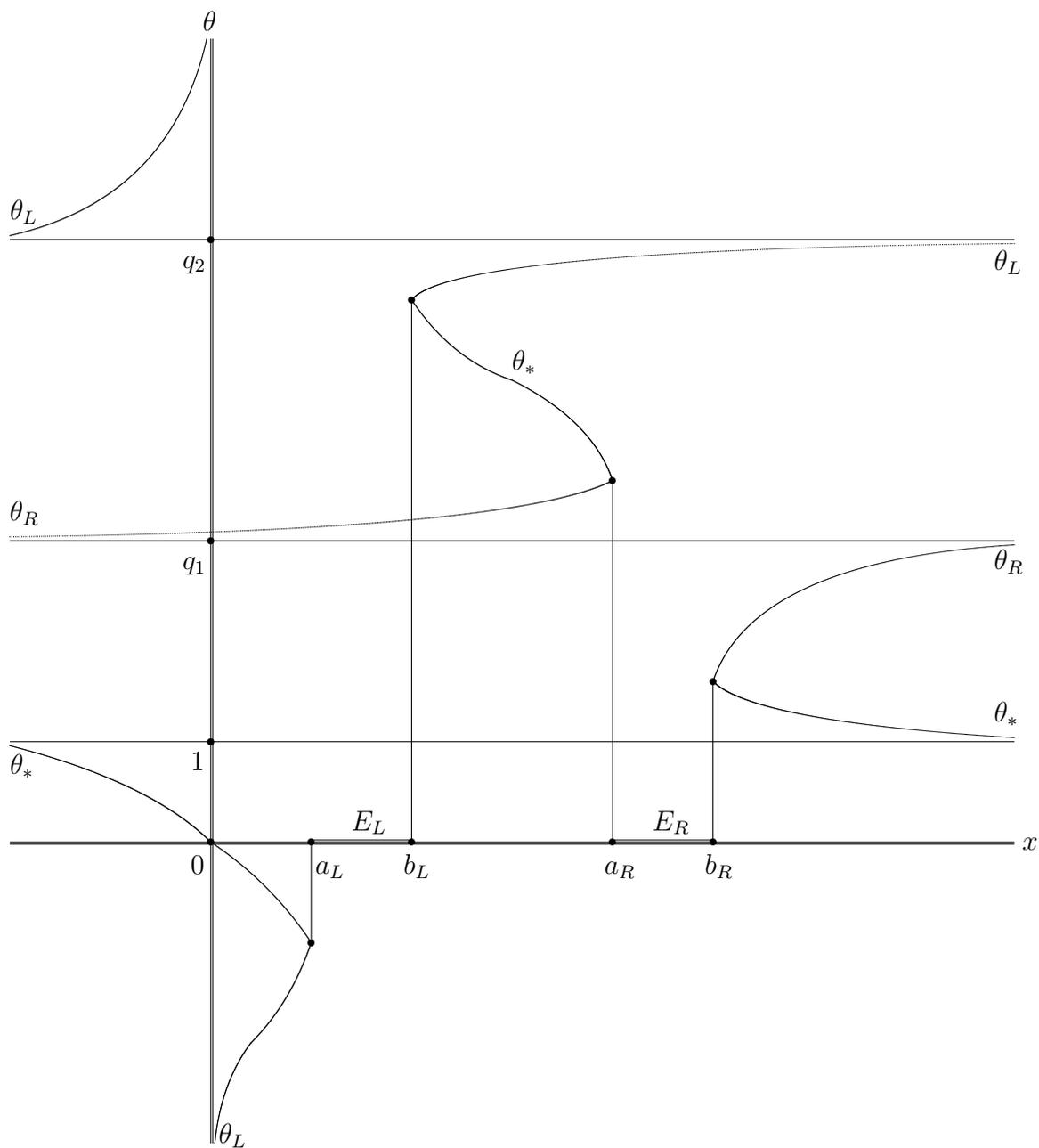


Рис. 5.

Следствие. Марковская функция предельной меры λ_Δ равна

$$h_{\lambda_\Delta}(x) = \log \theta_*(x), \quad x \in \bar{\mathbb{C}} \setminus ([0, b_L] \cup [a_R, b_R]),$$

при этом

$$h_{\lambda_\Delta}(x) \sim \frac{2}{x}, \quad \text{когда } x \rightarrow \infty.$$

2.6. Минимум энергии и графы

В заключение этого параграфа сделаем одно замечание общего характера. Пусть $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ – упорядоченный набор положительных борелевских мер на комплексной плоскости (векторная мера). Носитель меры ν_j лежит на фиксированном компакте K_j в $\bar{\mathbb{C}}$, $j = 1, \dots, r$. Пусть далее

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r,1} & \dots & c_{r,r} \end{bmatrix}$$

– вещественная симметричная положительно определенная (может быть, вырожденная) матрица, которую мы будем называть *матрицей взаимодействия*. Потребуем, чтобы компакты K_j и K_k не пересекались, если $c_{j,k} < 0$. (В ряде задач допускается наличие нескольких общих точек.) *Энергией* векторной меры $\boldsymbol{\nu}$ называется следующий полунепрерывный снизу в *-слабой топологии выпуклый квадратичный функционал

$$J(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{j,k=1}^r c_{j,k} \mathbf{I}(\nu_j, \nu_k),$$

где

$$\mathbf{I}(\nu_j, \nu_k) = \iint_{K_j \times K_k} \log \frac{1}{|x-y|} d\nu_j(x) d\nu_k(y)$$

– взаимная энергия мер. Через \mathfrak{M} обозначим область определения этого функционала. Она состоит из описанных выше векторных мер $\boldsymbol{\nu}$, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям, таким как условия на полные вариации мер, констрейны и т.д. Тогда при выполнении определенных требований (необходимо, чтобы множество \mathfrak{M} было выпуклым компактом в *-слабой топологии) существует единственная *экстремальная мера* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathfrak{M}$, минимизирующая функционал энергии:

$$J(\boldsymbol{\lambda}) = \min\{J(\boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{\nu} \in \mathfrak{M}\}.$$

Эта мера удовлетворяет некоторым условиям равновесия, поэтому она также называется *равновесной мерой*. При необходимости к квадратичной форме $J(\boldsymbol{\nu})$ добавляется линейный функционал, происходящий от внешних полей.

Выше мы рассмотрели три задачи равновесия. Фактически задача 4 включает в себя задачи 3 и 5 как частные случаи. В задаче 4 матрица взаимодействия для

векторной меры $(\lambda_L, \lambda_R, \lambda_\Gamma)$ следующая:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Если $\lambda_L = 0$, то мы приходим к матрице взаимодействия Никишина

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

для векторной меры $(\lambda_\Delta, \lambda_\Gamma)$, где $\lambda_\Delta = \lambda_R$. Таким образом, задача 4 переходит в задачу 3. Если же $\lambda_\Gamma = 0$, то получим матрицу взаимодействия Анжелеско

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

для векторной меры (λ_L, λ_R) . Задача 4 переходит в задачу 5.

В терминах графов, введенных в работе [7], матрице (2.8) соответствует циклический граф, изображенный на рис. 6.

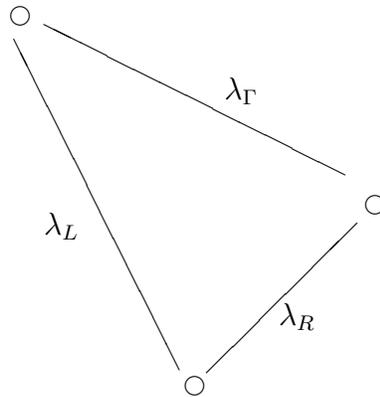


Рис. 6.

При $\lambda_\Gamma = 0$ он переходит в граф-дерево для систем Анжелеско (рис. 7). При $\lambda_L = 0$ он переходит в граф-дерево для систем Никишина (рис. 8).

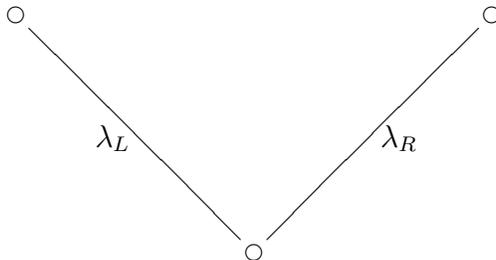


Рис. 7.

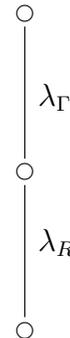


Рис. 8.

§3. Многочлены Мейкснера с переменным весом

3.1. Задача равновесия

В соответствии с формулой (1.11) вначале рассмотрим многочлены $P_n(x)$, определенные следующей формулой Родрига

$$P_n(x)G(c, \beta + n; x) = \frac{1}{n!} \Delta^n G(c, \beta + 2n; x), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.1)$$

Эти многочлены удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int P_n(x)x^l \omega_n(x) d\mu(c, \beta; x) = 0, \quad l = 0, \dots, n-1,$$

с переменным весом

$$\omega_n(x) = (x + \beta)(x + \beta + 1) \dots (x + \beta + n - 1). \quad (3.2)$$

Многочлены P_n изучались нами в работе [9]. Там были получены следующие результаты. Пусть

$$P_n^*(x) = C_n^P P_n(nx), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

масштабированные многочлены с единичным старшим коэффициентом. Существует слабая асимптотика

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \log |P_n^*(x)| = V^{\lambda^P}(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus S(\lambda^P),$$

где V^{λ^P} – логарифмический потенциал вероятностной меры λ^P с носителем $S(\lambda^P)$ на промежутке Δ . Эта мера является единственным решением следующей задачи равновесия теории логарифмического потенциала.

Задача 6. Требуется найти положительную меру λ^P , такую, что

- 1) ее носитель $S(\lambda^P)$ лежит на промежутке $\Delta = [0, +\infty)$;
- 2) полная вариация $\|\lambda^P\|$ равна единице;
- 3) выполняется ограничение (констрейн)

$$\lambda^P \leq \chi_\Delta,$$

где χ_Δ – классическая мера Лебега на промежутке Δ ;

- 4) выполнены условия равновесия

$$W^P = 2V^{\lambda^P} + \Phi^P \begin{cases} \leq w^P & \text{на } S(\lambda^P), \\ \geq w^P & \text{на } \Delta \setminus (S(\lambda^P) \setminus S(\chi_\Delta - \lambda^P)), \end{cases}$$

где w^P – некоторая постоянная равновесия, а внешнее поле Φ^P определено формулой

$$\Phi^P(x) = -x \log c + V^\chi(x),$$

при этом, V^χ – логарифмический потенциал классической меры Лебега χ на отрезке $[-1, 0]$.

Внешнее поле Φ^P состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое происходит от экспоненциального убывания меры μ на бесконечности. Это поле сдвигает нули многочленов P_n^* влево, обеспечивая тем самым, компактность носителя меры λ^P . Второе слагаемое происходит от переменного веса (3.2). Это поле сдвигает нули вправо. Поскольку поле Φ^P выпукло вниз, то носителем меры λ^P будет некоторый отрезок. Присутствует бифуркация. В зависимости от того, какое из двух полей действует сильнее, а это определяется параметром c , имеет место либо эффект столкновения нулей, либо эффект достижения констрейна. А именно, положим

$$x_{\pm}^P = \frac{(1 \pm \sqrt{2c})^2}{1 - c}, \quad 0 < c < 1.$$

Если $0 < c \leq 1/2$, то $S(\lambda^P) = [0, x_+^P]$, и на отрезке $[0, x_-^P]$ достигается констрейн. Если $1/2 \leq c < 1$, то $S(\lambda^P) = [x_-^P, x_+^P]$, и констрейн в этом случае не достигается.

3.2. Предельная мера

В работе [11] был получен явный вид предельной меры λ^P . Обозначим через \mathfrak{N} риманову поверхность, полученную склейкой двух экземпляров \mathfrak{N}_1 и \mathfrak{N}_2 сферы Римана, разрезанной вдоль отрезка $[x_-^P, x_+^P]$. Через $\vartheta : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим мероморфную функцию, заданную своим дивизором и условием нормировки. Она имеет простой полюс в точке $x = -1$ на листе \mathfrak{N}_2 и простой нуль в точке $x = 0$ на листе \mathfrak{N}_1 , если $0 < c < 1/2$, и на листе \mathfrak{N}_2 , если $1/2 < c < 1$. Эта функция равна единице в бесконечности на листе \mathfrak{N}_1 . Тогда марковская функция меры λ^P равна

$$h_{\lambda^P}(x) = \log \vartheta_1(x), \quad x \in \mathbb{C} \setminus S(\lambda^P).$$

Здесь ϑ_1 и ϑ_2 – соответствующие однозначные ветви алгебраической функции ϑ . Эта функция удовлетворяет квадратному уравнению

$$c(x+1)\vartheta^2 + ((1-2c) - (1+c)x)\vartheta + x = 0. \quad (3.3)$$

На рис. 9 и 10 изображены графики функции $\vartheta(x)$ на вещественной оси для случаев $0 < c < 1/2$ и $1/2 < c < 1$ соответственно.

Уравнение (3.3) получается следующим образом. Перепишем формулу Родрига (3.1) по формуле Коши, сделаем масштабирование и применим к полученному интегралу метод перевала. Придем к вопросу о критических точках следующей функции

$$S(t; x) = t \log c + (t+2) \log(t+2) - t \log t + (t-x) \log(t-x) - (t-x+1) \log(t-x+1).$$

Это – многозначная аналитическая функция, зависящая от комплексного переменного t и комплексного параметра x . Уравнение на критические точки равносильно квадратному уравнению

$$(1-c)t^2 + ((1-2c) - (1-c)x)t + 2cx = 0, \quad (3.4)$$

римановой поверхностью которого служит поверхность \mathfrak{N} . Пусть

$$S_*(x) = S(t_1(x); x),$$

где вне отрезка $S(\lambda^P)$ берутся главные ветви логарифмов, и $t_1(x)$ – соответствующая ветвь алгебраической функции t . Тогда

$$V^{\lambda^P} + \Phi^P = 2 + \log \frac{1-c}{c} - \operatorname{Re} S_*.$$

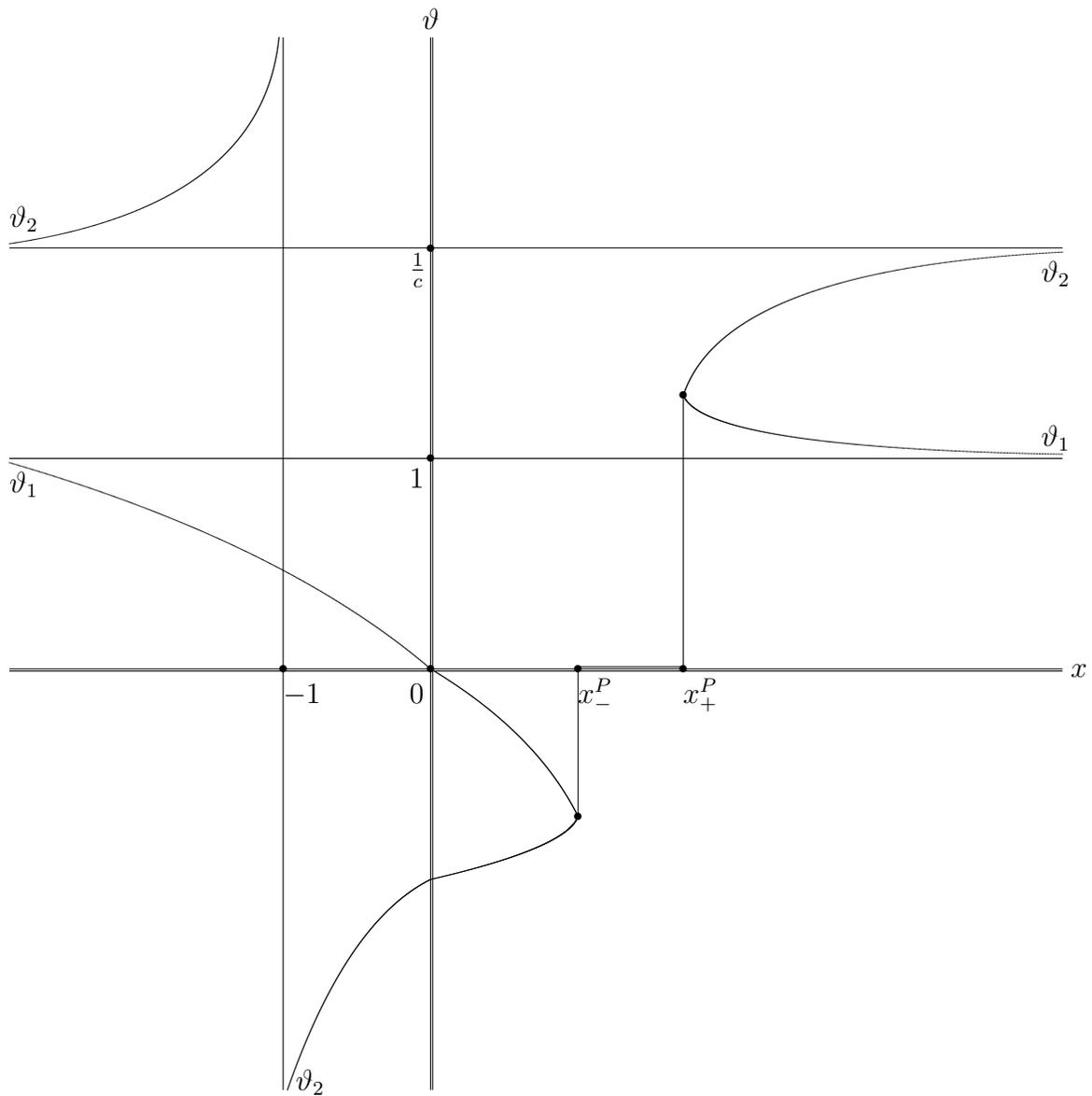


Рис. 9.

Откуда

$$\vartheta_1(x) = \frac{x(t_1(x) - x + 1)}{c(x + 1)(t_1(x) - x)}.$$

Тем самым, ϑ удовлетворяет уравнению (3.3).

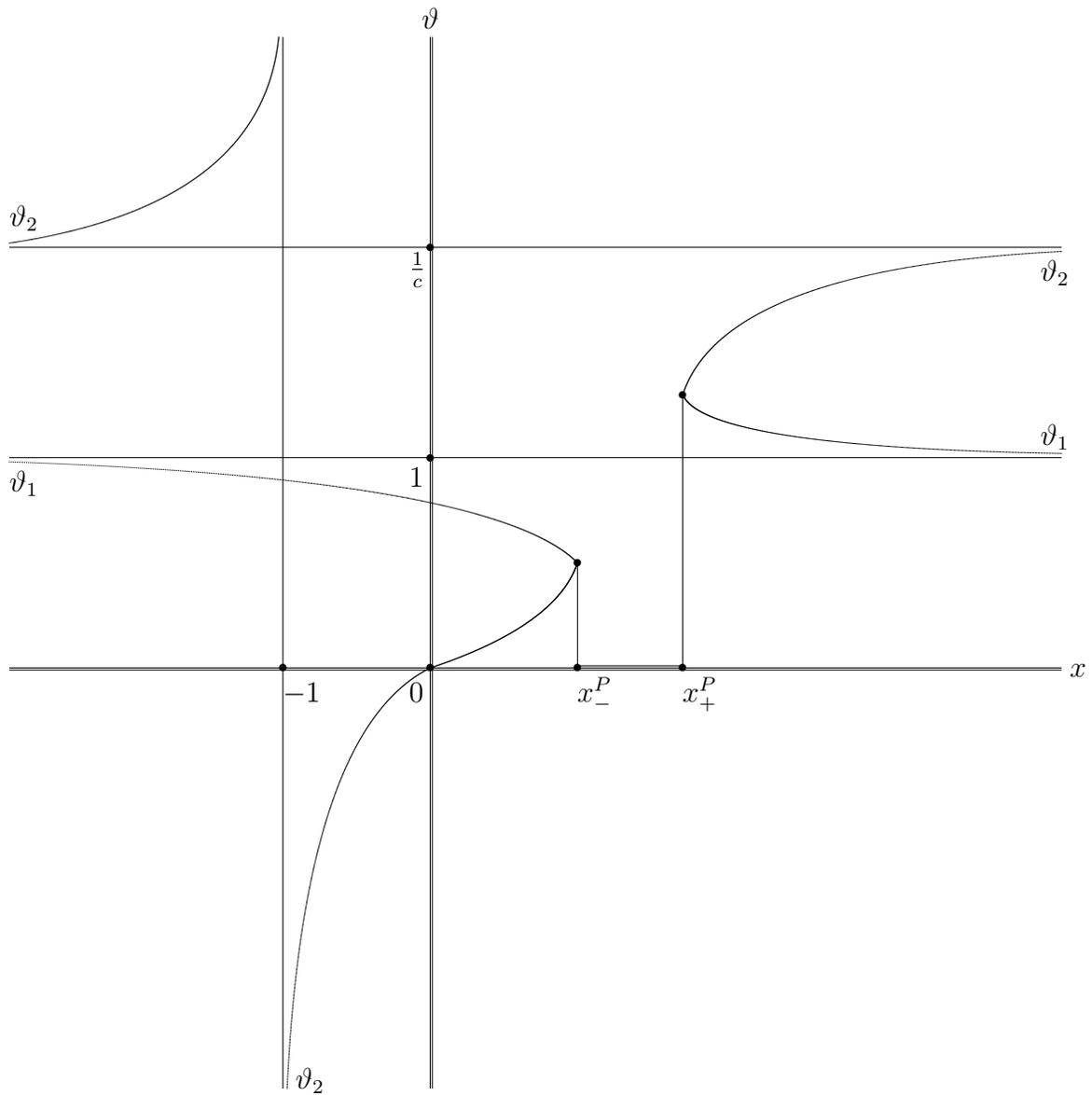


Рис. 10.

§4. Доказательство основных результатов

4.1. Вывод основного алгебраического уравнения

Перепишем формулу (1.11) следующим образом

$$Q_n(x)G(c_2, \beta; x) = \frac{n!}{(2n)!} \Delta^n \{G(c_2, \beta + n; x)P_n(x)\},$$

где P_n – многочлены Мейкснера с переменным весом, определенные формулой (3.1) при $c = c_1$. Применим формулу Коши:

$$\begin{aligned} Q_n(x) c_2^x \frac{\Gamma(\beta + x)}{\Gamma(1 + x)} &= \\ &= \frac{n! n!}{(2n)!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} c_2^{\xi} \frac{\Gamma(\beta + n + \xi)}{\Gamma(1 + \xi)} P_n(\xi) \frac{d\xi}{(\xi - x)(\xi - x + 1) \dots (\xi - x + n)}, \end{aligned}$$

где замкнутый контур γ отделяет точки $x, x-1, \dots, x-n$ от полюсов гамма-функции $\Gamma(\beta + n + \xi)$. Сделаем масштабирование и замену переменной:

$$\begin{aligned} Q_n(nx) c_2^{nx} \frac{\Gamma(\beta + nx)}{\Gamma(1 + nx)} &= \\ &= \frac{n! n!}{(2n)!} \frac{1}{n^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^*} c_2^{n\xi} \frac{\Gamma(\beta + n + n\xi)}{\Gamma(1 + n\xi)} P_n(n\xi) \frac{d\xi}{(\xi - x)(\xi - x + \frac{1}{n}) \dots (\xi - x + \frac{n}{n})}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где точка x и замкнутый контур γ^* , обходящий отрезок $[x-1, x]$, для определенности лежат в верхней полуплоскости.

По формуле Стирлинга при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \log \frac{\Gamma(\beta + n + n\xi)}{\Gamma(1 + n\xi)} - \log n \rightarrow -\mathcal{V}^x(\xi),$$

где \mathcal{V}^x – комплексный потенциал классической меры Лебега на отрезке $[-1, 0]$, а именно:

$$\mathcal{V}^x(\xi) = \xi \log \xi - (\xi + 1) \log(\xi + 1) + 1.$$

Мы всегда берем главные ветви логарифмов при $\xi \rightarrow +\infty$. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |P_n(n\xi)| &\rightarrow 1 + \log \frac{1-c}{c} - V^{\lambda^P}(\xi), \quad \text{где } c = c_1, \\ \frac{1}{n} \log \left| \prod_{k=0}^n \left(\xi - x + \frac{k}{n} \right) \right| &\rightarrow -V^x(\xi - x), \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, слабая асимптотика величин (4.1) совпадает со слабой асимптотикой следующего интеграла

$$\int_{\gamma^*} e^{n\sigma(\xi; x)} d\xi, \quad (4.2)$$

где

$$\sigma(\xi; x) = \xi \log c_2 - \xi \log c_1 + (\xi - x) \log(\xi - x) - (\xi - x + 1) \log(\xi - x + 1) + S_*(\xi) - 2 \log 2,$$

при этом функция S_* определена в §3.

Уравнение на критические точки функции σ равносильно уравнению

$$\frac{c_2(\xi - x)(t - \xi + 1)}{c_1(\xi - x + 1)(t - \xi)} = 1,$$

где $t = t(\xi)$ – корень уравнения (3.4). Исключая переменную t , приходим к кубическому уравнению

$$\begin{aligned} & (c_1 - c_2 - c_1 c_2 + c_2^2) \xi^3 + ((2c_1 - 3c_1 c_2 + c_2^2) - 2x(c_1 - c_2 - c_1 c_2 + c_2^2)) \xi^2 + \\ & + ((c_1 + c_2 - 2c_1 c_2) - x(2c_1 + c_2 - 5c_1 c_2 + 2c_2^2) + x^2(c_1 - c_2 - c_1 c_2 + c_2^2)) \xi - \\ & - c_2 x((1 - 2c_1) - x(1 - 2c_1 + c_2)) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При $x \rightarrow \infty$ корни этого уравнения ведут себя следующим образом:

$$\xi_{\pm}(x) = x + p_{\pm} + O(1/x), \quad \xi_0(x) \rightarrow p_0,$$

где

$$p_+ = \frac{c_2 - c_1}{\alpha}, \quad p_- = \frac{c_1(c_2 - 1)}{\alpha}, \quad p_0 = -\frac{c_2(1 - 2c_1 + c_2)}{\alpha},$$

при этом

$$\alpha = c_1 - c_2 - c_1 c_2 + c_2^2 = (c_1 - c_2)(1 - c_2).$$

Анализируя метод перевала, убеждаемся в том, что критическая точка ξ_+ дает в окрестности бесконечности основной вклад в асимптотику интеграла (4.2), и эта асимптотическая формула продолжается на внешность носителя меры λ_{Δ} – предельной меры распределения нулей масштабированных совместных многочленов Мейкнера Q_n^* . Таким образом,

$$V^{\lambda_{\Delta}}(x) - x \log c_2 = \log \frac{1 - c_1}{c_1} + \log \frac{1 - c_2}{c_2} + 2 - \operatorname{Re} \sigma_{\Delta}(x),$$

где

$$\sigma_{\Delta}(x) = \sigma(\xi_+(x); x).$$

Вычисляя марковскую функцию меры λ_{Δ} по формуле

$$h_{\lambda_{\Delta}}(x) = -\frac{d}{dx} \mathcal{V}^{\lambda_{\Delta}}(x),$$

приходим к следующему результату:

$$h_{\lambda_{\Delta}} = \log \theta_+,$$

где

$$\theta_+(x) = \frac{\xi_+(x) - x + 1}{c_2(\xi_+(x) - x)}.$$

Из (4.3) следует, что функция θ_+ удовлетворяет кубическому уравнению (2.3). Через θ_+ , θ_- , θ_0 обозначим однозначные ветви алгебраической функции θ в окрестности бесконечности, такие, что

$$\begin{aligned}\theta_+(x) &= 1 + \frac{2}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \\ c_1\theta_-(x) &= 1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \\ c_2\theta_0(x) &= 1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),\end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$.

4.2. Случай Никишина

Пусть $c \in \mathbb{N}$. Тогда, как было отмечено выше, функция $\theta_E = \theta_+$ голоморфна вне носителя предельной меры распределения нулей многочленов Q_n^* . В §2 приведены легко проверяемые свойства этой функции и двух других ветвей $\theta_{E\Gamma} = \theta_-$, $\theta_\Gamma = \theta_0$ алгебраической функции θ , удовлетворяющей уравнению (2.3). Укажем также поведение этих функций при $x \rightarrow 0$ (нумерация ветвей для случая $x_* < 0$):

$$\begin{aligned}\theta_E(x) &\sim -\frac{1}{2 - c_1 - c_2} \cdot x, \\ \theta_{E\Gamma}(x) &\sim -\frac{c_1 + c_2 - 2c_1c_2}{c_1c_2} \cdot \frac{1}{x}, \\ \theta_\Gamma(x) &\rightarrow \frac{2 - c_1 - c_2}{c_1 + c_2 - 2c_1c_2}.\end{aligned}$$

Проверим условия равновесия для обобщенного потенциала W_Δ . Вычислим производную этой функции вдоль вещественной положительной полуоси:

$$W'_\Delta = -\operatorname{Re}\{2h_{\lambda_\Delta} - h_{\lambda_\Gamma} - \log c_1\},$$

где граничные значения функций h_{λ_Δ} и h_{λ_Γ} берутся, например, из верхней полуплоскости. Тогда,

$$W'_\Delta = -\operatorname{Re}\{2\log \theta_E + \log(c_2\theta_\Gamma) + \log c_1\} = \log\left|\frac{\theta_{E\Gamma}}{c_1c_2\theta_E^2\theta_\Gamma\theta_{E\Gamma}}\right| = \log\left|\frac{\theta_{E\Gamma}}{\theta_E}\right|.$$

Если $0 < x < a$, то $|\theta_{E\Gamma}| > |\theta_E|$ и, следовательно, $W'_\Delta > 0$. Таким образом, функция W_Δ возрастает на отрезке $[0, a]$. Если $a < x < b$, то числа $\theta_{E\Gamma}$ и θ_E комплексно сопряженные, т.е. $|\theta_{E\Gamma}| = |\theta_E|$ и, следовательно, $W'_\Delta = 0$. Функция W_Δ постоянна на отрезке $[a, b]$. Если $b < x < +\infty$, то $|\theta_{E\Gamma}| > |\theta_E|$ и, следовательно, $W'_\Delta > 0$. Функция W_Δ возрастает на промежутке $[b, +\infty)$. Заметим, что функция W_Δ непрерывна на положительной полуоси. Условия равновесия (2.1) доказаны.

Проверим условия равновесия для обобщенного потенциала W_Γ . Вычислим производную этой функции вдоль кривой Γ :

$$\frac{d}{ds}W_\Gamma = -\operatorname{Re}\{(-2\log(c_2\theta_\Gamma) - \log \theta_E - \log \frac{c_1}{c_2})\tau\},$$

где s – натуральный параметр кривой Γ , а τ – единичный касательный вектор к этой кривой. Далее,

$$\frac{d}{ds}W_\Gamma = \operatorname{Re}\left\{\tau \log \frac{c_2^2 c_1 \theta_\Gamma^2 \theta_E \theta_{E\Gamma}}{c_2 \theta_{E\Gamma}}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\tau \log \frac{\theta_\Gamma}{\theta_{E\Gamma}}\right\}.$$

В силу условий Коши-Римана следующие свойства эквивалентны:

- 1°. $\frac{dW_\Gamma}{ds} = 0$,
 - 2°. S-свойство кривой Γ ,
 - 3°. положительность меры λ_Γ , определенной формулой (2.4),
 - 4°. равенство модулей двух соответствующих критических значений функции e^σ .
- Таким образом, условия равновесия (2.2) выполнены.

4.3. Случай Анжелеско

Пусть $\mathbf{c} \in \mathbf{A}$. Переобозначим ветви алгебраической функции θ следующим образом:

$$\theta_* = \theta_+, \quad \theta_L = \theta_0, \quad \theta_R = \theta_-.$$

Свойства этих функций указаны в §2. Проверим условия равновесия для обобщенных потенциалов W_L и W_R . Эти функции непрерывны на положительной полуоси. Вычислим производную вдоль положительной полуоси функции W_L :

$$W'_L = -\operatorname{Re}\{2h_{\lambda_L} + h_{\lambda_R} + \log c_2\} = \log \left| \frac{c_2^2 c_1 \theta_L^2 \theta_R \theta_*}{c_2 \theta_*} \right| = \log \left| \frac{\theta_L}{\theta_*} \right|.$$

Если $a_L < x < b_L$, то числа θ_L и θ_* комплексно сопряженные, т.е. $|\theta_L| = |\theta_*|$ и, следовательно, $W'_L = 0$. На отрезке $[a_L, b_L]$ функция W_L постоянна. Если $b_L < x < a_R$, то $|\theta_L| > |\theta_*|$ и, следовательно, $W'_L > 0$. Функция W_L возрастает на отрезке $[b_L, a_R]$. Итак, условия равновесия (2.6) выполнены.

Проверим условия равновесия для обобщенного потенциала W_R . Вычислим производную этой функции вдоль положительной полуоси:

$$W'_R = -\operatorname{Re}\{2h_{\lambda_R} + h_{\lambda_L} + \log c_1\} = \log \left| \frac{c_1^2 c_2 \theta_R^2 \theta_L \theta_*}{c_1 \theta_*} \right| = \log \left| \frac{\theta_R}{\theta_*} \right|.$$

Если $b_L < x < a_R$, то $|\theta_R| < |\theta_*|$ и, следовательно, $W'_R < 0$. Функция W_R убывает на отрезке $[b_L, a_R]$. Если $a_R < x < b_R$, то числа θ_R и θ_* комплексно сопряженные, т.е. $|\theta_R| = |\theta_*|$ и, следовательно, $W'_R = 0$. На отрезке $[a_R, b_R]$ функция W_R постоянна. Если $b_R < x < +\infty$, то $|\theta_R| > |\theta_*|$ и, следовательно, $W'_R > 0$. Функция W_R возрастает на промежутке $[b_R, +\infty)$. Условия равновесия (2.7) выполнены.

Случай Анжелеско-Никишина рассматривается аналогично.

Основные результаты работы доказаны.

4.4. Постоянные равновесия

Следуя идеям работы [15], перепишем уравнение (2.3) в виде

$$x = \frac{2}{\theta - 1} - \frac{q_1}{\theta - q_1} - \frac{q_2}{\theta - q_2}.$$

Вычисляя

$$\int \log \theta(x) dx$$

с помощью формулы интегрирования по частям, получим

$$\mathcal{V}^{\lambda^*}(x) = 2 \log(\theta - 1) - \log(q_1 - \theta) - \log(q_2 - \theta) - x \log \theta + c_*, \quad (4.4)$$

где $\theta = \theta_*(x)$. В формуле (4.4) берутся главные ветви логарифмов при $x \rightarrow +\infty$. Из поведения потенциала на бесконечности находим постоянную интегрирования

$$c_* = \log((e/2)^2(q_1 - 1)(q_2 - 1)).$$

Аналогично,

$$\mathcal{V}^{\lambda_R}(x) = x \log c_1 - 2 \log(\theta - 1) + \log(q_1 - \theta) + \log(q_2 - \theta) + x \log \theta + c_R,$$

где $\theta = \theta_R(x)$ и

$$c_R = \log \frac{e(q_1 - 1)^2}{q_1(q_2 - q_1)},$$

а также

$$\mathcal{V}^{\lambda_L}(x) = x \log c_2 - 2 \log(\theta - 1) + \log(\theta - q_1) + \log(q_2 - \theta) + x \log \theta + c_L,$$

$\theta = \theta_L(x)$ и

$$c_L = \log \frac{e(q_2 - 1)^2}{q_2(q_2 - q_1)}.$$

Следовательно,

$$W_R(x) = x \log \left| \frac{\theta_R}{\theta_*} \right| - 2 \log \left| \frac{\theta_R - 1}{\theta_* - 1} \right| + \log \left| \frac{\theta_R - q_1}{\theta_* - q_1} \right| + \log \left| \frac{\theta_R - q_2}{\theta_* - q_2} \right| + w_R,$$

где

$$w_R = \log \frac{(1 - c_1)(1 - c_2)(c_1 - c_2)^2}{4c_1^2 c_2^2 (c_1 + c_2 - c_1 c_2 - 1)^2} + 2c_R + c_L,$$

а также

$$W_L(x) = x \log \left| \frac{\theta_L}{\theta_*} \right| - 2 \log \left| \frac{\theta_L - 1}{\theta_* - 1} \right| + \log \left| \frac{\theta_L - q_1}{\theta_* - q_1} \right| + \log \left| \frac{\theta_L - q_2}{\theta_* - q_2} \right| + w_L,$$

где

$$w_L = \log \frac{(1 - c_1)(1 - c_2)(c_1 - c_2)^2}{4c_1^2 c_2^2 (c_1 + c_2 - c_1 c_2 - 1)^2} + 2c_L + c_R.$$

Упростив, получим

$$w_R = \log \frac{e^3(q_1 - 1)^3(q_2 - 1)}{4q_1(q_2 - q_1)},$$

$$w_L = \log \frac{e^3(q_1 - 1)(q_2 - 1)^3}{4q_2(q_2 - q_1)}.$$

Аналогично,

$$W_E = -x \log \left| \frac{\theta_E}{\theta_{E\Gamma}} \right| + 2 \log \left| \frac{\theta_E - 1}{\theta_{E\Gamma} - 1} \right| - \log \left| \frac{\theta_E - q_1}{\theta_{E\Gamma} - q_1} \frac{\theta_E - q_2}{\theta_{E\Gamma} - q_2} \right| + w_E,$$

$$W_\Gamma = +x \log \left| \frac{\theta_\Gamma}{\theta_{E\Gamma}} \right| - 2 \log \left| \frac{\theta_\Gamma - 1}{\theta_{E\Gamma} - 1} \right| + \log \left| \frac{\theta_\Gamma - q_1}{\theta_{E\Gamma} - q_1} \frac{\theta_\Gamma - q_2}{\theta_{E\Gamma} - q_2} \right| + w_\Gamma,$$

где $w_E = w_R$ и

$$w_\Gamma = \log \frac{q_1 q_2 (q_2 - q_1)^2}{4(q_1 - 1)(q_2 - 1)}.$$

Решая численно уравнение $W_\Gamma = w_\Gamma$ на вещественной оси, получим следующие примеры (для $c_1 = 0.8$):

c_2	a	b	ζ_\pm	x_*
0.70	0.145	30.550	6.653 ± 13.517	-4.65
0.60	0.183	28.806	5.006 ± 5.169	-1.05
0.50	0.227	27.973	3.900 ± 2.500	-0.25
0.40	0.280	27.490	3.117 ± 1.273	0.0065
0.30	0.345	27.169	2.529 ± 0.616	0.215
0.20	0.432	26.944	2.062 ± 0.239	1.15
0.10	0.564	26.778	1.663 ± 0.031	1.55
0.09	0.582	26.763	1.624 ± 0.018	1.58
0.08	0.600	26.750	1.590 ± 0.008	1.60

Таблица 1.

В заключение хочу выразить благодарность А. И. Аптекареву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т.2. Наука. М. 1966
2. J.Meixner. J. London Math. Soc. 9 (1934). 6–13
3. Рахманов Е. А. *Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси*. Матем. сб. 1982. Т. 161 (10). С. 163–203
4. Ландкоф Н. С. *Основы современной теории потенциала*. Наука. М. 1966
5. Гончар А. А., Рахманов Е. А. *О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа*. Труды Математического института имени В. А. Стеклова. Т. 157 (1981). С. 31–48
6. Гончар А. А., Рахманов Е. А. *О задаче равновесия для векторных потенциалов*. УМН. Т. 40 (4) (1985). С. 155–156
7. Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н. *Аппроксимации Эрмита-Паде для систем функций марковского типа*. Матем. сб. 188 (5)(1997). С. 33–58
8. Рахманов Е. А. *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной*. Матем. сб. 187 (1996). С. 109–124
9. Сорокин В. Н. *О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера*. Матем. сб. 201(10)(2010). С. 137–160
10. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. Наука. М. 1988
11. Сорокин В. Н., Чередникова Е. Н. *Многочлены Мейкснера с переменным весом*. Современные проблемы математики и механики. Т. 6. Вып. 1. 2011. С. 118–125
12. Никишин Е. М. *Асимптотическое поведение линейных форм для совместных аппроксимаций Паде*. Изв. Вузов. Матем. 2 (1986). С. 33–41
13. Никишин Е. М. *О совместных аппроксимациях Паде*. Матем. сб. 113(145)(1980). С. 499–519
14. J. Arvesu, J. Coussement, W. Van Assche. *Some discrete multiple orthogonal polynomials*. J. Comput. Appl. Math. 153 (2003). 19–45
15. A. Artekarev, J. Arvesu. *Asymptotics for multiple Meixner polynomials*. J. Math. Anal. Appl. 411 (2014). 485–505
16. Лысов В. Г. *Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита-Паде для системы стильтесовских функций с весом Лагерра*. Матем. сб. 196 (12) (2005). С. 99–122
17. V. Lysov, F. Wielonsky. *Strong asymptotics for multiple Laguerre polynomials*. Constr. Approx. 28 (2008). 61–111
18. Аптекарев А. И., Лысов В. Г. *Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде*. Матем. сб. 201 (2) (2010). С. 29–78
19. Гончар А. А., Рахманов Е. А., Суетин С. П. *Аппроксимации Паде-Чебышева для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов*. УМН. 66:6 (2011)
20. Мартинес-Финкельштейн А., Рахманов Е. А., Суетин С. П. *Вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов*. Матем. сб. 203:12(2011). С. 113–136
21. H. Stahl. *The structure of extremal domains associated with an analytic function*. Complex Var. Theory Appl. 4(1985). 339–354