



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 43 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В.,
Корянов В.В., Тучин А.Г.,
Тучин Д.А.

Синтез последовательности
гравитационных манёвров
КА для достижения орбит с
высоким наклоном к
эклиптике

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Синтез последовательности гравитационных манёвров КА для достижения орбит с высоким наклоном к эклиптике / Ю.Ф.Голубев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 43. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2016-43](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-43)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-43>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский,
В.В. Корянов, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин**

**Синтез последовательности
гравитационных манёвров КА
для достижения орбит с высоким
наклоном к эклиптике**

Москва — 2016

Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Синтез последовательности гравитационных манёвров КА для достижения орбит с высоким наклоном к эклиптике

В связи с подготовкой и проведением большого числа космических миссий, предусматривающих повышение наклона орбиты с использованием высокоэффективных гравитационных манёвров (GAM) около планет и их спутников, а также малых тел Солнечной системы, сотрудниками NASA, ESA, JAXA и отечественными специалистами активно анализируется пространственная (3D) реализация таких манёвров. Соответствующие расчёты необходимы для создания актуальных баллистических сценариев космических миссий с целью изучения внутренней гелиосферы из внеэклиптических положений (отечественная миссия «Интергелиозонд», миссия ESA «Solar Orbiter»). В настоящей работе основной акцент делается на разработку алгоритмов синтеза многопроходных цепочек GAM, реализация которых приводит к существенному повышению орбиты КА над плоскостью эклиптики.

Одновременно проведено обобщение полученных авторами ранее [1] аналитических формул изменения наклона при совершении GAM на общий случай эллиптичности орбит КА и планеты-партнёра.

Ключевые слова: небесное тело, повышающий гравитационный манёвр, цепочки гравитационных манёвров, высоконаклонённая гелиоцентрическая орбита

Yury F. Golubev, Alexey V. Grushevskii, Victor V. Koryanov, Andrey G. Tuchin, Denis A. Tuchin. The synthesis of gravity assist maneuvers sequence of the spacecraft to achieve high inclined orbits over ecliptic

In the connection with the preparation and conduct of lot of space missions, providing an increase of inclination of the orbit over ecliptic with the use of low-cost gravitational maneuvers (GAM) near the planets and their moons, also small bodies of the Solar system, NASA's, ESA's, JAXA's teams also domestic experts actively analyzes the spatial (3D) implementations of such maneuvers. The corresponding calculations to create the actual ballistic space mission design to explore the inner heliosphere out of ecliptic areas (Russian mission "Interheliozond", ESA's mission «Solar Orbiter») demanded. This paper is focused on the development of synthesis of chains of 3D multibody GAM's algorithms which implementation leads to a significant increase in the spacecraft's orbit above the plane of the ecliptic. Simultaneously for earlier obtained analytical formulas by the authors [1] generalization for inclination changes with the using of gravity assists on the case of elliptic orbits of planets and the spacecraft accomplished.

Key words: celestial body, cranking gravity assist, flybys lifting sequences, high inclined heliocentric orbit

Введение

К настоящему времени востребованы, реализуются и находятся в стадии активной разработки космические миссии по исследованию внутренней гелиосферы, используя внеэклиптические положения КА («Solar Orbiter» ESA, отечественный проект «Интергелиозонд»), которые подразумевают движение КА по орбитам со значительным наклоном к плоскости эклиптики. Манёвры по активному изменению наклона орбиты являются в астродинамике особо энергозатратными. Поэтому целесообразно привлечение дополнительных источников энергии путём использования гравитационных манёвров (**GAM** – Gravity Assist Maneuver). В связи с подготовкой и проведением подобных космических миссий сотрудниками NASA, ESA, JAXA и отечественными специалистами активно анализируется пространственная (**3D**) реализация GAM.

В предыдущих работах [1,2] авторами был проведён сравнительный анализ различных современных астродинамических разработок [3-11], затрагивающих пространственную 3D - реализацию гравитационных манёвров, с целью внесения ясности в возможность их применения с учетом точных эфемерид [12]. В [1,2] получены уточнённые аналитические формулы изменения наклона орбиты КА на однопроходных 3D-GAM и приведены результаты расчётов с их помощью параметров изменения наклона орбиты КА около планет Солнечной системы и их спутников. В настоящей работе основной акцент делается на разработку алгоритмов синтеза именно многопроходных цепочек GAM, применение которых приводит к существенному повышению наклона орбиты КА над плоскостью эклиптики.

Одновременно получено обобщение полученных в [1,2] аналитических формул на общий случай эллиптических орбит КА и планеты-партнёра по совершению GAM. Авторы признательны С.М. Лавренову за полезные обсуждения и рекомендации.

1. Два геометрически различных случая выполнения GAM и ограничения, возникающие при их выполнении

Геометрия гравитационного манёвра в значительной степени определяется тем, пересекает ли вектор скорости планеты \mathbf{V}_{pl} сферу всевозможных виртуальных асимптотических скоростей $\mathbf{V}_{\infty,out}$ космического аппарата относительно планеты, построенную на конце вектора \mathbf{V}_{pl} , или весь вектор \mathbf{V}_{pl} лежит внутри этой сферы (см. рис. 1), то есть выполнением условия

$$v_{\infty} \equiv V_{\infty}/V_{pl} \leq 1, \quad (1)$$

где $V_{\infty} = |\mathbf{V}_{\infty,out}|$. Указанную сферу будем называть **\mathbf{V}_{∞} -сферой** вслед за термином \mathbf{V}_{∞} -globe [4].

Будем считать условие (1) выполненным.

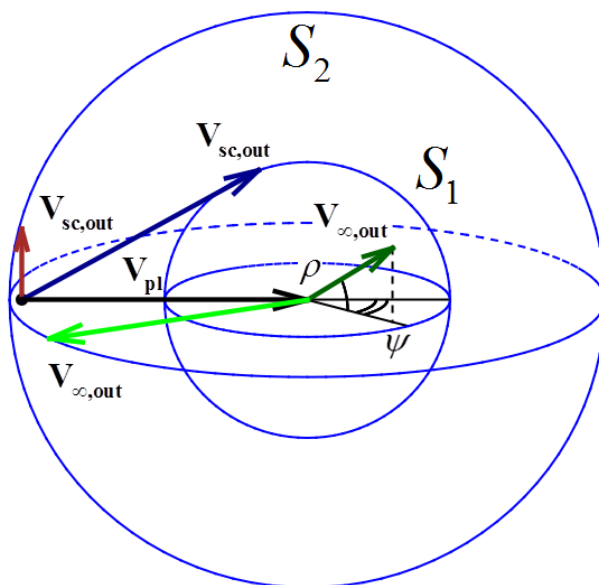


Рис. 1. Два различающихся класса геометрии GAM: случай S_1 – вектор \mathbf{V}_{pl} пересекает сферу, случай S_2 – вектор \mathbf{V}_{pl} лежит внутри сферы

Воспользовавшись рис. 1 и [1,2], введём сферические координаты: радиус V_{∞} и углы ρ и ψ . Угол ρ – это угол между вектором $\mathbf{V}_{\infty,out}$, полученным после

гравитационного манёвра, и его проекцией на плоскость орбиты, а угол ψ – угол между этой проекцией и вектором скорости планеты \mathbf{V}_{pl} .

Как известно [1,2], ограничения на изменение наклона i орбиты КА при совершении GAM с избранной планетой («сольных» GAM) можно интерпретировать как геометрические и динамические.

Геометрические ограничения определяют максимальную величину i для любого числа сольных GAM, которая для случая (1) задается безразмерной асимптотической скоростью КА v_∞ [1-3,7]:

$$\sin i_{\max} = \frac{V_\infty}{V_{pl}} = v_\infty \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что из (1),(2) следует ограничение

$$i_{\max} < \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Динамические ограничения на изменение наклона орбиты КА определяются величиной гравитационного поля планеты и минимальным допустимым расстоянием пролёта около неё. Для угла разворота φ вектора асимптотической скорости КА после однопроходного GAM верна формула [3]:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu}{\mu + r_\pi V_\infty^2}, \quad (4)$$

где μ – гравитационный параметр пролётного тела, r_π – расстояние перицентра пролётной гиперболы КА, которое не может быть меньше радиуса планеты-партнёра R_{pl} .

Положение «полюса наклона» – точки T_{Pole} экстремума $i = i_{\max}$ на V_∞ -сфере схематически изображено на рис. 2. Последовательность любых сольных GAM с целью увеличения наклона орбиты КА (будем называть их *повышающими цепочками*) должна максимально приближаться к точке T_{Pole} .

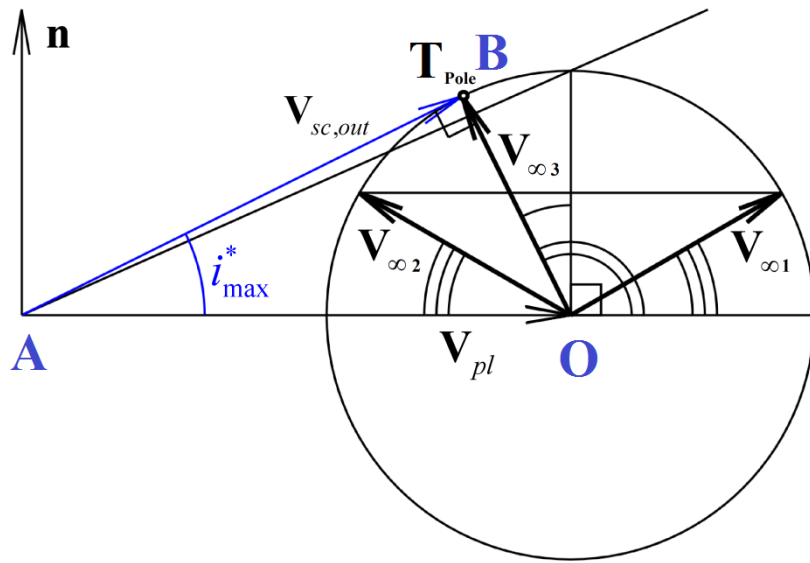


Рис. 2. Положение «полюса наклона» – T_{Pole} экстремума $i = i_{max}$ на V_{∞} -сфере в случае $\sin \psi = 0$

Общий смысл динамических ограничений для ГАМ сводится к тому, что конец выходного вектора $V_{\infty, out}$ при однопроходном ГАМ не выходит за пределы сферической области («сферической шапочки»). Эта область представляет собой пересечение V_{∞} -сферы и телесного угла, образованного конусом с углом раствора 2φ , осью которого является вектор входной (перед ГАМ) асимптотической скорости КА $V_{\infty, in}$ (рис. 3). Основанием указанной сферической области является, очевидно, круг K_{φ} радиуса $r_{\infty} = V_{\infty} \sin \varphi$, ортогональный $V_{\infty, in}$.

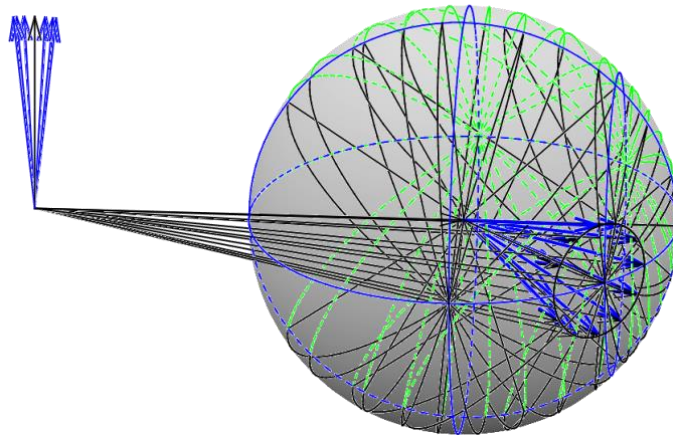


Рис. 3. V_{∞} -сфера и конусы виртуальных скоростей КА и его орбитальных нормалей на выходе из ГАМ

Замечание. Из геометрических соображений можно понять, что плоскость круга K_φ должна быть параллельна картинной плоскости (*B-Plane*) планеты, соответствующей вектору $\mathbf{V}_{\infty, \text{in}}$.

1.1. Случай круговой орбиты планеты

В [1] было проведено описание GAM для случая круговой орбиты планеты и эллиптической орбиты КА. Было показано, что вектор нормали к плоскости орбиты КА после GAM $\mathbf{n}_{\text{sc}} = \mathbf{r}_{\text{pl}} \times \mathbf{V}_{\text{sc}, \text{out}}$ будет всегда находиться в линейной оболочке векторов \mathbf{V}_{pl} и нормали к орбите планеты $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{\text{pl}} \times \mathbf{V}_{\text{pl}}$ (рис. 4), где символом \mathbf{r}_{pl} обозначен гелиоцентрический радиус-вектор планеты.

Остановимся на этом подробнее. Поскольку $\mathbf{V}_{\text{sc}, \text{out}} = \mathbf{V}_{\text{pl}} + \mathbf{V}_{\infty, \text{out}}$, для наклона орбиты КА – угла между нормалью $\mathbf{n}, \mathbf{n}_{\text{sc}}$ можно записать:

$$\cos i = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{sc}}}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}_{\text{sc}}\|} = \frac{(\mathbf{r}_{\text{pl}} \times \mathbf{V}_{\text{pl}}) \cdot (\mathbf{r}_{\text{pl}} \times (\mathbf{V}_{\text{pl}} + \mathbf{V}_{\infty, \text{out}}))}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}_{\text{sc}}\|} \quad (5)$$

Используя известные формулы векторной алгебры, можно получить [2]:

$$(\mathbf{r}_{\text{pl}} \times \mathbf{V}_{\text{pl}}) \cdot (\mathbf{r}_{\text{pl}} \times (\mathbf{V}_{\text{pl}} + \mathbf{V}_{\infty, \text{out}})) = r_{\text{pl}}^2 \mathbf{V}_{\text{pl}} \cdot (\mathbf{V}_{\text{pl}} + \mathbf{V}_{\infty, \text{out}}) = r_{\text{pl}}^2 (V_{\text{pl}}^2 + V_{\text{pl}} V_{\infty} \cos \rho \cdot \cos \psi)$$

$$\cos i = \frac{V_{\text{pl}} + V_{\infty} \cos \psi \cdot \cos \rho}{\sqrt{(V_{\text{pl}} + V_{\infty} \cos \psi \cdot \cos \rho)^2 + V_{\infty}^2 \sin^2 \rho}}$$

и, проведя соответствующие преобразования [2], выписать формулу для наклона орбиты КА при однопроходном GAM около планеты в виде:

$$i = \arctg \frac{V_{\infty} \sin \rho}{V_{\text{pl}} + V_{\infty} \cos \rho \cos \psi} \quad (6)$$

В [1] была представлена пространственная конфигурация векторов гелиоцентрической скорости КА в зависимости от угла между скоростью планеты и входным вектором скорости КА (рис. 5), посчитанная по

кинематическому соотношению (6) для 3D GAM в сферических координатах $(X, Y, Z) = (V_\infty \cos \rho \cos \psi, V_\infty \cos \rho \sin \psi, V_\infty \sin \rho)$. Здесь ось X направлена по вектору скорости планеты.

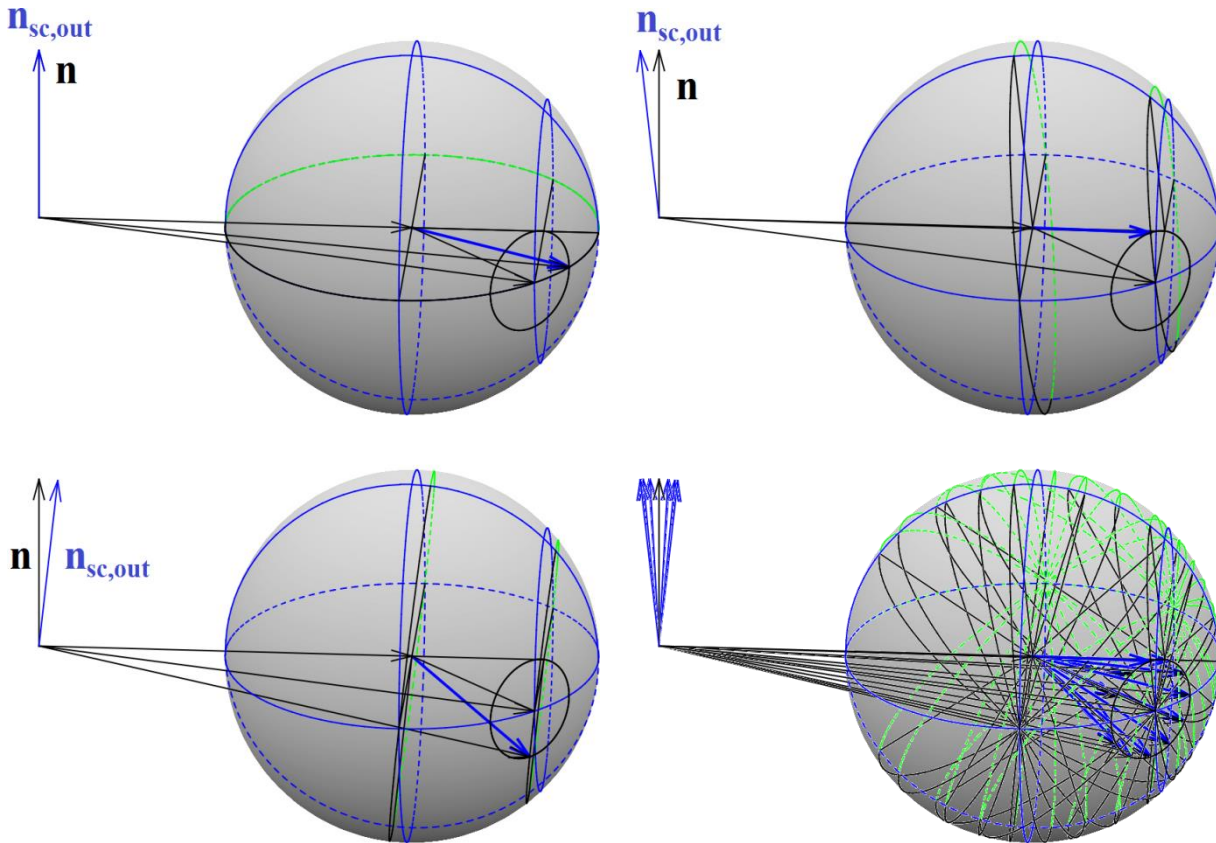


Рис. 4. Вариации наклона орбиты КА – отклонение нормали к орбите КА \mathbf{n}_{sc} от нормали к орбите планеты \mathbf{n} в зависимости от положения вектора $\mathbf{V}_{\infty, out}$ для случая круговой орбиты планеты

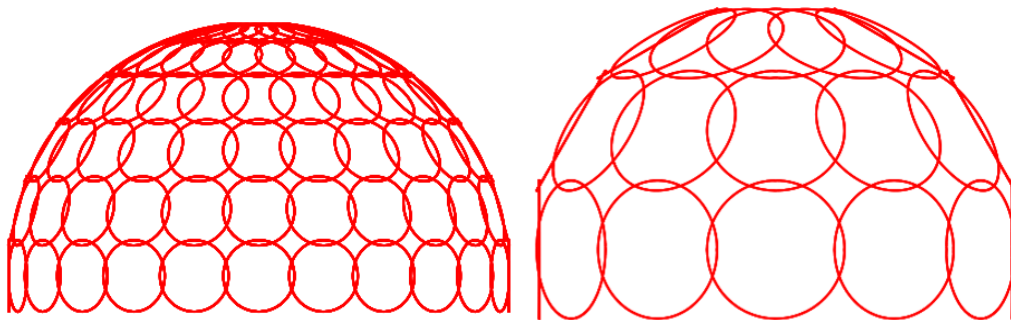


Рис. 5. Пространственная конфигурация векторов гелиоцентрической скорости КА в координатах $(X, Y, Z) = (V_\infty \cos \rho \cos \psi, V_\infty \cos \rho \sin \psi, V_\infty \sin \rho)$ с различными углами разворота вектора асимптотической скорости

Из рис. 5 видно, что возможные положения векторов выходной скорости лежат на покрытии части V_∞ -сферы картами, образованными пересечениями с ней набора конусов с раствором $2\varphi_{\max}$, где φ_{\max} – максимальный угол φ поворота вектора асимптотической скорости КА на пролётной гиперболе ГАМ для данной планеты [1,2,3].

1.2. Общий случай эллиптической орбиты планеты

Получим обобщение результатов [1] на случай эллиптических орбит планеты и КА. Запишем в сферических координатах $(X, Y, Z) = (V_\infty \cos \rho \cos \psi, V_\infty \cos \rho \sin \psi, V_\infty \sin \rho)$ выражения для $\mathbf{n}, \mathbf{n}_{sc}$ и используем затем следующую формулу для тангенса искомого угла наклона i между двумя плоскостями с нормальными $\mathbf{n}, \mathbf{n}_{sc}$ при условии (3):

$$\operatorname{tg} i = \frac{|\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{sc}|}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{sc}}. \quad (7)$$

Пусть γ – угол наклона траектории (угол между вектором скорости планеты и «виртуальным» вектором круговой орбитальной скорости этой планеты в этой же точке). Для круговой орбиты [1] $\gamma = 0$. Поскольку $\mathbf{V}_{pl} = (V_{pl}, 0, 0)$ и $\mathbf{r}_{pl} = (r_{pl} \sin \gamma, r_{pl} \cos \gamma, 0)$, то

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl} = (0, 0, -r_{pl} V_{pl} \cos \gamma)$$

$$\mathbf{n}_{sc} = \mathbf{r}_{pl} \times (\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_\infty)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{n}_{sc} &= (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \times (\mathbf{r}_{pl} \times (\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_\infty)) = \\ &= (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \times (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) + (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \times (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_\infty) = (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \times (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_\infty) \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))$, что в нашем случае будет означать:

$$(\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \times (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_\infty) = \mathbf{r}_{pl} (\mathbf{r}_{pl} \cdot (\mathbf{V}_{pl} \times \mathbf{V}_\infty))$$

Записав \mathbf{V}_∞ как

$$\mathbf{V}_\infty = (V_{\infty x}, V_{\infty y}, V_{\infty z}) \equiv (V_\infty \cos \rho \cos \psi, V_\infty \cos \rho \sin \psi, V_\infty \sin \rho), \quad (8)$$

получим

$$\mathbf{V}_{pl} \times \mathbf{V}_\infty = (0, -V_{pl} V_\infty \sin \rho, V_{pl} V_\infty \cos \rho \sin \psi) = (0, -V_{pl} V_{\infty z}, V_{pl} V_{\infty y}) \quad (9)$$

и

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{sc} = \mathbf{r}_{pl} \left(\mathbf{r}_{pl} \cdot (\mathbf{V}_{pl} \times \mathbf{V}_\infty) \right) = -\mathbf{r}_{pl} \cdot r_{pl} V_{pl} V_{\infty z} \cos \gamma \quad (10)$$

В итоге доказано следующее:

Утверждение 1. Вектор нормали \mathbf{n}_{sc} к орбите КА после GAM будет всегда ортогонален радиус-вектору планеты \mathbf{r}_{pl} , то есть при любом GAM \mathbf{n}_{sc} всегда остаётся в плоскости, ортогональной \mathbf{r}_{pl} (рис. 6).

Доказательство. Вектор \mathbf{n}_{sc} ортогонален векторному произведению $\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{sc}$ и, поэтому, согласно (10), он ортогонален \mathbf{r}_{pl} . ■

Утверждение 2. Для круговой орбиты имеет место более сильное утверждение: вектор нормали к плоскости абсолютной орбиты КА после GAM \mathbf{n}_{sc} всегда находится в линейной оболочке векторов \mathbf{V}_{pl} и \mathbf{n} [1, с. 18].

Доказательство. Для случая круговой орбиты планеты все три вектора $\mathbf{n}_{sc}, \mathbf{V}_{pl}, \mathbf{n}$ лежат в одной плоскости, ортогональной \mathbf{r}_{pl} . Первый из этой тройки вектор ортогонален \mathbf{r}_{pl} согласно утв. 1. Вектор её орбитальной скорости \mathbf{V}_{pl} будет также находиться в этой плоскости на круговой орбите \mathbf{r}_{pl} . Вектор \mathbf{n} также находится в плоскости, ортогональной \mathbf{r}_{pl} по построению. ■

Выражение (7) можно представить в координатном виде. Вычислим для этого $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{sc}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{sc} &= (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \cdot (\mathbf{r}_{pl} \times (\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_\infty)) = (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl})^2 + (\mathbf{r}_{pl} \times \mathbf{V}_{pl}) \cdot (\mathbf{r}_{pl} \cdot \mathbf{V}_\infty) = \\ &= r_{pl}^2 \cdot V_{pl}^2 \cdot \cos^2 \gamma + r_{pl}^2 (\mathbf{V}_{pl}, \mathbf{V}_\infty) - (\mathbf{r}_{pl} \cdot \mathbf{V}_{pl}) \cdot (\mathbf{r}_{pl} \cdot \mathbf{V}_\infty) \end{aligned} \quad (11)$$

Вычислим отдельно:

$$\mathbf{V}_{pl} \cdot \mathbf{V}_\infty = V_{pl} V_{\infty x},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\text{pl}} \cdot \mathbf{V}_{\text{pl}} &= r_{\text{pl}} V_{\text{pl}} \sin \gamma, \\ \mathbf{r}_{\text{pl}} \cdot \mathbf{V}_{\infty} &= r_{\text{pl}} V_{\infty x} \sin \gamma + r_{\text{pl}} V_{\infty y} \cos \gamma.\end{aligned}\quad (12)$$

Подставляя (11) в (10), получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{sc}} &= r_{\text{pl}}^2 \cdot V_{\text{pl}}^2 \cdot \cos^2 \gamma + r_{\text{pl}}^2 V_{\text{pl}} V_{\infty x} - r_{\text{pl}}^2 V_{\text{pl}} \sin \gamma (V_{\infty x} \sin \gamma + V_{\infty y} \cos \gamma) = \\ &= r_{\text{pl}}^2 \cdot V_{\text{pl}}^2 \cdot \cos^2 \gamma + r_{\text{pl}}^2 V_{\text{pl}} V_{\infty x} \cos^2 \gamma - r_{\text{pl}}^2 V_{\text{pl}} V_{\infty y} \sin \gamma \cos \gamma.\end{aligned}\quad (13)$$

Подставляя (10) и (13) в (7), получаем формулу для тангенса угла наклона:

$$\text{tg } i = \frac{V_{\infty z}}{V_{\text{pl}} \cos \gamma + V_{\infty x} \cos \gamma - V_{\infty y} \sin \gamma}.\quad (14)$$

Воспользовавшись представлением (8) для компонент вектора \mathbf{V}_{∞} , получим

$$\text{tg } i = \frac{V_{\infty} \sin \rho}{V_{\text{pl}} \cos \gamma + V_{\infty} \cos \rho \cos(\gamma + \psi)}.\quad (15)$$

Полученную формулу (15) можно рассматривать как функциональную зависимость $\text{tg } i(\rho, \psi)$.

Отметим, что параметр γ , как параметр орбиты планеты, не зависит от точки проведения ГАМ. Из (15) и (1) следует, что максимум функции $\text{tg } i$ достигается при таком $\psi = \psi^*$, для которого:

$$\cos(\gamma + \psi^*) = -1,\quad (16)$$

то есть

$$\psi^* = \pi - \gamma\quad (17)$$

Для случая круговой орбиты планеты $\psi^* = \pi$.

1.3. Максимум наклона орбиты КА

Напомним, что согласно (3) $i < \frac{\pi}{2}$. Воспользуемся монотонностью на промежутке $i \in [0, \pi/2)$ функции $\text{tg } i$ и теоремой Ферма о нуле производной. Приравняв нулю производную по ρ от выражения (15), получим уравнение

относительно угла ρ^* , обеспечивающего экстремум наклонения i_{\max} орбиты КА:
КА:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\operatorname{tg} i) = \frac{V_{\infty} (V_{\infty} \cos(\psi^* + \gamma) + V_{pl} \cos \gamma \cdot \cos \rho^*)}{(V_{pl} \cos \gamma + V_{\infty} \cos \rho^* \cdot \cos(\psi^* + \gamma))^2} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{V_{\infty}}{V_{pl}} = -\frac{\cos \rho^* \cdot \cos \gamma}{\cos(\gamma + \psi^*)}$$

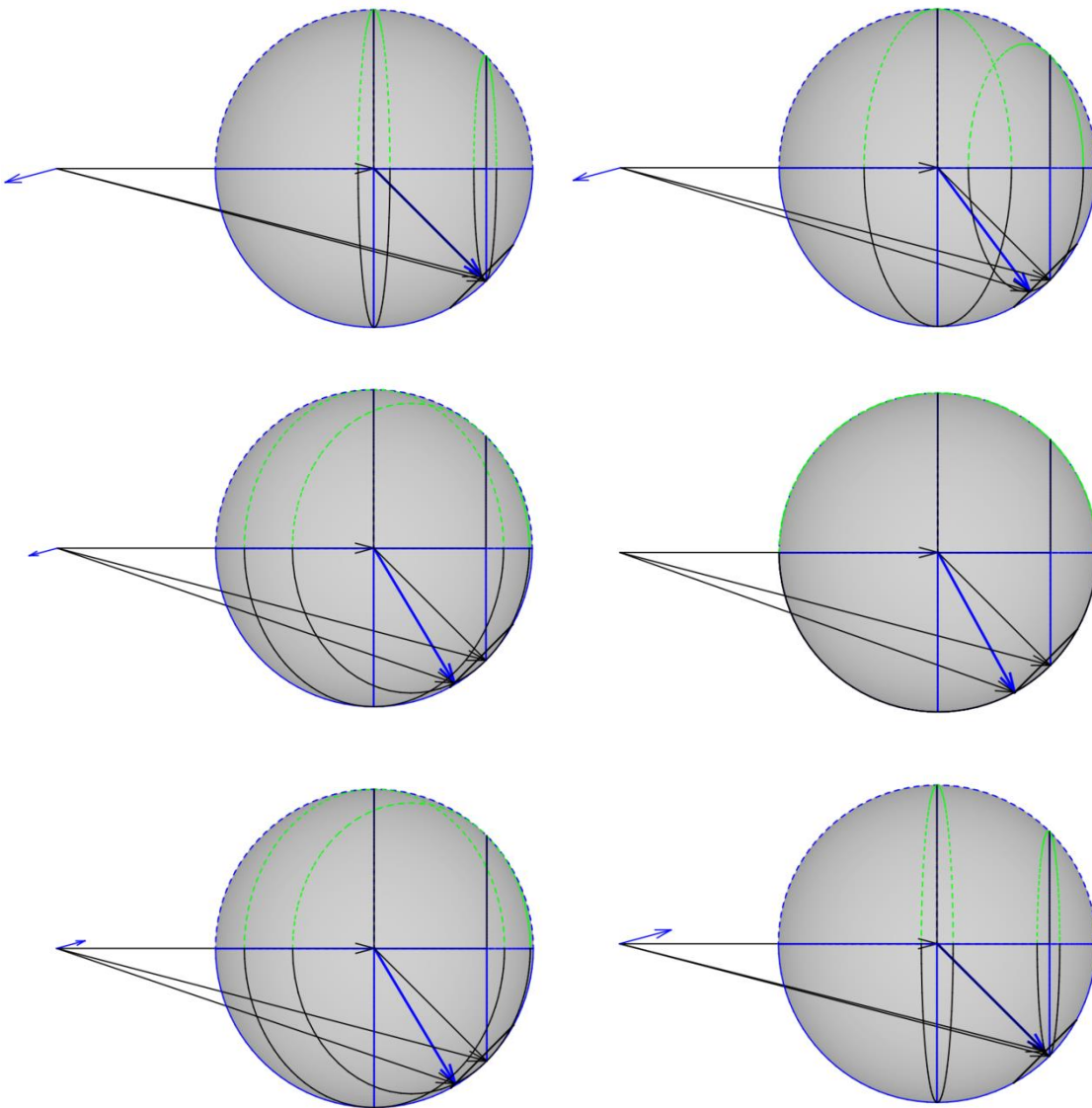


Рис. 6. Вариации наклонения орбиты КА – отклонение нормали к орбите КА \mathbf{n}_{sc} (синий вектор из начала координат) от нормали к орбите планеты \mathbf{n} в зависимости от положения вектора \mathbf{V}_{∞} для общего случая эллиптической орбиты планеты

С использованием (17) получим

$$\cos \rho^* = -\frac{V_\infty}{V_{pl}} \cdot \frac{\cos(\gamma + \psi^*)}{\cos \gamma} = \frac{V_\infty/V_{pl}}{\cos \gamma} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (15), найдем формулу, определяющую i_{\max} :

$$\operatorname{tg} i_{\max} = \frac{v_\infty}{\sqrt{\cos^2 \gamma - v_\infty^2}}, \quad (20)$$

Откуда следует, что

$$\sin i_{\max} = \frac{v_\infty}{\cos \gamma} = \frac{V_\infty/V_{pl}}{\cos \gamma} \quad (21)$$

Из (17), (19), (21) следует утверждение.

Утверждение 3. При максимуме наклона орбиты КА верно:

$$\psi^* = \pi - \gamma$$

$$\cos \rho = \cos \rho^* = \frac{V_\infty}{V_{pl} \cos \gamma} \quad (22)$$

$$\sin i_{\max} = \frac{V_\infty/V_{pl}}{\cos \gamma} = \frac{v_\infty}{\cos \gamma} = \cos \rho^*$$

Из (19),(22) и рис. 2 вытекает, что векторы $\mathbf{V}_{sc,out}$ и \mathbf{V}_∞ , обеспечивающие максимальное наклонение орбиты КА, ортогональны. Величина максимального наклона i_{\max} в случае круговой орбиты планеты удовлетворяет соотношению:

$$\sin i_{\max} = \frac{V_\infty}{V_{pl}}. \quad (23)$$

Представленная оценка (22) является точной верхней гранью множества синусов наклонов орбиты КА при совершении ГАМ, а результаты совпадают с формулой (2), выведенной для случая круговой орбиты планеты другими способами в [1-3].

1.4. Сравнение формулы для $\operatorname{tg} i(\rho, \psi)$ наклонения орбиты КА с данными зарубежных исследований

В последнее время, в связи с подготовкой и проведением космических миссий с использованием GAM около планет и их спутников, а также малых тел Солнечной системы, сотрудниками NASA, ESA, JAXA активно анализируются 3D-описания GAM [4-7]. При этом задействованы «штатные» переменные NASA и ESA – углы κ, α (*cranking, pumping angles*) [4], рис. 7.

Для наклонения при совершении GAM в [4, с. 20] ими найдено следующее выражение:

$$\operatorname{tg} i(\alpha, \kappa) = \frac{V_{\infty} \sin \alpha \cdot \sin \kappa}{V_{sc} \cos \gamma + V_{\infty} \cos \alpha \cdot \cos \gamma - V_{\infty} \sin \alpha \cdot \cos \kappa \cdot \sin \gamma} \quad (24)$$

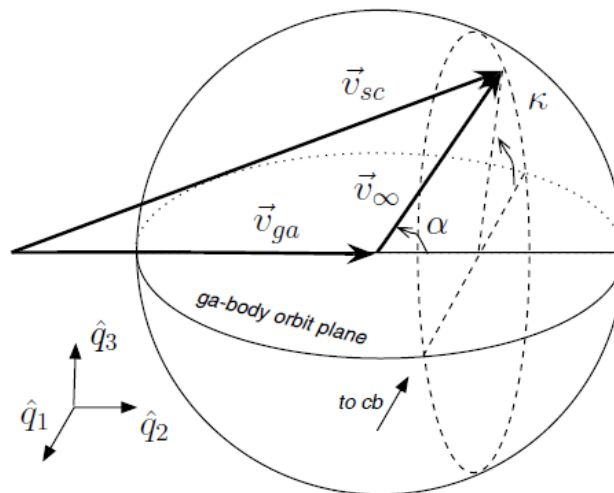


Рис. 7. Углы κ, α (*cranking, pumping angles*) из [4]

Выведенная нами формула (15) для $\operatorname{tg} i(\rho, \psi)$ согласуется с этими результатами. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно произвести замену переменных ρ, ψ на κ, α с помощью соотношений, следующих из формул сферической геометрии:

$$\sin \rho = \sin \kappa \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \rho \cdot \cos \psi = \cos \alpha \quad (25)$$

Замечание. Сопоставление эквивалентных формул (15),(24) с приближёнными формулами, полученными в [3] не показывают их полной

тождественности [1]. Остановимся на этом подробнее. Рассмотрим треугольник АОВ на рис. 2. Используя для него теорему синусов, можно получить для одного GAM:

$$\sin i = \frac{V_{\infty}}{V_{sc,out}} \sin \varphi_{max} \quad (26)$$

Сравнение (26) и рис. 2 с формулой (1.2.10) из [3] показывает, что в [3] значение $V_{sc,out}$ приближённо заменяется в знаменателе величиной V_{pl} , так что

$$\sin i \approx \frac{V_{\infty}}{V_{pl}} \cdot \sin \varphi_{max} \quad (27)$$

Выражение (27) в ряде случаев, при не очень больших значениях v_{∞} , может служить удовлетворительной аппроксимацией $\sin i$ [1,11].■

Отметим, что формула для $\operatorname{tg} i(\rho, \psi)$ (15) имеет более компактный и геометрически понятный вид по сравнению с вариантом NASA-ESA (24). Причина, очевидно, заключается в выборе переменных. Переменные *cranking, pumping angles* α, κ [4-7] удобны для анализа проведения GAM только с одной планетой (при изменении α меняется орбитальный период КА, не меняется наклонение орбиты КА; при изменении κ меняется наклонение орбиты КА, орбитальный период не меняется). Однако полный подбор цепочек GAM может оказаться более сложным и «изошрённым» по выбору текущего резонанса и даже текущей планеты-партнёра [1-3,8-10,13-15].

1.5. Связь переменных ρ, ψ с углом разворота вектора асимптотической скорости φ_{max} на гиперболе GAM

Связь переменных ρ, ψ в формуле (15) с переменной φ угла разворота вектора асимптотической скорости КА относительно планеты V_{∞} в значительной мере зависит от выбора «способа подъёма» $\Lambda_{i,out}$ – текущей позиции точки выхода конца вектора $V_{\infty,out}$ на V_{∞} -сферу (рис. 2), полученной

после проведения GAM-последовательности, к «полюсу» T_{Pole} – точке экстремального наклонения, отвечающей условиям (20), (4).

В модельном случае подъёма с помощью последовательности GAM на V_{∞} -сфере строго по меридиану, плоскость которого ортогональна радиус-вектору планеты, угол ρ «накапливает» углы φ_i : $\rho = \rho_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N$, а итоговое наклонение определяется по формуле

$$\operatorname{tg} i = \frac{V_{\infty} \sin \rho}{\cos \gamma \cdot V_{\text{pl}} - V_{\infty} \cos \rho} = \frac{V_{\infty} \sin \left(\rho_0 + \sum_{j=1}^N \varphi_j \right)}{\cos \gamma \cdot V_{\text{pl}} - V_{\infty} \cos \left(\rho_0 + \sum_{j=1}^N \varphi_j \right)} \quad (28)$$

Пусть $h > 0$ – минимальная высота пролёта КА над поверхностью планеты, так что $R_{\text{pl}} + h$ – расстояние перицентра пролётной гиперболы КА. Тогда для φ_{max} – максимального угла φ поворота вектора асимптотической скорости КА на однопроходном GAM справедливо соотношение [3]:

$$\sin \frac{\varphi_{\text{max}}}{2} = \frac{\mu}{\mu + (R_{\text{pl}} + h) \cdot V_{\infty}^2} \quad (29)$$

где μ – гравитационный параметр планеты.

Сопоставим зависимость угла разворота вектора асимптотической скорости КА φ (29) и геометрически допустимое наклонение формируемой орбиты КА (4) для планет Солнечной системы. Графики зависимости φ_{max} от величины V_{∞} для планет земной группы и Юпитера представлены на рис. 8. Они показывают, что максимальные углы разворота достигаются на околонулевых значениях V_{∞} . Однако и величина i_{max} при этом, согласно (23), близка нулю. «Эффективность» GAM появляется только при увеличении V_{∞} до значений, обеспечивающих требуемую для космической миссии величину i_{max} , но одновременно понижается значение φ_{max} , что демонстрируется на этом графике. Жирной чертой обозначено модельное значение востребованного

проектного угла наклонения $i_{\max} = 30^\circ$. Вертикаль, опущенная из точки её пересечения с графиком функции максимального наклонения планеты, показывает соответствующее значение угла φ_{\max} поворота вектора асимптотической скорости на одном ГАМ.

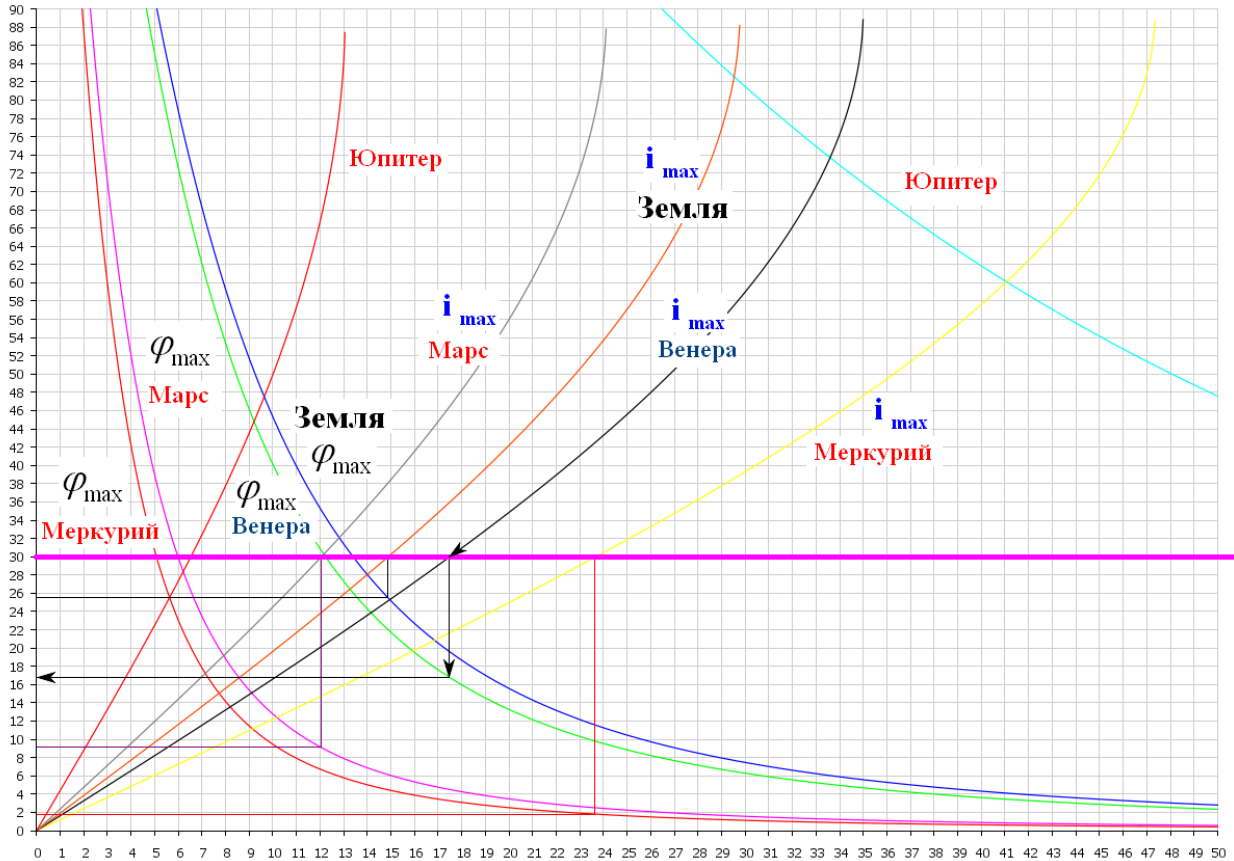


Рис. 8. Зависимости φ_{\max} и i_{\max} от величины V_∞ для планет земной группы и Юпитера. По оси абсцисс отложена величина V_∞ в км/с, по оси ординат – планетарные углы φ_{\max} и i_{\max} в град.

Таким образом, можно вычислить характерный размер «рабочего» телесного угла области элементарного ГАМ на поверхности V_∞ -сферы.

При анализе необходимо учитывать соотношение между углом раствора конуса $2\varphi_{\max}$ и его телесным углом: $\Omega = 2\pi(1 - \cos \varphi_{\max})$.

В табл. 1 представлены ресурсы углов поворота на элементарном ГАМ около планет Солнечной системы для различных космических миссий, различающихся требуемой величиной наклонения орбиты КА.

Таблица 1

Максимально возможные вариации наклонения орбиты КА при однократном пролёте крупных небесных тел Солнечной системы для различных миссий, различающихся требуемой величиной наклонения орбиты

Планета	Первая космическая скорость $V_{\text{Фпл}}$, км/с	$V_{\text{пл}}$, км/с	φ_{max} для $i_{\text{max}} = 20^\circ$, град.	φ_{max} для $i_{\text{max}} = 30^\circ$, град.	φ_{max} для $i_{\text{max}} = 45^\circ$, град.
Меркурий	3.01	47.36	4.05	1.93	0.97
Венера	7.23	35.02	31.01	16.75	9.02
Земля	7.92	29.78	44.12	25.37	14.17
Марс	3.54	24.13	17.91	9.1	5.61
Юпитер	41.13	13.07	162.35	154.34	144.09
Сатурн	25.46	9.69	159.08	149.66	137.71
Уран	15.56	6.81	155.84	145.04	131.49
Нептун	16.97	5.43	162.35	154.34	144.09
Плутон	1.2	4.67	42.32	24.14	13.41

1.6. Гарантированная проводка орбиты КА к полюсу наклонения на ограниченном отрезке времени

Существование связного пути к любой точке на V_∞ -сфере с геометрически допустимым наклонением гарантируется теоремой «О поясе Венеры» [2]. Она гласит, что такой путь всегда возможен на ограниченном временном отрезке. Фактически, в ней эксплуатируется факт «плотности всюду» множества рациональных чисел на модельном отрезке действительной оси.

Покрытие V_∞ -сферы проводится с использованием одинаковых элементов – сферических кругов, которые, очевидно, будут пересекаться. Будем обозначать сферический круг с радиусом основания $V_\infty \sin \varphi$ как $СК_\varphi$. Такой радиус основания, очевидно, соответствует телесному углу, образованному конусом с углом раствора 2φ . В ряде случаев можно аппроксимировать сферические круги описанными около них правильными

сферическими многоугольниками, а саму V_{∞} -сферу – правильным многогранником. В таком случае трек последовательности GAM будет однозначно представляться в виде последовательности прохождений нескольких граней правильного многогранника, каждая из которых ортогональна вектору асимптотической скорости, т.е. является картинной плоскостью текущего GAM.

Как известно, всё множество правильных многогранников (платоновых тел) исчерпывается пятью случаями (табл. 2).

Таблица 2

Характеристики платоновых тел

Многогранник	Число вершин	Число граней	Телесный угол, стягиваемый гранью, град.
тетраэдр	4	4	180
куб	8	6	120
октаэдр	6	8	90
додекаэдр	20	12	60
икосаэдр	12	20	36

Сравнение табл. 1 и табл. 2 показывает, что для планет земной группы возможна однозначная аппроксимация GAM на V_{∞} -сфере только одним правильным многогранником - икосаэдром (рис. 9), тогда как для планет-гигантов возможна аппроксимация гранями любого платонова тела, кроме тетраэдра. Для GAM с планетами земной группы имеет смысл расширить класс аппроксимирующих многогранников с помощью триангуляции V_{∞} -сферы методом рекурсивного разбиения правильного многогранника. Известно, что, помимо прочего, икосаэдр, имея наибольшее число граней среди правильных многогранников, оптимален по точности такой аппроксимации (см. рис. 9 и Приложение 1).

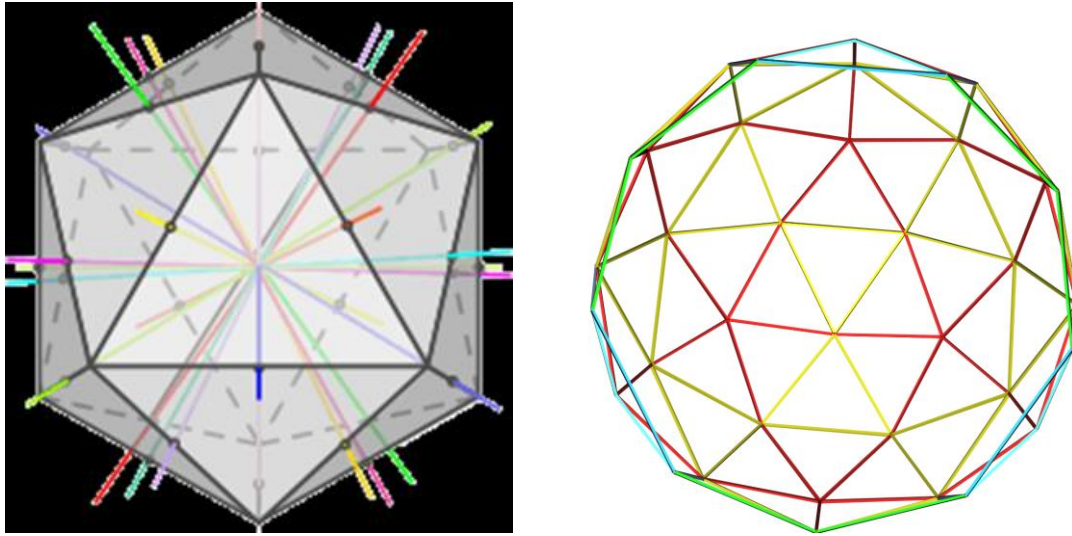


Рис. 9. Цепочка совершенных ГАМ однозначно представима в виде маршрута по икосаэдру с последовательной сменой текущей грани на соседнюю. Текущая грань параллельна картинной плоскости выполняемого ГАМ (слева). Справа – аппроксимация V_∞ -сферы. триангуляцией с помощью метода рекурсивного деления икосаэдра (удвоенная частота)

1.7. Минимальное покрытие сферическими шапочками инвариантной сферы асимптотической скорости

Цепочка ГАМ в случае их сольного проведения может быть представима как группа автоморфизмов V_∞ -сферы. Необходим подъём по V_∞ -сфере к точке-цели, близкой к полюсу её наклонения T_{Pole} . Достижение T_{Pole} будет обозначать реализацию выхода на геометрически максимально возможное (2) наклонение орбиты КА. Согласно [1] для миссий с $v_\infty = 1/2$ полюс T_{Pole} будет находиться на пересечении широты $\rho = 60^\circ$ и продольной плоскости $\psi = 0$ (рис. 10). Следуя [1,2], будем называть миссии с $v_\infty = 1/2$ классом миссий МИГ. Для миссий с произвольным проектным наклонением $i_{\text{max}} = i_{\text{required}}$ полюс наклонения T_{Pole} будет находиться на широте:

$$\rho^* = \pi/2 - i_{\text{required}}. \quad (30)$$

Предельным – наиболее экономичным случаем решения поставленной задачи является связка сопряжённых задач [2]:

- нахождение максимальной плотности заполнения V_∞ -сферы конгруэнтными элементами $СК_\varphi$, при котором их совокупность *может* образовать односвязную область, содержащую точку входа Λ_0 , и точку-цель T_{Pole} ;
- построение минимального **покрытия** V_∞ -сферы картами $СК_\varphi$, при котором полный атлас совокупных $СК_\varphi$, *заведомо* содержит и точку входа Λ_0 , и точку-цель T_{Pole} .

Решение задачи о максимальной плотности заполнения обеспечивает существования «контура» минимальной цепочки от произвольной точки входа к полюсу наклона T_{Pole} . Известно [16], что если на сфере расположены $n \geq 3$ непересекающихся равных сферических кругов, то для указанной задачи существует оценка плотности D расположения кругов [16]:

$$D \leq \frac{n}{2} (1 - \operatorname{cosec} \omega_n), \quad \omega_n = \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6} \quad (31)$$

Соответствующее решение задачи о минимальном покрытии даёт достаточную оценку минимального числа кругов (то есть количества GAM) для гарантированного полного покрытия V_∞ -сферы, то есть число GAM для гарантированной связности множества областей, содержащего точку T_{Pole} и исходную точку входа. Для плотности расположения кругов в этом случае верна оценка [16]:

$$D \geq \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \omega_n \right) \quad (32)$$

Из (32) следует, что при $n \geq 3$ плотность расположения непересекающихся сферических кругов всегда меньше $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.9069$, а

плотность покрытия всегда больше $\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \approx 1.2092$. Согласно (28),(29) и табл. 1

можно рассчитывать заранее количество GAM для произвольной проектируемой космической миссии (Приложение 1).

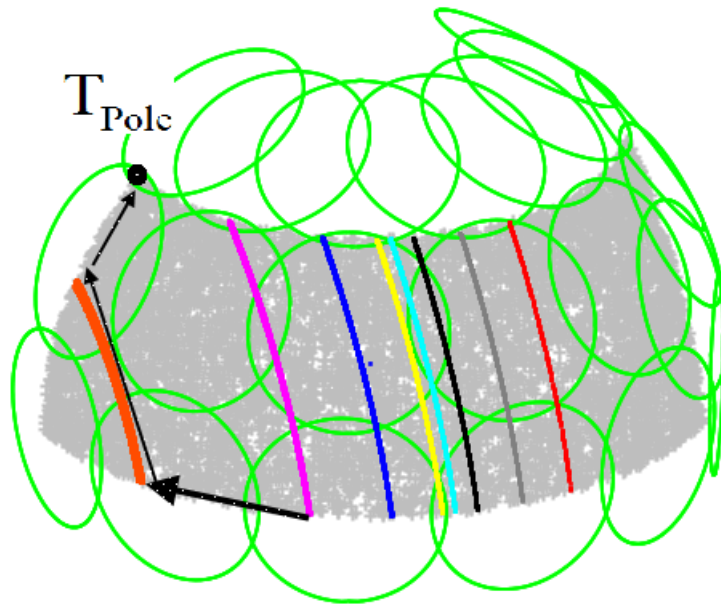


Рис. 10. Для миссий произвольного класса $i_{\max} = i_{\text{required}}$ полюс наклонения T_{Pole} будет находиться на широте $\rho = \pi/2 - i_{\text{required}}$. Нанесены изолинии резонансных соотношений периодов обращения КА и планеты следующих типов:
1:2, 3:4, 1:1 (синяя линия), 5:4, 4:3, 3:2, 2:1, 3:1

При проведении *повышающей цепочки* «солевых» GAM около фиксированной планеты V_{∞} -сфера инвариантна. Поэтому, в случае необходимости, возможно решение задачи построения связного маршрута от стартовой точки первого GAM Λ_0 (содержащейся в $CK_{\varphi,1}$) до точки полюса наклонения T_{Pole} с достаточно большим числом соединяющихся (в предельном случае – касающихся) локальных карт $\{CK_{\varphi,1}, CK_{\varphi,2}, \dots, CK_{\varphi,N}\}$ [2], (рис. 10).

1.8. Проводка орбиты КА к полюсу наклонения за минимальное время

Современные космические миссии по исследованию внутренней гелиосферы из внеэклиптических положений («Solar Orbiter» ESA, «Интергелиозонд») требуют предельно сжатых сроков их проведения (5-7 лет). Поэтому из маршрута по сфере V_{∞} должны быть исключены резонансы более высокого порядка: 1:2, 5:4, 3:2, 2:1, 3:1, так как они приводят к превышению

ограничения на время проведения миссии. Остаются только главные резонансы вида 3:4, 1:1, 4:3.

Обязательное условие односвязной «быстрой» проводки по наклонению состоит в том, что каждая карта $СК_{\varphi,i}, i=1, \dots, N-1$ содержит *хотя бы две «резонансных» точки* $\Lambda_{i,1}, \Lambda_{i,2}$ главных резонансов; последняя карта $СК_{\varphi,N}$ содержит хотя бы одну $\Lambda_{N,1}$. Под «резонансной» точкой главных резонансов $\Lambda_{i,j}$ мы понимаем такую точку, для которой величина $V_{sc,out}(\Lambda_{i,j}) = \|\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_{\infty,out}(\Lambda_{i,j})\|$ обеспечивает орбитальный период КА с отношением к периоду обращения планеты в пропорциях 3:4, 1:1 или 4:3 (рис. 11).

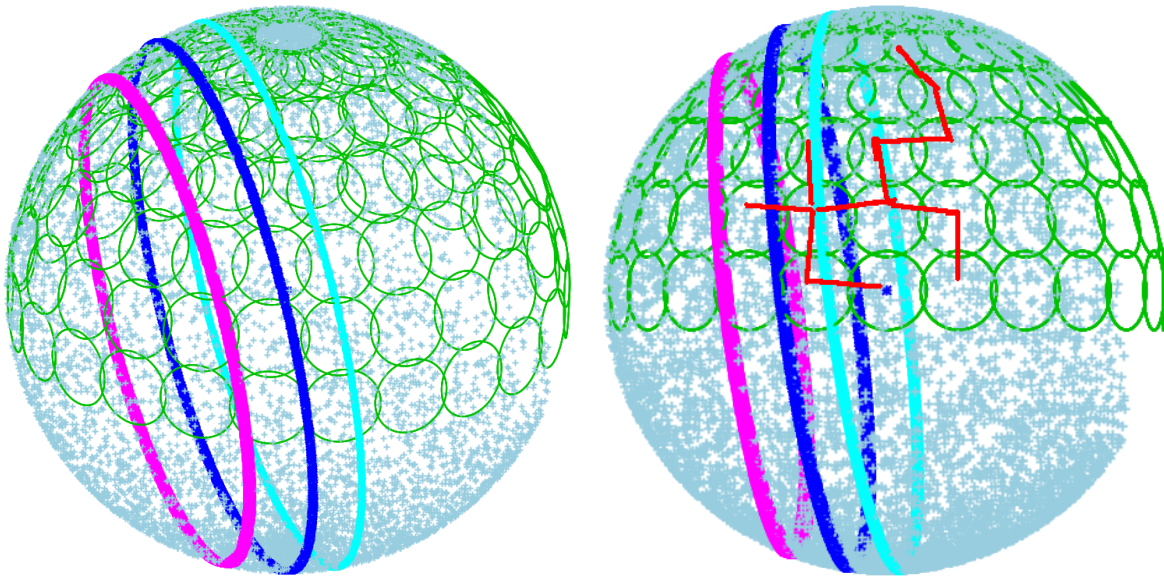


Рис. 11. Резонансные изолинии на поверхности V_{∞} -сферы для соизмеримостей между периодами обращения КА и планеты вида 3:4, 1:1, 4:3

Как указывалось выше, каждая элементарная карта в случае представления с её помощью однопроходного GAM – это «сферическая шапочка» (*Spherical Cap*) – сферический круг $СК_{\varphi,i}$ с радиусом основания $V_{\infty} \sin \varphi_{\max}$, образованный пересечением сферы V_{∞} и телесного угла – центрального конуса с углом раствора $2\varphi_{\max}$ (рис. 11,12). При составлении

сценариев проведения GAM осуществляется поиск повышающих цепочек одинаковых карт $СК_{\varphi}$ на V_{∞} -сфере. Карты должны перекрываться и соединять точку входа при первом GAM Λ_0 и точку-цель T_{Pole} (рис. 13). Каждая $СК_{\varphi}$ должна содержать резонансные точки пересечения оси текущего «конуса GAM» (находится в центре сферической шапочки) и точки оси «конуса GAM», следующего за ним. Значения φ_{max} рассчитываются для каждой планеты согласно формулам (4), (27) и приведены в табл. 1.

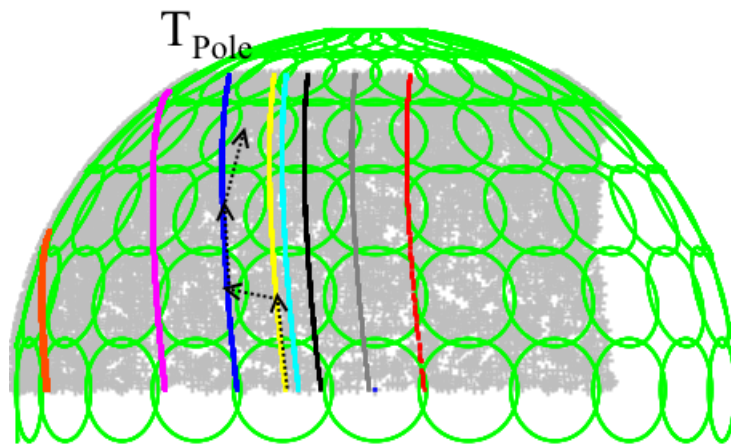


Рис. 12. Односвязный маршрут, состоящий из пересекающихся локальных карт, содержащих стартовую точку первого GAM и полюс наклона T_{Pole} . Нанесены изолинии резонансных соотношений периодов обращения КА и планеты следующих типов: 1:2, 3:4, 1:1 (синяя линия), 5:4, 4:3, 3:2, 2:1, 3:1

Для упрощения формализма можно решать задачу синтеза цепочек двойственным способом [1]: рассматривая покрытие V_{∞} -сферы сферическими кругами $СК_{\varphi/2}$, выделять из него такие цепочки касающихся элементов, каждый из которых содержит хотя бы одну точку одной из линий главных резонансов (рис. 13).

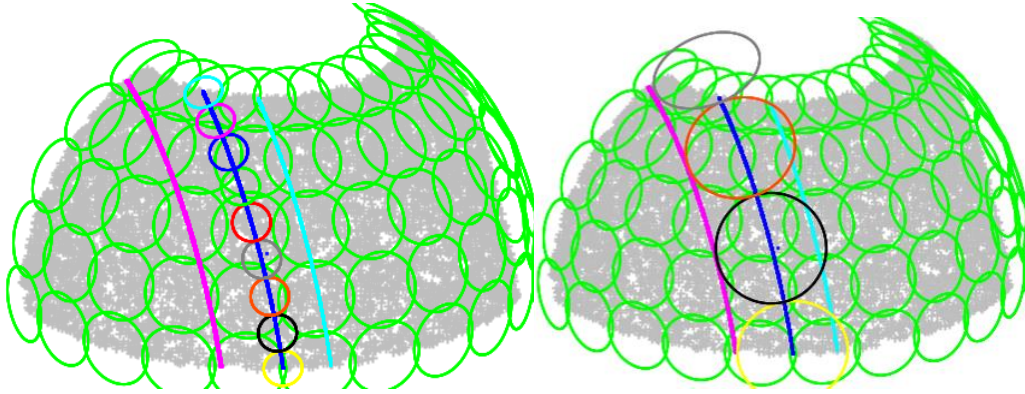


Рис. 13. Односвязный маршрут, состоящий из касающихся карт $СК_{\varphi/2}$, содержащих хотя бы одну резонансную точку. Нанесены изолинии главных резонансных соотношений периодов обращения КА и планеты 3:4, 1:1, 4:3

2. Гравитационная лоща изменения наклонений для космических миссий класса МИГ для ГАМ около планеты Венера

Представим рассчитанную по точным эфемеридам лощу изменения наклонений для космических миссий класса МИГ ($\nu_{\infty} = 1/2$) для ГАМ около планеты Венера. По ней можно оперативно составлять требуемые маршруты для достижения T_{Pole} (рис. 14). На ней нанесены изолинии резонансных соотношений периодов обращения КА и планеты следующих типов: 1:2, 3:4, 1:1, 5:4, 4:3, 3:2, 2:1, 3:1. Красными точками A_1, A_2 показаны начало и конец первого ГАМ около Венеры для типовой траектории, взятой из [9].

Для произвольных миссий с наклонением $i_{\text{max}} = i^*$ полюс наклонения T_{Pole} будет находиться на широте $\rho = \pi/2 - i^*$.

Координаты ρ^*, σ^* стационарной точки, отвечающие экстремуму угла наклонения, приведены для конкретных основных резонансов в табл. 3.

Координаты T_{Pole} при $\nu_{\infty} = 1/2$ записываются в виде $\left(-\frac{1}{2}V_{\infty}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}V_{\infty} \right)$.

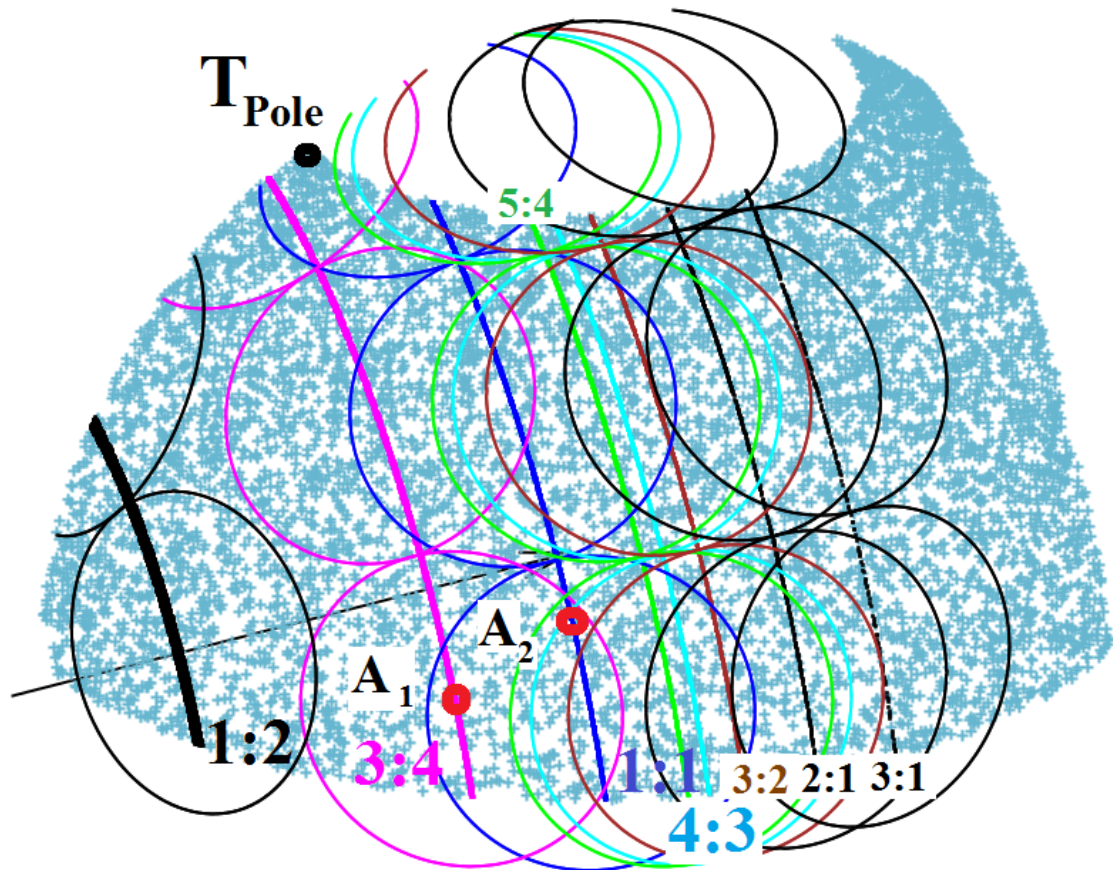


Рис. 14. Рассчитанная по реальным эфемеридам система покрытия V_∞ -сферы Венеры фрагментами картинных плоскостей при гравитационных манёврах с Венерой для космических миссий класса МИГ ($v_\infty = 1/2$). Нанесены изолинии резонансных соотношений периодов обращения КА и планеты следующих типов: 1:2, 3:4, 1:1 (синяя линия), 5:4, 4:3, 3:2, 2:1, 3:1. Красными точками A_1, A_2 показаны начало и конец первого GAM около Венеры для типовой траектории, взятой из [9]

Для главного резонанса 1:1 любой космической миссии с $v_\infty < 1$ величина ρ^* может быть вычислена аналитически. Действительно, из третьего закона Кеплера и интеграла энергии следует, что $\|\mathbf{V}_{pl}\| = \|\mathbf{V}_{pl} + \mathbf{V}_{\infty, out}\|$. Поэтому треугольник АОВ на рис. 2 является равнобедренным. Его медиана из вершины А к стороне ОВ одновременно будет являться и высотой. Поэтому

$$\cos \rho^* = \frac{1}{2} v_\infty \quad (33)$$

Для класса МИГ, очевидно,

$$\rho^* = \rho_{\text{МИГ}}^* = \arccos \frac{1}{4} \approx 75.52^\circ. \quad (34)$$

Таблица 3

Координаты ρ^*, σ^* стационарной точки T_{Pole} , отвечающие экстремуму угла наклона

Резонанс	ρ^* , град.	σ^* , град.
1:1	75.5	-180
3:4	62.7	-180
4:3	85.8	-180
5:4	83.6	-180
3:2	89.3	-180
1:2	34.0	-180
2:1	83.0	0
3:1	75.5	0

Замечание. Отметим интересное обстоятельство, демонстрируемое на рис. 11,14, заключающееся в том, что передняя часть V_∞ -сферы не применяется при формировании изолиний. Причина состоит в том, что в этой области после совершения ГАМ скорость $V_{\text{sc,out}}$ разгоняется до гиперболических значений для гелиоцентрического движения.

Утверждение 4. В случае $v_\infty \geq \sqrt{2} - 1 \approx 0.41421$ область V_∞ -сферы, используемая для построения изолиний, должна быть усечена со стороны направления движения планеты. Радиус основания r_{par} отсекаемой соответствующей сферической шапочки находится из условия:

$$\frac{r_{\text{par}}}{V_{\text{pl}}} = \frac{1}{2} \sqrt{6v_\infty^2 - v_\infty^4 - 1} \quad (35)$$

Доказательство утверждения выполняется из геометрических соображений и представляется очевидным. ■

Таким образом, для миссий класса МИГ ($v_{\infty} = 1/2$) эффект усечения V_{∞} -сферы будет иметь место при достаточно больших периодах обращения КА и от V_{∞} -сферы отсекается сферическая шапочка с радиусом основания:

$$r_{\text{par}} = \frac{\sqrt{7}}{8} V_{\text{pl}} \approx 0.33072 \cdot V_{\text{pl}}. \quad (36)$$

Выводы

В работе получено обобщение формул работы [1] для наклона орбиты КА и его изменения при совершении гравитационных манёвров (GAM) около планеты на общий случай эллиптических орбит не только КА, но и планеты. Представлена геометрическая интерпретация полученных формул. Найдены выражения для координат полюса наклона на инвариантной сфере асимптотической скорости КА. Проведён сравнительный анализ полученных результатов и современных описаний 3D-GAM специалистами NASA и ESA. Показано также, что приближение Лабунского [1,3] является в ряде случаев приемлемой аппроксимацией. Аналитически исследована процедура выхода цепочки GAM на полюс наклона для достижения геометрически допустимого максимума наклона орбиты КА при совершении многопроходных GAM. Определён характерный «рабочий» размер сферической области элементарного GAM на поверхности V_{∞} -сферы. Решена задача о построении конечного покрытия односвязного трека от точки стартового GAM до точки полюса наклона сферическими кругами на V_{∞} -сфере. При этом используются триангуляционные сети и, возможные для части планет Солнечной системы, аппроксимации V_{∞} -сферы правильными многогранниками. Отмечены возможности построения универсального адаптивного синтеза оптимальных конечных подпокрытий трека на V_{∞} -сфере (схожих с кристаллическим ростом) как вдоль изолиний резонансов, так и с перескоками между ними.

Библиографический список

1. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. О вариации наклона орбит небесных тел при совершении гравитационного манёвра в Солнечной системе // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 15. 36 с.
2. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Методика формирования больших наклонов орбиты КА с использованием гравитационных манёвров // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 64. 32 с.
3. Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G. Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories // ESI Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998, P. 9-266.
4. Strange N.J., Russell R., Buffington B., Mapping the V-infinity Globe // AIAA/AAS Space Flight Mechanics Meeting, AAS Paper 07-277, 2007, 24 p. URL: http://russell.ae.utexas.edu/FinalPublications/ConferencePapers/07Aug_AAS-07-277.pdf
5. Buffington B, Strange N.J., Campagnola S. Global Moon Coverage via Hyperbolic Flybys // 23rd International Symposium on Space Flight Dynamics, Pasadena, CA, Oct. 29 – Nov. 2, 2012.
6. Wolf A. Touring the Saturnian system // Space Science Reviews, V. 104. 2002, Iss. 1, P. 101-128.
7. Kawakatsu Y. V_{∞} Direction Diagram and its Application to Swingby Design // 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, September 28 – October 2 2009, Toulouse, France. URL: http://issfd.org/ISSFD_2009/InterMissionDesignI/Kawakatsu.pdf
8. Pérez J.M.S. Trajectory Design of Solar Orbiter // 23d ISSFD, Pasadena, California, 2012, 17 p. URL: http://www.issfd.org/ISSFD_2012/ISSFD23_IMD1_3.pdf

9. Konstantinov M., Petukhov V., Thein M. Optimization spacecraft insertion into the system of heliocentric orbits for Sun exploration // 65th IAC, Toronto, Canada, 2014. IAC-14-C1.9.4
10. Campagnola S., Kawakatsu Y. Jupiter Magnetospheric Orbiter: Trajectory Design in the Jovian System // J. Spacecraft and Rockets, V. 49, № 2, 2012, P. 318-324.
11. Janin G. Trajectory design for the Solar Orbiter mission // Monografias de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, 25, 2004. P. 177–218. (ESA-ESOC). URL: http://www.unavarra.es/vijtmc/Bertiz_Def/177Janin.pdf
12. Навигация космических аппаратов при исследовании дальнего космоса / под ред. Е.П. Молотова, А.Г. Тучина. – М.: Радиотехника, 2016. – 232 с.
13. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г. Синтез сценариев космических миссий в системе Юпитера с использованием гравитационных маневров // Докл. Академии Наук, Т. 456, № 1, 2014, С. 39-41.
14. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Точки бифуркации при проведении гравитационных манёвров в системе Юпитера // Докл. Академии наук, Т. 462, № 2, 2015, С. 154-157.
15. Grushevskii A.V., Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Tuchin A.G. Adaptive low radiation multibody gravity assist tours design in Jovian system for the landing on Jovian's moons // Proc. 65th International Astronautical Congress (IAC 2014), 29 Sept – 3 Oct 2014, Toronto, Canada. Manuscript IAC-14,C1,9,13
16. Тот Л.Ф. Расположение на плоскости, сфере и в пространстве. – М.: Физматгиз, 1958. – 363 с.
17. Hardin R.H., Sloane N.J.A., Smith W.D. et al. Spherical Codes. Nice arrangements of points on a sphere in various dimensions // Information Sciences Research. AT&T Shannon Lab. – 1994.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Оценка минимального числа GAM для покрытия V_∞ -сферы

Величина телесного угла Ω для конуса с углом раствора 2φ находится по формуле

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \varphi) \quad (\text{П1})$$

Соответственно для GAM с $\varphi = \frac{\pi}{6}$ из (П1) следует $\Omega_{\varphi=\pi/6} = 0.84179$, что составляет по сравнению с полным телесным углом сферы 4π величину, примерно равную $1/15$. Это даёт нижнюю, достаточно грубую оценку числа минимального покрытия V_∞ -сферы 15-ю сферическими кругами $СК_{\pi/6}$.

Учтём, что при $n \geq 3$ плотность расположения непересекающихся сферических кругов всегда меньше $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, а плотность покрытия всегда больше $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$ [16]. Таким образом, как минимум 18 GAM теоретически могут являться гарантированным минимальным покрытием V_∞ -сферы (и не более 13 GAM могут дать максимальное заполнение). Если использовать аппроксимацию V_∞ -сферы с помощью граней вписанных правильных многогранников, то в указанном случае из всех платоновых тел по количеству граней для аппроксимации покрытия V_∞ -сферы может подходить только икосаэдр (табл. 1, рис. 9).

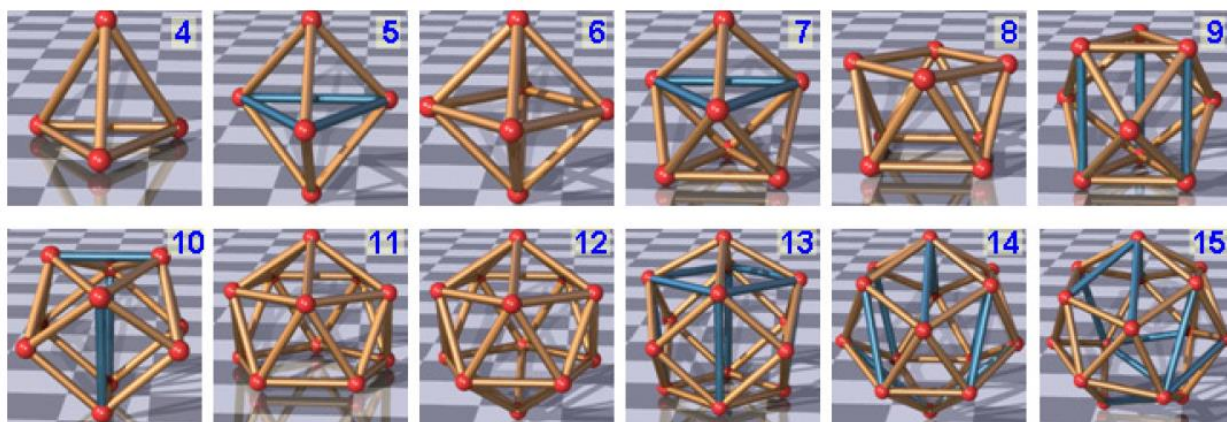


Рис. П1. Размещение n точек на сфере с максимизацией минимального расстояния между ними согласно [17]

Оглавление

Введение	3
1. Два геометрически различных случая выполнения ГАМ и ограничения, возникающие при их выполнении	4
1.1. Случай круговой орбиты планеты.....	7
1.2. Общий случай эллиптической орбиты планеты	9
1.3. Максимум наклона орбиты КА.	11
1.4. Сравнение формулы для $\operatorname{tg} i(\rho, \psi)$ наклона орбиты КА с данными зарубежных исследований	14
1.5. Связь переменных ρ, ψ с углом разворота вектора асимптотической скорости φ_{\max} на гиперболе ГАМ	15
1.6. Гарантированная проводка орбиты КА к полюсу наклона на ограниченном отрезке времени	18
1.7. Минимальное покрытие сферическими шапочками инвариантной сферы асимптотической скорости.....	20
1.8. Проводка орбиты КА к полюсу наклона за минимальное время.....	22
2. Гравитационная лодия изменения наклонов для космических миссий класса МИГ для ГАМ около планеты Венера	25
Выводы	28
Библиографический список.....	29
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Оценка минимального числа ГАМ для покрытия V_{∞} -сферы	31