ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 40 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Аптекарев А.И., Денисов С.А.

Проблема Стеклова и оценки ортогональных многочленов с весами из классов $A_p(\mathbb{T})$

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И., Денисов С.А. Проблема Стеклова и оценки ортогональных многочленов с весами из классов $A_p(\mathbb{T})$ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 40. 19 с. doi:10.20948/prepr-2016-40
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-40

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. И. Аптекарев,   С. А. Денисов

Проблема Стеклова и оценки ортогональных многочленов с весами из классов $A_p(\mathbb{T})$

Москва — 2016

УДК 517.53+517.9

Аптекарев А. И., Денисов С. А.

Проблема Стеклова и оценки ортогональных многочленов с весами из классов $A_p(\mathbb{T})$. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016

Работа посвящена оценкам ортогональных многочленов на носителе меры ортогональности. Повышенный интерес к этой тематике обусловлен знаменитой проблемой Стеклова в ее современном понимании и развитии. Мы рассматриваем на окружности $\mathbb{T}$ веса ортогональности с A_p-характеристикой, близкой к 1. Для соответствующих ортонормированных многочленов мы получаем верхние оценки на L^p-норму при $p \in (2, \infty]$.

Ключевые слова: Ортогональные многочлены; проблема Стеклова; оценки ортогональных многочленов на окружности; веса Макенхаупта.

Aptekarev A. I., Denisov S. A.

The Steklov problem and estimates for orthogonal polynomials with $A_p(\mathbb{T})$ weights. Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2016

The presented paper is devoted to bounds of the orthogonal polynomials on the support of the measure of orthogonality. The big interest to this subject-matter is caused by famous Steklov problem and it's modern development and understanding. We consider weights on the unit circle $\mathbb{T}$ with A_p characteristic close to 1. For the corresponding orthonormal polynomials, we obtain the upper estimates on the weighted L^p norm with $p \in (2, \infty]$.

Key words: Orthogonal polynomials; Steklov problem; bounds of orthogonal polynomials on the circle; Muckenhoupt weights.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

Оглавление

1. Введение

На единичной окружности задана положительная конечная мера σ, имеющая бесконечное число точек роста. Пусть многочлены $\{\phi_k(z,\sigma)\}$ ортонормированы по отношению меры $d\sigma$, т.е.,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(e^{i\theta})\,\overline{\phi_m(e^{i\theta})}\,d\sigma \,=\delta_{n,m}\;, \quad n,m=0{,}1{,}2\,\ldots, \quad \operatorname{coeff}(\phi_k,k)>0, \tag{1.1}$$

где $\operatorname{coeff}(Q,k)$ обозначает коэффициент многочлена Q, стоящий перед степенью z^k. Кроме ортонормированных многочленов, мы будем рассматривать ортогональные многочлены $\{\Phi_n(z,\sigma)\}$ со старшим коэффициентом единица:

$$\operatorname{coeff}(\Phi_n,n)=1,\;\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(e^{i\theta},\sigma)\overline{\Phi_m(e^{i\theta},\sigma)}\,d\sigma\;=0\;,\quad m<n.$$

В этой работе мы интересуемся следующим вопросом. Какие нужны условия регулярности на вес σ для получения верхних оценок на $\|\phi_n\|_{L^p_\sigma(\mathbb{T})}$ при $p\in(2,\infty]$? Интерес к этой тематике вызван известной *проблемой Стеклова* в ее современном понимании и развитии. Гипотеза Стеклова (1921 г., см. [23]) утверждала, что если вес ортогональности $w:=\sigma'$ отграничен от нуля, т.е. $\sigma\in S_\delta$ (принадлежит классу Стеклова):

$$\int_{\mathbb{T}} d\sigma=1, \quad w:=\sigma'\geqslant\delta/(2\pi), \quad \text{п.в. } \theta\in\mathbb{T}, \tag{1.2}$$

то последовательность ортонормированных многочленов ограничена по n:

$$\|\phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leqslant \text{Const}, \qquad \forall n\geqslant 0. \tag{1.3}$$

Поиски ответа на этот вопрос оказали плодотворное влияние на развитие теории ортогональных многочленов.

В 1977 г. вышел обзор П.К. Суетина [24] по проблеме Стеклова. В итоге, к этому времени, несмотря на попытки решения (среди прочих работ см. [8, 9, 10, 12]) гипотеза Стеклова оставалась открытой. Конечно, главным достижением этого периода является теория сильных асимптотик С.Н. Бернштейна и Г. Сегё [4, 25], в которой была получена равномерная асимптотика многочленов, ортогональных относительно положительных весов, имеющих некотрую гладкость $\sigma\in C^{0+}$, точнее модуль непрерывности:

$$\frac{w(t)-w(x)}{|\ln|t-x||^{-\gamma}}, \quad \gamma>1, \quad w:=\sigma'\,.$$

Тем самым, имеется достаточное условие Бернштейна для (1.3):

$$\sigma\in S_\delta\cap C^{0+} \quad\Rightarrow\quad \|\phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leqslant \text{Const}, \qquad \forall n\geqslant 0. \tag{1.4}$$

В 1979 году Е.А. Рахманов [19] предъявил контрпример к гипотезе Стеклова, построив меру из класса (1.2), такую, что *

$$\exists\ \sigma \in S_\delta \quad \Rightarrow \quad \varlimsup_{n\to\infty} \|\phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \;=\; \infty. \tag{1.5}$$

Ключевую роль в конструкции Рахманова играла оценка снизу (для фиксированного n) величины

$$M_{n,\delta} = \sup_{\sigma\in S_\delta} \|\phi_n(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{1.6}$$

Действительно, удаётся доказать:

$$\forall\ \{\beta_n\} : \beta_n{\to}0 \quad \exists\ \sigma{\in}S_\delta,\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} : \qquad \|\phi_{k_n}(z,\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} > \beta_{k_n} M_{k_n,\delta}.$$

Поэтому для доказательства (1.5) в [19] была получена следующая оценка снизу:

$$C\,\ln n \leqslant M_{n,\delta}\ , \quad C(\delta) > 0\ , \quad \delta \ll 1\ . \tag{1.7}$$

Отметим, наличие тривиальной оценки сверху:

$$M_{n,\delta} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{\delta}}\ , \quad n \in \mathbb{N}\ , \tag{1.8}$$

которая (в одну строчку) следует из нормировки (1.1), условия Стеклова (1.2) и неравенства Коши-Буняковского (Cauchy-Schwarz):

$$1 \geqslant \frac{\delta}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\phi_n|^2 d\theta = \delta\sum_{j=0}^{n}|c_j|^2 \geqslant \delta\ \frac{\|\phi_n(z;\sigma)\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})}}{n+1}, \qquad \phi_n(z;\sigma) =: \sum_{j=0}^{n} c_j z^j.$$

В 1979 году Рахманов [20] существенно усилил нижнюю оценку (1.7):

$$C\sqrt{\frac{n+1}{\delta\ \ln^3 n}} \leqslant M_{n,\delta}\ , \quad C > 0\ , \quad \delta \ll 1\ , \tag{1.9}$$

тем самым, в шкале степенного роста оценки нижняя и верхняя оценки для $M_{n,\delta}$ (т.е.(1.8) и (1.9)) совпали.

В связи с результатами Рахманова отметим работу Мурмана Амброладзе [1], в которой конструкцию работы [19] удалось распространить на непрерывные веса ортогональности и тем самым для $\sigma \in S_\delta \cap C$ доказать, что

$$C\,\ln n \leqslant M^{(C)}_{n,\delta} = \sup_{\sigma\in S_\delta\cap C} \|\phi_n(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{1.10}$$

* в [19] к бесконечности стремилась подпоследовательность $\{\phi_k(1,\sigma)\}$.

Точная оценка для $\|\phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ в классе Стеклова (т.е. для $M_{n,\delta}$) была получена в [2]. В частности, справедлива

Теорема 1.1 ([2]). *Пусть* $\sigma \in S_\delta \cap L^p, \quad \delta \in (0,1), \ p \in [1,\infty)$. *Тогда существуют константы* $C_j(p,\delta)$, $j = 0,\ 1,\ 2$, *такие, что*

$$C_1(p,\delta)\sqrt{n} \ \leqslant \sup_{\sigma\in S_\delta,\ \|w\|_{L^p}\leqslant C} \|\phi_n(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \ \leqslant \ C_2(p,\delta)\sqrt{n}, \quad \forall C > C_0. \quad (1.11)$$

Мы видим, что тривиальная оценка сверху (1.8) для $\|\phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ в классе Стеклова S_δ, а также в его сужении на $S_\delta \cap L^p$, $p \in [1,\infty)$ неулучшаема. Этот результат мотивировал получение новых оценок сверху в более узких подклассах S_δ. Для абсолютно непрерывных мер $d\sigma = wd\theta$ с ограниченными сверху и снизу весами w, т.е. для $S_\delta \cap L^\infty$, верхние оценки на $\|\phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})}, 2 < p \leqslant \infty$ были доказаны в [5]. Аналогичные новые оценки сверху для весов w, таких, что $w,\ 1/w \in BMO(\mathbb{T})$, получены в [6].

В настоящей работе мы получим верхнюю оценку для ϕ_n в случае, когда σ абсолютно непрерывна и ее производная (вес) близка к константе в A_p-смысле. Мы используем тот же подход, что и в [5, 6], идею которого мы объясним в следующей секции. Все необходимая информация о классах A_p приведена в Дополнении A.

Замечание 1.1. Известно [21], что для вероятностной меры σ из класса Сегё, т.е., для σ, удовлетворяющих

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \sigma' d\theta > -\infty, \quad (1.12)$$

справедливо

$$\exp\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} \log(2\pi\sigma'(\theta))d\theta\right) \leq \left|\frac{\Phi_n(z,\sigma)}{\phi_n(z,\sigma)}\right| \leqslant 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.13)$$

Замечание 1.2. Требование к мере быть вероятностной не является ограничительным ввиду следующего масштабирования

$$\phi_n(z,\sigma) = \alpha^{1/2}\phi_n(z,\alpha\sigma), \quad \Phi_n(z,\sigma) = \Phi_n(z,\alpha\sigma), \quad \alpha > 0. \quad (1.14)$$

Эти два замечания влекут, что

$$0 < C_1 \leqslant \left|\frac{\phi_n(z,\sigma)}{\Phi_n(z,\sigma)}\right| \leqslant C_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$$

с константами $C_{1(2)}$, зависящими только от A_p-характеристики веса w и от $\|w\|_{L^1(\mathbb{T})}$. Таким образом, мы можем фокусироваться на Φ_n вместо ϕ_n. Так как

$\Phi_n(z, \alpha w) = \Phi_n(z, w)$ и $[\alpha w]_{A_p} = [w]_{A_p}$, имеется естественная инвариантность масштабирования для этого случая.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения: H обозначает преобразование Гильберта, $\mathcal{P}^+$ есть проекция из $L^2(\mathbb{T})$ в $H^2(\mathbb{T})$, $\mathcal{P}_n$ ортогональная проекция из $L^2(\mathbb{T})$ в пространство многочленов степени не выше n. Если функция f монотонна, то $f^{(-1)}$ обозначает ее обратную. Для $p \in [1, \infty]$ символ p' есть сопряженный показатель: $p^{-1} + p'^{-1} = 1$.

2. Примеры оценок сверху для весов из L^∞ и BMO

В этой секции на простых примерах из [5, 6] мы проиллюстрируем метод получения новых верхних оценок для $\|\phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})}$, $2 < p \leqslant \infty$. В основе метода лежат тождества * теории возмущений (для ортогональных многочленов на окружности), вытекающие из переразложения многочлена $\Phi_n(e^\theta, w)$, ортогонального с мерой $w(\theta)d\theta$, по системе степеней $\{e^{ij\theta}\}_{j=0}^n$, ортогональной по лебеговской мере $d\theta$. Затем Φ_n в этих тождествах могут быть интерпретированы как неподвижные точки некоторых операторов, связанных с оператором проектирования на конечные отрезки рядов Фурье. Тем самым, эти операторы могут быть выражены через оператор Гильберта, а оценки нормы Φ_n сводятся к оценкам норм сингулярных интегральных операторов, в соответствующих пространствах.

2.1. Пример оценки сверху для весов из L^∞. Начнем демонстрацию метода с получения одной оценки сверху из [5] для многочленов Φ_n, ортогональных относительно ограниченного веса w из класса Стеклова

$$1 \leqslant w \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{2.1}$$

Базовым тождеством для получения оценки является

$$\Phi_n(z) = z^n + \mathcal{P}_{n-1}(\mu \Phi_n), \quad \mu = 1 - w, \tag{2.2}$$

которое следует из соотношений ортогональности

$$\Phi_n(z) = z^n + (2\pi)^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} z^j \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(e^{i\theta})\, e^{-ji\theta}\, d\theta = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} z^j \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(e^{i\theta})\, e^{-ji\theta}\, \mu(\theta)\, d\theta.$$

* Методы, основанные на такого сорта тождествах, успешно использовались и ранее. Например, метод Бернштейна доказательства [4, 25] сильных асимптотик. Другой пример – интегральное уравнение Гельфанда-Левитана, используемое при решении обратной спектральной задачи.

Обозначим оператор $(\mathcal{P}^{(\mu)}_{n-1})\, f \ := \mathcal{P}_{n-1}\,(\mu f)$, тогда итерируя (2.2) имеем

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{N} (\mathcal{P}^{(\mu)}_{n-1})^k \left(e^{in\theta}\right) + (\mathcal{P}^{(\mu)}_{n-1})^{N+1}\,(\Phi_n)\,.$$

Откуда, с учетом (2.1), получаем

$$\|\Phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \ \leqslant \ \frac{1 + (\varepsilon\|\mathcal{P}_{n-1}\|_{p,p})^N}{1 - \varepsilon\|\mathcal{P}_{n-1}\|_{p,p}} \ + \ (\varepsilon\|\mathcal{P}_{n-1}\|_{p,p})^{(N+1)}, \tag{2.3}$$

где $\|.\|_{p,p}$ обозначает норму оператора из L^p в L^p.

Для окончания оценки нормы Φ_n вспомним некоторые факты из гармонического анализа: связь оператора проектирования с оператором Гильберта

$$\mathcal{P}_{n-1} = \mathcal{P}^+ - z^n \mathcal{P}^+ z^{-n} = 0.5(H - z^{n+1} H\, z^n) \tag{2.4}$$

и результат Пихоридеса [18] о норме оператора Гильберта

$$\mathbf{C}(p) = \|H\|_{p,p} = \sup_{\|f\|_{L^p}\leqslant 1} \|Hf\|_{L^p(\mathbb{T})} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2p}\right), \qquad p \in [2,\infty), \tag{2.5}$$

что дает нам оценку нормы оператора проектирования

$$\left\|\mathcal{P}_{n-1}\right\|_{p,p} \leqslant Cp. \tag{2.6}$$

Теперь, возьмем показатель у L^p в (2.3) равным $p = \dfrac{1}{2C\varepsilon}$. Отсюда следует

$$\|\Phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant 2 \qquad \Rightarrow \qquad \|\Phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant 2n^{1/p} = 2n^{2C\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Импликация в (2.7) – это неравенство С.М. Никольского.

Заметим, что обе оценки в (2.7) представляют интерес.

Первая из них устанавливает для ограниченых весов справедливость гипотезы Стеклова* в пространстве L^p.

Отметим, что в работе [5] также была получена оценка в классе $S_\delta \cap L^\infty$ для больших отклонений веса $1/(2\pi) \leqslant w \leqslant T$:

$$\|\Phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant C(T)\, n^{1/2-\frac{C}{T}}, \quad T \gg 1,$$

что смыкает (в смысле показателья степени) верхнюю оценку в классе $S_\delta \cap L^\infty$ с точной в классе S_δ (ввиду (1.11)) оценкой (1.8).

*Задача о справедливости гипотезы Стеклова в пространстве L^p была поставлена в [3, 14].

2.2. Пример оценки сверху для весов из BMO. Напомним определение характеристики (псевдо-нормы) BMO

$$[w]_{BMO(\mathbb{T})} = \sup_{J\subseteq\mathbb{T}} \Big\langle w \; - \; \langle w\rangle_J \Big\rangle_J,$$

где J есть произвольная дуга окружности $\mathbb{T}$ и

$$\langle f\rangle_J = \frac{1}{|J|}\int_J f dx. \tag{2.8}$$

Определим следующую функцию от $p \in (1,\infty)$:

$$\mathbf{B}(p) = \sup_{\|f\|_p\leqslant 1} \frac{\|[H,w]f\|_p}{[w]_{BMO}} < \infty, \tag{2.9}$$

где $[H,w]$ – коммутатор операторов Гильберта и умножения на вес w. Функция $\mathbf{B}$ ограничена ввиду Теоремы Койфмана-Рочберга-Вейса. Для полноты изложения, в Дополнении Б мы приведем доказательство (см. [6]) того, что

$$\mathbf{B}(p) \leqslant Cp^2, \qquad p > 2. \tag{2.10}$$

Продолжим демонстрацию метода получением оценки из [6] для Φ_n, ортогональных с весом w, близким к константе в смысле пространства BMO:

$$1 \leqslant w, \qquad [w]_{BMO} \leqslant \varepsilon. \tag{2.11}$$

Базовым тождеством для получения оценки является

$$\Phi_n = z^n - w^{-1}[\mathcal{P}_{n-1}, w]\Phi_n \qquad \Leftarrow \quad \mathcal{P}_{n-1}(w\Phi_n) = 0. \tag{2.12}$$

Итерируя (2.12), с учетом (2.9) получим из принципа сжимающих отображений

$$\|\Phi_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1}{1-\mathbf{B}(p)\varepsilon}, \qquad p < \widehat{p}(\varepsilon) := \mathbf{B}^{(-1)}(\frac{1}{\varepsilon}).$$

С помощью (2.10) константа, ограничивающая L^p-норму, может быть уточнена, а также по неравенству С.М. Никольского имеем

$$\|\Phi_n(z,w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \lesssim \inf_{2<p<\widehat{p}(\epsilon)} \frac{n^{1/p}}{1-\mathbf{B}(p)\epsilon} \leqslant C_1 n^{C_2\sqrt{\epsilon}}. \tag{2.13}$$

Имея в виду вложение пространств $L^\infty \subset$ BMO $\subset \bigcap_{p\in(1,\infty)} L^p$, любопытно сравнить оценки (2.7), (2.13) и (1.11).

3. Верхние оценки в классе Макенхаупта $w \in A_p$

Теперь перейдем к весам из более естественного класса, т.е. $w \in A_p$. Напомним определение характеристики (псевдо-нормы) пространства A_p:

$$[w]_{A_p(\mathbb{T})} = \sup_{J \subseteq \mathbb{T}} \Big(\langle w \rangle_J \langle w^{\frac{1}{1-p}} \rangle_J^{p-1} \Big),$$

где J – произвольная дуга окружности $\mathbb{T}$, $p \in (1, \infty)$ и мы используем обозначение (2.8). Определим следующую функцию от $p \in (1, \infty)$:

$$\mathbf{A}(p) = \sup_{[w]_{A_p} \leqslant 2, \|f\|_p \leqslant 1} \|w^{1/p} H w^{-1/p} f\|_p.$$

Нам также понадобится

$$\mathbf{M}(p') = \frac{\mathbf{A}(p')}{\sqrt{p'-1}} + \frac{1}{(p'-1)^{2.5}}, \quad p' \in (1,\, 2).$$

Функция $\mathbf{A}$ конечна, благодаря Теореме Ханта-Макенхаупта-Уидена. Аккуратный анализ констант в доказательстве этой теоремы (с.м., например, [13]) приводит к оценке

$$\mathbf{A}(p') \lesssim (p'-1)^{-1}, \quad \mathbf{M}(p') \lesssim (p'-1)^{-2.5}, \quad p' \in (1{,}2).$$

Справедлива

Теорема 3.1. *Если* $p' \in (1,\, 2]$ *и* $\varepsilon = [w]_{A_{p'}} - 1 \leqslant \varepsilon_0(p') \sim \mathbf{M}^{-2}(p') \sim (p'-1)^5$, *тогда*

$$\|\Phi_n(z,w) - z^n\|_{L^p(\mathbb{T},w)} \lesssim \mathbf{M}(p') \|w\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{p}} \sqrt{\varepsilon} \tag{3.1}$$

и

$$\|\Phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \lesssim C(p', \varepsilon) n^{p'-1}. \tag{3.2}$$

Оценка (3.2) особенно интересна для $p' < 3/2$ с точки зрения проблемы Стеклова. Выражение для A_2-характеристик весов имеет особенно простой вид: $[w]_{A_2} = \sup_J \Big(\langle w \rangle_J \langle w^{-1} \rangle_J \Big)$. Лемма 4.1 и Теорема 3.1 дают следующее следствие.

Следствие 3.1. *Пусть* $\overline{\mathcal{D}}$ *обозначает*

$$\overline{\mathcal{D}}(\varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\sup\limits_{w : [w]_{A_2} \leqslant 1+\varepsilon} \log \|\Phi_n(z,w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{\log n}.$$

Тогда $\overline{\mathcal{D}}(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{1/6}$, *то есть*

$$\|\Phi_n(z,w)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \lesssim n^{C\varepsilon^{1/6}}.$$

Замечание 3.1. Простой пример веса, принадлежащего рассматриваемому классу, есть

$$w_\varepsilon = |x|^{\pm\varepsilon}, \quad |x| < 1,$$

когда ε is small. Если $\varepsilon \to 0$, тогда $[w_\varepsilon]_{A_{p'}} \to 1$ для любого $p' > 1$. В [7] доказано, что $d^\beta(x, F) \in A_p$, если F является “s-регулярным"компактом и $-(1-s) < \beta < (1-s)(p-1)$. Здесь $d(x, F)$ есть функция расстояния до компакта $F \subseteq \mathbb{T}$.

Доказательство. Учитывая инвариантность масштабироания, мы можем предполагать, что $\|w\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$. Из $\Phi_n = z^n - w^{-1}[\mathcal{P}_{n-1}, w]\Phi_n$, выводим базовое тождество

$$\left(w^{1/p}\Phi_n\right) = w^{1/p}z^n - w^{-1/p'}\mathcal{P}_{n-1}w^{1/p'}\left(w^{1/p}\Phi_n\right) + w^{1/p}\mathcal{P}_{n-1}w^{-1/p}\left(w^{1/p}\Phi_n\right).$$

Обозначая

$$F = w^{1/p}\Phi_n, \quad O_1 = w^{-1/p'}\mathcal{P}_{n-1}w^{1/p'} - \mathcal{P}_{n-1}, \quad O_2 = w^{1/p}\mathcal{P}_{n-1}w^{-1/p} - \mathcal{P}_{n-1},$$

имеем

$$F = w^{1/p}z^n - O_1F + O_2F$$

По дуальности замачаем, что

$$\|w^{-1/p'}Hw^{1/p'} - H\|_{p,p} = \|w^{1/p'}Hw^{-1/p'} - H\|_{p',p'} \lesssim \mathbf{M}(p')\sqrt{\epsilon},$$

где последнее неравенство следует из Теоремы 4.2 Дополнения А. Из (2.4) получаем $\|O_1\|_{p,p} \lesssim \mathbf{M}(p')\sqrt{\epsilon}$. Теперь, рассмотрим O_2. Снова, используя дуальность, получаем

$$\|w^{1/p}Hw^{-1/p} - H\|_{p,p} = \|w_1^{1/p'}Hw_1^{-1/p'} - H\|_{p',p'} \lesssim \mathbf{M}(p')\sqrt{\epsilon(p'-1)},$$

где $w_1 = w^{-p'/p}$. Здесь мы опять использовали Теорему 4.2, вместе с неравенством

$$[w_1]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1} \leqslant [w]_{A_{p'}}^{p'-1} \leqslant 1 + C\epsilon(p'-1)$$

(полученным из (4.1)). Имеем $\|O_2\|_{p,p} \lesssim \mathbf{M}(p')\sqrt{\epsilon(p'-1)}$, и принцип сжимающих отображений доказывает (3.1). Для доказательства (3.2) нам только нужно использовать Лемму 4.2 из Дополнения А. ■

Замечание 3.2. Следует отметить, что полученная нами теорема существенным образом использует малость параметра ϵ. Интересной задачей представляется перенос полученных результатов на произвольные ϵ. Весьма вероятно также и то, что оценки в теореме могут быть сеьёзно улучшены.

Эту заметку мы хотели бы завершить обсуждением одной открытой задачи, которая непосредственно связана с оценками, полученными выше.

Для многочленов ϕ_n по мере σ введем следующую максимальную функцию:

$$m(\theta) = \sup_n |\phi_n(e^{i\theta}, \sigma)|.$$

Вопрос 1. Предположим, что σ – мера Сегё (см. (1.12)). Верно ли, что $m(\theta)$ конечна для почти всех θ (по мере Лебега)?

Эта задача хорошо известна в теории Сегё. В качестве промежуточной задачи мы можем предложить также

Вопрос 2. Верно ли, что $m(\theta)$ конечна для абсолютно непрерывных мер σ, заданных весом w, который удовлетворяет

$$\|w - 1\|_\infty < \epsilon$$

при достаточно малом ϵ?

Один из возможных методов решения состоит в изучении следующих операторов:

$$\mathcal{P}_n^{(\mu)} = \mathcal{P}_n \mu,\ (\mathcal{P}_n^{(\mu)})^j, \quad \mu = w - 1,$$

и максимальных функций

$$\sup_n |((\mathcal{P}_n^{(\mu)})^j)1|$$

для $j \in \mathbb{N}$.

4. Дополнение А: некоторые результаты об A_p-классах

Сначала напомним замечательное свойство A_p-классов, так называемое, обратное неравенство Гёльдера для A_p-характеристик: если $1 < p_1 < p_2 < \infty$, то

$$[w]_{A_{p_2}} \leqslant [w]_{A_{p_1}}. \tag{4.1}$$

Действительно, заметим, что для любой дуги J, имеем

$$\left(\langle w^{-\frac{1}{p_2-1}} \rangle_J\right)^{p_2-1} \leqslant \left(\langle w^{-\frac{1}{p_1-1}} \rangle_J\right)^{p_1-1}$$

по неравенству Гёльдера, примененному к функции $w^{-\frac{1}{p_2-1}}$ с показателем $\frac{p_2-1}{p_1-1} > 1$.

Нам потребуется следующий важный результат В.И. Васюнина [26]. Возьмем $q \in (1, \infty)$ и рассмотрим функцию $f(\xi) = (1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{q}\right)^{-q}$ на $(-\infty,1]$, и пусть $u_q^{\pm}(x)$ будет ее обращением, т.е.

$$u_q^{+} : [0,1] \to [0,1], \quad u_q^{-} : [0,1] \to [-\infty,0].$$

Для $\alpha > 1$ определим

$$s_q^{\pm}(\alpha) = u_q^{\pm}(\alpha^{-1}).$$

Зафиксируем $q \in (1,2)$ и положим $\epsilon = q - 1$. Имеем для $\alpha - 1 < C_1\epsilon$

$$s_q^{\pm}(\alpha) = \mp\sqrt{\frac{2(\alpha-1)}{\epsilon}}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{2(\alpha-1)}{\epsilon}}\right)\right).$$

Определим $\gamma(q,t) = (qt - t + 1)/q$. Справедлива

Теорема 4.1. (Васюнин, [26]) *Если $1 < q < \infty$ и $[w]_{A_q} \leqslant \alpha$, то*

$$C_{\min}(q,t,\alpha)\langle w\rangle_J^t \leqslant \langle w^t\rangle_J \leqslant C_{\max}(q,t,\alpha)\langle w\rangle_J^t$$

для любой дуги J.

Причем, в [26] точные константы $C_{\max}(q,t,\alpha)$ и $C_{\min}(q,t,\alpha)$ были найдены в явном виде. Нам понадобится только формула для $C_{\max}$:

$$C_{\max}(q,t,\alpha) = \begin{cases} +\infty, & t \in \left(-\infty, \frac{q-s^-}{s^-(q-1)}\right] \cup \left[\frac{q-s^+}{s^+(q-1)}, \infty\right) \\ \alpha^{(1-t)/q}\frac{(1-s^+)^\gamma}{1-\gamma s^+}, & t \in \left[-\frac{1}{q-1}, 0\right] \cup \left[1, \frac{q-s^+}{s^+(q-1)}\right) \\ \alpha^{(1-t)/q}\frac{(1-s^-)^\gamma}{1-\gamma s^-}, & t \in \left(\frac{q-s^-}{s^-(q-1)}, -\frac{1}{q-1}\right] \\ 1, & t \in [0,1] \end{cases}. \qquad (4.2)$$

Из Теоремы 4.1 и явного вида (4.2) константы $C_{\max}(q,t,\alpha)$ получаем

Следствие 4.1. *Для всех $q = 1 + \epsilon \in (1,2]$, имеем*

$$[w]_{A_q} \leqslant 1 + \delta \Longrightarrow [w^T]_{A_q} \leqslant 2,$$

если $\delta < C\epsilon$ и $1 < T < T_0 = c\sqrt{\frac{\epsilon}{\delta}}$. Здесь c и C – некоторые абсолютные константы.

Доказательство. Действительно, имеем

$$\sup_J\left(\langle w^T\rangle_J \langle w^{T/(1-q)}\rangle_J^{q-1}\right) \leqslant C_{\max}^{q-1}(q, T/(1-q), 1+\delta)C_{\max}(q, T, 1+\delta).$$

Выбирая $T_0 = c\sqrt{\frac{\epsilon}{\delta}}$ с достаточно малой константой c, получаем $[w^T]_{A_q} \leq 2$ с учетом того, что $\delta < C\epsilon$. ■

Из Следствия на стр. 53 работы [26] также сразу вытекает полезная

Лемма 4.1. *Если* $[w]_{A_2} = 1+\delta$ *и* $\delta < 1$*, тогда*

$$[w]_{A_{1+t\sqrt{\delta}}} \leqslant 1 + O(\frac{\sqrt{\delta}}{t}), \quad t_0 \leqslant t \leq 0.5\delta^{-1/2}.$$

Теперь мы можем перейти к основному техническому результату, используемому нами в доказательстве Теоремы 3.1. Справедлива

Теорема 4.2. *Если* $q \in (1{,}2]$ *и* $[w]_{A_q} = 1+\delta$*, тогда*

$$\|w^{1/q} H w^{-1/q} - H\|_{q,q} \lesssim \sqrt{\delta}\mathbf{M}(q), \quad \mathbf{M}(q) = \frac{\mathbf{A}(q)}{\sqrt{q-1}} + \frac{1}{(q-1)^{2.5}}$$

при условии $\delta < \delta_0(q) \sim \mathbf{M}^{-2}(q)$.

Доказательство. Следуя [15], полагаем $w_0 = w^T$, где T достаточно велико и будет выбрано позднее, что бы выполнялось $[w_0]_{A_q} \leqslant 2$. Далее, справедливо $[\log w_0]_{BMO} \lesssim 1$ ([16], Теорема 3). Очевидно, также мы имеем $w = w_0^{1/T}$.

Теперь рассмотрим операторо-значную функцию

$$F(z) = w_0^{z/q} H w_0^{-z/q} - H,$$

которая аналитична в $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. Для ее производной имеем

$$\partial_\xi F(i\xi) = iq^{-1} w_0^{i\xi/q} [H, \log w_0] w_0^{-i\xi/q}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

и, следовательно,

$$\|F(i\xi)\|_{q,q} \lesssim \begin{cases} \mathbf{B}(q)|\xi| \cdot [\log w_0]_{BMO}, & |\xi| < 1 \\ \mathbf{C}(q), & |\xi| > 1 \end{cases}$$

Также мы имеем

$$\|F(1+i\xi)\|_{q,q} \leqslant \mathbf{A}(q) + \mathbf{C}(q)$$

из стандартных оценок для операторов Кальдерона-Зигмунда. Следовательно, для функции

$$\widehat{F}(z) = \frac{F(z)}{z}$$

имеем

$$\|\widehat{F}(i\xi)\|_{q,q} \lesssim \frac{\mathbf{B}(q)[\log w_0]_{BMO} + \mathbf{C}(q)}{|\xi|+1}, \quad \|\widehat{F}(1+i\xi)\|_{q,q} \leq \frac{\mathbf{A}(q) + \mathbf{C}(q)}{(1+|\xi|)}$$

и также

$$\|\widehat{F}(\xi)\|_{q,q} \lesssim |\xi|^{-1}, \quad \operatorname{Im} \xi > 1.$$

Для заданных $\|f_1\|_q = 1, \|f_2\|_{q'} = 1$ имеем по принципу максимума модуля для аналитической функции $h(z) = \langle \widehat{F}(z) f_1, f_2 \rangle$:

$$|h(T^{-1})| \lesssim \max\Big(\mathbf{B}(q)[\log w_0]_{BMO} + \mathbf{C}(q), \mathbf{A}(q) + \mathbf{C}(q)\Big),$$

что есть не что иное, как

$$|\langle (w^{1/q} H w^{-1/q} - H) f_1, f_2 \rangle| \lesssim T^{-1} \max\Big(\mathbf{B}(q)[\log w_0]_{BMO} + \mathbf{C}(q), \mathbf{A}(q) + \mathbf{C}(q)\Big).$$

Так как $[\log w_0]_{BMO} \lesssim 1$, получаем

$$\|w^{1/q} H w^{-1/q} - H\|_{q,q} \lesssim \frac{\mathbf{A}(q) + (q-1)^{-2}}{T}$$

из двойственности. Доказательство завершается применением Следствия 4.1. ■

Лемма 4.2. *Пусть* $p' \in (1{,}2)$, $\deg Q = n$, $w \in A_{p'}$, $\|w\|_{L^1(\mathbb{T})} \sim 1$ *и*

$$\int_{\mathbb{T}} |Q|^p w dx \leqslant C.$$

Тогда

$$\|Q\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant C(p') n^{\frac{1}{p-1}} = C(p', [w]_{A_{p'}}) n^{p'-1}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}_n$ – ядро Валле-Пусена, тогда имеем

$$Q = \mathcal{V}_n * Q, \quad \|Q\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \lesssim \|Q w^{1/p}\|_p \|\mathcal{E}_n w^{-1/p}\|_{p'},$$

где $\mathcal{E}_n$ – ядро Пуассона. (Так как ядро Пуассона мажорирует ядро Валле-Пусена). В свою очередь, про ядро Пуассона известно, что

$$\mathcal{E}_n \lesssim n, \quad |x| < 1/n; \quad \mathcal{E}_n \lesssim x^{-2} n^{-1}, \quad |x| < 1/n. \tag{4.4}$$

Убедимся сперва, что

$$\int_0^{1/m} w^{-\frac{1}{p-1}} dx \lesssim m^{-(p^2-2p)/(p^2-2p+1)}. \tag{4.5}$$

Действительно,

$$\int_{\mathbb{T}} w^{-(p-1)} dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}} w dx \sim 1.$$

По неравенству Гёльдера имеем

$$\int_0^{1/m} w^{-1/(p-1)}dx \leqslant C\left(\int w^{-(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{(p-1)^2}} m^{-(p^2-2p)/(p^2-2p+1)}$$

откуда следует (4.5).

Теперь мы можем завершить доказательство оценки (4.3). Пусть $N = [\log_2 n]$, тогда (4.4) дает

$$\int_0^1 (\mathcal{E}_n)^{p'} w^{-p'/p}dx \lesssim n^{p'}\int_0^{1/n} w^{-p'/p}dx + \sum_{j=1}^N \int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}} (n^{-1}x^{-2})^{p'} w^{-p'/p}dx \lesssim$$

$$n^{p'-\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}} + \sum_{j=1}^N 2^{(2j-N)p'}\int_0^{2^{-j}} w^{-\frac{1}{p-1}}dx.$$

Применяя (4.5) к последнему интегралу, имеем

$$\int (\mathcal{E}_n)^{p'} w^{-p'/p}dx \lesssim n^{p'-\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}} + 2^{-Np'}\sum_{j=1}^N 2^{j\left(2p'-\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\right)} \lesssim n^{\frac{p}{(p-1)^2}},$$

так как

$$2p' - \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = p^2/(p-1)^2 > 0$$

и

$$\sum_{j=1}^N q^j \sim q^N, \quad q > 1$$

где $q = 2^{p^2/(p-1)^2}$. ■

Замечание 3.1. Обратим внимание, что $w = 1$ дает

$$\|\mathcal{E}_n w^{-1/p}\|_{p'} \sim n^{1/p}$$

и показатель асимптотически тот же самый для больших p.

5. Дополнение Б: Верхняя оценка для $\mathbf{B}(p)$

Нам нужна следующяя лемма.

Лемма 5.1. *Для $p \in [2, \infty)$ имеем*

$$\mathbf{B}(p) \leqslant Cp^2.$$

Доказательство. Для полноты изложения мы приведем здесь доказательство из [6]. Предположим $[w]_{BMO} = 1$. Учитывая двойственность, достаточно доказать, что

$$\mathbf{B}(p) \leqslant C(p-1)^{-2}, \quad p \in (1{,}2]. \tag{5.1}$$

Мы будем интерполировать между двумя оценками:

$$\|[H,w]\|_{2,2} \le C \tag{5.2}$$

и (см. [17])

$$|\{x : |([H,w]f)(x)| > \alpha\}| \le C \int_{\mathbb{T}} \frac{|f(t)|}{\alpha} \left(1 + \log^{+}\left(\frac{|f(t)|}{\alpha}\right)\right) dt. \tag{5.3}$$

Для заданной функции f, обозначим $\lambda_f(t) = |\{x : |f(x)| > t\}|, t \geqslant 0$. Возьмем $A > 0$ и рассмотрим $f_A = f \cdot \chi_{|f| \leqslant A} + A \cdot \operatorname{sgn} f \cdot \chi_{|f|>A}$, $g_A = f - f_A$.

Пусть $T = [H, w]$. Тогда

$$\|Tf\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_{Tf}(t) dt \leqslant$$

$$p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_{Tf_A}(t/2) dt + p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_{Tg_A}(t/2) dt = I_1 + I_2.$$

Положим $A = t$. Из неравенства Чебышева и (5.2), получим

$$I_1 \lesssim \int_0^\infty t^{p-3} \|f_A\|_2^2 dt = 2 \int_0^\infty t^{p-3} \int_0^A \xi \lambda_f(\xi) d\xi dt \lesssim$$

$$(2-p)^{-1} \int_0^\infty \xi^{p-1} \lambda_f(\xi) d\xi \lesssim (2-p)^{-1} \|f\|_p^p.$$

Для I_2 мы используем (5.3)

$$I_2 \lesssim -\int_0^\infty t^{p-1} \int_0^\infty \frac{\xi}{t} \left(1 + \log^{+} \frac{\xi}{t}\right) d\lambda_{g_A}(\xi) \lesssim$$

$$\|f\|_p^p + \int_0^\infty t^{p-1} \int_{2t}^\infty t^{-1} \Big(1 + \log^{+}((\tau - t)/t)\Big) \lambda_f(\tau) d\tau \lesssim$$

$$\|f\|_p^p \int_0^1 \xi^{p-2} \left(1 + \log^{+} \frac{1-\xi}{\xi}\right) d\xi.$$

Наконец, получаем

$$\int_0^{1/2} \xi^{p-2} \left(1 + \log^{+} \frac{1-\xi}{\xi}\right) d\xi \lesssim \int_2^\infty u^{-p} \log u du \lesssim \int_0^\infty e^{-\delta t} t dt \lesssim \delta^{-2}$$

и полагаем $\delta = p - 1$. ■

Список литературы

[1] M. U. Ambroladze, On the possible rate of growth of polynomials that are orthogonal with a continuous positive weight (Russian), Mat. Sb. 182 (1991), no. 3, 332–353; English translation in: Math. USSR-Sb. 72 (1992), no. 2, 311–331.

[2] A. Aptekarev, S. Denisov, D. Tulyakov, On a problem by Steklov, submitted.

[3] А. И. Аптекарев, В. С. Буяров, И. С. Дегеза, Асимптотическое поведение L^p-норм и энтропии для общих ортогональных многочленов, Матем. сб., 185:8 (1994), 3-30; English translation in: Russian Acad. Sci. Sb. Math., 82:2, (1995), 373–395.

[4] S. Bernstein, Sur les polynomes orthogonaux relatifs a un segment fini. Journal de Mathematiques, 9, vol.9, 1930; pp. 127–177; vol.10 (1931), pp. 219–286.

[5] S. Denisov, F. Nazarov, Polynomials orthonormal on the unit circle: new upper and lower bounds, preprint.

[6] S. Denisov, K. Rush, Orthogonal polynomials on the circle for the weight w satisfying conditions: w,1/w in BMO(T), arXiv:1601.03367

[7] R. Duran, F. Lopez Garcia, Solutions of the divergence and analysis of the Stokes equations in planar Hölder-α domains. Math. Models Methods Appl. Sci. 20 (2010), no. 1, 95–120.

[8] Ya. L. Geronimus, Some estimates of orthogonal polynomials and the problem of Steklov. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 236 (1977), no. 1, 14–17.

[9] Ya. L. Geronimus, The relation between the order of growth of orthonormal polynomials and their weight function. Mat. Sb. (N.S.) 61 (103), 1963, 65–79.

[10] Ya. L. Geronimus, On a conjecture of V. A. Steklov. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 142, 1962, 507–509.

[11] Я. Л. Геронимус, Многочлены ортогональные на окружности и на интервале, ГИФМЛ, Москва, 1958; English translation: International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. 18 Pergamon Press, New York-Oxford-London- Paris, 1960.

[12] B. L. Golinskii, The problem of V. A. Steklov in the theory of orthogonal polynomials. Mat. Zametki, 15 (1974), 21–32.

[13] A. Lerner, F. Nazarov, Intititive dyadic calculus: the basics. Lecture notes, http://arxiv.org/abs/1508.05639.

[14] P. Nevai, Y. Guang Shi, Notes on Steklov's Conjecture in L^p and on Divergence of Lagrange Interpolation in L^p, Journal of Approximation Theory, 90:1 (1997), 147

[15] N. Pattakos, A. Volberg, The Muckenhoupt A_∞ class as a metric space and continuity of weighted estimates. Math. Res. Lett. 19 (2012), no. 2, 499–510.

[16] N. Nikolaos, A. Volberg, Continuity of weighted estimates in A_p norm. Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), no. 8, 2783–2790.

[17] C. Perez, Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. J. Funct. Anal. 128 (1995), no. 1, 163–185.

[18] S. K. Pichorides, On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov. Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, II. Studia Math. 44 (1972), 165–179.

[19] E. A. Rahmanov, On Steklov's conjecture in the theory of orthogonal polynomials, Matem. Sb., 1979, 108(150), 581–608; English translation in: Math. USSR, Sb., 1980, 36, 549–575.

[20] E. A. Rahmanov, Estimates of the growth of orthogonal polynomials whose weight is bounded away from zero, Matem. Sb., 1981, 114(156):2, 269–298; English translation in: Math. USSR, Sb., 1982, 42, 237–263.

[21] B. Simon, Orthogonal polynomials on the unit circle, volumes 1 and 2, AMS 2005.

[22] E. Stein, Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, 1993.

[23] V. A. Steklov, Une methode de la solution du probleme de development des fonctions en series de polynomes de Tchebysheff independante de la theorie de fermeture, Izv. Rus. Ac. Sci., 1921, 281–302, 303–326.

[24] P. K. Suetin, V. A. Steklov's problem in the theory of orthogonal polynomials, Itogi Nauki i Tech. Mat. Anal., VINITI, 1977, 15, 5–82; English translation in: Journal of Soviet Mathematics, 1979, 12(6), 631–682.

[25] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, Providence RI, 1975 (fourth edition).

[26] V. I. Vasyunin, The exact constant in the inverse Hölder inequality for Muckenhoupt weights. (Russian) Algebra i Analiz 15 (2003), no. 1, 73–117; translation in St. Petersburg Math. J. 15 (2004), no. 1, 49–79.

Alexander I. Aptekarev *(aptekaa@keldysh.ru)*
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation

Sergey A. Denisov *(denissov@math.wisc.edu)*
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation
and
Department of Mathematics,
University of Wisconsin-Madison,
480 Lincoln Dr., Madison, WI 53706, USA