ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Зверяев Е. М.

Конструктивная теория тонких упругих оболочек

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зверяев Е. М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 33. 25 с. doi:10.20948/prepr-2016-33
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Е.М. Зверяев

Конструктивная теория тонких упругих оболочек

Москва — 2016

Зверяев Е.М.

Конструктивная теория тонких упругих оболочек

Задача построения уравнений теории оболочек решается так, как это принято в математической физике. Трехмерные уравнения в криволинейных координатах приводятся к безразмерному виду, позволяющему выделить малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки. Шесть граничных условий на лицевых поверхностях определяют три нетангенциальных напряжения по заданным поверхностным нагрузкам. Тождественными преобразованиями уравнения приводятся к виду, позволяющему в соответствии с итерационной трактовкой полуобратного метода Сен-Венана по заданной части напряжений и перемещений вычислить остальные неизвестные.

Ключевые слова: теория оболочек, метод Сен-Венана, принцип сжатых отображений, итерации, дополнение Тимошенко-Рейсснера

Zverayaev (Zveriaev) Evgeny Mikhailovich

Constructive theory of thin elastic shell

The problem of the shell theory equations is solved in general way for the mathematical physics. The 3D equations in the curvilinear coordinates transform to the dimensionless form permitting the small characterizing allocate the shell thinness parameter. Six boundary conditions on the face surfaces determine the three non-tangential strains according to the given surface load. The identity transformation of the equations reduces them to the form permitting determine the rest unknowns after the initially appointed displacements and strains in concordance with the iteration treat of the semi-invers Sent-Venan method.

Key words: shell theory, Sent-Venan method, mapping contraction principle, iterations, Timoshenko-Reissner complement

Оглавление

1. Введение

Под теорией оболочек понимают теорию, описывающую напряженно-деформированное состояние трехмерного тела – оболочки – двумерными уравнениями в системе координат на срединной поверхности оболочки. Классическая линейная теория оболочек основана на следующих предположениях:

– толщина оболочки $2h^*$ мала по сравнению с характерным радиусом кривизны R срединной поверхности;

– компоненты тензора напряжения, нормальные к срединной поверхности оболочки, малы по сравнению с другими компонентами;

– нормали к недеформированной поверхности оболочки остаются нормалями к деформированной поверхности и не деформируются.

Предпосылками к построению теории оболочек являются установленные ранее теории изгиба стержня и пластины. Если считается, что теория изгиба стержня достаточно убедительно построена в сопротивлении материалов, теория пластин с самого начала строилась в рамках представлений теории упругости. Исторический обзор развития классических и неклассических методов развития теорий тонкостенных систем дан в [1]. Сначала Коши и Пуассон для сведения трехмерной задачи к двумерной предложили метод степенных рядов при рассмотрении статики и динамики плоских и искривленных по цилиндрической поверхности пластин. Этот метод, в частности, был применен Н.А. Кильчевским [2], который пришел к выводу, что задача приведения не имеет единственного решения. Сен-Венан отдавал предпочтение методам составления основной системы уравнений теории пластин по способу Кирхгофа, основанному на упрощающих гипотезах. Теория Кирхгофа была впоследствии распространена А. Лявом на теорию оболочек [3]. Теория Кирхгофа-Лява основывается на известном предположении, что нормаль к недеформированной срединной поверхности оболочки остается нормальной к ней и после деформации. Эта гипотеза дополняется предположением, что отрезок нормали к срединной поверхности, заключенный внутри оболочки, не изменяет своей длины при ее деформации. Гипотезу Кирхгофа-Лява обычно называют гипотезой прямых и неизменяемых нормалей. Кроме того, предполагается, что нетангенциальные напряжения малы по сравнению с тангенциальными и ими можно пренебречь. В работе В. Новожилова и Р. Финкельштейна [4] произведена попытка оценки погрешности, вносимой в уравнения теории оболочек гипотезами Кирхгофа-Лява. Было показано, что эта погрешность имеет порядок $\varepsilon = h^*/R$, где h^* – толщина оболочки, R – некоторый характерный радиус срединной поверхности оболочки. Однако влияние этой работы на улучшение теории не оказалось конструктивным. Позже Койтер [5] подтвердил эти оценки и ввел понятие о согласованной теории, когда все уравнения записаны с одинаковой степенью точности. В теориях оболочек типа Лява [3, 6-9] принимается условие, что отношение γ/R (γ – размерная координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности оболочки) мало по сравнению с единицей в выражениях для напряжений и деформаций. Некоторые из авторов оставляют члены порядка γ^2/R^2, другие частично или полностью отказываются от гипотез недеформируемости нормали. При этом считается, что различие отдельных подходов заключено именно в формулировке зависимостей между напряжениями и деформациями. Позднее оценки [4] были дополнены оценками погрешностей в соотношениях упругости [10, 11], т.к. предполагалось [9], что уравнения статики оболочки и соотношения деформации-перемещения если и не считать точными, но можно считать более точными, чем с оценкой γ/R. Однако вопрос о погрешностях гипотез типа Кирхгофа-Лява и соотношениях упругости в теории оболочек не нашел исчерпывающего и обоснованного ответа. Различные уточненные теории, несмотря на их значимость, также не являются до конца последовательными [1].

Вопрос о количестве и смысле краевых условий в теории оболочек также как и в теории пластин не имеет удовлетворительного объяснения, несмотря на большое количество работ на эту тему [1]. Н.А. Кильчевский даже выдвинул предположение, что невозможность удовлетворить всем краевым условиям первой или второй краевой задачи теории оболочек приводит к возникновению представления о наличии некоторого внутреннего противоречия в теории в целом [2].

Потребность в уточненных теориях связана с несколькими причинами. Во-первых, уточнение классической теории требуется для более полного понимания самой классической теории оболочек. Существует мнение, что настоящее понимание теории возникает после того, как становятся видны ее обобщения. Уточненные теории оболочек позволяют лучшим образом охарактеризовать погрешность классической теории. Построение уточненных теорий является более сложной задачей, чем построение классической модели. Классическая теория учитывает как сказано в [1] "грубые" эффекты или медленно меняющиеся напряженные состояния [9], и для того чтобы разобраться в них зачастую достаточно физической интуиции. В уточненных теориях включаются в рассмотрение малые эффекты, и построение теорий последовательных в смысле учёта всех малых одного порядка крайне трудно сделать, руководствуясь только физической интуицией и не располагая регулярными методами. Классическая теория Кирхгофа-Лява определяет кинематику на краю оболочки через четыре обобщенных перемещения и четыре обобщенных силы, тогда как различные ее модификации (теории типа Рейсснера-Тимошенко) – через пять. При этом предполагается, что тангенциальные перемещения изменяются в направлении нормали по линейному закону, а нормальные перемещения одинаковы для всех точек на одной нормали. Эти теории позволяют выполнить все условия на торцевых поверхностях пластины и оболочки, оставляя в силе положение, что во всех тех случаях, когда можно применять двумерную теорию оболочек, нетангенциальные напряжения существенно меньше тангенциальных и, как правило, считается достаточно вычислить только последние. Это вступает в противоречие с тем, что граничные условия на лицевых поверхностях формулируются только для нетангенциальных напряжений и они не выполняются. Деформированное состояние оболочки, построенное путем осреднения уравнений теории упругости, не удовлетворяет, как считается во второстепенных слагаемых, закону парности касательных напряжений. В результате получается шестое уравнение равновесия, смысл которого не удается объяснить, и его отбрасывают.

2. Исходные трехмерные уравнения

Положение точки тела определяется тремя криволинейными ортогональными координатами $\alpha_i, (i=1,2,3)$, которые будем считать безразмерными. Примем, что сплошное упругое тело в направлении α_3 ограничено двумя равноотстоящими на величину друг от друга лицевыми поверхностями, образуя оболочку постоянной толщины, которую обозначим $2h^*$. Срединную поверхность оболочки примем за основную неподвижную координатную поверхность. Координаты α_1, α_2 являются криволинейными ортогональными координатами срединной поверхности оболочки и представляют собой линии главных кривизн срединной поверхности. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид: $ds^2 = H_1^{*2} d\alpha_1^2 + H_2^{*2} d\alpha_2^2$, где коэффициенты H_1^*, H_2^* представляют собой функции координат α_1, α_2 и являются размерными коэффициентами Ламе. Здесь и в дальнейшем звездочкой отмечены те размерные величины, которые будут приведены к безразмерному виду. Координата α_3 отмеряет расстояние по нормали к срединной поверхности до рассматриваемой точки. В квадратичной форме

$$ds^2 = H_1^{*2} d\alpha_1^2 + H_2^{*2} d\alpha_2^2 + H_3^{*2} d\alpha_3^2$$

коэффициент H_3^* для всех точек тела имеет постоянное значение. Два других коэффициента выражаются через параметры срединной поверхности и расстояние $H_3^* \alpha_3$ по нормали от срединной поверхности до рассматриваемой точки

$$H_1^* = A_1^* \left(1 + \frac{H_3^* \alpha_3}{R_1^*} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{2.1}$$

Здесь $A_1^* = A_1^*(\alpha_1, \alpha_2)$ $(1 \leftrightarrow 2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, отнесенной к линиям главных кривизн, R_1^*, R_2^* – радиусы главных кривизн. Символы $(1 \leftrightarrow 2)$, стоящие после определенных уравнений, указывают, что уравнений подобного вида должно быть два: второе получается круговой заменой указанных символов.

Уравнения равновесия в принятой системе координат имеют вид [3, 6]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}H_2^*H_3^*\sigma_{11}^* + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}H_1^*H_3^*\sigma_{12}^* + \frac{\partial}{\partial\alpha_3}H_1^*H_2^*\sigma_{13}^* -$$
$$-H_3^*\frac{\partial H_2^*}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}^* - H_2^*\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_1}\sigma_{33}^* + H_3^*\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}^* + H_2^*\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_3}\sigma_{13}^* = 0 \quad (1\leftrightarrow 2)$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}H_1^*H_2^*\sigma_{33}^* + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}H_3^*H_2^*\sigma_{13}^* + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}H_3^*H_1^*\sigma_{23}^* - \tag{2.2}$$
$$-H_2^*\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_3}\sigma_{11}^* - H_1^*\frac{\partial H_2^*}{\partial\alpha_3}\sigma_{22}^* + H_2^*\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_1}\sigma_{13}^* + H_1^*\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_2}\sigma_{23}^* = 0,$$

где $\sigma_{ij}^*,(i,\ j=1,2,3)$ – размерные напряжения. Касательные напряжения удовлетворяют закону парности.

Размерное перемещение некоторой точки, имеющей до деформации координаты $\alpha_i,(i=1,2,3)$, определяются проекциями $u_i^*,(i=1,2,3)$ на криволинейные оси координат. Компоненты деформации через перемещения определяются формулами:

$$e_1 = \frac{1}{H_1^*}\frac{\partial u_1^*}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{H_1^*H_2^*}\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_2}u_2^* + \frac{1}{H_1^*H_3^*}\frac{\partial H_1^*}{\partial\alpha_3}u_3^* \quad (1\leftrightarrow 2);$$
$$e_3 = \frac{1}{H_3^*}\frac{\partial u_3^*}{\partial\alpha_3} + \frac{1}{H_3^*H_1^*}\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_1}u_1^* + \frac{1}{H_3^*H_2^*}\frac{\partial H_3^*}{\partial\alpha_2}u_2^*;$$
$$e_{12} = \frac{H_1^*}{H_2^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{H_1^*}u_1^* + \frac{H_2^*}{H_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{H_2^*}u_2^*; \tag{2.3}$$
$$e_{13} = \frac{H_3^*}{H_1^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{u_3^*}{H_3^*} + \frac{H_1^*}{H_3^*}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\frac{u_1^*}{H_1} \quad (1\leftrightarrow 2).$$

Введем безразмерные коэффициенты

$$H_1 = H_1^*/R \ (1\leftrightarrow 2),\ A_1 = A_1^*/R \ (1\leftrightarrow 2),$$

в которых под величиной R как единицей измерения понимается некоторый характерный радиус срединной поверхности, безразмерные перемещения $u_1 = u_1^*/h^* \ (1\leftrightarrow 2)$, $w = u_3^*/h^*$, вдоль осей $\alpha_i,(i=1,2,3)$ соответственно, безразмерные напряжения $\sigma_i = \sigma_{ii}^*/E$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*/E$, $(i,\ j=1\div 3, i\neq j)$, безразмерные радиусы главных кривизн $R_1 = R_1^*/R \quad (1\leftrightarrow 2)$, и положим $H_3^* = h^*$, $\alpha_3 = z$. Подставив эти величины в соотношение (2.1), запишем

$$H_1 = A_1\left(1+\varepsilon\frac{z}{R_1}\right) \quad (1\leftrightarrow 2), \tag{2.4}$$

откуда получаем для производных по z

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} = \varepsilon\frac{A_1}{R_1} \quad (1\leftrightarrow 2).$$

Имея в виду, как это принято в литературе, выделение двумерных уравнений из трехмерных с точностью порядка ε по сравнению с величинами порядка единицы, отбросим в формулах (2.4) вторые члены в скобках и будем считать $H_1 = A_1 \; (1 \leftrightarrow 2)$.

С учетом последних соотношений уравнения (2.2), (2.3) проводятся к безразмерным уравнениям следующего вида:

– уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_{13} - \\ -\varepsilon \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_2 + \varepsilon \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} + \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_{13} = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2) \\ \frac{\partial}{\partial z} A_1 A_2 \sigma_3 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \sigma_{13} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \sigma_{32} - \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_1 - \varepsilon \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_2 = 0;\end{gathered} \tag{2.5}$$

– формулы деформации-перемещения, состоящие из формул деформации растяжения (сжатия) и сдвига в тангенциальных плоскостях к срединной поверхности оболочки

$$\begin{gathered}e_1 = \varepsilon \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \varepsilon \frac{1}{R_1} w \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ e_{12} = \varepsilon \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{u_1}{A_1} + \varepsilon \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{u_2}{A_2}, \quad e_3 = \frac{\partial w}{\partial z}\end{gathered} \tag{2.6}$$

и сдвигов в нормальных плоскостях

$$e_{13} = \varepsilon \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + A_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{u_1}{A_1} \quad (1 \leftrightarrow 2). \tag{2.7}$$

Уравнения должны быть дополнены соотношениями упругости, которые в любой системе ортогональных координат имеют один и тот же вид и в принятой здесь безразмерной записи выглядят так:

$$\sigma_i = \lambda (e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma_{ij} = \mu e_{ij} \quad (i \neq j = 1, 2, 3),$$

где $\lambda = \dfrac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \dfrac{1}{2(1+\nu)}$ – безразмерные коэффициенты Ламе, полученные делением размерных на модуль упругости E.

Три первых соотношения упругости, оставив формулы для сдвигов неименными, путем тождественных преобразований можно свести к такой записи:

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_3 \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{ij} = \frac{1}{2(1+\nu)} e_{ij} \quad (i \neq j = 1, 2, 3) \\ e_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_1 + e_2) + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \sigma_3,\end{gathered} \tag{2.8}$$

позволяющей организовать процесс вычисления неизвестных методом простых итераций.

3. Упрощение уравнений для последовательных вычислений

Уравнения равновесия (2.5) с помощью двух первых соотношений упругости (2.8) приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_{13}+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_1}\sigma_{13}-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_3+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_3\right)=$$

$$=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\frac{e_1+\nu e_2}{1-\nu^2}\right)+\varepsilon\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{e_2+\nu e_1}{1-\nu^2}\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_{12}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}\right)\quad(1\leftrightarrow2),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_3-\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}A_1A_2\sigma_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=$$

$$=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_{13}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_2\sigma_{23}+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_1}\frac{e_1+\nu e_2}{1-\nu^2}+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_2}\frac{e_2+\nu e_1}{1-\nu^2}.$$

Будем исходить из предположения, что все компоненты напряженно-деформированного состояния медленно меняются по координате z, чему соответствует асимптотическая оценка оператора $\frac{\partial}{\partial z}\sim1$. Тогда в левой части третьего уравнения можно отбросить одноименный с главным член порядка ε и переписать его так:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_3=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\sigma_{13}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_{23}+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_1}\frac{e_1+\nu e_2}{1-\nu^2}+\varepsilon\frac{A_1A_2}{R_2}\frac{e_2+\nu e_1}{1-\nu^2}.$$

Из него видно, что σ_3 соизмерима с $\varepsilon\sigma_{13}$ или $\varepsilon\left(e_1+\nu e_2\right)$. Но, в левой части первого уравнения можно отбросить член с σ_{13} как малый следующего порядка малости по сравнению с главным и член с σ_3 как величину второго порядка малости, упростив его

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1A_2\sigma_{13}=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\frac{e_1+\nu e_2}{1-\nu^2}\right)+\varepsilon\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\frac{e_2+\nu e_1}{1-\nu^2}\right)-$$

$$-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\sigma_{12}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}\right)\quad(1\leftrightarrow2).$$

Более того, учитывая полученные оценки можно упростить первые три соотношения упругости (2.8), отбросив в них члены с напряжением σ_3, как малые более высокого порядка, и получить такие соотношения упругости

$$\sigma_1=\frac{e_1+\nu e_2}{1-\nu^2}\ (1\leftrightarrow2),\quad e_3=-\frac{\nu}{1-\nu}(e_1+e_2).\tag{3.1}$$

Для дальнейших вычислений запишем уравнения в следующей последовательности:

– два соотношения для сдвигов (2.7), в которых e_{13}, e_{23} выражены через σ_{13}, σ_{23}

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_1}{A_1} = -\varepsilon\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + 2(1+\nu)\frac{1}{A_1}\sigma_{13} \quad (1\leftrightarrow 2); \tag{3.2}$$

– формулы деформации-перемещения для компонент тангенциальной деформации

$$\begin{gathered} e_1 = \varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \varepsilon\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial z}w \quad (1\leftrightarrow 2), \\ e_{12} = \varepsilon\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{u_1}{A_1} + \varepsilon\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{u_2}{A_2}; \end{gathered} \tag{3.3}$$

– три тангенциальных соотношения упругости

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2} \quad (1\leftrightarrow 2), \quad \sigma_{12} = \frac{e_{12}}{2(1+\nu)}, \tag{3.4}$$

в которых два первых взяты упрощенными из (3.1).

– два первых уравнения равновесия, в которых отброшены члены $\varepsilon\sigma_{13}$ как малые по сравнению с главными

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial z}A_1 A_2 \sigma_{13} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial \alpha_1}A_2\sigma_1 - \varepsilon\frac{\partial}{\partial \alpha_2}A_1\sigma_{12} + \\ +\varepsilon\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\sigma_2 - \varepsilon\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\sigma_{12} \quad (1\leftrightarrow 2); \end{gathered} \tag{3.5}$$

– третье уравнение равновесия, в котором напряжения σ_1, σ_2 определены из соотношений (3.1) и напряжение σ_3 отброшено как малое по сравнению с одноименным главным

$$\frac{\partial}{\partial z}A_1 A_2 \sigma_3 = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial \alpha_1}A_2\sigma_{13} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial \alpha_2}A_1\sigma_{23} + \varepsilon\frac{A_1 A_2}{R_1}\sigma_1 + \varepsilon\frac{A_1 A_2}{R_2}\sigma_2; \tag{3.6}$$

– формулы для поперечной деформации растяжения (сжатия) и нетангенциального перемещения

$$e_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_1 + e_2), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e_3. \tag{3.7}$$

Погрешность записанной системы уравнений следует оценивать как ε по сравнению с единицей.

Решение системы уравнений (3.1)-(3.7) будем искать методом простых итераций. Предположим, что в (3.2) перемещение w и касательные напряжения σ_{13}, σ_{23} известны. В этом случае тангенциальные перемещения u_1, u_2 вычисляются путем прямого интегрирования по z. Подставив их и предположенное известным нормальное перемещение w в (3.3), вычисляем тангенциальные деформации e_1, e_2, e_{12}. Уравнения (3.4) позволяют определить тангенциальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$. Уравнения (3.5) дают возможность путем интегрирования по z вычислить неизвестные нетангенциальные напряжения сдвига σ_{13}, σ_{23}, а уравнение (3.6) – нетангенциальное нормальное напряжение σ_3, которое в классической теории оболочек не вычисляется. Последние два соотношения (3.7) позволяют найти также отсутствующие в классической теории поперечную деформацию и перемещение. На этом нулевую итерацию можно считать законченной. Если теперь найденные $w, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ подставить в выражения (3.2), можно вычислить искомые неизвестные в первой итерации и т. д. Однако здесь ограничимся вычислением только нулевой итерации, обеспечивающей асимптотическую точность ε, т.к. уравнения (3.1)-(3.7) записаны с такой же точностью.

Величины начального приближения выберем такими:

$$w = w_{0(0)}(\alpha_1, \alpha_2), \ \sigma_{13} = \tau_{130(0)}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1 \leftrightarrow 2), \tag{3.8}$$

считая поперечное перемещение и касательные напряжения в нулевом приближении не зависящими от поперечной координаты. Для удобства процедуру вычислений разделим в силу линейности задачи на два элементарных: w- и τ-процессы. В w-процессе задаются величины начального приближения

$$w = w_{0(0)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{13} = \sigma_{13(0)} = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2). \tag{3.9}$$

В τ-процессе –

$$w = w_{(0)} = 0, \quad \sigma_{13} = \tau_{130(0)}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1 \leftrightarrow 2). \tag{3.10}$$

Приписанный к нижним индексам ноль в скобках указывает на принадлежность величин к нулевому приближению.

4. Применение *w*-процесса метода простых итераций

Для сведения трехмерных формул, связывающих деформации и перемещения к двумерным В.З. Власов использует так называемые гипотезы прямой и недеформируемой нормали

$$e_3 = 0, \ e_{13} = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2). \tag{4.1}$$

Тогда из уравнений (2.6) и (2.7) следует

$$w^* = w_0^*(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_1^* = -\varepsilon \frac{1}{A_1^*} \frac{\partial w^*}{\partial \alpha_1} z + u_{10}^* \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

где u_{10}^*, u_{20}^* – тангенциальные перемещения точки срединной поверхности. Затем он подставляет это в выражения (2.3) и, используя для коэффициентов формулы (2.1) и раскладывая деформации e_1, e_2, e_{12} в ряды по степеням поперечной координаты $\gamma = H_3^* z$ до второй степени, получает выражения для тангенциальных и нетангенциальных компонент деформации оболочки с точностью до ε^2. Здесь будут получены формулы для деформаций с точностью ε, т.к. в формулах (2.4) отбрасывается второй член в скобках, внося таким образом погрешность порядка ε во все дальнейшие вычисления.

В настоящей работе гипотезы (4.1) можно рассматривать как величины начального приближения w-процесса заданными выражениями (3.9). Вычислять неизвестные будем в следующем порядке. Исходя из величин начального приближения, путем прямого интегрирования из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{u_1}{A_1} = -\varepsilon\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

получаем выражения для перемещений $u_{1(0)}, u_{2(0)}$

$$u_{1(0)} = -\varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_1} z + u_{10}, \tag{4.2}$$

подставив которые в правые части формул деформации-перемещения (3.3), можно написать

$$e_{1(0)} = \varepsilon^2\kappa_{1(0)} z + \varepsilon\varepsilon_{1(0)} \quad (1 \leftrightarrow 2), \qquad e_{12(0)} = \varepsilon^2\tau_{(0)} z + \varepsilon\omega_{(0)},$$

где использованы следующие обозначения:

– компонент нетангенциальной деформации

$$\begin{aligned} \kappa_{1(0)} &= -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_2} \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \tau_{(0)} &= -\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial w_{0(0)}}{\partial \alpha_2}; \end{aligned} \tag{4.3}$$

– и тангенциальной

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1(0)} &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_{10(0)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_{20(0)} + \frac{1}{R_1} w_{0(0)} \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \omega_{(0)} &= \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{u_{10(0)}}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{u_{20(0)}}{A_2}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Величина $w_{0(0)}$ является решением уравнения $e_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$. Первый индекс означает, что величина является решением однородного уравнения, а второй указывает, что это является результатом в нулевом приближении.

С помощью первых двух соотношений упругости (3.4) вычисляем, учитывая последнее равенство в (4.2), тангенциальные напряжения

$$\sigma_{1(0)} = \varepsilon^2 m_{1(0)} z + \varepsilon t_{1(0)} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \sigma_{12(0)} = \varepsilon^2 h_{(0)} z + \varepsilon s_{(0)}, \tag{4.5}$$

в которых

$$t_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{1(0)} + \nu\varepsilon_{2(0)}\right) \quad (1 \leftrightarrow 2), \qquad s_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\omega_{(0)},$$

$$m_{1(0)} = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\kappa_{1(0)} + \nu\kappa_{2(0)}\right) \quad (1 \leftrightarrow 2), \qquad h_{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\tau_{(0)}.$$

Полученные напряжения подставим в уравнения (3.5). Это дает следующие выражения для касательных напряжений

$$\sigma_{13(1)}=\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\varepsilon^2 m_{1(0)}\frac{z^2}{2}+\varepsilon t_{1(0)}z\right)-\right.$$
$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\varepsilon^2 h_{(0)}\frac{z^2}{2}+\varepsilon s_{(0)}z\right)+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\varepsilon^2 m_{2(0)}\frac{z^2}{2}+\varepsilon t_{2(0)}z\right)- \qquad (4.6)$$
$$\left.-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\varepsilon^2 h_{(0)}\frac{z^2}{2}+\varepsilon s_{(0)}z\right)\right]+\tau_{130(0)}\ \ (1\leftrightarrow 2)$$

Здесь $\tau_{130(0)}=\tau_{130(0)}(\alpha_1,\alpha_2)\ \ (1\leftrightarrow 2)$ – произволы интегрирования, определяющие постоянные по толщине составляющие напряжений.

Подставляя эти напряжения вместе с нормальными тангенциальными напряжениями в третье уравнение системы (3.6), вычисляем нормальное нетангенциальное напряжение $\sigma_{3(1)}$ в первом приближении

$$\sigma_{3(1)}=\frac{1}{A_1A_2}\left\{-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\varepsilon^4 m_{1(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{1(0)}\frac{z^2}{2}\right)-\right.\right.$$
$$-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\varepsilon^4 h_{(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 s_{(0)}\frac{z^2}{2}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\varepsilon^4 m_{2(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{2(0)}\frac{z^2}{2}\right)-\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\varepsilon^4 h_{(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 s_{(0)}\frac{z^2}{2}\right)\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(\varepsilon^4 m_{2(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{2(0)}\frac{z^2}{2}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(\varepsilon^4 h_{(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 s_{(0)}\frac{z^2}{2}\right)+ \qquad (4.7)$$
$$\left.+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\left(\varepsilon^4 m_{1(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{1(0)}\frac{z^2}{2}\right)-\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\left(\varepsilon^4 h_{(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 s_{(0)}\frac{z^2}{2}\right)\right]+$$
$$\left.+\frac{A_1A_2}{R_1}\left(\varepsilon^4 m_{1(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{1(0)}\frac{z^2}{2}\right)+\frac{A_1A_2}{R_2}\left(\varepsilon^4 m_{2(0)}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^3 t_{2(0)}\frac{z^2}{2}\right)\right\}-$$
$$-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{13(0)}z-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{23(0)}z+\sigma_{30(0)}.$$

Здесь $\sigma_{30(0)}=\sigma_{30(0)}(\alpha_1,\alpha_2)$ – произвол интегрирования, определяющий постоянную по толщине составляющую напряжения.

С помощью последнего уравнения из (3.7) находим поперечное перемещение в первом приближении

$$w=w_{0(0)}+w_{(1)}=w_{0(0)}-\frac{\nu}{1-\nu}\left[\varepsilon^2\left(\kappa_{1(0)}+\kappa_{2(0)}\right)\frac{z^2}{2}+\varepsilon\left(\varepsilon_{1(0)}+\varepsilon_{2(0)}\right)z\right]. \qquad (4.8)$$

Поскольку поправка $w_{(1)}$ является величиной ε по сравнению с $w_{0(0)}$, она может быть отброшена, и поперечное перемещение будет состоять только из прогиба срединной поверхности.

Соотношения (4.2)-(4.8) дают выражения всех девяти неизвестных трехмерной задачи теории упругости $u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_3, w$ при начальном выборе нетангенциальных касательных напряжений, отсутствующими в нулевом приближении, через 15 неизвестных теории оболочек: перемещения срединной поверхности u_1, u_2, w, нетангенциальные деформации κ_1, κ_2, τ, тангенциальные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$, параметры изгибающих m_1, m_2 и крутящего h моментов и параметры тангенциальных усилий t_1, t_2, s. Также вычислены поперечное нормальное σ_3, касательные σ_{13}, σ_{23} напряжения и установлена зависимость поперечного перемещения w от координаты z, которыми в классической теории пренебрегают. Видно, что напряжение σ_3 имеет порядок ε^4 относительно $m_{1(0)}$, тогда как тангенциальное напряжение – порядок ε^2 относительно той же величины. Это оправдывает пренебрежение величиной σ_3 в первых двух формулах в (3.1) и при выборе величин начального приближения (4.2).

Отметим, что в схеме последовательного вычисления неизвестных

$$\begin{gathered}\left(w_{0(0)}, \sigma_{13(0)}, \sigma_{23(0)}\right) \Rightarrow \left(u_{10(0)}, u_{20(0)}\right) \Rightarrow \left(e_{1(0)}, e_{2(0)}, e_{12(0)}, \varepsilon_{1(0)}, \varepsilon_{2(0)}, \ \omega_{(0)}, \kappa_{1(0)},\right. \\ \left.\kappa_{2(0)}, \tau_{(0)}\right) \Rightarrow \left(\sigma_{1(0)}, \sigma_{2(0)}, \sigma_{12(0)}\right) \Rightarrow \left(\sigma_{13(1)}, \sigma_{23(1)}, \sigma_{3(1)}, w_{(1)}\right) \Rightarrow \cdots\end{gathered} \tag{4.9}$$

можно любую совокупность величин выбрать в качестве величин нулевого приближения и продолжить процесс вычисления остальных.

5. Выполнение граничных условий на лицевых поверхностях оболочки величинами *w*-процесса

На лицевых поверхностях оболочки $z = \pm 1$ надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Примем их такими

$$\begin{aligned} &\sigma_3^* = Z_+^*, \quad \sigma_{13}^* = X_{1+}^*, \quad \sigma_{23}^* = X_{2+}^* \quad \text{при } H_3^* \alpha_3 = h^*; \\ &\sigma_3^* = Z_-^*, \quad \sigma_{13}^* = X_{1-}^*, \quad \sigma_{23}^* = X_{2-}^* \quad \text{при } H_3^* \alpha_3 = -h^*. \end{aligned}$$

В безразмерном виде эти условия записываются так

$$\begin{aligned} &\sigma_3 = Z_+, \quad \sigma_{13} = X_{1+}, \quad \sigma_{23} = X_{2+} \quad \text{при } z = 1; \\ &\sigma_3 = Z_-, \quad \sigma_{13} = X_{1-}, \quad \sigma_{23} = X_{2-} \quad \text{при } z = -1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на модуль упругости E.

Посмотрим, можно ли выполнить эти граничные условия величинами (4.5), (4.6), считая, что они аппроксимируют искомые величины в первом приближении с достаточной точностью

$$\sigma_{13}=\varepsilon^3\frac{1}{A_1A_2}E^w_{1m}\frac{z^2}{2}+\varepsilon^2\frac{1}{A_1A_2}E^w_{1t}z+\tau_{130(0)}\quad(1\leftrightarrow2);$$

$$\begin{aligned}\sigma_3=&-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}B\left(\varepsilon^3\frac{1}{A_1A_2}E^w_{1m}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^2\frac{1}{A_1A_2}E^w_{1t}\frac{z^2}{2}+\tau_{130(0)}z\right)-\\&-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A\left(\varepsilon^3\frac{1}{A_1A_2}E^w_{2m}\frac{z^3}{6}+\varepsilon^2\frac{1}{A_1A_2}E^w_{2t}\frac{z^2}{2}+\tau_{230(0)}z\right)+\\&+\varepsilon^3\left(\frac{m_{1(0)}}{R_1}+\frac{m_{2(0)}}{R_2}\right)\frac{z^2}{2}+\varepsilon^2\left(\frac{t_{1(0)}}{R_1}+\frac{t_{2(0)}}{R_2}\right)z+\sigma_{30(0)},\end{aligned}\tag{5.2}$$

в которых введены обозначения

$$\begin{aligned}E^w_{1m}&=-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2m_{1(0)}-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1h_{(0)}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}m_{2(0)}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}h_{(0)}\quad(1\leftrightarrow2);\\E^w_{1t}&=-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2t_{1(0)}-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_2s_{(0)}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}t_{2(0)}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}s_{(0)}\quad(1\leftrightarrow2).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Подчинение напряжений граничным условиям (5.1) дает пять уравнений с шестью неизвестными $E^w_{1t},E^w_{1m},\tau_{13(0)}\quad(1\leftrightarrow2)$

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2 2E^w_{1t}=A_1A_2\left(X_{1+}-X_{1-}\right)\quad(1\leftrightarrow2)\\&-\varepsilon^4\frac{1}{3}\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_1}E^w_{1m}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}E^w_{2m}\right)-\\&-2\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{130(0)}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{230(0)}\right)+\varepsilon^2 2\left(\frac{t^w_{1(0)}}{R_1}+\frac{t^w_{2(0)}}{R_2}\right)=Z_+-Z_-\\&\varepsilon^3E^w_{1m}+2A_1A_2\tau_{130(0)}=A_1A_2\left(X_{1+}+X_{1-}\right)\quad(1\leftrightarrow2)\end{aligned}\tag{5.4}$$

или с учетом обозначений (5.3) и последних двух уравнений равновесия – с неизвестными $m_{1(0)},t_{1(0)},h_{(0)},s_{(0)},\tau_{13(0)}\quad(1\leftrightarrow2)$

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2 2\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2t_{1(0)}-\frac{\partial}{\partial\alpha_{2\,1}}s_{(0)}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}t_{2(0)}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}s_{(0)}\right)=A_1A_2\left(X_{1+}-X_{1-}\right);\\&-\varepsilon\frac{4}{3}\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{130(0)}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{230(0)}\right)+\varepsilon^2 2\left(\frac{t_{1(0)}}{R_1}+\frac{t_{2(0)}}{R_2}\right)=\\&=Z_+-Z_-+\varepsilon\frac{1}{3}\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_{1+}+X_{1-}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(X_{2+}+X_{2-}\right)\right];\\&\varepsilon^3\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2m_{1(0)}-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1h_{(0)}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}m_{2(0)}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}h_{(0)}\right)+2A_1A_2\tau_{130(0)}=\\&=A_1A_2\left(X_{1+}+X_{1-}\right)\quad(1\leftrightarrow2);\end{aligned}\tag{5.5}$$

и шестое уравнение

$$-\frac{1}{A_1B_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\varepsilon^3\frac{1}{A_1}E_{1t}^{w}-\frac{1}{A_1B_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\varepsilon^3\frac{1}{A_2}E_{2t}^{w}+\varepsilon^3\left(\frac{m_{10}}{R_1}+\frac{m_{20}}{R_2}\right)+2\sigma_{30(0)}=Z_++Z_-,$$

сводящееся к уравнению, определяющему $\sigma_{30(0)}$ – среднее значение напряжения σ_3

$$2\sigma_{30(0)}=Z_++Z_-+\varepsilon^3\frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_{1+}-X_{1-}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(X_{2+}-X_{2-}\right)\right]-\varepsilon^3\left(\frac{m_{1(0)}}{R_1}+\frac{m_{2(0)}}{R_2}\right)$$

Напряжения σ_{13}, и σ_3 из (5.2) можно преобразовать с помощью уравнений (5.4) к более простому виду:

$$\sigma_{13}=\left(X_{1+}+X_{1-}\right)\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\left(X_{1+}-X_{1-}\right)z+\tau_{130(0)}\left(1-z^2\right)\quad\left(1\leftrightarrow2\right);$$

$$\begin{aligned}\sigma_3&=-\frac{1}{2}\left(Z_++Z_-\right)-\\&-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_++X_-\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(Y_++Y_-\right)\right]\frac{z^3}{6}+\\&+\varepsilon\frac{1}{2}\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_{1+}-X_{1-}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(X_{2+}-X_{2-}\right)\right]\frac{1-z^2}{2}-\\&-\varepsilon\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{130(0)}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{230(0)}\right)\left(z-\frac{z^3}{3}\right)+\\&+\varepsilon^2\left(\frac{t_{1(0)}}{R_1}+\frac{t_{2(0)}}{R_2}\right)z+\varepsilon^3\left(\frac{m_{1(0)}}{R_1}+\frac{m_{2(0)}}{R_2}\right)\frac{z^2-1}{2},\end{aligned}\qquad(5.6)$$

из которого хорошо виден закон распределения нетангенциальных напряжений по толщине оболочки. Легко проверить, что напряжения удовлетворяют условиям нагружения на лицевых поверхностях.

6. Сравнение с уравнениями классической теории

В классической теории оболочек в качестве неизвестных вводятся усилия и моменты, определяемые через соответствующие им напряжения интегралами следующего вида [6]:

$$T_1^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_1^*H_2^*d\gamma\quad\left(1\leftrightarrow2\right),\quad S^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_{12}^*H_2^*d\gamma,$$

$$N_1^*=\frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h}\sigma_{13}^*H_2^*d\gamma\quad\left(1\leftrightarrow2\right),$$

$$M_1^* = \frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h} \sigma_1^* H_2^* \gamma d\gamma \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad M_{12}^* = \frac{1}{B^*}\int_{-h}^{h} \sigma_{12}^* H_2^* \gamma d\gamma .$$

Здесь γ – координата, отмеряемая вдоль нормали к срединной поверхности.

Учитывая, что в настоящей работе все вычисления ведутся с точностью ε, последние определения можно переписать так:

$$T_1^* = \int_{-h}^{h} \sigma_1^* d\gamma \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S^* = \int_{-h}^{h} \sigma_{12}^* d\gamma, \quad N_1^* = \int_{-h}^{h} \sigma_{13}^* d\gamma \quad (1 \leftrightarrow 2),$$
$$M_1^* = \int_{-h}^{h} \sigma_1^* \gamma d\gamma \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad M_{12}^* = \int_{-h}^{h} \sigma_{12}^* \gamma d\gamma . \tag{6.1}$$

Введенные таким образом величины должны удовлетворять уравнениям равновесия [6]

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2^* T_1^* - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1^* S_2^* + \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} T_2^* - \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} S_1^* - A_1^* A_2^* \frac{N_1^*}{R_1^*} = A_1^* A_2^* X^*,$$
$$\frac{T_1^*}{R_1^*} + \frac{T_2^*}{R_2^*} - \frac{1}{A_1^* A_2^*}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2^* N_1^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1^* N_2^* \right) = Z_+^* - Z_-^*, \tag{6.2}$$
$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2^* M_1^* - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1^* M_{12}^* + \frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1} M_2^* - \frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2} M_{12}^* - A_1^* A_2^* N_1^* = 0.$$

Усилия и моменты связаны с деформациями соотношениями упругости

$$T_1^* = \frac{2Eh^*}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S^* = \frac{2Eh^*}{2(1+\nu)}\omega,$$
$$M_1^* = \frac{2Eh^{*3}}{3(1-\nu^2)}(\kappa_1^* + \nu\kappa_2^*) \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad M_{12}^* = \frac{3Eh^{*3}}{3(1+\nu)}\tau^* . \tag{6.3}$$

Компоненты деформации определяются выражениями

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1^*}\frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^*}\frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_2} + \frac{w^*}{R_1^*} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \omega = \frac{A_1^*}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{u_1^*}{A_1^*} + \frac{A_2^*}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{u_2^*}{A_2^*},$$

$$\kappa_1^* = \frac{1}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1^*}\frac{\partial w^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^* A_2^{*2}}\frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2}\frac{\partial w^*}{\partial \alpha_2} -$$
$$-\frac{u_1^*}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{R_1^*} - \frac{u_2^*}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{R_1^*} + \frac{w^*}{R_1^{*2}} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\tau^* = -\frac{1}{A_1^* A_2^*}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1^*}\frac{\partial A_1^*}{\partial \alpha_2}\frac{\partial w^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2^*}\frac{\partial A_2^*}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w^*}{\partial \alpha_2} \right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^*} - \frac{1}{R_2^*} \right)\left(\frac{A_1^*}{A_2^*}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{u_1^*}{A_1^*} - \frac{A_2^*}{A_1^*}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{u_2^*}{B^*} \right)$$

либо несущественно отличающимися от этих. Общепризнанно, что тангенциальные перемещения в формулах для нетангенциальных деформаций могут быть отброшены.

Поскольку выведенные в работе уравнения имеют точность ε и записаны в безразмерном виде, приведем уравнения классической теории к безразмерному виду и такой же точности, выразив размерные усилия и моменты через безразмерные параметры. Умножим напряжения (4.5) и (5.6) на модуль упругости E, сделав их размерными, и подставим в (6.1). После интегрирования получаем связь между размерными усилиями и моментами и безразмерными параметрами усилий и моментов

$$\begin{gathered} T_1^* = 2Eh^*\varepsilon t_{1(0)} \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S^* = 2Eh^*\varepsilon s_{(0)}, \\ M_1^* = \frac{2}{3}Eh^{*2}\varepsilon^2 m_{1(0)} \ (1 \leftrightarrow 2), \\ M_{12}^* = \frac{2}{3}Eh^{*2}\varepsilon^2 h_{(0)}, \quad N_1^* = \frac{2}{3}Eh^*\left(X_+ + X_-\right) + \frac{4}{3}Eh^*\tau_{130(0)} \ (1 \leftrightarrow 2), \end{gathered} \tag{6.4}$$

являющимися коэффициентами в законах распределения напряжений (4.5)-(4.7). Если заменить безразмерные параметры в уравнениях (5.5) в соответствии с этими выражениями, получим расхождение только в первых двух уравнениях равновесия в силу наличия в классических уравнениях (6.2) членов $A_1^*A_2^*N_1^*/R_1^* \quad (1 \leftrightarrow 2)$, которые являются малыми порядка ε по сравнению с остальными. При использовании уравнений теории оболочек их принято отбрасывать, т.к. в расчетах они всегда являются пренебрежимо малыми.

Легко проверить совпадение приведенных к размерным величинам формул для компонент деформации (4.3), (4.4) с формулами (6.4), где в формулах компонент нетангенциальной деформации отброшены члены с тангенциальными перемещениями. Соответствие соотношений упругости (4.5) и (6.3) устанавливается с помощью (6.4) таким же путем. Таким образом, выведенные в настоящей работе в результате применения w-процесса выражения искомых неизвестных в первом приближении и выполнения ими граничных условий на лицевых поверхностях оболочки дают уравнения классической теории с точностью до величин порядка ε по сравнению с единицей.

Приведем сводку уравнений и формулы для напряжений и перемещений, выведенной здесь теории, опустив указывающие на процесс и приближение индексы:

– уравнения равновесия

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 2\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2 t_1 - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1 s + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}t_2 - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}s\right) = \\ = A_1A_2\left(X_{1+} - X_{1-}\right) \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ -\varepsilon\frac{4}{3}\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\tau_{13} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\tau_{23}\right) + \varepsilon^2 2\left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2}\right) = \end{gathered} \tag{6.5}$$

$$= Z_{+} - Z_{-} + \varepsilon \frac{1}{3}\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(X_{1+} + X_{1-} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(X_{2+} + X_{2-} \right)\right],$$

$$\varepsilon^3 \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 m_1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 h + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} m_2 - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} h \right) + 2 A_1 A_2 \tau_{13} =$$

$$= A_1 A_2 \left(X_{1+} + X_{1-} \right) \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

– соотношения упругости

$$t_1 = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 \right) \quad (1 \leftrightarrow 2), \qquad s = \frac{1}{2(1+\nu)}\omega,$$

$$m_1 = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\kappa_1 + \nu \kappa_2 \right) \quad (1 \leftrightarrow 2), \qquad h = \frac{1}{2(1+\nu)}\tau;$$

– компоненты тангенциальной деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{R_1} w \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad \omega = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{u_2}{A_2};$$

– компоненты нетангенциальной деформации

$$\kappa_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\tau = -\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2};$$

– формулы для перемещений

$$u_1 = -\varepsilon \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} z + u_{10} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$u_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}\left[\varepsilon^2 \left(\kappa_1 + \kappa_2 \right)\frac{z^2}{2} + \varepsilon \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) z \right] + w_0;$$

– тангенциальные напряжения

$$\sigma_1 = \varepsilon^2 m_1 z + \varepsilon t_1 \ (1 \leftrightarrow 2), \quad \sigma_{12} = \varepsilon^2 h z + \varepsilon s;$$

– нетангенциальные касательные напряжения

$$\sigma_{13} = \left(X_{+} + X_{-} \right)\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\left(X_{+} - X_{-} \right) z + \tau_{13}\left(1 - z^2 \right) \quad (1 \leftrightarrow 2); \tag{6.6}$$

– нетангенциальное нормальное напряжение

$$\sigma_3 = -\varepsilon \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{13} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{23} \right)\left(z - \frac{z^3}{3} \right) +$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{t_1}{R_1} + \frac{t_2}{R_2} \right) z + \varepsilon^3 \left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_1} \right)\frac{z^2 - 1}{2} - \frac{1}{2}\left(Z_{+} + Z_{-} \right) -$$

$$- \varepsilon \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \left(X_{+} + X_{-} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \left(Y_{+} + Y_{-} \right) \right]\frac{z^3}{6} +$$

$$+\varepsilon\frac{1}{2}\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}A_2\left(X_+-X_-\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}A_1\left(Y_+-Y_-\right)\right]\frac{1-z^2}{2}.$$

Эти уравнения, полученные в результате w-процесса, соответствующего классическим гипотезам Кирхгоффа-Лява при выборе величин начального приближения, выделены из общих уравнений теории упругости путем отбрасывания величин порядка ε по сравнению с главными и выполнения граничных условий на лицевых поверхностях оболочки. В отличие от классической теории здесь определены все искомые неизвестные исходной задачи в напряжениях и перемещениях, без введения понятия об осредненных по толщине усилиях и моментах. Однако известно, что для выполнения граничных условий на торцевых поверхностях надо еще учесть поправку на сдвиг [1, 12-17], т.е. в представлениях метода простых итераций найти дополнительно искомые величины, соответствующие начальному приближению τ-процесса (3.10).

7. Применение τ-процесса

Известно, что уравнения классической теории, а в рассматриваемом случае это уравнения, соответствующие w-процессу, не позволяют выполнить все граничные условия на торцевых поверхностях оболочки. Такое имеет место в силу выполнения только части соответствующих методу простых итераций вычислений искомых величин. Под τ-процессом в работе понимается процедура вычисления искомых неизвестных при задании ненулевых начальных значений поперечных касательных напряжений (3.10). В соответствии с этим величины начального приближения задаются выражениями

$$w_{0(0)}=0,\quad \sigma_{13(0)}=\tau_{130(0)}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\quad\left(1\leftrightarrow 2\right). \tag{7.1}$$

Точность применения τ процесса оценить трудно, т.к. в силу большой изменяемости искомых величин $\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\alpha_i}\sim 1$ и получающиеся степенные ряды не являются асимптотическими. Однако в силу того, что именно таким путем могут быть построены уточняющие классические теории типа Тимошенко-Рейсснера [12-14], установим уравнения такого же типа для оболочки. При этом будем исходить из того, что все искомые величины имеют один и тот же порядок по ε. Следовательно, с относительной точностью ε можно при вычислениях величин τ-процесса в уравнениях п. 3 оставить только производные, и обращаться с коэффициентами квадратичных форм как с постоянными.

Выпишем уравнения для вычисления величин τ-процесса в следующей последовательности, преобразовав их с учетом большой изменяемости искомого НДС и отбросив величины, имеющие следующий порядок малости по ε по сравнению с главными:

– формулы (2.7) для сдвигов в нормальной плоскости

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+2A_1\left(1+\nu\right)\tau_{13}\quad\left(1\leftrightarrow 2\right); \tag{7.2}$$

– третье уравнение равновесия

$$\frac{\partial\sigma_3}{\partial z} = -\varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\alpha_1} - \varepsilon\frac{1}{A_2}\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\alpha_2}; \qquad (7.3)$$

– формулы для вычисления тангенциальных компонент деформации из (2.6)

$$e_1 = \varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}\left(1\leftrightarrow 2\right), \quad e_{12} = \varepsilon\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} + \varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}; \qquad (7.4)$$

– соотношения упругости для вычисления тангенциальных напряжений из (2.8)

$$\sigma_1 = \frac{e_1 + \nu e_2}{1-\nu^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_3 \quad \left(1\leftrightarrow 2\right), \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2(1+\nu)}e_{12}; \qquad (7.5)$$

– первые два уравнения равновесия из (2.5)

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z} = \varepsilon\frac{1}{A_1}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha_1} + \varepsilon\frac{1}{A_2}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\alpha_2} \left(1\leftrightarrow 2\right); \qquad (7.6)$$

Подставив величины (7.1) в (7.2), найдем тангенциальные перемещения

$$u_{1(0)} = 2\left(1+\nu\right)\tau_{130(0)}z \quad \left(1\leftrightarrow 2\right)$$

и нетангенциальное нормальное напряжение из уравнения (7.3)

$$\sigma_{3(0)} = -\varepsilon\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{130(0)}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{230(0)}}{\partial\alpha_2}\right)z.$$

Соотношения упругости (7.4) позволяют вычислить по известным перемещениям тангенциальные деформации

$$e_{1(0)} = \varepsilon 2\left(1+\nu\right)\frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13(0)}}{\partial\alpha_1}z \quad \left(1\leftrightarrow 2\right),$$

$$e_{12(0)} = \varepsilon 2\left(1+\nu\right)\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{13(0)}}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{23(0)}}{\partial\alpha_1}\right)z,$$

которые можно вместе с $\sigma_{3(0)}$ подставить в соотношения упругости (7.5) и вычислить тангенциальные напряжения

$$\sigma_{1(0)} = \varepsilon\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13(0)}}{\partial\alpha_1} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23(0)}}{\partial\alpha_2}\right)z \quad \left(1\leftrightarrow 2\right),$$

$$\sigma_{12(0)} = \varepsilon\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{13(0)}}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{23(0)}}{\partial\alpha_1}\right)z.$$

Уравнения (7.6) позволяют определить нетангенциальные касательные напряжения τ-процесса в первом приближении

$$\sigma_{13(1)} = -\varepsilon^2 E_{13}^{\tau}\frac{z^2}{2} \quad \left(1\leftrightarrow 2\right),$$

где $E_{13}^{\tau} = \frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 \tau_{13(0)}}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 \tau_{13(0)}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial^2 \tau_{23(0)}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad (1 \leftrightarrow 2)$, и, наконец, по уравнению (7.3) нетангенциальное напряжение σ_3 τ-процесса в первом приближении

$$\sigma_{3(1)} = \varepsilon^3 \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} E_{13}^{\tau} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2} E_{23}^{\tau} \right) \frac{z^3}{6}.$$

Таким образом, для выполнения граничных условий на лицевых поверхностях имеем дополнительные компоненты напряжений

$$\sigma_{13} = \tau_{13(0)} - \varepsilon^2 E_{13}^{\tau} \frac{z^2}{2} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\sigma_3 = -\varepsilon \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \tau_{13(0)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau_{23(0)}}{\partial \alpha_2} \right) z + \varepsilon^3 \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} E_{13}^{\tau} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2} E_{23}^{\tau} \right) \frac{z^3}{6} + \sigma_{30(0)}.$$

Здесь $\sigma_{30(0)} = \sigma_{30(0)}(\alpha_1, \alpha_2)$ – произвольная функция интегрирования по z.

Сложив вычисленные в τ-процессе компоненты напряжений с напряжениями w-процесса (5.2), выполним условия (5.1) на лицевых поверхностях. Это приводит к уравнениям равновесия следующего вида

$$\varepsilon^2 2E_{1t}^{w} = A_1 A_2 (X_+ - X_-) \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

$$-\varepsilon \frac{4}{3}\frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 \tau_{13(0)} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 \tau_{23(0)} \right) + \varepsilon^2 2 \left(\frac{t_{1(0)}}{R_1} + \frac{t_{2(0)}}{R_2} \right) -$$

$$-\varepsilon 2 \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \tau_{13(0)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau_{23(0)}}{\partial \alpha_2} \right) + \varepsilon^3 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} E_{13}^{\tau} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2} E_{23}^{\tau} \right) + 2\sigma_{30(0)} =$$

$$= Z_+ - Z_- + \varepsilon \frac{1}{3}\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (X_+ + X_-) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (Y_+ + Y_-) \right];$$

$$\frac{1}{A_1 A_2}\varepsilon^3 E_{1m}^{w} + 2\tau_{130(0)}^{w} + 2\tau_{130(0)}^{\tau} - \varepsilon^2 E_{13}^{\tau} = (X_{1+} + X_{1-}) \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Предположим, что нагрузка содержит медленно и быстро меняющиеся составляющие. Приравнивая между собой в уравнениях медленно меняющиеся и быстро меняющиеся члены в левых и правых частях, получим для медленных уравнения, совпадающие с (6.5), которые не будем здесь выписывать, чтобы не вводить новые обозначения, и для быстрых –

$$-\varepsilon^2 E_{13}^{\tau} + 2\tau_{130(0)} = X_+^q + X_-^q \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$-\varepsilon 2 \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \tau_{130(0)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau_{230(0)}}{\partial \alpha_2} \right) - \varepsilon^3 \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1} E_{13}^{\tau} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2} E_{23}^{\tau} \right) \frac{1}{3} = Z_+^q - Z_-^q,$$

$$X_+^q - X_-^q = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$2\sigma_{30(0)} = Z_+^q + Z_-^q.$$

Под быстрыми понимаются локальные быстро меняющиеся поверхностные нагрузки. Четвертое и пятое уравнения следует понимать как факт, что приложение растягивающей (сжимающей) нагрузки на внешней или внутренней стороне поверхности в первом приближении не различается. Эти уравнения дают возможность получить дополнительные интегралы для выполнения всех граничных условий на торцевых поверхностях оболочки. Интегралы уравнений обладают свойствами большой изменяемости, т.к. аргументом в них является величина x/ε. Математическая сторона этого вопроса разобрана в [18]. Выполнение граничных условий на торцевых поверхностях производится аналогично тому, как это сделано для пластины в [12].

8. Заключение

Выведенные уравнения теории оболочек позволяют оценить погрешность классической теории. Для этого в записанных в безразмерной форме уравнениях выделен малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки и позволивший отбросить малые величины по сравнению с главными в исходных уравнениях трехмерной теории упругости. В выводимых ранее теориях в силу использования размерных уравнений такая возможность представляется сомнительной. В результате, классические уравнения содержат в первых двух уравнениях перерезывающие усилия, а в формулах компоненты нетангенциальной деформации-перемещения – члены с тангенциальными перемещениями, которые в практических задачах [19] и в учебниках, например [20], отбрасываются как малые. Это объясняется в одних случаях тем, что они не играют никакой роли в расчетах, или тем, что оболочка пологая. В [21] такое положение подтверждено численным расчетом. Это имеет место в силу того, что уравнения классической теории написаны с различной степенью точности. В связи с этим Койтер [5] на основе энергетических оценок приходит к заключению, что добавление или убавление членов порядка ε в формулах для нетангенциальных компонент деформации не влияет на точность теории.

Рассматривая схему вычисления (4.9) как процесс, в котором слева вначале задается величина нулевого приближения, а справа вычисляется поправка к нему в виде величины первого приближения, можно заметить, что последняя имеет множитель ε^2, т.е. поправка мала и убывает асимптотически вместе с малым параметром. Однако установить однозначно вид асимптотических разложений искомых неизвестных не представляется возможным без априорных соображений об изменяемости искомого НДС. Но можно сделать заключения о виде асимптотических разложений неизвестных, с тем, чтобы получить решение с помощью метода асимптотического интегрирования. Это будут асимптотики безмоментного и моментного состояний, которые при выполнении условий на лицевых поверхностях объединятся и дадут третье смешанное уравнение равновесия, как в (5.4) или (5.5).

Легко заметить, что классические гипотезы используются при выборе величин начального приближения (3.9) и к ним дальше вычисляется поправка. Она оказывается мала. Однако сам вывод методом простых итераций требует кроме начального приближения о недеформируемости нормали (чему соответствует w-процесс) задания начальной величины сдвига, соответствующего дополнению по Тимошенко-Рейсснеру. Трактовка классических гипотез и поправок Тимошенко-Рейсснера в качестве величин начального приближения (3.8) позволяет процесс вычислений неизвестных отнести к полуобратному методу Сен-Венана, модифицируя его до итерационного, и опереться на принцип сжатых отображений Банаха. Построенное таким образом решение подчиняется граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки. Разрешающие уравнения для неизвестных получаем, складывая и вычисляя попарно уравнения на лицевых поверхностях, что равносильно разделению симметричной и антисимметричной составляющих решения. Это подобно использованию в классической теории процедуры осреднения напряжений, переходя к усилиям и моментам. Между параметрами напряжений и классическими усилиями и моментами установлена связь (6.4). Отказ от использования классической гипотезы осреднения и вывод уравнений на основе принципа сжатых отображений приводит в случае сведения двумерной задачи к одномерной для полосы и трехмерной задачи к двумерной для пластины из композиционного материала к другим эффективным коэффициентам жесткостей [22, 23].

Таким образом, в результате применения модифицированного полуобратного метода Сен-Венана дано приближенное решение пространственной задачи теории упругости путем сведения к двумерным разрешающим уравнениям для медленно меняющихся переменных, совпадающим с уравнениями равновесия классической теории упругости, и к двумерным дополнительным уравнениям типа пограничного слоя, учитывающим сдвиговые поправки.

Библиографический список

1. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т.5. М. 1973. 272 с.

2. *Кильчевский Н.А.* Обобщение современной теории оболочек // ПММ. 1939. Т.2. Вып.4. С.427-438.

3. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press. 1927 = *Ляв А.* Математическая теория упругости. М-Л.: ОНТИ. 1935. 674 с.

4. *Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М.* О погрешности гипотез Кирхгофа–Лява в теории оболочек // ПММ. 1943. Т.7, Вып. 5. С. 323-330.

5. *Koiter W.T.* A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. // Proc. IUTAM Symp. on the theory of thin elastic shells (Delft. 1959). North-Holland Publishing Company. Amsterdam. 1960. P. 12-33.

6. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Госте-

хиздат. 1949. 784 с.
7. *Лурье А.И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
8. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судопромгиз. 1962. 432 с.
9. *Гольденвейзер А.Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
10. *Зверяев Е.М.* О соотношениях упругости в линейной теории тонких упругих оболочек // ПММ. 1970. 34. Вып. 6. С. 1136-1138.
11. *Рогачева Н.Н.* О соотношениях упругости Рейсснера-Нахди // ПММ. 1974. 38. Вып. 6. С. 1063-1071.
12. *Зверяев Е.М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472-481.
13. *Зверяев Е.М., Макаров Г.И.* Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С.308-321.
14. *Зверяев Е.М.* Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 1-22.
http://www.mai.ru/upload/iblock/8b4/8b4dff2e41bb50a03dfe08744877a2cf.pdf
15. *Friedrichs K.O.* Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates //Poc. Symp. Appl. Math. 1950. 3. P. 117-124.
16. *Friedrichs K.O., Dressler R.F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure Appl. Math. 1961. 14. P. 1-33.
17. *Айнола Л.Я.* Об уточненных теориях пластинок типа Рейсснера // Тр. IV Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964. С. 171-177.
18. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. Вып. 5(77) С. 3-122.
19. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984 с.
20. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат. 1975. 258 с.
21. *Даревский В.М.* Об основных соотношениях теории тонких оболочек // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 519-535.
22. *Зверяев Е.М., Олехова Л.В.* Итерационная трактовка полуобратного метола Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. С. 1-27.
http://www.mai.ru/upload/iblock/876/8767af08970b8e67ef0a1b71d2763cd0.pdf
23. *Зверяев Е.М., Олехова Л.В.* Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 95. 29 с.
URL: http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf