ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 29 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А. Б.

Структура резонансного множества вещественного многочлена

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А. Б. Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 29. 23 с.
doi:10.20948/prepr-2016-29
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-29

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Б. Батхин

Структура резонансного множества вещественного многочлена

Москва — 2016

УДК 512.62+004.421.6
Александр Борисович Батхин
Структура резонансного множества вещественного многочлена. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016.

Изучается резонансное множество вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых последний имеет соизмеримые корни. Предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации резонансного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Структура резонансного множества многочлена степени n описывается в терминах разбиения числа n. Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры `Maple`. Приведено описание резонансного множества кубического многочлена, а также дано приложение полученных результатов к решению проблемы формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы.
Ключевые слова: теория исключения, субрезультант, компьютерная алгебра, формальная устойчивость положения равновесия.

Alexander Borisovich Batkhin
Structure of the resonance set of a real polynomial

We consider the resonance set of a real polynomial, i. e. the set of all the points of the coefficient space at which the polynomial has commensurable roots. The constructive algorithm of computation of polynomial parametrization of the resonance set is provided. The structure of the resonance set of a polynomial of degree n is described in terms of partitions of the number n. The main algorithms, described in the preprint, are organized as a library of the computer algebra system `Maple`. The description of the resonance set of cubic is given. Obtained results are used for solving the problem of formal stability of a stationary point of a multiparametric Hamiltonian problem with three degrees of freedom.
Key words: elimination theory, subresultant, computer algebra, formal stability of a stationary point.

1. Введение

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда для некоторого многочлена $f(x)$ необходимо сформулировать условия на его коэффициенты, при выполнении которых этот многочлен имеет соизмеримые корни. Так, например, условие целочисленной соизмеримости (кратности) корней характеристического многочлена матрицы линейной части уравнений движения вблизи положения равновесия выделяет в пространстве коэффициентов многочлена (или параметров уравнений движения) многообразия, на которых имеется резонанс между собственными частотами колебаний. Случай, когда многочлен $f(x)$ имеет корень кратности $k > 1$, является частным случаем описанной выше ситуации.

Этот препринт продолжает исследования автора [1—3] по описанию структуры и построению параметрического представления дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_n)$ многочлена

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \tag{1.1}$$

n-й степени с вещественными коэффициентами. Вещественное n-мерное пространство $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов $a_1, a_2, \ldots a_n$, как и ранее, назовём *пространством коэффициентов* многочлена (1.1).

Определение 1. Пару корней t_i, t_j, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, многочлена (1.1) назовём $p : q$-соизмеримой, если $t_i : t_j = p : q$.

Замечание 1. Здесь и далее предполагаем, что $p \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, т. е. исключаем случай, когда один из корней t_i или t_j равен нулю, поскольку нулевой корень соизмерим с любым другим корнем.

Замечание 2. Если у многочлена (1.1) есть пара $p : q$-соизмеримых корней, то есть и пара $q : p$-соизмеримых корней. Следовательно, далее предполагаем, что коэффициент соизмеримости $p : q$ удовлетворяет условию $|p/q| \geqslant 1$.

Определение 2. *Резонансным множеством* $\mathscr{R}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём множество всех точек пространства коэффициентов Π, в которых $f_n(x)$ имеет хотя бы пару соизмеримых корней. Для фиксированного коэффициента соизмеримости, задаваемого рациональным числом $p/q \in \mathbb{Q}$, соответствующее резонансное множество обозначим через $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$, т. е.

$$\mathscr{R}_{p:q}(f_n) = \{P \in \Pi : \exists\, i, j \in 1, \ldots, n, \quad t_i : t_j = p : q\}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что дискриминантное множество $\mathscr{D}(f_n)$, т. е. множество на котором многочлен (1.1) имеет кратные корни, является частным случаем резонансного множества (1.2) для значения коэффициента соизмеримости $p : q = 1$.

Цель данной работы — разработать конструктивный алгоритм вычисления параметрического представления всех компонент резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ приведённого вещественного многочлена $f_n(x)$.

Препринт состоит из введения, трёх разделов, заключения и трёх списков: литературы, рисунков и условных обозначений. В разделе 2 формулируется условие на коэффициенты существования соизмеримых корней многочлена (1.1) в терминах обобщённых субдискриминантов, которые с точностью до множителя суть субрезультанты пары многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$. В разделе 3 дано описание иерархической структуры резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$, указана связь этой структуры с задачей разбиения натурального числа n, описан алгоритм построения параметрического представления компонент этого множества и дано описание программной библиотеки для системы компьютерной алгебры `Maple`. В заключительном разделе 4 приведено описание резонансного множества кубического многочлена, а также дано приложение полученных результатов к решению проблемы формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Часть результатов, изложенных в препринте, докладывалась на международной конференции «Математика и информатика», прошедшей в МГПУ, (Москва, 14–18 марта 2016 года).

2. Условие $p : q$-соизмеримости корней многочлена $f_n(x)$

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет пару $p : q$-соизмеримых корней. Это эквивалентно тому, что два многочлена $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеют общий корень, или, другими словами, $\mathrm{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = 0$, где $\mathrm{Res}_x(g, h)$— результант многочленов $g(x)$ и $h(x)$, вычисленный относительно переменной x.

Определение 3. Пусть

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - t_i), \quad h(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - u_i)$$

суть два приведённых многочлена степени n и m соответственно. Тогда их результант относительно переменной x вычисляется по формуле

$$\mathrm{Res}_x(g, h) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(t_i - u_j).$$

Поскольку при $p = q = 1$ многочлены $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеют n общих корней, то результант $\mathrm{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$ делится на множитель $(p - q)^n$. В силу замечания 1, результант $\mathrm{Res}_x\left(f_n(px), f_n(qx)\right)$ делится на свободный член

a_n многочлена (1.1). Таким образом, указанный выше результант представим в виде

$$\mathrm{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = a_n(p-q)^n \,\mathrm{GD}_{p:q}(f),$$

где $\mathrm{GD}_{p:q}(f_n)$ — введённый в [4; 5] *обобщённый дискриминант* многочлена $f_n(x)$. Термин обобщённый дискриминант выбран в связи с тем, что при стремлении коэффициента соизмеримости $p:q \to 1$, значение обобщённого дискриминанта $GD_{p:q}(f_n)$ стремится к значению дискриминанта $D(f_n)$ многочлена (1.1).

У многочлена (1.1) может быть не одна пара $p:q$-соизмеримых корней. Для полного исследования структуры $p:q$-соизмеримых корней введём несколько вспомогательных понятий.

Определение 4. *Цепочкой* $\mathrm{Ch}^{(k)}_{p:q}(t_i)$ $p:q$*-соизмеримых корней длины* k (кратко *цепочкой корней*) назовём отрезок длины k геометрической прогрессии с основанием t_i и знаменателем p/q, каждый член которой является корнем этого же многочлена. Основание прогрессии t_i назовём *порождающим корнем* соответствующей цепочки.

Замечание 3. Для того чтобы коэффициенты полиномиальных объектов (многочленов, субрезультантов, параметрических представлений компонентов резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ и др.) были представлены в виде многочленов, а не рациональных функций от чисел p и q, будем в цепочке корней длины k в определении 4 использовать величину $q^{k-1}t_i$ в качестве порождающего корня.

Резонансное множество $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ для каждого фиксированного коэффициента соизмеримости $p:q$ состоит из конечного числа многообразий $\mathcal{V}_l$, на каждом из которых многочлен $f_n(x)$ имеет l цепочек корней $\mathrm{Ch}^{(k_i)}_{p:q}(t_i)$ с различными порождающими корнями t_i, $i = 1, \ldots, l$. Суммарная длина этих цепочек корней равна степени n многочлена $f_n(x)$.

Для описания каждого из многообразий $\mathcal{V}_l$ нужно знать структуру корней наибольшего общего делителя многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$, т. е. многочлена

$$\tilde{f}_{p:q}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \gcd(f_n(px), f_n(qx)). \tag{2.1}$$

Пусть $d = \deg \tilde{f}_{p:q} > 0$, тогда корни многочлена $\tilde{f}_{p:q}(x)$ дают информацию о кратных корнях исходного многочлена (1.1): каждой цепочке корней $\mathrm{Ch}^{(k)}_{p:q}(t_i)$ многочлена $\tilde{f}_{p:q}(x)$ соответствует цепочка корней $\mathrm{Ch}^{(k+1)}_{p:q}(t_i)$ многочлена $f_n(x)$. Структуру корней многочлена удобно определить с помощью субрезультантов [6; 7] пары многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$.

Известно много методов вычисления результанта пары многочленов. Их обзор дан, например, в [2; 7]. Здесь ограничимся методом Сильвестра.

Определение 5. Матрицей Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f,g)$ двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, для которых $n = \deg f(x)$ и $m = \deg g(x)$, называется квадратная матрица размера $(n+m)$, строки которой суть векторы, составленные из коэффициентов многочленов

$$x^{m-1}f(x),\ x^{m-2}f(x),\dots,xf(x),\ f(x),\ g(x),\ xg(x),\dots,x^{n-2}g(x),\ x^{n-1}g(x)$$

в базисе $x^{n+m-1},\dots,x,1$.

Определение k-го субрезультанта пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$ дадим с помощью иннора [8] матрицы $\mathbf{Sylv}(f,g)$.

Определение 6. Пусть $\mathbf{M}_n$ — квадратная матрица размера $n\times n$. Тогда матрица $\mathbf{M}_{n-k}$, $k<[n/2]$, полученная вычёркиванием по k крайних строк и столбцов с обеих сторон исходной матрицы $\mathbf{M}_n$, называется ее k-м *иннором*.

Определение 7. k-м субрезультантом $\mathrm{Res}_x^{(k)}(f,g)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется определитель k-го иннора матрицы Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f,g)$.

Запишем матрицу Сильвестра $\mathbf{Sylv}(f_n(px),f_n(qx))$ размера $2n\times 2n$ для многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$:

$$\mathbf{Sylv}(f_n(px),f_n(qx)) =$$
$$= \begin{pmatrix} p^n & a_1p^{n-1} & \cdots & a_{n-2}p^2 & a_{n-1}p & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & p^n & \cdots & a_{n-3}p^3 & a_{n-2}p^2 & a_{n-1}p & a_n & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & p^n & a_1p^{n-1} & a_2p^{n-2} & a_3p^{n-3} & \cdots & a_{n-1}p & a_n\\ 0 & 0 & \cdots & q^n & a_1q^{n-1} & a_2q^{n-2} & a_3q^{n-3} & \cdots & a_{n-1}q & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & q^n & \cdots & a_{n-3}q^3 & a_{n-2}q^2 & a_{n-1}q & a_n & \cdots & 0 & 0\\ q^n & a_1q^{n-1} & \cdots & a_{n-2}q^2 & a_{n-1}q & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Матрица (2.2) имеет $n-1$ нетривиальный иннор. Очевидно, что в силу её структуры каждый из определителей этих инноров, т. е. соответствующий субрезультант, раскладывается на три множителя. Можно показать, что для k-го субрезультанта многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$ имеет место следующее разложение:

$$\mathrm{Res}_x^{(k)}(f_n(px),f_n(qx)) = (p-q)^{n-k}(pq)^{k(n-k)}\,\mathrm{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n). \quad (2.3)$$

Определение 8. Назовём *k-м обобщённым субдискриминантом* $\mathrm{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ для коэффициента соизмеримости $p:q$ третий нетривиальный множитель в формуле (2.3).

Пусть многочлен $f_n(x)$ имеет цепочку $p:q$-соизмеримых корней длины k с порождающим корнем t, т. е. в силу замечания 3 он имеет вид

$$f_n(x) = u(x) \prod_{i=0}^{k-1} \left(x - p^i q^{k-1-i} t\right).$$

Здесь многочлен $u(x)$ степени $n-k$ не имеет $p:q$-соизмеримых с t корней. Тогда

$$f_n(px) = u(px)\left(px - q^{k-1}t\right) p^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} \left(x - p^i q^{k-2-i} t\right),$$
$$f_n(qx) = u(qx)\left(qx - p^{k-1}t\right) q^{k-1} \prod_{i=0}^{k-2} \left(x - p^i q^{k-2-i} t\right).$$

Следовательно, многочлен $\tilde{f}_{p:q}$ из формулы (2.1) имеет цепочку $p:q$-соизмеримых корней длины $k-1$ с порождающим корнем $q^{k-2}t$.

В силу приведённых выше рассуждений, а также теоремы 3.3 из [7], имеет место следующая

Теорема 1. *Для того чтобы* $\deg \tilde{f}_{p:q}(x) = d$, *необходимо и достаточно, чтобы в последовательности i-х обобщённых субдискриминантов* $\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n)$ *первым отличным от нуля обобщённым субдискриминантом был субдискриминант* $\mathrm{GD}^{(d)}_{p:q}(f_n)$ *с номером d.*

Введём полиномиальные идеалы $\mathscr{I}^{(l)}_{p:q}(f_n)$, состоящие из первых l обобщённых субдискриминантов $\mathrm{GD}^{(l)}_{p:q}(f_n)$:

$$\mathscr{I}^{(l)}_{p:q}(f_n) = \left\{ GD^{(i)}_{p:q}(f_n), i = 0, \ldots, l-1 \right\}.$$

Тогда согласно теореме 1 нули идеала $\mathscr{I}^{(l)}_{p:q}(f_n)$ образуют множество, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет в точности $k < n$ различных цепочек $p:q$-соизмеримых корней.

3. Параметризация резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$

Множество $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий $\mathscr{V}_l$ размерностей l, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий $\mathscr{V}_l$, имеющих фиксированную размерность l, зависит от числа разбиений $p(n)$ степени n многочлена $f_n(x)$.

3.1. Число компонент резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$. Напомним здесь основные определения, связанные с разбиением натуральных чисел; подробнее см. [2; 9—11].

Определение 9. Разбиением λ натурального числа n называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$, для которой

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n.$$

Каждое из разбиений запишем в виде $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \dots]$, где n_i — число повторений слагаемого i в разбиении, т. е. $\sum_{i=1}^{k} i n_i = n$.

Основные числовые функции, связанные с множеством разбиений числа n, следующие.

• Функция $p(n)$ задаётся числом всех разбиений числа n (последовательность A000041 в [11]).

• Функция $p_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k слагаемых.

• Функция $q(n)$ задаётся числом всех разбиений n на различные слагаемые (последовательность A000009 в [11]).

• Функция $q_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k различных слагаемых.

Очевидно, что $p(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(n)$ и $q(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k(n)$.

Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} \dots i^{n_i} \dots]$ натурального числа n. Величина i в разбиении λ задаёт длину цепочки $p:q$-соизмеримых корней для соответствующего порождающего корня t_i, а n_i — число различных порождающих корней, задающих цепочку корней длины i. Тогда $l = \sum_i n_i$ есть число различных порождающих корней многочлена $f_n(x)$ для коэффициента соизмеримости p/q и $\sum_i i n_i = n$. Любое разбиение λ числа n определяет некоторую структуру $p:q$-соизмеримых корней многочлена, и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов Π некоторое алгебраическое многообразие $\mathscr{V}_l^i$, $i = 1, \dots, p_l(n)$, размерности l по числу различных порождающих корней t_i. Число таких многообразий размерности l равно $p_l(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n) - 1$, поскольку разбиению $[1^n]$ соответствует ситуация, когда все порождающие корни многочлена (1.1) задают цепочки корней длины 1, т. е. среди всех корней многочлена $f_n(x)$ нет ни одной пары $p:q$-соизмеримых корней.

Замечание 4. В силу того что исходный многочлен (1.1) вещественный, комплексные корни его образуют пары — сам комплексный корень t_i и ему комплексно сопряжённый $\bar{t}_i$. Если порождающий комплексный корень t_i задаёт цепочку корней длины k, то и сопряжённый ему корень $\bar{t}_i$ задаёт цепочку корней такой же длины, в которой каждый корень является комплексно сопряжённым соответствующему корню из цепочки корней, задаваемых корнем t_i. Значит, в разбиении λ, которое соответствует такой структуре корней, будет два равных слагаемых. Следовательно, на алгебраическом многообразии $\mathscr{V}_l \subset \Pi$ размерности l многочлен $f_n(x)$ имеет только вещественные корни, если соответствующее ему разбиение числа n есть разбиение, состоящее из l различных слагаемых. Число таких разбиений для фиксированного l есть значение функции $q_l(n)$, а общее число компонент резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$, на которых все корни вещественны, задаётся функцией $q(n)$.

3.2. Иерархическая структура компонент множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$. Рассмотрим разбиение $\left[n^1\right]$, которое соответствует случаю, когда имеется единственная цепочка корней длины n, задаваемая порождающим (очевидно вещественным) корнем $q^{n-1}t_1$. Тогда многочлен $f_n(x)$ имеет вид

$$f_n(x;t_1) = \prod_{j=0}^{n-1} \left[x - p^j q^{n-1-j} t_1\right]. \tag{3.1}$$

Здесь запись $f_n(x;t_1)$ означает, что все корни многочлена (1.1) зависят от параметра t_1. В этом случае его коэффициенты a_i выражаются через элементарные симметрические многочлены [10; 12] $\sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вычисленные на корнях вида $p^j q^{n-1-j} t_1$, $j = 0, \ldots, n-1$, соответствующей цепочки корней.

$$a_i = (-1)^i \sigma_i \left(q^{n-1}t_1, pq^{n-2}t_1, \ldots, p^{n-1}t_1\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

В силу однородности симметрических многочленов σ_i, коэффициенты a_i являются степенными функциями степени i параметра t_1.

Согласно теореме 1 в этом случае $\deg \tilde{f}_{p:q}(x) = n - 1$, т. е. в последовательности обобщённых субдискриминантов $\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n)$, $i = 0, \ldots, n-1$, первый отличный от нуля обобщённый субдискриминант есть $\mathrm{GD}^{(n-1)}_{p:q}(f_n)$. Следовательно, формулы (3.2) задают параметрическое представление нулей идеала $\mathscr{I}^{(n-1)}_{p:q}$. Эти нули представляют собой одномерное многообразие (кривую) $\mathscr{V}^{(1)}_{p:q}$ в пространстве коэффициентов Π. Эта кривая не имеет особых точек, поскольку в силу её параметрического представления (3.2) $a_i \sim t_1^i$ и, следовательно, производные da_i/dt_1 одновременно в ноль не обращаются.

Рассмотрим следующую конструкцию. Выберем на кривой $\mathscr{V}^{(1)}_{p:q}$ пару точек, соответствующих значениям параметра $t_1 \neq 0$ и $(p/q)^{-1}t_1$, и проведём через них прямую. Покажем, что на этой прямой многочлен $f_n(x)$ имеет одну цепочку

$p : q$-соизмеримых корней длины $n-1$ и одну цепочку корней длины 1, т. е. простой корень. Действительно, рассмотрим вспомогательный многочлен

$$g(x;t_1,v) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(x;t_1) + v\frac{f_n(x;t_1) - f_n\left(x;(p/q)^{-1}t_1\right)}{t_1}. \tag{3.3}$$

Тогда с учётом формулы (3.1) получим, что

$$g(x;t_1,v) = \left[x - \left(p^{n-1}t_1 + v\frac{p^n - q^n}{p}\right)\right]\prod_{j=0}^{n-2}\left[x - p^j q^{n-2-j} q t_1\right].$$

Выбирая

$$v = \frac{p\left(t_2 - p^{n-1}t_1\right)}{p^n - q^n},$$

получим, что $g(x;t_1,t_2) = (x-t_2)\prod\limits_{j=0}^{n-2}\left[x - p^j q^{n-2-j} q t_1\right]$, т. е. многочлен $g(x;t_1,t_2)$ имеет один простой корень t_2 и цепочку корней $\mathrm{Ch}_{p:q}^{(n-1)}(qt_1)$. Очевидно, что структура корней в этом случае соответствует разбиению $\left[1^1(n-1)^1\right]$.

Таким образом, коэффициенты вспомогательного многочлена (3.3) задают в пространстве Π многообразие $\mathscr{V}_2$, представляющее собой линейчатую поверхность. Оно образовано секущими, которые пересекают кривую $\mathscr{V}_1$ в точках, соответствующих таким значениям $t_1^{(1)}$ и $t_1^{(2)}$ параметра t_1, что $t_1^{(2)}/t_1^{(1)} = p/q$. При $p/q \to 1$ эта линейчатая поверхность превращается в касательную развёртывающую поверхность, параметризация которой задаётся формулой (3.6) из [2].

Описанную выше процедуру теперь можно повторить для многообразия $\mathscr{V}_2$ и получить параметрическое представление части многообразия $\mathscr{V}_3$, на котором имеется цепочка корней длины $n-2$ и пара простых корней, т. е. ему соответствует разбиение $\left[1^2(n-2)^1\right]$. Продолжая последовательно эту процедуру, в итоге придём к параметрическому представлению многообразия $\mathcal{V}_{n-1}$ наибольшей размерности. На нём имеется одна цепочка $p : q$-соизмеримых корней длины 2, а остальные корни простые, т. е. ему соответствует разбиение $\left[1^{n-2}2^1\right]$. Очевидно, что в силу замечания 4 полученная параметризация описывает только ту часть многообразия $\mathscr{V}_l$, $3 \leqslant l < n$, на котором все корни многочлена (1.1) вещественные.

3.3. Алгоритм построения параметризации многообразий $\mathscr{V}_l$. Рассмотрим конструктивную процедуру вычисления параметрического представления многообразий $\mathscr{V}_l^i$ для всех значений $l = 1, \ldots, n-1$ и $i = 1, \ldots, p_l(n)$.

Теорема 2. *Пусть в пространстве* Π *имеется многообразие* $\mathcal{V}_l$, $\dim \mathcal{V}_l = l$, *на котором многочлен* (1.1) *имеет* l *различных цепочек* $p : q$*-соизмеримых корней, причём цепочка корней* $\mathrm{Ch}_{p:q}^{(m)}(t_1)$ *имеет длину* $m > 1$*. Другие корни* $l-1$ *цепочки не являются* $p : q$*-соизмеримыми со всеми корнями цепочки* $\mathrm{Ch}_{p:q}^{(m)}(t_1)$.

Пусть $\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l)$ *— параметризация многообразия* $\mathcal{V}_l$*, тогда формула*

$$\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l, t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) + \\ + \frac{p(t_{l+1} - p^{m-1}t_1)}{t_1(p^m - q^m)} \left[\mathbf{r}_l(t_1, \dots, t_l) - \mathbf{r}_l((q/p)t_1, \dots, t_l)\right] \quad (3.4)$$

задаёт параметризацию части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$*, на котором имеется цепочка корней* $\mathrm{Ch}_{p:q}^{(m-1)}(qt_1)$*, простой корень* t_{l+1}*, а остальные цепочки корней такие же, как на исходном многообразии* $\mathcal{V}_l$.

Доказательство. В силу условия теоремы многочлен $f_n(x)$ на многообразии $\mathscr{V}_l$ факторизуется следующим образом:

$$f_n(x; t_1, \dots, t_l) = u(x) \prod_{j=0}^{m-1} \left[1 - p^j q^{m-1-j} t_1\right], \quad (3.5)$$

где многочлен $u(x)$ не имеет корней $p : q$-соизмеримых с корнями цепочки, порождённой t_1. Рассмотрим вспомогательный многочлен $g(x; t_1, \dots, t_l, v)$, коэффициенты которого непрерывно зависят от параметров $t_1, \dots, t_l, v$ следующим образом

$$g(x; t_1, \dots, t_l, v) = f_n(x; t_1, \dots, t_l) + v\frac{f_n(x; t_1, \dots, t_l) - f_n\left(x; (p/q)^{-1}t_1, \dots, t_l\right)}{t_1}.$$

Подставляя выражение для $f_n(x)$ из формулы (3.5), получим

$$g(x; t_1, \dots, t_l, v) = u(x) \left[x - \left(p^{m-1}t_1 + v\frac{p^{m-1} - q^{m-1}}{p}\right)\right] \times \\ \times \prod_{j=0}^{m-2} \left(x - p^j q^{m-2-j} q t_1\right).$$

Полагая теперь

$$v = \frac{p\left(t_{l+1} - p^{m-1}t_1\right)}{p^m - q^m},$$

получаем

$$g(x; t_1, \dots, t_{l+1}) = u(x; t_2, \dots, t_l)(x - t_{l+1}) \prod_{j=0}^{m-2} \left(1 - p^j q^{m-2-j} q t_1\right). \quad (3.6)$$

Таким образом, многочлен $g(x; t_1, \ldots, t_{l+1})$ имеет цепочку корней длины $m-1$ с порождающим qt_1, один простой корень t_{l+1} и остальные $n-m$ корней такие же, как у многочлена $f_n(x)$. Следовательно, формула (3.4) параметризует ту часть многообразия $\mathscr{V}_{l+1}$, на которой многочлен $f_n(x)$ имеет описанную выше структуру корней. $\square$

Замечание 5. Если в формуле (3.6) заменить параметр t_1 на t_1/q, то получим параметризацию части многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$ в виде, задаваемом формулой (3.5).

Замечание 6. Пусть один из корней, например u_1, многочлена $u(x)$ в условии теоремы 2 простой, т. е. $u(x) = (x-u_1)\tilde{u}(x)$. Тогда на части многообразия $\mathscr{V}_{l+1}$ исходный многочлен имеет пару комплексно-сопряжённых корней. Чтобы получить параметрическое представление этой части многообразия $\mathscr{V}_{l+1}$, следует сделать такую замену параметров:

$$t_{l+1} \to v_1 + iv_2, \quad u_1 \to v_1 - iv_2.$$

Эта замена параметров приведёт к тому, что многочлен $f_n(x)$ на части многообразия $\mathscr{V}_{l+1}$, где есть пара комплексно-сопряжённых корней, можно представить в виде

$$f_n(x) = \tilde{u}(x)\left((x-v_1)^2 + v_2^2\right)\prod_{j=0}^{m-2}\left[1 - p^j q^{m-2-j} t_1\right]. \tag{3.7}$$

Если поменять знак перед слагаемым v_2^2 в правой части формулы (3.7), то получим факторизацию многочлена $f_n(x)$ на той части многообразия $\mathscr{V}_{l+1}$, где имеется пара простых вещественных корней $v_1 \pm v_2$. Таким образом, для получения параметризации всего многообразия $\mathscr{V}_{l+1}$ следует использовать подстановку

$$t_{l+1} \to v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_1 \to v_1 - \sqrt{v_2}, \tag{3.8}$$

которая, в итоге, позволит записать многочлен $f_n(x)$ на всем многообразии $\mathscr{V}_{l+1}$ в виде

$$f_n(x) = \left((x-v_1)^2 + v_2\right)\tilde{u}(x)\prod_{j=0}^{m-2}\left[1 - p^j q^{m-2-j} t_1\right].$$

$\square$

Так же, как это было сделано в [2], введём три основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия $\mathscr{V}_1$ к параметризации всех других компонентов резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$.

1) Назовём операцию перехода от многообразия $\mathscr{V}_l$ к многообразию $\mathscr{V}_{l+1}$ в теореме 2 *«ПОДЪЁМ»*. Эта операция позволяет перейти к многообразию, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нём многочлен (1.1) имеет только вещественные корни, то получим полную параметризацию этого многообразия, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.

2) Операцию, основанную на замене (3.8) в замечании 6, назовём *«ПРОДОЛЖЕНИЕ»*. Эта операция позволяет получить параметризацию всего многообразия $\mathscr{V}_{l+1}$, полученного в результате операции «ПОДЪЁМ», в случае, когда на последнем имеются комплексно-сопряжённые корни.

3) Если на многообразии $\mathscr{V}_{l+1}$ многочлен $f_n(x)$ имеет пару различных цепочек корней одинаковой длины k, то можно перейти к многообразию $\mathscr{V}_l$, на котором имеется цепочка корней удвоенной длины $2k$. Такую операцию назовём *«СПУСК»*. Если после этого перехода на многообразии $\mathscr{V}_l$ имеется пара корней одинаковой кратности, то для них следует выполнить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ».

Опишем алгоритм получения параметрического представления алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l^i$, $l = 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, p_l(n)$, составляющих резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$.

I. Вначале строим параметрическое представление одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ по формулам (3.2).

II. Применяем операцию «ПОДЪЁМ» получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_2^1$, соответствующего разбиению $\left[1^1(n-1)^1\right]$.

III. Вновь применяем операцию «ПОДЪЁМ» и получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$, которое соответствует разбиению $\left[1^2(n-2)^1\right]$. Поскольку на этом многообразии имеется пара простых корней, то следует применить операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ». В итоге получаем полную параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$.

IV. Применяя к последней параметризации операцию «СПУСК», получаем параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_2^2$, на котором корни многочлена $f_n(x)$ соответствуют разбиению $\left[2^1(n-2)^1\right]$.

V. Последовательно комбинируя операции «ПОДЪЁМ», «ПРОДОЛЖЕНИЕ» и «СПУСК», получим параметрическое представление всех компонент резонансного множества $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$.

Утверждение 1. *Резонансное множество $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ вещественного многочлена $f_n(x)$ для фиксированного коэффициента соизмеримости $p : q$ допускает полиномиальную параметризацию каждого из алгебраических многообразий $\mathscr{V}_l$, составляющих резонансное множество.*

3.4. Программная реализация. Для организации вычисления резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ в системе компьютерной алгебры `Maple` был реализован набор процедур, из которых скомпонована программная библиотека `ResonanceSet`. Библиотека расширяет возможности другой библиотеки `SubDiscrim`, ориентированной на работу с дискриминантным множеством многочлена $\mathscr{D}(f_n)$ и описанной в [2; 3].

В состав библиотеки вошли следующие процедуры:

- `GDiscrim` — для вычисления k-го обобщённого субдискриминанта $\mathrm{GD}_{p:q}^{(k)}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ для фиксированного коэффициента соизмеримости $p:q$.
- `MkFam1` — для вычисления параметрического представления многообразия $\mathscr{V}_1$.
- `ProcUp` — для реализации процедуры «ПОДЪЁМ» (см. п. 1) на стр. 13).
- `ProcCont` — для реализации процедуры «ПРОДОЛЖЕНИЕ» (см. п. 2) на стр. 13).
- `ProcDown` — для реализации процедуры «СПУСК» (см. п. 3) на стр. 13).

Каждая из процедур реализована в двух вариантах. Первый вариант предназначен для вычислений при целом коэффициенте соизмеримости, второй — при рациональном. Библиотека `ResonanceSet` доступна по адресу `http://keldysh.ru/batkhin/ResonanceSet.zip`.

Все вычисления в разделе 4 проводились с использованием библиотеки `ResonanceSet`.

4. Резонансное множество кубики

В качестве примера работы алгоритма рассмотрим структуру резонансного множества кубического многочлена

$$f_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \tag{4.1}$$

Кубика (4.1) имеет два обобщённых субдискриминанта

$$\begin{aligned}
\mathrm{GD}_{p:q}^{(1)}(f_3) =& pqa_1^2a_2 + (p^2+pq+q^2)a_1a_3 - (p+q)^2a_2^2,\\
\mathrm{GD}_{p:q}^{(0)}(f_3) =& -\left[pq\,(p+q)\right]^2\left(a_1^3a_3 + a_2^3\right) + (pq)^3a_1^2a_2^2 - \left(p^2+pq+q^2\right)^3a_3^2+\\
&+pq\left(p^2+pq+q^2\right)\left(p^2+4pq+q^2\right)a_1a_2a_3.
\end{aligned}$$

Поскольку $p(3)-1=2$ (см. стр. 8), то резонансное множество $\mathscr{R}_{p:q}(f_3)$ состоит из двух компонент

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_1(f_3) : \{a_1 = -\left(p^2+pq+q^2\right)t_1, a_2 = pq\left(p^2+pq+q^2\right)t_1^2,&\\
a_3 = -(pqt_1)^3\},&
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\mathscr{V}_2(f_3) : \{a_1 = -(p+q)t_1 - t_2, a_2 = pqt_1^2 + (p+q)t_1t_2, a_3 = -pqt_1^2t_2\}, \tag{4.3}$$

соответствующих разбиениям $\left[3^1\right]$ и $\left[1^1 2^1\right]$. Очевидно, что на многообразии $\mathscr{V}_1(f_3)$ нет комплексных корней, следовательно, $\mathscr{V}_1(f_3) \subset \mathscr{V}_2(f_3)$.

Геометрически множество $\mathscr{R}_{p:q}(f_3)$ представляет собой линейчатую поверхность (4.3) со скрученной кубикой (4.2) в качестве направляющей. Эта поверхность самопересекается по своей направляющей, которая в свою очередь является множеством особых точек поверхности $\mathscr{V}_2$. Множество $\mathscr{R}_{p:q}(f_3)$ показано на рис. 1. Заметим, что при $p = q$ получим дискриминантную поверхность $\mathscr{D}(f_3)$ (см. раздел 4 в [2]), а при $p = -q$ имеем $\mathrm{GD}_{p:q}^{(0)}(f_3) = p^6(a_3 - a_1 a_2)^2$, т. е. поверхность $\mathcal{V}_2(f_3)$ есть гиперболический параболоид.

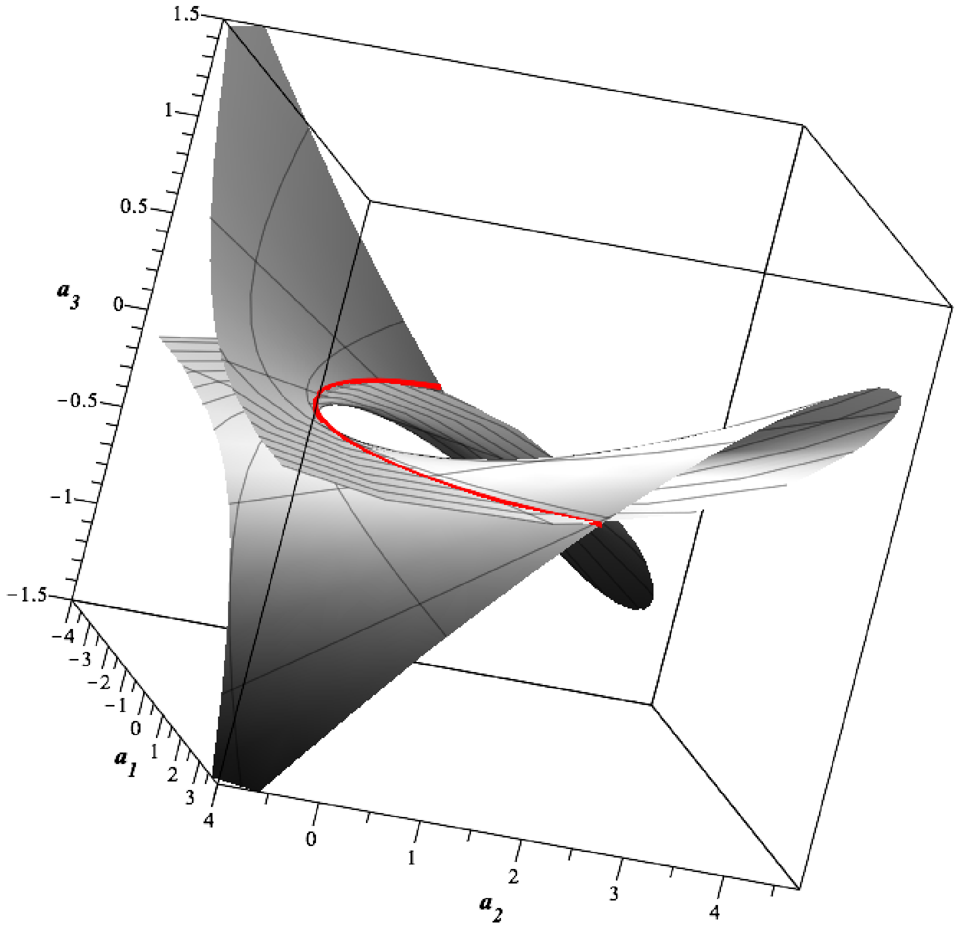

Рис. 1. Резонансное множество $\mathscr{R}_{p:q}(f_3)$ для коэффициента соизмеримости $p : q = 7$. Красным цветом выделена кривая (4.2), по которой поверхность (4.3) самопересекается.

Дискриминантная поверхность $\mathscr{D}(f_3)$ делит пространство коэффициентов Π на две области с разным числом вещественных корней: в области Π_1 многочлен $f_3(x)$ имеет три вещественных корня, в области Π_2 — один вещественный и пару комплексно-сопряжённых корней. Поскольку на многообразии $\mathscr{V}_2(f_3)$ кубика (4.1) имеет только вещественные корни, то множество $\mathscr{R}_{p:q}(f_3)$ для любого значения коэффициента $p : q \neq -1$ целиком содержится в области Π_1 и только может касаться дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_3)$. Нетрудно видеть, что поверхности $\mathscr{V}_2(f_3)$ и $\mathscr{D}(f_3)$ касаются друг друга вдоль пары кривых, на которых третий корень, не соизмеримый ни с одним с двух других корней, совпадает с одним из корней этой пары. В силу вышеизложенного, параметрическое представление кривых $\mathscr{L}_{1,2}$, по которым дискриминантная поверхность $\mathscr{D}(f_3)$ касается резонансной поверхности $\mathscr{V}_2(f_3)$, получается из (4.3) подстановками $t_2 = qt_1$ и $t_2 = pt_1$ соответственно:

$$\mathscr{L}_1 : \left\{a_1 = -(p+2q)t_1,\ a_2 = q(2p+q)t_1^2,\ a_3 = -q^2pt_1^3\right\}, \tag{4.4}$$
$$\mathscr{L}_2 : \left\{a_1 = -(2p+q)t_1,\ a_2 = p(p+2q)t_1^2,\ a_3 = -qp^2t_1^3\right\}. \tag{4.5}$$

4.1. Приложение к проблеме формальной устойчивости положения равновесия. Рассмотрим подробнее ситуацию, возникающую при исследовании устойчивости положения равновесия некоторой многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Пусть в окрестности этого положения равновесия функция Гамильтона $H(\mathbf{z})$ может быть представлена в виде

$$H(\mathbf{z}) = \sum_{i=2}^{\infty} H_i(\mathbf{z}),$$

где $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ — канонически сопряжённые векторы координат и импульсов соответственно, а $H_i(\mathbf{z})$ — однородная функция степени i от них. Как известно, в гамильтоновом случае характеристический многочлен $\check{f}(\lambda)$ линеаризованной системы канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = JA\mathbf{z},\ \text{где}\ A \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hess} H_2, \tag{4.6}$$

является многочленом только от чётных степеней λ. Здесь матрица J — симплектическая единица. Тогда многочлен $f(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \check{f}(\mu)$, $\mu = \lambda^2$, названный в [13] *полухарактеристическим*, является приведённым кубическим многочленом (4.1).

В терминах полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ критерий устойчивости положения равновесия линеаризованной гамильтоновой системы (4.6) формулируется следующей теоремой.

Теорема 3 ([13])**.** *Положение равновесия* $\mathbf{z} = 0$ *линеаризованной гамильтоновой системы* (4.6) *устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда:*

1) *все корни μ_k полухарактеристического многочлена $f(\mu)$ вещественны и неположительны;*
2) *все элементарные делители матрицы JA просты.*

Для кубического многочлена $f_3(x)$ условие 1) проверяется с помощью утверждения

Утверждение 2 ([13, Теорема 2.2])**.** *У многочлена $f_n(x)$ для $n = 2, 3$ все корни вещественные и отрицательные тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства:*

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \text{ и } D(f_n) \geqslant 0,$$

где $D(f_n)$ — дискриминант многочлена $f_n(x)$.

Условие 2) эффективно проверяется с помощью утверждения

Утверждение 3. *Пусть λ^* — корень кратности k характеристического многочлена $\check{f}(\lambda)$ матрицы JA. Все соответствующие элементарные делители матрицы JA просты тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang}(JA - \lambda^* E) = m - k$, где $m = \dim JA$.*

Как известно, устойчивость положения равновесия системы (4.6) может быть нарушена возмущениями порядка 3 и выше. Если квадратичная форма $H_2(\mathbf{z})$ является знакоопределённой, то по теореме Лагранжа-Дирихле возмущения высоких порядков не влияют на устойчивость. Далее полагаем, что форма $H_2(\mathbf{z})$ знакопеременная.

С практической точки зрения вполне достаточной является более слабая, чем устойчивость по Ляпунову, *формальная устойчивость*, предложенная Ю. Мозером в [14].

Определение 10. Положение равновесия $\mathbf{z} = 0$ гамильтоновой системы является *формально устойчивым*, если существует возможно расходящийся степенной ряд, который является формальным положительно определённым первым интегралом.

Наличие формальной устойчивости гарантирует, что на конечном, но большом интервале времени возмущённая траектория остаётся близкой к невозмущённой.

В работе автора [5] предложена некоторая схема исследования формальной устойчивости положения равновесия, основанная на теореме Брюно (см. [15] или [16, гл. 5, § 2]). Для реализации этой схемы требуется разбить область Π_1 на подобласти $\mathscr{W}_i$ резонансными множествами $\mathscr{R}_{p:1}(f(\mu))$, $p = 4, 9, 16$. При этом следует ограничиться только той частью Π_1, в точках которой полухарактеристический многочлен $f(\mu)$ имеет только отрицательные вещественные корни. В силу утверждения 2 достаточно описать взаимное расположение дискриминантного множества $\mathscr{D}(f(\mu))$ и резонансных множеств $\mathscr{R}_{p:1}(f(\mu))$, $p = 4, 9, 16$ в октанте $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Согласно формулам (4.4) и (4.5) каждая из резонансных поверхностей $\mathscr{R}_{p:1}(f(\mu))$ касается дискриминантной поверхности $\mathscr{D}(f(\mu))$ вдоль кривых $L_{1,2}$. Сечение указанных выше поверхностей плоскостью $a_1 = \mathrm{const} > 0$ показано на рис. 2 для $a_1 = 2$, $p = 4$.

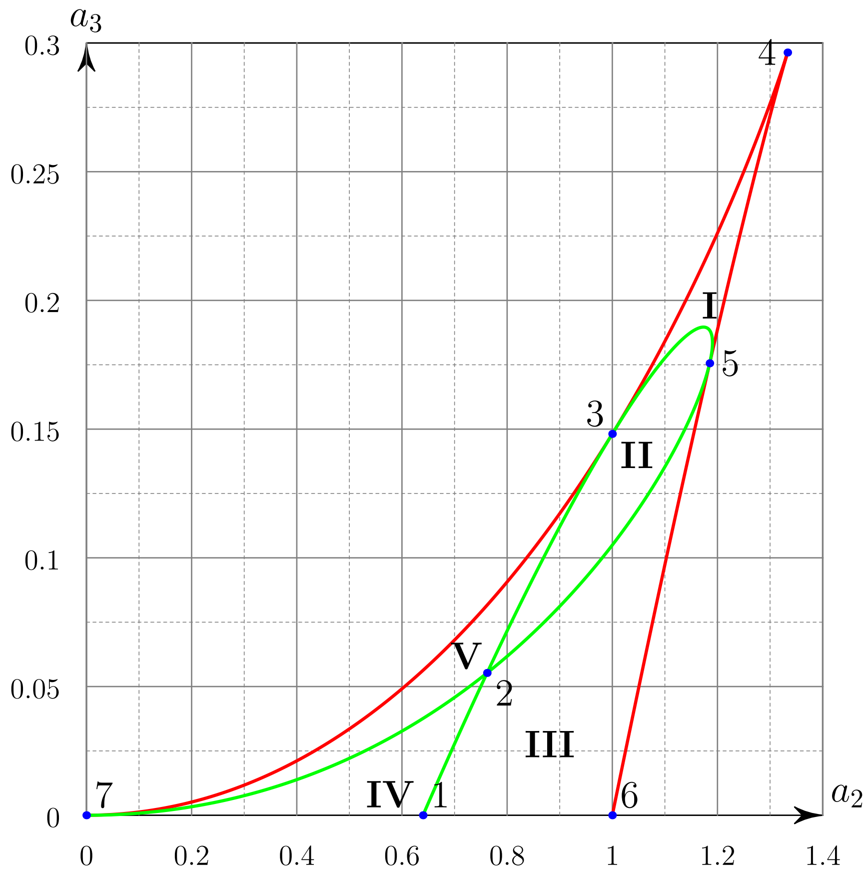

Рис. 2. Сечение дискриминантной $\mathscr{D}(f(\mu))$ (показано красным) и резонансной $\mathscr{R}_{4:1}(f(\mu))$ (показано зелёным) поверхностей плоскостью $a_1 = 2$. Синим цветом выделены особые точки, граничные точки и точки касания.

Две резонансные поверхности $\mathscr{R}_{p_1:1}(f(\mu))$ и $\mathscr{R}_{p_2:1}(f(\mu))$, $p_{1,2} \in \{4, 9, 16\}$, пересекаются вдоль кривых $\mathscr{C}_j$. Параметризацию кривых $\mathscr{C}_j$ нетрудно найти, используя следующие рассуждения. Пусть на поверхности $\mathscr{R}_{p_1:1}(f(\mu))$ многочлен $f(\mu)$ имеет два порождающих корня t_1 и t_2, а на поверхности $\mathscr{R}_{p_2:1}(f(\mu))$ — u_1 и u_2. Тогда на этих поверхностях $f(\mu)$ представляется в виде

$$f(\mu) = (\mu - t_1)(\mu - p_1 t_1)(\mu - t_2) = (\mu - u_1)(\mu - p_2 u_1)(\mu - u_2).$$

В точках пересечения поверхностей тройки корней должны совпадать. Нетрудно видеть, что имеются четыре различных набора значений параметров t_1, t_2, u_1, u_2, для которых две тройки ненулевых корней совпадают:

1) $t_2 = p_2 t_1,\ u_1 = t_1,\ u_2 = p_1 t_1;$
2) $t_2 = p_1 p_2 t_1,\ u_1 = p_1 t_1,\ u_2 = t_1;$
3) $t_2 = \dfrac{t_1}{p_2},\ u_1 = \dfrac{t_1}{p_1},\ u_2 = p_1 t_1;$
4) $t_2 = \dfrac{p_1 t_1}{p_2},\ u_1 = \dfrac{p_1 t_1}{p_2},\ u_2 = t_1.$

Подставляя указанные выше значения параметра t_2, получим параметризацию кривых $\mathscr{C}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Сечение резонансных поверхностей плоскостью $a_1 = \mathrm{const} > 0$ показано на рис. 3 для $a_1 = 2$, $p_{1,2} = 4, 9, 16$.

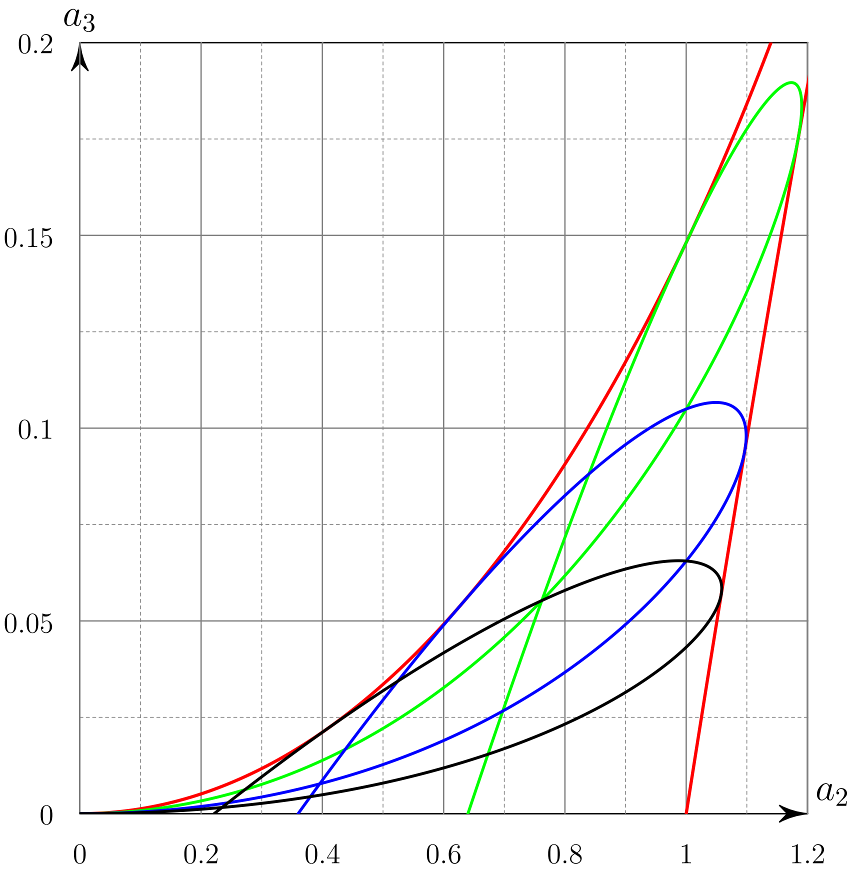

Рис. 3. Сечение резонансных поверхностей $\mathscr{R}_{p:1}(f(\mu))$ плоскостью $a_1 = 2$ для значений $p = 4$ (зелёный цвет), $p = 9$ (синий цвет), $p = 16$ (чёрный цвет). Красным цветом показана граница области Π_1.

В области Π_1 вне резонансных поверхностей $\mathscr{R}_{p:1}(f(\mu))$, $p = 4, 9, 16$, неподвижная точка $\mathbf{z} = 0$ формально устойчива [15]. Для точек на этих резонансных поверхностях требуется дополнительное исследование формальной устойчивости, которое можно сделать, вычислив нормальную форму функции Гамильтона

$H(\mathbf{z})$ [16—18] до 4-го порядка включительно.

Укажем несколько задач, где исследование формальной устойчивости может быть проведено с помощью описанного выше метода:

- устойчивость положения равновесия некоторой гироскопически стабилизированной системы [5; 13];
- устойчивость пространственных точек либрации в задаче Хилла с учетом солнечного ветра и несферичности потенциала Земли [19].

4.2. Граничное свойство резонансной поверхности . Отметим ещё одно свойство резонансной поверхности $\mathscr{V}_2(f_3)$. Зафиксируем некоторую точку $P \in \Pi_1$ в области Π_1 пространства коэффициентов. Пусть в этой точке многочлен (4.1) имеет три вещественных корня t_1, t_2, t_3. Будем считать, что они упорядочены, например, по возрастанию. Образуем из каждой пары последовательных корней два отношения $r_1 = t_2/t_1$ и $r_2 = t_3/t_2$. Если точка P не принадлежит резонансному множеству $\mathscr{R}_{p:q}(f_3)$, то ни одно из отношений $r_{1,2} \neq p/q$. Очевидно, что возможны четыре варианта:

A: $r_1 < p/q, r_2 < p/q$;
B: $r_1 < p/q, r_2 > p/q$;
C: $r_1 > p/q, r_2 < p/q$;
D: $r_1 > p/q, r_2 > p/q$.

На поверхности $\mathscr{V}_2$ одно из отношений $r_i = p/q$, а на кривой $\mathscr{V}_1$ оба отношения r_i, $i = 1, 2$, равны p/q. Таким образом, резонансная поверхность $\mathscr{V}_2$ является границей подобластей области Π_1, в каждой из которых реализуется один из указанных выше вариантов отношений. Так, на рис. 2 сечение границы области Π_1 показано красным цветом (точки 6, 4, 7). Сечение резонансного множества, показанного зелёным цветом, делит этот криволинейный треугольник с вершинами 4, 6 и 7 на пять подобластей, обозначенных римскими цифрами от I до V. В каждой из областей реализуется свой вариант отношения корней. Для краткости вариант отношения корней обозначим двумя знаками неравенств. Вычисления показывают, что в подобластях I и II реализуется вариант A: ‘‘$<, <$’’, в подобласти III — вариант B: ‘‘$<, >$’’, в подобласти IV — вариант D: ‘‘$>, >$’’, наконец, в подобласти V имеет место вариант C: ‘‘$>, <$’’. Следовательно, только при переходе через криволинейную границу между подобластями I и II, задаваемую на рис. 2 точками 3 и 5, не происходит изменение варианта неравенства.

Можно показать, что свойство многообразия $\mathscr{V}_{n-1} \subset \mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ делить пространство параметров Π на подобласти с различными вариантами отношения корней имеет место и в общем случае.

Заключение

Резонансное множество $\mathscr{R}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ может рассматриваться как некоторое обобщение дискриминантного множества $\mathscr{D}(f_n)$ для случая, когда отношение пары корней равно некоторому числу. Резонансное множество состоит из конечного набора алгебраических многообразий размерностей от 1 до $n-1$, число которых определяется числом $p(n)$ разбиений степени n многочлена $f_n(x)$. Каждое из этих многообразий выделяется соответствующим идеалом, состоящим из обобщённых субдискриминантов, и допускает полиномиальную параметризацию.

Список литературы

1. *Батхин А. Б.* Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). 2015. Т. 16, № 2. С. 23—34. URL: `http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=cheb&paperid=388&what=fullt&option_lang=rus`.
2. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 76. URL: `http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf`.
3. *Батхин А. Б.* Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 14—27.
4. *Батхин А. Б.* Нелинейная устойчивость системы Гамильтона по линейному приближению // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 33. URL: `http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_33.pdf`.
5. *Батхин А. Б.* Выделение областей устойчивости нелинейной системы Гамильтона // Автоматика и телемеханика. 2013. Т. 8. С. 47—64. URL: `http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=at&paperid=6084&what=fullt&option_lang=rus`.
6. *Basu S.*, *Pollack R.*, *Roy M.-F.* Algorithms in Real Algebraic Geometry. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006. ix+662. (Algorithms and Computations in Mathematics 10).
7. *Калинина Е. А.*, *Утешев А. Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. 72 с.
8. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М., 1979. 304 с.
9. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М. : Наука, 1982. 256 с.
10. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. М. : Мир, 1985. 222 с.

11. *Sloane N. J. A.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2015. URL: `http://oeis.org`.
12. *Прасолов В. В.* Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.
13. *Батхин А. Б.*, *Брюно А. Д.*, *Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76, № 1. С. 80—133.
14. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian Systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Т. 11, № 1. С. 81—114.
15. *Брюно А. Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 325—330.
16. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М. : Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва «Наука», 1978. 352 с.
17. *Брюно А. Д.*, *Петров А. Г.* О вычислении гамильтоновой нормальной формы // Доклады Академии Наук. 2006. Т. 410, № 4. С. 474—478.
18. *Журавлёв В. Ф.*, *Петров А. Г.*, *Шундерюк М. М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М. : ЛЕНАНД, 2015. 304 с.
19. *Markakis M. P.*, *Perdiou A. E.*, *Douskos C.* The photogravitational Hill problem with oblateness: equilibrium points and Lyapunov families // Astrophys Space Sci. 2008. Vol. 315. Pp. 297–306. DOI: `0.1007/s10509-008-9831-6`.

Список рисунков

Список условных обозначений

$\mathrm{Ch}_{p:q}^{(k)}(t_i)$ — цепочка $p : q$-соизмеримых корней длины k с порождающим корнем t_i, стр. 5

J — симплектическая единица, стр. 16

$\mathscr{D}(f_n)$ — дискриминантное множество многочлена $f_n(x)$, стр. 3

$f_n(x)$ — приведённый многочлен n-й степени с вещественными коэффициентами, стр. 3

$\tilde{f}_{p:q}(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $f_n(px)$ и $f_n(qx)$, стр. 5

$\mathrm{GD}^{(k)}_{p:q}(f_n)$ — k-й обобщённый субдискриминант многочлена $f_n(x)$ для фиксированного коэффициента соизмеримости $p:q$, стр. 6

$\mathscr{I}^{(l)}_{p:q}(f_n)$ — полиномиальный идеал, состоящий из первых l обобщённых субдискриминантов $\mathrm{GD}^{(l)}_{p:q}(f_n)$, стр. 7

λ — разбиение натурального числа, стр. 8

Π — пространство коэффициентов многочлена, стр. 3

$p(n)$ — число разбиений натурального n, стр. 8

$p_k(n)$ — число разбиений n на k частей, стр. 8

$q(n)$ — число разбиений n на различные слагаемые, стр. 8

$q_k(n)$ — число разбиений n на k различных слагаемых, стр. 8

$\mathscr{R}(f_n)$ — резонансное множество многочлена $f_n(x)$, стр. 3

$\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$ — резонансное множество с коэффициентом соизмеримости $p:q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, корней многочлена $f_n(x)$, стр. 3

$\mathrm{Res}_x(g,h)$ — результант многочленов $g(x)$ и $h(x)$ относительно переменной x, стр. 4

σ_i — элементарный симметрический многочлен степени i, стр. 9

$\mathscr{V}_l$ — алгебраическое многообразие размерности l резонансного множества $\mathscr{R}_{p:q}(f_n)$, стр. 7

Оглавление