ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 14 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

О тестах замыкания для контактных схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. О тестах замыкания для контактных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 14. 20 с. doi:10.20948/prepr-2016-14
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-14

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К. А. Попков

О тестах замыкания для контактных схем

Москва — 2016

Попков К. А.

О тестах замыкания для контактных схем

Рассматривается задача синтеза двухполюсных контактных схем, реализующих булевы функции от n переменных и допускающих короткие проверяющие и диагностические тесты относительно замыканий контактов. Установлено, что почти все булевы функции от n переменных реализуемы неизбыточными двухполюсными контактными схемами, допускающими единичные проверяющие, полные проверяющие и единичные диагностические тесты замыкания константной длины. Доказаны также следующие факты: (1) любую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной двухполюсной контактной схемой, содержащей не более одной входной переменной, отличной от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и допускающей единичный и полный проверяющий тесты замыкания длины не более $2n$; (2) любую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной двухполюсной контактной схемой, содержащей не более двух входных переменных, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и допускающей единичный диагностический тест замыкания длины не более $4n$.

Ключевые слова: контактная схема, замыкание контакта, единичный проверяющий тест, полный проверяющий тест, единичный диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

On tests of contact closure for contact circuits

We consider a problem of synthesis of two-pole contact circuits which realize Boolean functions on n variables and permit of short fault detection and diagnostic tests regarding contact closures. It is obtained than almost all Boolean functions on n variables are realizable by irredundant two-pole contact circuits which permit of single fault detection, complete fault detection, and single diagnostic tests of a constant length. The following facts are also proved: (1) each Boolean function $f(x_1, \ldots, x_n)$ can be realized by an irredundant two-pole contact circuit which contains not more than one input variable different from variables $x_1, \ldots, x_n$ and permits of single and complete fault detection tests lengths of which do not exceed $2n$; (2) each Boolean function $f(x_1, \ldots, x_n)$ can be realized by an irredundant two-pole contact circuit which contains not more than two input variables different from variables $x_1, \ldots, x_n$ and permits of a single diagnostic test a length of which does not exceed $4n$.

Key words: contact circuit, contact closure, single fault detection test, complete fault detection test, single diagnostic test

Введение

В данной работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых двухполюсных контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. (Слово "двухполюсная" в дальнейшем будем опускать.) Логический подход к тестированию контактных схем предложен С.В. Яблонским и И.А. Чегис в [2]. Представим, что имеется контактная схема S, реализующая булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы S могут перейти в неисправное состояние. (В качестве неисправностей контактов обычно рассматриваются их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной.) В результате схема S вместо исходной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях контактов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [3, 4, 5]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(x_1, \ldots, x_n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_2(x_1, \ldots, x_n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество T, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно контактов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [5], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой (такие функции неисправности называют нетривиальными). Если в схеме допускаются только обрывы контактов (или только их замыкания), то говорят о *тестах размыкания* (соответственно о *тестах замыкания*).

Пусть зафиксирован вид неисправностей контактов и T — единичный проверяющий тест для некоторой контактной схемы S. Введём следующие обозначения: пусть $D_{s,detect}(T)$ — длина теста T; $D_{s,detect}(S) = \min D_{s,detect}(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для контактной схемы S; $D_{s,detect}(f) = \min D_{s,detect}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным контактным схемам S, реализующим функцию f; $D_{s,detect}(n) = \max D_{s,detect}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_{s,detect}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста. По аналогии с функциями $D_{s,detect}$ можно ввести функции $D_{c,detect}$, $D_{s,diagn}$ и $D_{c,diagn}$ для соответственно полного проверяющего, единичного диагностического и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D_{c,detect}(f)$ и $D_{c,diagn}(f)$ не требуется предполагать неизбыточность схем). Так, например, $D_{c,diagn}(n)$ — функция Шеннона длины полного диагностического теста.

Всюду в данной работе будем предполагать, что контактная схема, реализующая булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, реализует также и все булевы функции, получающиеся из $f(x_1, \ldots, x_n)$ изъятием всех или части фиктивных переменных этой функции. Это предположение согласуется с общепринятым положением теории булевых функций о том, что две булевы функции, получающиеся друг из друга при помощи операций добавления и изъятия фиктивных переменных, считаются равными (см., например, [6], с. 12). Будем говорить, что контактная схема *содержит k фиктивных входных переменных и реализует функцию* $f(x_1, \ldots, x_n)$ (где $k \geqslant 0$), если данная схема содержит k различных входных переменных, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и реализует булеву функцию, не зависящую существенно от этих k переменных и равную функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Например, схема, изображенная на рис. 1, содержит одну фиктивную входную переменную y и реализует функцию x_1x_2. Будем говорить, что контактная схема реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ (без указания числа фиктивных входных переменных), если это число равно нулю. Условимся считать, что наборы из любого теста для схемы, содержащей k фиктивных входных переменных и реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеют длину $n + k$ (по общему числу переменных $x_1, \ldots, x_n$ и фиктивных входных переменных схемы). Такое предположение сделано в [7], где рассматриваются, в частности, контактные схемы, содержащие входные переменные $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и реализующие функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, и тесты для этих схем, содержащие наборы длины $n + 1$.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех булевых функций от n переменных* (или *для почти каждой булевой функции от n переменных*), если отношение числа булевых функций от

n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех булевых функций от n переменных (т.е. к 2^{2^n}) стремится к нулю при $n \to \infty$.

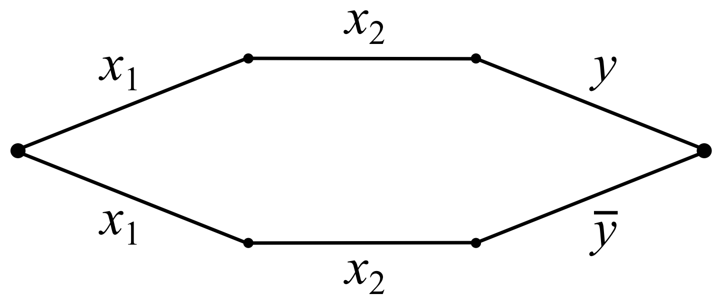

Рис. 1

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования контактных схем. Для случая, когда допускаются как обрывы, так и замыкания контактов, установлено, что функция $D_{s,diagn}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$ (см. [5], с. 113, теорема 9); Х.А. Мадатян в [8] нашёл точное значение функции Шеннона длины полного диагностического теста $D_{c,diagn}(n) = 2^n$; Н.П. Редькин в [9] получил оценку $D_{c,detect}(n) \leqslant \frac{15}{16} \cdot 2^n$. Следующие оценки относятся к случаям, когда допускаются только обрывы контактов или только их замыкания. С использованием соображений, аналогичных тем, которые используются в [5] при доказательстве теоремы 9 на с. 113, в обоих случаях можно получить асимптотическую оценку $D_{s,diagn}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$. Н.П. Редькиным в [10] для единичных проверяющих тестов размыкания и замыкания получены оценки соответственно $D_{s,detect}(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ и $D_{s,detect}(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log_2 n}}+\frac{5}{2}}$. Отметим, что при доказательстве указанных результатов для булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ рассматриваются только такие реализующие их схемы, которые не содержат фиктивных входных переменных. Д.С. Романов в [7], в частности, установил, что для почти всех булевых функций f от n переменных справедлива оценка $D_{s,detect}(f) \leqslant 2n + 2$ длины единичного проверяющего теста замыкания, и аналогичный факт для единичного проверяющего теста размыкания, причём для доказательства обоих этих фактов использовались контактные схемы, содержащие одну фиктивную входную переменную x_0 и реализующие функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Вышеупомянутые верхние оценки для функций $D_{s,detect}(n)$, $D_{s,detect}(f)$ в [10, 7] справедливы и для соответствующих функций $D_{c,detect}(n)$, $D_{c,detect}(f)$, поскольку любой единичный проверяющий тест размыкания (замыкания) для неизбыточной контактной схемы является также полным проверяющим тестом размыкания (замыкания) для этой схемы (см., например, [5], с. 147–148). Используя это обстоятельство, из теорем 1, 2 и следствия 1 данной работы, которые будут сформулированы и доказаны ниже, можно получить аналогичные им результаты для величины $D_{c,detect}(f)$ и полных проверяющих тестов. Отдельно это оговаривать не будем.

В данной работе в качестве неисправностей контактов будут рассматриваться только их замыкания.

Множество M двоичных наборов длины n, где $n \geqslant 2$, назовём *покрывающим* для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если на всех наборах из M функция f обращается в нуль и существует такой индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$, что для любого индекса $j \in \{1, \ldots, n\}$, отличного от i, и для любых булевых констант α, β в M найдётся набор, i-я компонента которого равна α, а j-я — β.

Отметим, что покрывающее множество всегда непусто.

Пример 1. Если булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на наборах $(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $(0, \overline{\sigma_2}, \ldots, \overline{\sigma_n})$, $(1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $(1, \overline{\delta_2}, \ldots, \overline{\delta_n})$, то в качестве покрывающего для f множества можно взять множество, состоящее из этих четырех наборов (при этом $i = 1$).

Пример 2. Пусть $M_0 = \{(0,0,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,0,0), (1,0,1,1)\}$ — множество всех нулевых наборов булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Тогда в качестве покрывающего для f множества можно взять само M_0 или множество $\{(0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,0,0), (1,0,1,1)\}$ (при этом $i = 4$).

Пример 3. Пусть $M_0 = \{(0,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,0,0), (1,0,1,1)\}$ — множество всех нулевых наборов булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Тогда нетрудно убедиться, что покрывающего для f множества не существует (для этого достаточно отдельно рассмотреть случаи $i = 1, 2, 3, 4$).

Утверждение 1. *Для почти каждой булевой функции от n переменных существуют по крайней мере два непересекающихся покрывающих множества, каждое из которых содержит четыре набора.*

Доказательство. Пусть F_n — множество всех булевых функций от n переменных, для каждой из которых указанное в условии утверждения свойство не выполняется; f — произвольная функция из F_n. Разобьём все двоичные наборы длины n на 2^{n-1} пар наборов, совпадающих только в первом разряде. Множество таких пар наборов с нулем в первом разряде обозначим через A_0, а с единицей в первом разряде — через A_1. Покажем, что функция f удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:

а) существует не более одной пары наборов из A_0 такой, что функция f равна нулю на обоих наборах из этой пары;

б) существует не более одной пары наборов из A_1 такой, что функция f равна нулю на обоих наборах из этой пары.

Предположим, что это не так. Тогда существуют такие пары наборов $(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\delta}_0) \in A_0$, $(\tilde{\sigma}'_0, \tilde{\delta}'_0) \in A_0$, $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\delta}_1) \in A_1$, $(\tilde{\sigma}'_1, \tilde{\delta}'_1) \in A_1$, что все наборы $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\delta}_0, \tilde{\sigma}'_0, \tilde{\delta}'_0$, $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\delta}_1, \tilde{\sigma}'_1, \tilde{\delta}'_1$ попарно различны и являются нулевыми для функции f. В таком случае множества $M = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\delta}_0, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\delta}_1\}$ и $M' = \{\tilde{\sigma}'_0, \tilde{\delta}'_0, \tilde{\sigma}'_1, \tilde{\delta}'_1\}$ будут покрывающими для f. Действительно, для любого $j \in \{2, \ldots, n\}$ и для любых булевых констант α, β первая компонента каждого из наборов $\tilde{\sigma}_\alpha, \tilde{\delta}_\alpha$ равна α, а j-е компоненты этих наборов различаются (это следует из определения множеств A_0, A_1) и хотя бы одна из них равна β, откуда следует, что M является покрывающим множеством для f (при $i = 1$). Аналогичные рассуждения можно провести и для M'. Каждое из этих множеств содержит четыре набора и $M \cap M' = \varnothing$, т.е. для функции f указанное в условии утверждения 1 свойство выполняется, но это противоречит тому, что $f \in F_n$. Таким образом, любая функция f из F_n удовлетворяет хотя бы одному из условий а), б).

Найдём общее число булевых функций f от n переменных, удовлетворяющих условию а). На каждой паре наборов из A_0, кроме, быть может, одной, функция f может принимать одну из трёх возможных пар значений — $(0,1)$, $(1,0)$ или $(1,1)$. Всего в A_0 содержится 2^{n-2} пар наборов, а 2^{n-1} наборов не принадлежат никакой паре из A_0. Отсюда число булевых функций, принимающих на всех парах наборов из A_0 одну из трёх пар значений — $(0,1)$, $(1,0)$ или $(1,1)$, равно $3^{2^{n-2}} \cdot 2^{2^{n-1}}$; число булевых функций, принимающих на всех парах наборов из A_0, кроме одной, одну из этих трёх пар значений, а на одной паре наборов из A_0 — пару значений $(0,0)$, равно $C_{2^{n-2}}^{2^{n-2}-1} \cdot 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}}$. Таким образом, общее число булевых функций от n переменных, удовлетворяющих условию а), равно $3^{2^{n-2}} \cdot 2^{2^{n-1}} + C_{2^{n-2}}^{2^{n-2}-1} \cdot 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}} = 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}}(3 + 2^{n-2})$. Аналогично общее число булевых функций f от n переменных, удовлетворяющих условию б), равно $3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}}(3+2^{n-2})$. Следовательно, число функций f от n переменных, удовлетворяющих хотя бы одному из условий а), б), не превосходит $2 \cdot 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}}(3+2^{n-2}) = 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}+1}(3+2^{n-2})$. Отсюда $|F_n| \leqslant 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}+1}(3 + 2^{n-2})$. Но тогда при $n \geqslant 4$ имеем

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}+1}(3 + 2^{n-2})}{2^{2^n}} = \frac{3^{2^{n-2}}(3 + 2^{n-2})}{3 \cdot 2^{2^{n-1}-1}}$$

$$\leqslant \frac{3^{2^{n-2}} \cdot 2^{n-1}}{3 \cdot 2^{2^{n-1}-1}} = \frac{2^{2^{n-2}\log_2 3}}{3 \cdot 2^{2^{n-1}-n}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2^{n-2}(2-\log_2 3)-n}} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

откуда следует справедливость утверждения 1.

Далее для краткости всюду вместо "замыкающий (размыкающий) контакт, отвечающий переменной x_j", $j = 1, \ldots, n$, будем говорить "контакт x_j (соответственно контакт $\overline{x_j}$)".

Единичные проверяющие тесты замыкания

Теорема 1. *Пусть для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $n \geqslant 3$, существует покрывающее множество M из m наборов. Тогда $D_{s,detect}(f) \leqslant m$, причём существует такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, что множество M для неё является единичным проверяющим тестом замыкания.*

Из теоремы 1 и утверждения 1 вытекает

Следствие 1. *Для почти всех булевых функций f от n переменных справедливо неравенство $D_{s,detect}(f) \leqslant 4$.*

Доказательство теоремы 1. В определении покрывающего множества M для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем без ограничения общности считать, что $i = 1$ (в противном случае можно соответствующим образом переименовать отвечающие контактам переменные в контактной схеме, которая будет построена далее). Тогда на всех наборах из M функция f обращается в нуль и для любого индекса $j \in \{2, \ldots, n\}$, отличного от i, и для любых булевых констант α, β найдётся набор $\tilde{\pi}_{j,\alpha,\beta}$, первая компонента которого равна α, а j-я — β. Если $f \equiv 0$, то функцию f можно реализовать схемой, не содержащей ни одного контакта; такая схема неизбыточна и любое множество двоичных наборов длины n, в том числе и M, для неё является единичным проверяющим тестом, что и требовалось доказать. Далее будем считать, что функция f отлична от тождественного нуля.

Для каждого единичного для f набора $\tilde{\sigma}_k = (\sigma_{k,1}, \ldots, \sigma_{k,n})$ построим контактную схему S_k следующим образом. Вначале построим цепь C_k из контактов $x_1^{\sigma_{k,1}}, x_2^{\sigma_{k,2}}, x_1^{\sigma_{k,1}}, x_3^{\sigma_{k,3}}, \ldots, x_1^{\sigma_{k,1}}, x_n^{\sigma_{k,n}}$, соединённых в указанном порядке. Пусть $A, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{n-2}, b_{n-2}, a_{n-1}, B$ — вершины этой цепи при движении от первого контакта $x_1^{\sigma_{k,1}}$ к контакту $x_n^{\sigma_{k,n}}$. Теперь соединим вершину A с каждой вершиной a_s, $s = 1, \ldots, n-1$, контактом $\overline{x_{s+1}^{\sigma_{k,s+1}}}$, а вершину B — с каждой вершиной b_s, $s = 1, \ldots, n-2$, контактом $\overline{x_1^{\sigma_{k,1}}}$. Полученную контактную схему с полюсами A и B обозначим через S_k (вид этой схемы при $n = 5$ показан на рис. 2). Пусть S — контактная схема, представляющая собой параллельное соединение всех построенных схем S_k.

Легко видеть, что в каждой схеме S_k лишь одна несамопересекающаяся цепь между её полюсами, а именно C_k, обладает ненулевой проводимостью и функция, реализуемая схемой S_k, равна $x_1^{\sigma_{k,1}} \& x_2^{\sigma_{k,2}} \& \ldots \& x_n^{\sigma_{k,n}}$. Схема S реализует дизъюнкцию всех таких функций для всех единичных наборов $\tilde{\sigma}_k$ функции f, т.е. совершенную дизъюнктивную нормальную форму для f, а значит, саму f. Докажем, что схема S неизбыточна и множество M для неё является единичным проверяющим тестом. Так как все наборы из M нулевые для функции f, достаточно доказать, что при неисправности, т.е. при замыкании, любого одного контакта в схеме S найдётся набор из M, на котором функция, реализуемая полученной схемой, равна единице. Предположим, что неисправен некоторый контакт в некоторой подсхеме S_k схемы S. Возможны семь случаев.

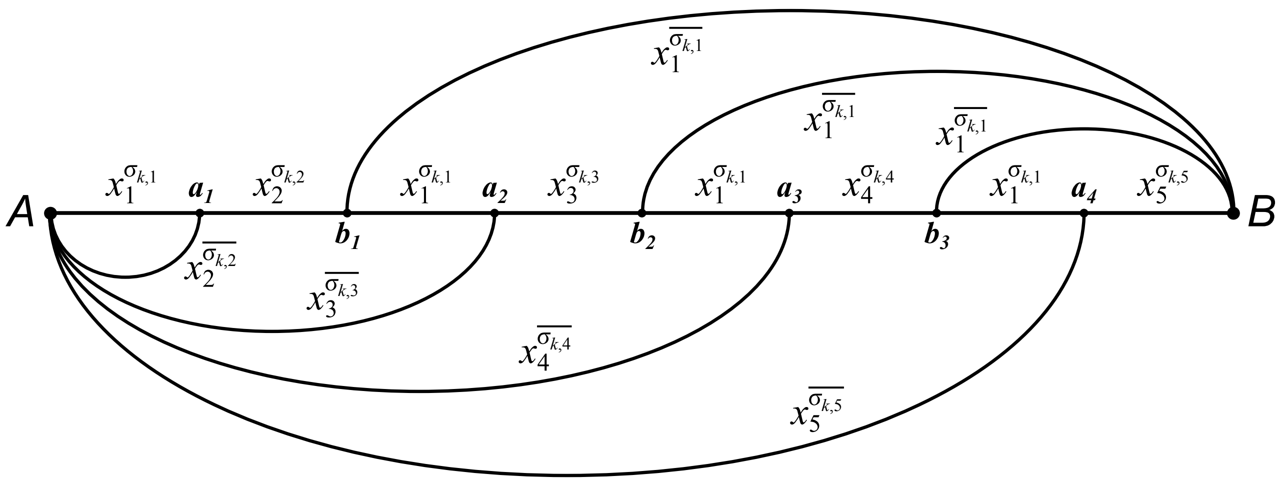

Рис. 2

1. Неисправен контакт $x_1^{\sigma_{k,1}}$, соединяющий вершины A и a_1 схемы S_k. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{2,\overline{\sigma_{k,1}},\sigma_{k,2}}$ цепь $A - x_1^{\sigma_{k,1}} - a_1 - x_2^{\sigma_{k,2}} - b_1 - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k, а значит, и S, выдаст единицу.

2. Неисправен контакт $x_1^{\sigma_{k,1}}$, соединяющий вершины b_{s-1} и a_s схемы S_k для некоторого $s \geqslant 2$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1,\overline{\sigma_{k,1}},\overline{\sigma_{k,s+1}}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s - - x_1^{\sigma_{k,1}} - b_{s-1} - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k, а значит, и S, выдаст единицу.

3. Неисправен контакт $x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}}$, соединяющий вершины b_{s-1} и B схемы S_k для некоторого $s \geqslant 2$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1,\sigma_{k,1},\overline{\sigma_{k,s+1}}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s - - x_1^{\sigma_{k,1}} - b_{s-1} - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k, а значит, и S, выдаст единицу.

4. Неисправен контакт $x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}}$, соединяющий вершины A и a_s схемы S_k для некоторого $s \geqslant 1$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1,\overline{\sigma_{k,1}},\sigma_{k,s+1}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s -$

$-x_{s+1}^{\sigma_{k,s+1}} - b_s - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k, а значит, и S, выдаст единицу.

5. Неисправен контакт $x_{s+1}^{\sigma_{k,s+1}}$, соединяющий вершины a_s и b_s схемы S_k для некоторого $s \geqslant 1$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1,\overline{\sigma_{k,1}},\overline{\sigma_{k,s+1}}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s - -x_{s+1}^{\sigma_{k,s+1}} - b_s - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k, а значит, и S, выдаст единицу.

6. Неисправен контакт $x_n^{\overline{\sigma_{k,n}}}$, соединяющий вершины A и a_{n-1} схемы S_k. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{n,0,\sigma_{k,n}}$ цепь $A - x_n^{\overline{\sigma_{k,n}}} - a_{n-1} - x_n^{\sigma_{k,n}} - B$ будет проводящей и схема S_k, а значит, и S, выдаст единицу.

7. Неисправен контакт $x_n^{\sigma_{k,n}}$, соединяющий вершины a_{n-1} и B схемы S_k. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{n,0,\overline{\sigma_{k,n}}}$ цепь $A - x_n^{\overline{\sigma_{k,n}}} - a_{n-1} - x_n^{\sigma_{k,n}} - B$ будет проводящей и схема S_k, а значит, и S, выдаст единицу.

Получаем, что множество M является единичным проверяющим тестом для неизбыточной схемы S. Его длина равна m, откуда следует неравенство $D_{s,detect}(f) \leqslant m$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Любую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой, содержащей не более одной фиктивной входной переменной и допускающей единичный проверяющий тест замыкания, длина которого не превосходит $2n$, т.е. справедливо неравенство $D_{s,detect}(n) \leqslant 2n$.*

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть булева функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, где $n \geqslant 2$, такова, что для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для неё набор $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$, j-й разряд которого равен β. Тогда для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, существует покрывающее множество M из не более чем $2n$ наборов.*

Доказательство. Множество всех наборов $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$ при $j = 1, \ldots, n$, $\beta = 0, 1$ обозначим через A. Наборы $\tilde{\sigma}_{1,0}$ и $\tilde{\sigma}_{1,1}$ различны, поэтому $|A| \geqslant 2$. Определим множество A' следующим образом. Если $|A| = 2$, то положим $A' = A$, тогда $|A'| = 2 \leqslant n$. Пусть теперь $|A| \geqslant 3$. Возьмём произвольные три попарно различных набора из множества A. Очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух разрядах. Обозначим эти два набора через $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\delta}'$, а номера произвольных двух разрядов, в которых они различаются — через j_1 и j_2. Пусть $\tilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Положим $A' = \{\tilde{\delta}\} \cup \{\tilde{\delta}'\} \cup \{\tilde{\sigma}_{j,\overline{\delta_j}} \,|\, j \in \{1, \ldots, n\},\, j \neq j_1,\, j \neq j_2\}$. Тогда $A' \subseteq A$ и $|A'| \leqslant n$.

Покажем, что для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ в A' найдётся набор, j-й разряд которого равен β (обозначим это свойство через (*)). В случае $|A| = 2$ оно верно в силу равенства $A' = A$ и определения множества A и наборов $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$. Пусть $|A| \geqslant 3$. Если $j = j_1$ или $j = j_2$, то искомый набор найдётся среди наборов $\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta}'$. Пусть теперь $j \neq j_1$ и $j \neq j_2$. Если $\beta = \delta_j$, то в качестве искомого набора можно взять $\tilde{\delta}$. Если же $\beta = \overline{\delta_j}$, то в качестве искомого набора можно взять $\tilde{\sigma}_{j,\overline{\delta_j}}$. Таким образом, свойство (*) выполняется.

Далее, все наборы из множества A' обозначим через $\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_k$, $k \leqslant n$. Тогда $\varphi(\tilde{\delta}_1) = \ldots = \varphi(\tilde{\delta}_k) = 0$ в силу того, что $A' \subseteq A$, и определения множества A. Через $(\tilde{\delta}_s, \alpha)$ будем обозначать набор длины $n+1$, получающийся из набора $\tilde{\delta}_s$ приписыванием к нему в конце булевой константы α. Из определения функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ следует, что $\varphi(\tilde{\delta}_s, \alpha) = \varphi(\tilde{\delta}_s) = 0$ для $\alpha = 0, 1,\ s = 1, \ldots, k$, и множество $M = \{(\tilde{\delta}_s, \alpha) | s = 1, \ldots, k;\ \alpha = 0, 1\}$ будет покрывающим для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Действительно, возьмём произвольные числа $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. В силу свойства (*) во множестве A' найдётся набор $\tilde{\delta}_s$, j-й разряд которого равен β. Тогда набор $(\tilde{\delta}_s, \alpha)$ принадлежит множеству M, его $(n+1)$-й разряд равен α, а j-й разряд — β, откуда следует, что M — покрывающее множество для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ (при $i = n+1$). Оно содержит $2k \leqslant 2n$ наборов. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция от n переменных. Без ограничения общности будем считать, что она существенно зависит от всех своих переменных. (В противном случае можно доказать теорему 2 для функции, получающейся из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ путём изъятия всех её фиктивных переменных, и использовать удовлетворяющую условиям этой теоремы контактную схему, фиктивная входная переменная которой, если она существует, отлична от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$, для реализации самой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$). Если $n = 0$, то функция f — булева константа и её можно реализовать (неизбыточной) контактной схемой, не содержащей ни одного контакта, а в таком случае пустое множество будет единичным проверяющим тестом для этой схемы, длина которого равна $0 \leqslant 2n$, и утверждение теоремы выполнено. Если $n = 1$, то $f = x_1$ или $f = \overline{x_1}$, а каждую из этих функций можно реализовать схемой, содержащей ровно один контакт. У такой схемы есть только одна функция неисправности — тождественная единица, которую можно отличить от исходной функции f на одном наборе. Множество, состоящее из этого набора, будет единичным проверяющим тестом длины $1 \leqslant 2n$ для данной схемы, и утверждение теоремы выполнено. Далее будем считать, что $n \geqslant 2$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ набор, j-й разряд которого равен β. Тогда по

лемме 1 для функции $f(x_1, \ldots, x_n, y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $f(x_1, \ldots, x_n)$, существует покрывающее множество M из $m \leqslant 2n$ наборов. По теореме 1 существует такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n, y)$, что множество M для неё является единичным проверяющим тестом замыкания, а отсюда и из соотношения $|M| = m \leqslant 2n$ следует справедливость теоремы 2. Случай 1 разобран.

2. Отрицание случая 1: пусть для некоторых $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta_1 \in \{0, 1\}$ все двоичные наборы длины n, j_1-й разряд которых равен β_1, являются единичными для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда легко проверить справедливость тождества $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_{j_1}^{\beta_1} \vee f'(x_1, \ldots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_n)$, где $f'(x_1, \ldots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{j_1-1}, \overline{\beta_1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_n)$. Из него следует существование такого максимального натурального числа r, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_{j_1}^{\beta_1} \vee \ldots \vee x_{j_r}^{\beta_r} \vee h, \tag{1}$$

где $j_1, \ldots, j_r$ — попарно различные индексы от 1 до n, $\beta_1, \ldots, \beta_r$ — булевы константы, а h — булева функция от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$, кроме переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$. Так как функция f существенно зависит от всех своих n переменных, то функция h существенно зависит от всех своих $n - r$ переменных и отлична от тождественной единицы. Отсюда, если $n - r = 0$, то $h \equiv 0$. В этом случае функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ в силу (1) представима в виде $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$. Реализуем функцию f контактной схемой, представляющей собой параллельное соединение контактов $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$. Очевидно, что у такой схемы есть только одна функция неисправности — тождественная единица. Множество $\{(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n})\}$ будет единичным проверяющим тестом длины $1 \leqslant 2n$ для этой схемы, и утверждение теоремы выполнено. Далее, пусть $n - r \geqslant 1$. Заметим, что r не может быть равно $n - 1$ в силу (1) и максимальности числа r, поэтому $n - r \geqslant 2$. Переменные функции h обозначим через $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть для некоторых $k \in \{1, \ldots, n - r\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ все двоичные наборы длины $n - r$, k-й разряд которых равен β, являются единичными для функции $h(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n})$. Тогда легко проверить справедливость тождества

$$h(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}) \equiv x_{j_{r+k}}^{\beta} \vee h'(x_{r+1}, \ldots, x_{j_{r+k-1}}, x_{j_{r+k+1}}, \ldots, x_{j_n}), \tag{2}$$

где $h'(x_{r+1}, \ldots, x_{j_{r+k-1}}, x_{j_{r+k+1}}, \ldots, x_{j_n}) = h(x_{r+1}, \ldots, x_{j_{r+k-1}}, \overline{\beta}, x_{j_{r+k+1}}, \ldots, x_{j_n})$. Подставив (2) в правую часть (1), получим противоречие с максимальностью числа r. Таким образом, случай 2.1 невозможен.

2.2. Пусть для любых $k \in \{1, \dots, n-r\}$, $\beta \in \{0,1\}$ существует нулевой для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$ набор, k-й разряд которого равен β. Тогда по лемме 1 для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$, существует покрывающее множество M из $m \leqslant 2(n-r)$ наборов. По теореме 1 существует такая неизбыточная контактная схема S с входными переменными $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y$, реализующая функцию $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y)$, что M для неё является единичным проверяющим тестом. Подсоединим параллельно к схеме S пучок P из контактов $x_{j_1}^{\beta_1}, \dots, x_{j_r}^{\beta_r}$. В силу (1) полученная схема (обозначим её S'; вид этой схемы показан на рис. 3) будет реализовывать булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n, y)$, фиктивно зависящую от переменной y и равную $f(x_1, \dots, x_n)$.

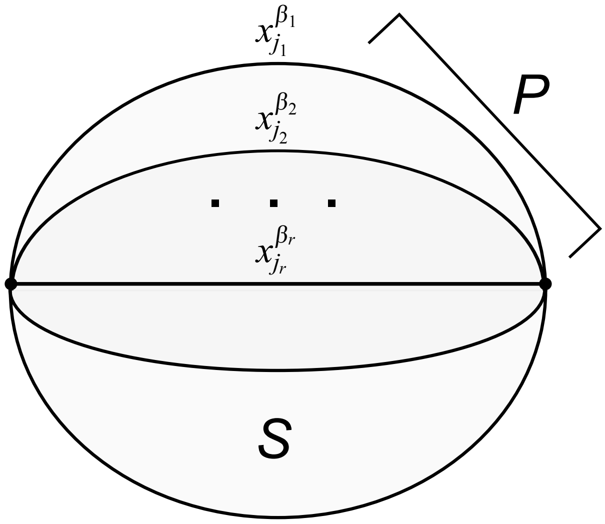

Рис. 3

Каждый набор $\tilde{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{n-r+1})$ из множества M заменим набором $\tilde{\pi}'$ длины $n+1$, у которого в j_s-м разряде при $s = 1, \dots, r$ стоит $\overline{\beta_s}$, при $s = r+1, \dots, n$ стоит π_{s-r}, а в $(n+1)$-м разряде стоит π_{n-r+1}. Получим множество M', содержащее столько же наборов, сколько и M. Покажем, что схема S' неизбыточна и M' для неё является единичным проверяющим тестом. Из определения покрывающего множества следует, что $|M| \geqslant 1$ и, кроме того, каждый набор из множества M является нулевым для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y)$. Отсюда, из (1) и построения схемы S' и множества M' следует, что $|M'| \geqslant 1$ и каждый набор из множества M' является нулевым для функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$.

Предположим вначале, что неисправен какой-то контакт из пучка P. В этом случае функцией неисправности схемы S' будет тождественная единица, а её можно отличить от функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$ на любом наборе из множества M'. Пусть теперь все контакты из пучка P в схеме S' исправны. Тогда неисправным в ней может быть только какой-то контакт в подсхеме S. В силу построения множества M' на каждом наборе $\tilde{\pi}'$ из этого множества функция проводимости каждого контакта из пучка P равна нулю и схема S' функционирует в точности как схема S на наборе $\tilde{\pi}$, из которого был получен набор $\tilde{\pi}'$. Так как M — единичный проверяющий тест для неизбыточной схемы S, то на наборах из множества M' можно обнаружить любую неисправность в подсхеме S схемы S'. Из приведённых рассуждений следует, что схема S' неизбыточна и множество M' для неё является единичным проверяющим тестом. Его длина равна $|M'| = |M| = m \leqslant 2(n-r) \leqslant 2n$, откуда следует справедливость теоремы 2.

Единичные диагностические тесты замыкания

Теорема 3. *Пусть для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geqslant 3$, существуют два непересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2 из m_1 и m_2 наборов соответственно. Тогда $D_{s,diagn}(f) \leqslant m_1 + m_2$, причём существует такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, что множество $M_1 \cup M_2$ для неё является единичным диагностическим тестом замыкания и любая её функция неисправности хотя бы на одном наборе из $M_1 \cup M_2$ равна нулю.*

Из теоремы 3 и утверждения 1 вытекает

Следствие 2. *Для почти всех булевых функций f от n переменных справедливо неравенство $D_{s,diagn}(f) \leqslant 8$.*

Доказательство теоремы 3. Обозначим через I_{M_j}, $j = 1, 2$, булеву функцию от n переменных, равную единице на всех наборах из множества M_j и нулю на всех остальных наборах. На каждом наборе из множества M_2 функции f и I_{M_1}, а значит, и $f \vee I_{M_1}$, обращаются в нуль. Поэтому множество M_2 является покрывающим не только для f, но и для функции $f \vee I_{M_1}$. Аналогично множество M_1 является покрывающим для функции $f \vee I_{M_2}$. Пусть S_1 и S_2 — неизбыточные контактные схемы, реализующие функции соответственно $f \vee I_{M_1}$ и $f \vee I_{M_2}$, для которых множества M_2 и M_1 соответственно являются единичными проверяющими тестами; существование таких схем следует из теоремы 1. Через S обозначим схему, представляющую собой последовательное соединение схем S_1 и S_2. Тогда схема S реализует функцию $(f \vee I_{M_1})\&(f \vee I_{M_2}) = f \vee fI_{M_1} \vee fI_{M_2} \vee I_{M_1}I_{M_2} = f \vee I_{M_1}I_{M_2} = f$, так как $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

Покажем, что схема S неизбыточна, множество $M_1 \cup M_2$ для неё является единичным проверяющим тестом и любая функция неисправности g схемы S равна нулю хотя бы на одном наборе из множества $M_1 \cup M_2$.

Пусть неисправен некоторый контакт в подсхеме S_1. Так как M_2 — единичный проверяющий тест для неизбыточной схемы S_1, то на некотором наборе $\tilde{\sigma} \in M_2$ значение получающейся функции неисправности g_1 схемы S_1 отличается от $(f \vee I_{M_1})(\tilde{\sigma})$. Но $(f \vee I_{M_1})(\tilde{\sigma}) = 0$ в силу того, что все наборы из M_2 — нулевые для функции $f \vee I_{M_1}$, поэтому $g_1(\tilde{\sigma}) = 1$. Тогда функция неисправности g всей схемы S, равная $g_1 \& (f \vee I_{M_2})$, на наборе $\tilde{\sigma}$ принимает значение $1 \& (0 \vee 1) = 1$, в то время как $f(\tilde{\sigma}) = 0$, т.е. функция неисправности схемы S отличается от исходной функции, реализуемой данной схемой, на некотором наборе из множества $M_1 \cup M_2$. С другой стороны, на любом наборе из множества M_1 функции f и I_{M_2}, а значит, и функция $g = g_1 \& (f \vee I_{M_2})$, равны нулю. Аналогично рассматривается случай, когда неисправен некоторый контакт в подсхеме S_2. Получаем, что схема S неизбыточна, $M_1 \cup M_2$ — единичный проверяющий тест для этой схемы и любая её функция неисправности равна нулю хотя бы на одном наборе из множества $M_1 \cup M_2$.

Докажем теперь, что $M_1 \cup M_2$ — единичный диагностический тест для схемы S. Пусть g — произвольная функция неисправности этой схемы, а $\tilde{\delta}$ — произвольный двоичный набор длины n, не принадлежащий множеству $M_1 \cup M_2$. Если $f(\tilde{\delta}) = 1$, то $g(\tilde{\delta}) = 1$ в силу того, что при замыкании любого контакта в схеме S реализуемая этой схемой функция может только увеличиться. Если же $f(\tilde{\delta}) = 0$, то и каждая из функций $f \vee I_{M_1}$, $f \vee I_{M_2}$ на наборе $\tilde{\delta}$ обращается в нуль, так как $\tilde{\delta} \notin M_1 \cup M_2$. Это означает, что каждая из подсхем S_1, S_2 на наборе $\tilde{\delta}$ выдает нуль. Если неисправен какой-то контакт в подсхеме S_1 (S_2), то подсхема S_2 (соответственно S_1), а значит, и вся схема S, на наборе $\tilde{\delta}$ по-прежнему будет выдавать нуль, откуда следует, что любая функция неисправности схемы S на этом наборе обращается в нуль. Поэтому $g(\tilde{\delta}) = 0$. Получаем, что функции f и g принимают одинаковые значения на всех наборах, не принадлежащих множеству $M_1 \cup M_2$. Следовательно, любая функция неисправности схемы S может отличаться от функции f только на наборах из множества $M_1 \cup M_2$. Но тогда любые две различные функции неисправности схемы S могут отличаться друг от друга только на наборах из этого множества и обязаны отличаться хотя бы на одном таком наборе, откуда следует, что $M_1 \cup M_2$ — единичный диагностический тест для схемы S. Его длина равна $m_1 + m_2$, поэтому $D_{s,diagn}(f) \leqslant m_1 + m_2$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Любую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой, содержащей не более двух фиктивных входных переменных и допускающей единичный диагностический тест замыкания, длина которого не превосходит $4n$, т.е. справедливо неравенство $D_{s,diagn}(n) \leqslant 4n$.*

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть булева функция $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, где $n \geqslant 2$, такова, что для любых $j \in \{1,\dots,n\}$, $\beta \in \{0,1\}$ существует нулевой для неё набор $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$, j-й разряд которого равен β. Тогда для функции $\varphi(x_1,\dots,x_n,y,z)$, фиктивно зависящей от переменных y,z и равной $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, существуют два непересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2, каждое из которых содержит не более чем $2n$ наборов.*

Доказательство. Условия леммы 2 совпадают с условиями леммы 1. В ходе доказательства леммы 1 было построено покрывающее для функции $\varphi(x_1,\dots,x_n,y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, множество $M = \{(\tilde{\delta}_s,\alpha)|\, s = 1,\dots,k;\ \alpha = 0,1\}$ (при $i = n+1$), где $k \leqslant n$, все наборы $\tilde{\delta}_1,\dots,\tilde{\delta}_k$ имеют длину n и попарно различны. Из процесса построения этого множества нетрудно заметить, что $k \geqslant 2$. Через $(\tilde{\delta}_s,\alpha,\alpha')$ будем обозначать набор длины $n+2$, получающийся из набора $(\tilde{\delta}_s,\alpha)$ приписыванием к нему в конце булевой константы α'. Пусть $M_1 = \{(\tilde{\delta}_1,0,0)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s,0,1)|s = 2,\dots,k\} \cup \{(\tilde{\delta}_1,1,0)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s,1,1)|s = 2,\dots,k\}$, $M_2 = \{(\tilde{\delta}_1,0,1)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s,0,0)|s = 2,\dots,k\} \cup \{(\tilde{\delta}_1,1,1)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s,1,0)|s = 2,\dots,k\}$. Ясно, что множества M_1 и M_2 не пересекаются и каждое из них содержит $2k \leqslant 2n$ наборов.

Покажем, что оба этих множества являются покрывающими для функции $\varphi(x_1,\dots,x_n,y,z)$. Для любого набора $(\tilde{\delta}_s,\alpha,\alpha') \in M_1$ имеем $\varphi(\tilde{\delta}_s,\alpha,\alpha') = \varphi(\tilde{\delta}_s) = \varphi(\tilde{\delta}_s,\alpha) = 0$, так как $(\tilde{\delta}_s,\alpha) \in M$. Далее, возьмём произвольные числа $j \in \{1,\dots,n\}$, $\alpha,\beta \in \{0,1\}$. Так как M — покрывающее множество при $i = n+1$, то существует набор из M, $(n+1)$-й разряд которого равен α, а j-й разряд —β. Этот набор имеет вид $(\tilde{\delta}_s,\alpha)$. По построению какой-то один из наборов $(\tilde{\delta}_s,\alpha,0)$, $(\tilde{\delta}_s,\alpha,1)$ принадлежит множеству M_1; $(n+1)$-й разряд этого набора равен α, а j-й разряд — β. Наконец, для любых $\alpha,\beta \in \{0,1\}$ в M_1 по построению этого множества содержится набор, $(n+1)$-й разряд которого равен α, а $(n+2)$-й разряд — β. Всё вышесказанное позволяет утверждать, что множество M_1 является покрывающим для функции $\varphi(x_1,\dots,x_n,y,z)$. Аналогичные рассуждения можно провести и для множества M_2. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Без ограничения общности будем считать, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных (см. комментарий в скобках в начале доказательства теоремы 2). Если $n = 0$, то функция f — булева константа и её можно реализовать контактной схемой, не содержащей ни одного контакта, а в таком случае пустое множество будет единичным диагностическим тестом для этой схемы, длина которого равна $0 \leqslant 4n$, и утверждение теоремы выполнено. Если $n = 1$, то $f = x_1$ или $f = \overline{x_1}$, а каждую из этих функций можно реализовать схемой, содержащей ровно один контакт. У такой схемы есть только одна функция неисправности — тождественная единица, которую можно отличить от исходной функции f на одном наборе. Множество, состоящее из этого набора, будет единичным диагностическим тестом длины $1 \leqslant 4n$ для данной схемы, и утверждение теоремы выполнено. Далее будем считать, что $n \geqslant 2$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ набор, j-й разряд которого равен β. Тогда по лемме 2 для функции $f(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, фиктивно зависящей от переменных y, z и равной $f(x_1, \ldots, x_n)$, существуют два непересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2 из m_1 и m_2 наборов соответственно, где $m_1 \leqslant 2n$ и $m_2 \leqslant 2n$. По теореме 3 существует такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, что множество $M_1 \cup M_2$ для неё является единичным диагностическим тестом замыкания, а отсюда и из соотношения $|M_1 \cup M_2| = m_1 + m_2 \leqslant 2n + 2n = 4n$ следует справедливость теоремы 4. Случай 1 разобран.

2. Отрицание случая 1: пусть для некоторых $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta_1 \in \{0, 1\}$ все двоичные наборы длины n, j_1-й разряд которых равен β_1, являются единичными для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Эти условия совпадают с условиями случая 2 из доказательства теоремы 2. Дословно повторяем рассуждения из разбора указанного случая вплоть до окончания разбора случая 2.1 с заменой понятия "единичный проверяющий тест" на понятие "единичный диагностический тест" и неравенства $1 \leqslant 2n$ на неравенство $1 \leqslant 4n$. Получаем, что достаточно доказать теорему 4 в случае, условия которого совпадают с условиями случая 2.2 из доказательства теоремы 2. А именно, пусть для любых $k \in \{1, \ldots, n - r\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для функции $h(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n})$ набор, k-й разряд которого равен β, где $h(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n})$ — функция, участвующая в правой части представления (1) для максимально возможного натурального r, существенно зависящая от всех своих переменных, и $n - r \geqslant 2$. Тогда по лемме 2 для функции $h(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}, y, z)$, фиктивно зависящей от переменных y, z и равной $h(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n})$, существуют два непересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2, каждое из которых содержит не более чем $2(n - r)$ наборов.

По теореме 3 существует такая неизбыточная контактная схема S с входными переменными $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}, y, z$, реализующая функцию $h(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}, y, z)$, что множество $M = M_1 \cup M_2$ для неё является единичным диагностическим тестом и любая её функция неисправности хотя бы на одном наборе из M равна нулю (последнее утверждение обозначим через (**)). Подсоединим параллельно к схеме S пучок P из контактов $x_{j_1}^{\beta_1}, \dots, x_{j_r}^{\beta_r}$. В силу (1) полученная схема (обозначим её S') будет реализовывать булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$, фиктивно зависящую от переменных y, z и равную $f(x_1, \dots, x_n)$. Схема S' имеет такой же вид, что и схема S', построенная при разборе случая 2.2 в доказательстве теоремы 2 и изображенная на рис. 3, но подсхема S в них устроена по-разному.

Каждый набор $\tilde{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{n-r+2})$ из множества M заменим набором $\tilde{\pi}'$ длины $n+2$, у которого в j_s-м разряде при $s = 1, \dots, r$ стоит $\overline{\beta_s}$, при $s = r+1, \dots, n$ стоит π_{s-r}, в $(n+1)$-м разряде стоит π_{n-r+1}, а в $(n+2)$-м разряде — π_{n-r+2}. Получим множество M', содержащее столько же наборов, сколько и M. Покажем, что схема S' неизбыточна и M' для неё является единичным диагностическим тестом. Из определения покрывающего множества следует, что $|M| \geqslant 1$ и, кроме того, каждый набор из множества M является нулевым для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y, z)$. Отсюда, из (1) и построения схемы S' и множества M' следует, что $|M'| \geqslant 1$ и каждый набор из множества M' является нулевым для функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$.

Пусть $g_1(x_1, \dots, x_n, y, z)$, $g_2(x_1, \dots, x_n, y, z)$ — две произвольные (не обязательно различные) функции неисправности схемы S', каждая из которых возникает при неисправности какого-то контакта в подсхеме S. В силу построения множества M' на каждом наборе $\tilde{\pi}'$ из этого множества функция проводимости каждого контакта из пучка P равна нулю и схема S' функционирует в точности как схема S на наборе $\tilde{\pi}$, из которого был получен набор $\tilde{\pi}'$ (обозначим это утверждение через (***)). Так как M — единичный диагностический тест для неизбыточной схемы S, то функцию g_1 можно отличить от функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$ и от g_2 (если $g_1 \not\equiv g_2$) на наборах из множества M'. Кроме того, из (**) и (***) следует, что функция g_1 равна нулю хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из множества M'.

Предположим теперь, что все контакты в подсхеме S исправны. Тогда неисправным может быть только какой-то контакт из пучка P. В этом случае функцией неисправности схемы S' будет тождественная единица; её можно отличить от функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$ на любом наборе из множества M', а от функции g_1 — на наборе $\tilde{\sigma} \in M'$. Так как в качестве g_1, g_2 можно взять произвольные функции неисправности схемы S', каждая из которых возникает при неисправности какого-то контакта в подсхеме S, то из приведённых рассуждений следует, что схема S' неизбыточна и множество M' для неё является единичным диагностическим тестом. Его длина равна $|M'| = |M| = |M_1| + |M_2| \leqslant 2(n-r) + 2(n-r) \leqslant 4n$, откуда следует справедливость теоремы 4.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Список литературы

1. Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

2. Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т.51. — С. 270–360.

3. Яблонский С.В. Надёжность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

4. Яблонский С.В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

5. Редькин Н.П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

7. Романов Д.С. О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты // Учёные записки Казанского университета. Физико-математические науки. — 2014. — Т. 156, кн. 3. — С. 110–115.

8. Мадатян Х.А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука,1970. — С. 103–118.

9. Редькин Н.П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. — Т. 39. — Новосибирск, 1983. — С. 80–87.

10. Редькин Н.П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. — Вып. 40. — Новосибирск, 1983. — С. 87–99.

Оглавление