ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 139 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 139. 20 с. doi:10.20948/prepr-2016-139
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-139

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К. А. Попков

Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов

Москва — 2016

Попков К. А.

Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов

Получены нетривиальные нижние оценки длин минимальных единичных проверяющих и диагностических тестов для схем из функциональных элементов в широких классах базисов при однотипных и произвольных константных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, неисправность, единичный проверяющий тест, единичный диагностический тест

Kirill Andreevich Popkov

Lower bounds on lengths of single tests for logic circuits

Nontrivial lower bounds on lengths of the minimal single fault detection and diagnostic tests for logic circuits in wide classes of bases in presence of one-type or arbitrary constant faults on outputs of gates are obtained.

Key words: logic circuit, fault, single fault detection test, single diagnostic test

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Оглавление

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию электрических схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]; этот подход также применим к тестированию схем из функциональных элементов (см. [2, 3, 4]). Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно элементов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один элемент. Единичные тесты обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом*.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов, B — произвольный функционально полный базис и T — единичный проверяющий тест (ЕПТ) для некоторой схемы S в базисе B. Введём следующие обозначения: $D^B_{s,detect}(T)$ — длина теста T; $D^B_{s,detect}(S) = \min D^B_{s,detect}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для схемы S; $D^B_{s,detect}(f) = \min D^B_{s,detect}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D^B_{s,detect}(n) = \max D^B_{s,detect}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $D^B_{s,detect}(f)$. Функция $D^B_{s,detect}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ЕПТ. По аналогии с функциями $D^B_{s,detect}$ можно ввести функции $D^B_{s,diagn}$, $D^B_{c,detect}$ и $D^B_{c,diagn}$ для соответственно единичного диагностического теста (ЕДТ), полного проверяющего и полного диагностического тестов, зависящие от T, от S, от f и от n (в определениях функций $D^B_{c,detect}(f)$ и $D^B_{c,diagn}(f)$ не требуется предполагать неизбыточность схем). Так, например, $D^B_{c,diagn}(n)$ — функция Шеннона длины полного диагностического теста.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования схем из функциональных элементов. Класс допустимых неисправностей функциональных элементов ограничим константными неисправностями на выходах элементов, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно некоторой булевой константе. Неисправности на выходах элементов называются однотипными константными типа p, если эта константа одна и та же для каждого неисправного элемента и равна p, и произвольными константными, если эта константа может быть равна как 0, так и 1 для каждого неисправного элемента независимо от неисправностей других элементов. Для удобства над буквой D после символов, обозначающих базис, через точку с запятой будем ставить символы «$0,1$», «0» или «1» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности, однотипные константные неисправности типа 0 или типа 1 на выходах элементов. Вполне разумно предполагать, что если в базисе содержится булева константа α, то у элемента, её реализующего, не может быть неисправности типа α.

В работе С. М. Редди [5] для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ была получена оценка $D^{B_1;\,0,1}_{s,detect}(n) \leqslant n + 3$. В дальнейшем результат работы [5] был обобщён С. С Колядой в [6] на случай произвольного функционально полного конечного базиса. Последний результат, в свою очередь, был впоследствии усилен Д. С. Романовым, который в [7] для любого функционально полного базиса B получил оценку $D^{B;\,0,1}_{s,detect}(n) \leqslant 4$ (правда, в указанной работе использовалось несколько другое определение неизбыточных схем). Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин в [8, 9] для любого полного конечного базиса B_2 получил оценку $D^{B_2;\,0,1}_{c,detect}(n) \leqslant$ $\leqslant 2\left(2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} + 2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil} + n\right)$; Д. С. Романов в [10] доказал, что существует базис B_3, содержащий функциональные элементы с числом входов от одного до семи, в котором $2 \leqslant D^{B_3;\,0,1}_{c,detect}(n) \leqslant 4$. В [4, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что для любого полного базиса B функция $D^{B;\,0,1}_{s,diagn}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$;

аналогично можно показать, что $D^{B;\,p}_{s,diagn}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, $p = 0,1$. Для базиса $B_4 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [11, 12] получил оценки $D^{B_4;\,p}_{c,detect}(n) \leqslant n$ и $D^{B_4;\,p}_{s,diagn}(n) \leqslant 2n+1$ для $p = 0,1$. Первая из этих двух оценок впоследствии была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [13] установила, что $D^{B_4;\,p}_{c,detect}(n) = 2$; вторая оценка улучшена в [14], где, в частности, доказано, что $D^{B_4;\,p}_{s,diagn}(n) = 2$. Ю. В. Бородиной в базисе Жегалкина B_1 удалось найти точное значение функций Шеннона $D^{B_1;\,1}_{s,detect}(n) = 1$ [15] и $D^{B_1;\,0}_{c,detect}(n) = 1$ [16] (совместно с П. А. Бородиным). В работе [17], в частности, установлено равенство $D^{B_1;\,0}_{s,diagn}(n) = 2$.

Поскольку в данной работе будут рассматриваться только единичные тесты, вместо нижних индексов $s, detect$ и $s, diagn$ у буквы D будем писать соответственно $detect$ и $diagn$.

Через P_2 будем обозначать множество всех булевых функций, через M — множество всех монотонных булевых функций (определение монотонной булевой функции можно найти, например, в [18, с. 36]). Вместо «вход схемы S (элемента E), отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход „x_i“схемы S (соответственно элемента E)».

Будем говорить, что функциональный элемент E' расположен в схеме S *выше* (*ниже*) функционального элемента E, если в ней существует ориентированный путь от E' к E (соответственно от E к E').

Ограничимся рассмотрением только таких схем из функциональных элементов, в которых выход каждого элемента, не являющегося выходным, соединён хотя бы с одним входом хотя бы одного элемента, т.е. нет «висячих» элементов. В противном случае все «висячие» элементы схемы можно было бы удалить и это никак не сказалось бы на функции, реализуемой схемой, множестве функций неисправности данной схемы и её неизбыточности, если исходная схема была неизбыточна. Кроме того, будем считать, что каждый функциональный элемент, реализующий некоторую булеву функцию (от значений, подаваемых на его входы) из произвольного рассматриваемого нами базиса, имеет столько входов, сколько существенных переменных у этой функции. Это предположение также не ограничивает общности по похожим соображениям.

Замечание 1. В [6, теорема 3] доказано, что для любой неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 3$, и для любого функционально полного конечного базиса B_2 справедливо неравенство $D^{B_2;\,0,1}_{s,detect}(f) \leqslant n+3$; в частности, существует неизбыточная (относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов) схема в базисе B_2, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$. Тогда и для любого (не обязательно конечного) функционально полного базиса B существует неизбыточная схема в этом базисе, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, поскольку из любой полной системы булевых функций можно выделить конечную полную подсистему (см., например, [18, с. 41, теорема 8]), причём эта схема, очевидно, будет неизбыточной и относительно однотипных константных неисправностей типа 0 и типа 1 на выходах элементов. Отсюда следует, что при $n \geqslant 3$ определены значения функций $D_{detect}^{B;\,0,1}(n)$, $D_{detect}^{B;\,0}(n)$, $D_{detect}^{B;\,1}(n)$, где B — произвольный функционально полный базис, а также значения девяти аналогичных функций, получаемых из данных заменой нижнего индекса $detect$ на $diagn$ и/или заменой аргумента n на f, где f — произвольная неконстантная булева функция от n переменных.

Формулировки и доказательства основных результатов

Пусть B_5, B_5^* — произвольные функционально полные подмножества множеств $(M \cup \{\overline{x_1} \vee h \mid h \in P_2\}) \setminus \{1\}$, $(M \cup \{\overline{x_1} \& h \mid h \in P_2\}) \setminus \{0\}$ соответственно.

Теорема 1. *Для любого* $n \geqslant 3$ *справедливы неравенства* $D_{detect}^{B_5;\,1}(n) \geqslant 2$, $D_{detect}^{B_5^*;\,0}(n) \geqslant 2$. *Такие же неравенства справедливы и при* $n = 2$, *если значения их левых частей определены.*

Доказательство. Докажем первое неравенство. Вместо $D_{detect}^{B_5;\,1}(n)$, $D_{detect}^{B_5;\,1}(f)$ для краткости будем писать соответственно $D(n)$, $D(f)$. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными Ю. В. Бородиной [13, с. 43, теорема 3] при получении оценки $D(n) \geqslant 2$. Пусть $n \geqslant 2$ и $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \ldots \overline{x_n}$. Предположим, что существует неизбыточная схема S в базисе B_5, реализующая функцию f и допускающая ЕПТ, состоящий из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$ (считаем, что в данной схеме допускаются только константные неисправности типа 1 на выходах элементов). Тогда на этом наборе значения на выходах всех элементов схемы S равны 0. Действительно, если бы значение на выходе некоторого элемента схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ было равно 1, то при неисправности этого элемента на наборе $\tilde{\sigma}$ данная схема по-прежнему выдавала бы значение $f(\tilde{\sigma})$; однако это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — ЕПТ для неизбыточной схемы S.

Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Заметим, что хотя бы одно из чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ равно 0, так как в противном случае значение на выходе выходного элемента схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ было бы равно $f(\tilde{\sigma}) = f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}) = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma_1 = 0$. В схеме S должен присутствовать хотя бы один элемент, реализующий функцию вида $\overline{x_1} \vee h$, $h \in P_2$, так как в противном случае все элементы схемы S реализовывали бы монотонные функции, однако функция f немонотонна. Пусть E

— произвольный функциональный элемент из схемы S, реализующий функцию указанного вида. Его вход «x_1» не может соединяться с выходом другого функционального элемента E' или со входом «x_1» схемы S, так как в противном случае значение на выходе элемента E' (соответственно на входе «x_1» схемы S) на наборе $\tilde{\sigma}$ в схеме S должно было быть равно 0, а тогда значение на выходе элемента E на этом же наборе равнялось бы $\overline{0} \vee \ldots = 1$, что невозможно. Поэтому вход «x_1» любого элемента схемы S, реализующего функцию вида $\overline{x_1} \vee h$, $h \in P_2$, соединяется с одним из входов «x_2»,…,«x_n» схемы S.

Предположим, что на каждый такой вход схемы S подано значение 0. Тогда на выходе каждого элемента схемы S, реализующего функцию указанного вида, будет реализована функция $\overline{0} \vee \ldots \equiv 1$, а на выходе любого другого элемента схемы S — некоторая монотонная функция. Поэтому итоговая функция, реализуемая схемой S, должна быть монотонной, но она равна $f(x_1, 0, \ldots, 0) = \overline{x_1}$. Полученное противоречие означает, что $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 2$, если значения величин $D(n)$, $D(f)$ определены (а при $n \geqslant 3$ они определены — см. замечание 1), что и требовалось доказать.

Неравенство $D_{detect}^{B_5^*;\,0}(n) \geqslant 2$ следует из доказанного неравенства по принципу двойственности (см., например, [18, с. 24]; достаточно считать, что в схеме S все элементы заменены на двойственные). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $B_5' \subseteq (M \cup \{\overline{x_1} \vee h \mid h \in P_2\}) \setminus \{1\}$*,* $B_5'^* \subseteq (M \cup \{\overline{x_1} \& \&h \mid h \in P_2\}) \setminus \{0\}$ *— такие функционально полные базисы, что отождествлением и переименованием переменных из монотонных функций этих базисов можно получить функции* $x_1 \& x_2$ *и* $x_1 \vee x_2$*. Тогда для любого* $n \geqslant 2$ *справедливы равенства* $D_{detect}^{B_5';\,1}(n) = D_{detect}^{B_5'^*;\,0}(n) = 2$.

Доказательство. Вместо $D_{detect}^{B_5';\,1}(n)$ для краткости будем писать $D(n)$. Докажем при $n \geqslant 2$ равенство $D(n) = 2$ (равенство $D_{detect}^{B_5'^*;\,0}(n) = 2$ доказывается двойственным образом). Считаем, что в схемах допускаются только константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Неравенство $D(n) \geqslant 2$, если значение $D(n)$ определено, следует из теоремы 1. Из условия теоремы 2 вытекает, что путём отождествления некоторых входов некоторых функциональных элементов, реализующих монотонные функции из базиса B_5', можно получить двухвходовые элементы, реализующие функции $x_1 \& x_2$ и $x_1 \vee x_2$ (где x_1 и x_2 — значения, подаваемые на их входы) и допускающие только неисправность типа 1 на их выходах. Поэтому можно считать, что $x_1 \& x_2 \in B_5'$ и $x_1 \vee x_2 \in B_5'$. Рассмотрим два случая.

1. В базисе B_5' содержится функция вида $\overline{x_1} \vee h(x_1, \ldots, x_m)$, где $m \in \mathbb{N}$

и $h(\underbrace{1,\ldots,1}_{m}) = 0$. Тогда легко проверить, что $\overline{x_1} \vee h(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{m}) \equiv \overline{x_1}$, следовательно, отождествлением всех входов функционального элемента, реализующего функцию указанного вида, можно получить одновходовой элемент, реализующий функцию $\overline{x_1}$. Аналогично написанному выше можно считать, что $\overline{x_1} \in B_5'$, а тогда $B_4 = \{x_1\&x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x_1}\} \subseteq B_5'$ и $D(n) \leqslant 2$ при $n \geqslant 2$ (в частности, значение $D(n)$ определено) в силу теоремы 2 работы [13] (отметим, что при доказательстве этой теоремы использовались схемы в базисе B_4, неизбыточные относительно константной неисправности типа 1 любого одного элемента, за исключением схемы, реализующей константу 1 — это видно из самого доказательства).

2. Отрицание случая 1: для каждой функции вида $\overline{x_1} \vee h(x_1,\ldots,x_m)$, где $m \in \mathbb{N}$, из базиса B_5' выполнено равенство $h(\underbrace{1,\ldots,1}_{m}) = 1$. Тогда и $(\overline{x_1} \vee h(x_1,\ldots,x_m))(\underbrace{1,\ldots,1}_{m}) = 1$. Поскольку B_5' — функционально полный базис, в нём должна существовать функция, не принадлежащая классу T_1 (см. [18, с. 40, теорема 7]; определение класса T_1 см., например, в [18, с. 34]), причём эта функция, как было показано выше, не может иметь вид $\overline{x_1} \vee h(x_1,\ldots,x_m)$ и, следовательно, монотонна. Единственной монотонной функцией, не принадлежащей классу T_1, является тождественный нуль, поэтому

$$0 \in B_5'. \tag{1}$$

Кроме того, в базисе B_5' должна существовать хотя бы одна немонотонная функция f_M, и она, очевидно, имеет вид $\overline{x_1} \vee h(x_1,\ldots,x_m)$, где $m \in \mathbb{N}$. Если $m = 1$, то, учитывая, что $h(1) = 1$, имеем $f_M = \overline{x_1} \vee h(x_1) \equiv 1$, что невозможно. Поэтому $m \geqslant 2$, а тогда легко видеть, что $f_M \equiv \overline{x_1} \vee h(1, x_2, \ldots, x_m) \equiv \overline{x_1} \vee h'(x_2,\ldots,x_m)$, где $h'(x_2,\ldots,x_m) = h(1, x_2,\ldots,x_m)$ и

$$h'(\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1}) = 1, \tag{2}$$

но $h'(x_2,\ldots,x_m) \not\equiv 1$.

Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный двоичный набор длины $m-1$, для которого $h'(\tilde{\sigma}) = 0$. Без ограничения общности $\tilde{\sigma} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k},\underbrace{0,\ldots,0}_{m-k-1})$, где $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда легко проверить соотношение

$$f_M(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k+1},\underbrace{0,\ldots,0}_{m-k-1}) \equiv \overline{x_1} \vee h'(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k},\underbrace{0,\ldots,0}_{m-k-1}) \equiv \overline{x_1} \tag{3}$$

(для этого достаточно подставить в правое тождество формулы (3) поочерёдно 0 и 1).

Пусть $S_\neg$ — схема в базисе B_5', состоящая из функционального элемента E, реализующего функцию $f_M(x_1,\ldots,x_m)$, левый $k+1$ вход которого соединяется со входом «x_1» схемы, а правые $m-k-1$ входов — с выходом одного и того же элемента E_0, реализующего константу 0 (такой элемент существует в силу (1)). На выходе схемы $S_\neg$ реализуется функция $\overline{x_1}$ (см. (3)). При неисправности элемента E на выходе схемы $S_\neg$ возникнет тождественная единица, а при неисправности элемента E_0 — функция

$$f_M(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k+1},\underbrace{1,\ldots,1}_{m-k-1}) \equiv \overline{x_1} \vee h'(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k},\underbrace{1,\ldots,1}_{m-k-1}) \equiv 1$$

в силу (2). Таким образом, схема $S_\neg$ реализует функцию $\overline{x_1}$ и имеет единственную функцию неисправности — тождественную единицу, поэтому можно считать, что $\overline{x_1} \in B_5'$. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют рассуждения из случая 1. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим произвольный функционально полный конечный базис B_2. Пусть $m(B_2)$ — максимальное число существенных переменных у функций из этого базиса, тогда $m(B_2) \geqslant 2$.

Теорема 3. *Для любых $n > m(B_2)$, $p \in \{0,1\}$ справедливо неравенство $D^{B_2;\,p}_{diagn}(n) \geqslant 2$, причём доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D^{B_2;\,p}_{diagn}(f) \geqslant 2$, стремится к 1 с ростом n.*

Доказательство. Рассмотрим случай $p=1$ (случай $p=0$ рассматривается двойственным образом), т.е. будем считать, что в схемах допускаются только однотипные константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Вместо $m(B_2)$, $D^{B_2;\,1}_{diagn}(n)$, $D^{B_2;\,1}_{diagn}(f)$ для краткости будем писать соответственно m, $D(n)$, $D(f)$. Пусть $n > m$ и $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная не тождественно нулевая булева функция, такая, что при подстановке вместо произвольных её m переменных произвольных булевых констант получающаяся функция отлична от тождественной единицы. Тогда функция f отлична от констант и переменных. В качестве $f(\tilde{x}^n)$ можно взять, например, функцию $x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n$. Предположим, что существует неизбыточная схема S в базисе B_2, реализующая функцию f и допускающая ЕДТ, состоящий из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$. Ясно, что в схеме S содержится выходной элемент, причём на выходе этого элемента реализуется неконстантная булева функция. Среди всех элементов схемы S, на выходах которых реализуются неконстантные булевы функции, выберем произвольный «верхний» элемент E, выше которого в схеме S нет элементов с таким свойством (это можно сделать, так как данная схема конечна и не содержит ориентированных циклов). Пусть элемент E имеет k входов и реализует булеву функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, где $x_1, \ldots, x_k$ — значения, подаваемые на эти входы. Отметим, что $k \leqslant m$.

Согласно выбору элемента E, каждый его вход в схеме S соединён либо с каким-то входом схемы S, либо с выходом элемента, реализующего булеву константу. Поэтому на выходе элемента E в схеме S реализуется булева функция $\varphi(y_1, \ldots, y_k)$, где $y_1, \ldots, y_k \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n\}$. Эта функция зависит от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, где $s \leqslant k \leqslant m < n$, а $i_1, \ldots, i_s$ — попарно различные индексы от 1 до n, и отлична от констант в силу выбора элемента E; обозначим её $\psi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$. Пусть $(\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_s})$ — произвольный булев набор, на котором указанная функция принимает значение 1. По свойству функции $f(\tilde{x}^n)$ при подстановке вместо её переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ констант соответственно $(\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_s})$ получающаяся функция отлична от тождественной единицы, поэтому существует такой булев набор $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ (со значениями $\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_s}$ соответственно в i_1-м,…,i_s-м разрядах), что $f(\tilde{\pi}) = 0$. На этом наборе значение на выходе элемента E равно 1. Тогда при неисправности элемента E схема S на наборе $\tilde{\pi}$ по-прежнему будет выдавать значение $f(\tilde{\pi}) = 0$, т.е. $g(\tilde{\pi}) = 0$, где $g(\tilde{x}^n)$ — функция неисправности схемы S, получающаяся при неисправности элемента E. При неисправности выходного элемента данной схемы получающаяся её функция неисправности тождественно равна единице.

Так как схема S неизбыточна, то $f \not\equiv g$ и $f \not\equiv 1$; кроме того, $g \not\equiv 1$, поскольку $g(\tilde{\pi}) = 0$. Таким образом, функции f, g и 1 попарно различны. На наборе $\tilde{\sigma}$ по крайней мере две из них принимают одинаковое значение, однако это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — ЕДТ для схемы S. Полученное противоречие означает, что $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 2$ (отметим, что в силу замечания 1 и соотношения $n > m \geqslant 2$ значения $D(n)$ и $D(f)$ определены).

Пусть R_n — множество булевых функций f от n переменных, для которых указанное в начале доказательства теоремы свойство не выполняется, т.е. множество таких булевых функций от n переменных, каждая из которых либо равна тождественному нулю, либо при подстановке вместо некоторых m переменных некоторых булевых констант становится равна тождественной единице. Оценим сверху величину $|R_n|$. Пусть $j_1, \ldots, j_m$ — произвольные индексы от 1 до n такие, что $j_1 < \ldots < j_m$; $\delta_1, \ldots, \delta_m$ — произвольные булевы константы. Каждая булева функция от n переменных, обращающаяся в тождественную единицу при подстановке вместо её переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ констант соответственно $\delta_1, \ldots, \delta_m$, принимает значение 1 на 2^{n-m} наборах, j_1-я,…,j_m-я компоненты которых равны соответственно $\delta_1, \ldots, \delta_m$, и может принимать произвольные значения на остальных $2^n - 2^{n-m}$ наборах, поэтому число таких функций равно $2^{2^n - 2^{n-m}}$. Кроме того, $0 \in R_n$. Тогда

$$|R_n| \leqslant 1 + \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < \\ < \ldots < j_m \leqslant n}} \sum_{\substack{\delta_1, \ldots, \delta_m \in \\ \in \{0,1\}}} 2^{2^n - 2^{n-m}} = 1 + C_n^m \cdot 2^m \cdot 2^{2^n - 2^{n-m}} \leqslant 2^{2^n - 2^{n-m} + n + m + 1}.$$

Для любой из $2^{2^n} - |R_n|$ булевых функций f от n переменных, не принадлежащих множеству R_n, указанное в начале доказательства теоремы свойство выполняется и по доказанному $D(f) \geqslant 2$. Поэтому доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D(f) \geqslant 2$, не меньше

$$\frac{2^{2^n} - |R_n|}{2^{2^n}} \geqslant 1 - \frac{2^{2^n - 2^{n-m} + n + m + 1}}{2^{2^n}} = 1 - 2^{-2^{n-m} + n + m + 1} \to 1 \;\; (n \to \infty).$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Неравенство $D_{diagn}^{B_2;\,p}(n) \geqslant 2$ из теоремы 3, где B_2 — произвольный функционально полный конечный базис, а $p \in \{0, 1\}$, в общем случае неулучшаемо. Например, в классическом базисе B_4 имеют место равенства $D_{diagn}^{B_4;\,1}(n) = D_{diagn}^{B_4;\,0}(n) = 2$, а в базисе Жегалкина B_1 — равенство $D_{diagn}^{B_1;\,0}(n) = 2$, как показано соответственно в [14] и [17].

Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов. Произвольный элемент E этой схемы будем называть *разделяющим*, если любая цепочка, соединяющая любой элемент, расположенный в этой схеме выше элемента E, с выходом схемы S, проходит через элемент E.

Лемма 1. *Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов, неизбыточная относительно однотипных константных неисправностей типа 0 или 1 или произвольных константных неисправностей на выходах элементов; T — произвольный ЕПТ для этой схемы; E — произвольный разделяющий элемент схемы S; S' — подсхема схемы S, получающаяся из неё удалением всех элементов, расположенных в схеме S не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E. Тогда схема S' неизбыточна относительно неисправностей такого же типа и множество T является для неё ЕПТ.*

Доказательство. Пусть E' — произвольный элемент, содержащийся в схеме S', тогда он содержится и в схеме S. Так как T — ЕПТ для неизбыточной схемы S, то в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором значение на выходе схемы S при неисправности элемента E' изменится. Тогда на этом наборе при указанной неисправности изменится и значение на выходе элемента E. Действительно, в противном случае переход элемента E' в неисправное состояние никак не отразился бы на значении, выдаваемой схемой S на наборе $\tilde{\sigma}$, что невозможно. Таким образом, при указанной неисправности изменится значение на выходе схемы S', откуда следует, что эта схема неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим в качестве базиса B_6 произвольное функционально полное подмножество множества $\{(x_1\&\overline{x_2}\&h)^\delta, (x_1^\sigma\&\ldots\&x_n^\sigma)^\delta, x_1\oplus x_2\oplus c \mid h\in$ $\in P_2; n\in\mathbb{N}; \sigma,\delta,c\in\{0,1\}\}$, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на выходах элементов.

Элементы, реализующие функции вида $(x_1^\sigma\&\ldots\&x_n^\sigma)^\delta$, где $\sigma,\delta\in\{0,1\}$, будем называть *обобщёнными конъюнкторами I типа*; вида $(x_1\&\overline{x_2}\&h)^\delta$, где $h\in P_2$, $\delta\in\{0,1\}$ — *обобщёнными конъюнкторами II типа*; вида $x_1\oplus$ $\oplus\, x_2\oplus c$, где $c\in\{0,1\}$ — *сумматорами*.

Отметим, что в качестве базиса B_6 можно взять произвольный функционально полный базис (с точностью до переименования переменных), состоящий из функций не более чем от двух переменных.

Теорема 4. *При $n\geqslant 3$ справедливо неравенство $D_{detect}^{B_6;\,0,1}(n)\geqslant 3$, причём доля тех функций f от n переменных, для которых $D_{detect}^{B_6;\,0,1}(f)\geqslant 3$, стремится к 1 с ростом n.*

Доказательство. Вместо $D_{detect}^{B_6;\,0,1}(f)$, $D_{detect}^{B_6;\,0,1}(n)$ для краткости будем писать соответственно $D(f)$, $D(n)$. Пусть $n\geqslant 3$ и $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, такая, что при подстановке вместо любой её переменной любой булевой константы получается нелинейная булева функция (определение линейной булевой функции см., например, в [18, с. 33]). В качестве $f(\tilde{x}^n)$ можно взять, скажем, функцию $x_1x_2\ldots x_n\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\ldots\overline{x_n}$. В силу замечания 1 и неравенства $n\geqslant 3$ значения $D(f)$ и $D(n)$ определены. Докажем, что $D(f)\geqslant 3$. Для этого достаточно доказать, что $|T|\geqslant 3$, где T — произвольный ЕПТ для произвольной неизбыточной схемы S в базисе B_6, реализующей функцию f. Рассмотрим два случая.

1. В схеме S найдётся функциональный элемент, входы которого соединены с выходами по крайней мере двух различных функциональных элементов. Среди всех элементов с таким свойством выберем произвольный «нижний» элемент E, ниже которого в схеме S не существует элемента с указанным свойством. Очевидно, что входы каждого элемента, расположенного в схеме S ниже элемента E, соединены с выходом ровно одного функционального элемента и, как следствие, E — разделяющий элемент. Рассмотрим три подслучая.

1.1. Элемент E — сумматор. Пусть его входы соединены в схеме S с выходами элементов E_1 и E_2, на которых в случае исправности всех элементов схемы S реализуются булевы функции φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда на выходе элемента E в схеме S реализуется функция $\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c$, где $c \in \{0, 1\}$. Чтобы обнаружить неисправность типа 0 (1) на выходе элемента E_1, в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\pi}_1$ ($\tilde{\pi}_2$), для которого $\varphi_1(\tilde{\pi}_1) = 1$ (соответственно $\varphi_1(\tilde{\pi}_2) = 0$). Отсюда $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$. Если $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) = \varphi_2(\tilde{\pi}_2)$, то неисправность типа $\varphi_2(\tilde{\pi}_1)$ на выходе элемента E_2 нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, откуда $|T| \geqslant 3$. Если же $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) \neq \varphi_2(\tilde{\pi}_2)$, то

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c)(\tilde{\pi}_1) = 1 \oplus \varphi_2(\tilde{\pi}_1) \oplus c = 0 \oplus \varphi_2(\tilde{\pi}_2) \oplus c = (\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c)(\tilde{\pi}_2)$$

и неисправность типа $(\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c)(\tilde{\pi}_1)$ на выходе элемента E нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, откуда $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

1.2. Элемент E — обобщённый конъюнктор I типа. Среди всех элементов, выходы которых соединены в схеме S со входами элемента E (а таких элементов не меньше двух), выберем произвольный «нижний» элемент E_1, ниже которого в схеме S не существует элемента с указанным свойством, и любой другой элемент E_2. Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_1 (E_2) этой схемы реализуется булева функция φ_1 (соответственно φ_2). Тогда на выходе элемента E в схеме S реализуется функция вида $(\varphi_1^\sigma \& \varphi_2^\sigma \& \varphi_3)^\delta$, где φ_3 — некоторая булева функция и $\sigma, \delta \in \{0, 1\}$. По лемме 1 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. Тогда на выходе схемы S' реализуется функция $f' = (\varphi_1^{\sigma_1} \& \varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_3)^\delta$, где $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (константы σ_1 и σ_2 вводятся для удобства рассмотрения нижеследующего подслучая 1.3.1).

При неисправности типа $\overline{\delta}$ на выходе элемента E получающаяся функция неисправности схемы S' равна $g_1 \equiv \overline{\delta}$. При неисправности типа σ_1 на выходе элемента E_1 на нём вместо функции φ_1 возникнет константа σ_1, а функция на выходе элемента E_2 не изменится, поскольку элемент E_2 расположен в схеме S' не ниже элемента E_1 в силу выбора последнего. Поэтому на выходе схемы S' возникнет функция неисправности $g_2 = (\sigma_1^{\sigma_1} \& \varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_4)^\delta = (\varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_4)^\delta$, где φ_4 — некоторая булева функция. (Отметим, что функции φ_3 и φ_4 могут не совпадать, если выход элемента E_1 соединён более чем с одним входом элемента E.)

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, в тесте T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\pi}_1$, для которого $(\varphi_1^{\sigma_1} \& \varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_3)(\tilde{\pi}_1) = 1$, т.е. $\varphi_1(\tilde{\pi}_1) = \sigma_1$, $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) = \sigma_2$, $\varphi_3(\tilde{\pi}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, в тесте T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\pi}_2$, для которого $\varphi_2(\tilde{\pi}_2) = \sigma_2$ (это следует из выражений для функций f', g_2) и $\varphi_1(\tilde{\pi}_2) = \overline{\sigma_1}$ (чтобы можно было обнаружить появление на выходе элемента E_1 вместо функции φ_1 константы σ_1). Из равенств $\varphi_1(\tilde{\pi}_1) = \sigma_1$, $\varphi_1(\tilde{\pi}_2) = \overline{\sigma_1}$ следует, что $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) = \varphi_2(\tilde{\pi}_2) = \sigma_2$ — что неисправность типа σ_2 на выходе элемента E_2, на котором в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

1.3. Элемент E — обобщённый конъюнктор II типа. Рассмотрим два подслучая.

1.3.1. Входы «x_1», «x_2» элемента E соединены с выходами различных функциональных элементов E_1 и E_2. Один из элементов E_1, E_2 расположен в схеме S не ниже другого. Пусть этот элемент — E_2 (случай, когда этот элемент — E_1, рассматривается аналогично). Пусть на выходах элементов E_1, E_2 в схеме S в случае исправности всех элементов этой схемы реализуются булевы функции φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда на выходе элемента E реализуется функция вида $(\varphi_1 \& \overline{\varphi_2} \& \varphi_3)^\delta$, где φ_3 — некоторая булева функция и $\delta \in \{0, 1\}$. По лемме 1 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. Тогда на выходе схемы S' реализуется функция $f' = (\varphi_1^{\sigma_1} \& \varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_3)^\delta$, где $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$. Дальнейшие рассуждения дословно совпадают с рассуждениями из подслучая 1.2, начиная с их второго абзаца. Получаем, что $|T| \geqslant 3$.

1.3.2. Отрицание подслучая 1.3.1: либо входы «x_1», «x_2» элемента E соединены с выходом одного и того же функционального элемента, либо хотя бы один из этих входов соединён с каким-то входом схемы. Среди элемента E и всех элементов, расположенных в схеме S ниже элемента E, выберем «нижний» элемент E', удовлетворяющий следующему условию: либо E' — обобщённый конъюнктор II типа, либо E' — обобщённый конъюнктор I типа и не все его входы соединены с выходом одного и того же функционального элемента (ясно, что такой элемент можно выбрать, так как сам элемент E удовлетворяет указанному условию). Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E' этой схемы реализуется булева функция φ. Любой элемент, расположенный в схеме S ниже элемента E' — либо обобщённый конъюнктор I типа, все входы которого соединены с выходом одного и того же функционального элемента, либо сумматор, один вход которого соединён с выходом некоторого функционального элемента, а другой — с каким-то входом схемы (см. правило выбора элемента E). В таком случае нетрудно заметить, что на выходе схемы S реализуется функция вида $\varphi \oplus \psi$, где ψ — некоторая линейная булева функция (этот факт легко доказать, двигаясь «сверху вниз» от элемента E' к выходу схемы). Для элемента E' возможны три подслучая.

1.3.2.1. Элемент E' — обобщённый конъюнктор II типа, и его входы «x_1», «x_2» соединены с выходом одного и того же функционального элемента E''. Пусть на выходе элемента E'' в схеме S реализуется булева функция φ', тогда на выходе элемента E' реализуется функция $\varphi = (\varphi' \& \& \overline{\varphi'} \& \ldots)^\delta = 0^\delta = \overline{\delta}$, где $\delta \in \{0, 1\}$, а на выходе схемы S — функция $f = \varphi \oplus \psi = \overline{\delta} \oplus \psi$, которая линейна и при подстановке вместо, скажем, переменной x_1 произвольной булевой константы остаётся линейной, что противоречит выбору функции f. Поэтому подслучай 1.3.2.1 невозможен.

1.3.2.2. Элемент E' — обобщённый конъюнктор II типа, и хотя бы один из его входов «x_1», «x_2» соединён со каким-то входом «x_i» схемы. Тогда на выходе элемента E' в схеме S, как нетрудно видеть, реализуется функция φ вида $(x_i^\sigma \& \varphi')^\delta$, где $\varphi' \in P_2$; $\sigma, \delta \in \{0, 1\}$, а на выходе схемы S — функция $f = \varphi \oplus \psi = (x_i^\sigma \& \varphi')^\delta \oplus \psi$, которая при подстановке вместо переменной x_i булевой константы $\overline{\sigma}$ становится равна $(0 \& \varphi')^\delta \oplus \psi = \overline{\delta} \oplus \psi$, т.е. становится линейной, что противоречит выбору функции f. Поэтому подслучай 1.3.2.2 невозможен.

1.3.2.3. Элемент E' — обобщённый конъюнктор I типа, и не все его входы соединены в схеме S с выходом одного и того же функционального элемента. Отсюда, из выбора элемента E и того, что элемент E' расположен в схеме S ниже элемента E, легко вытекает, что хотя бы один вход элемента E' соединён со каким-то входом «x_i» схемы. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют рассуждения из подслучая 1.3.2.2. Получаем, что подслучай 1.3.2.3 невозможен. Случай 1 разобран.

2. Входы любого функционального элемента схемы S соединены с выходом не более чем одного функционального элемента. Очевидно, что в таком случае схема S представляет собой цепочку из элементов. Рассмотрим два подслучая.

2.1. В схеме S содержится либо обобщённый конъюнктор I типа, не все входы которого соединены с выходом одного и того же функционального элемента, либо обобщённый конъюнктор II типа. Среди всех элементов схемы S, удовлетворяющих указанному условию, выберем «нижний» элемент E'. Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями из случая 1.3.2, начиная со слов «Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E' этой схемы…». Получаем, что подслучай 2.1 невозможен.

2.2. Отрицание случая 2.1: любой элемент схемы S является либо обобщённым конъюнктором I типа, все входы которого соединены с выходом одного и того же функционального элемента, либо сумматором. В таком случае нетрудно заметить, что на выходе схемы S реализуется некоторая линейная булева функция (этот факт легко доказать, двигаясь по схеме S «сверху вниз»), которая остаётся линейной при подстановке вместо, скажем, переменной x_1 произвольной булевой константы, что противоречит выбору функции f. Поэтому подслучай 2.2 невозможен. Случай 2 разобран.

Неравенство $|T| \geqslant 3$ доказано. Следовательно, $D(f) \geqslant 3$ и $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 3$. Первая часть теоремы 4 доказана.

Пусть R_n — множество таких булевых функций от n переменных, при подстановке в каждую из которых вместо некоторой переменной некоторой булевой константы получается линейная булева функция. Для любой булевой функции f от n переменных, не принадлежащей множеству R_n, доказано, что $D(f) \geqslant 3$. Оценим сверху величину $|R_n|$. Пусть i — произвольный индекс от 1 до n; α — произвольная булева константа. Каждая булева функция $f_{i,\alpha}(\tilde{x}^n)$, при подстановке в которую вместо переменной x_i константы α получается линейная булева функция, может принимать произвольные значения на 2^{n-1} двоичных наборах длины n, i-я компонента которых равна $\overline{\alpha}$, а при подстановке вместо переменной x_i константы α становится равной одной из 2^n линейных функций от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ (и принимает вид $c_0 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_{i-1}x_{i-1} \oplus c_{i+1}x_{i+1} \oplus \ldots \oplus c_nx_n$, где все $c_j \in \{0, 1\}$). Поэтому общее число рассматриваемых функций $f_{i,\alpha}(\tilde{x}^n)$ при фиксированных i, α равно $2^{2^{n-1}} \times 2^n = 2^{2^{n-1}+n}$. Тогда

$$|R_n| \leqslant \sum_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ \alpha\in\{0,1\}}} 2^{2^{n-1}+n} = 2n \cdot 2^{2^{n-1}+n} = n \cdot 2^{2^{n-1}+n+1}.$$

Поэтому доля тех булевых функций f от n переменных, для которых $D(f) \geqslant 3$, не меньше

$$\frac{2^{2^n} - |R_n|}{2^{2^n}} \geqslant 1 - \frac{n \cdot 2^{2^{n-1}+n+1}}{2^{2^n}} = 1 - \frac{n}{2^{2^{n-1}-n-1}} \to 1 \ \ (n \to \infty).$$

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим произвольный функционально полный базис B, а в качестве неисправностей функциональных элементов — произвольные константные неисправности на выходах элементов. Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = (\varphi(y_1, \ldots, y_k))^\sigma, \tag{4}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ — произвольная функция из базиса B (с точностью до переименования переменных); $y_1, \ldots, y_k \in \{x_1, \ldots, x_n, 0, 1\}$ и $\sigma \in \{0, 1\}$.

Теорема 5. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, не представимой в виде (4), при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $D_{diagn}^{B;\,0,1}(f) \geqslant 3$; такое же неравенство справедливо и при $n = 2$, если значение его левой части определено.*

Следствие 1. *Если B_2 — произвольный функционально полный конечный базис и $n > m(B_2)$, то $D_{diagn}^{B_2;\,0,1}(n) \geqslant 3$ и для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, $D_{diagn}^{B_2;\,0,1}(f) \geqslant 3$.*

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что $n > m(B_2) \geqslant 2$, т.е. $n \geqslant 3$, а любая функция, представимая в виде (4), существенно зависит не более чем от $m(B_2)$ переменных.

Доказательство теоремы 5. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, не представимая в виде (4). Заметим, что

$$f \notin \{x_1, \ldots, x_n, 0, 1\}, \tag{5}$$

поскольку все функции из этого множества, как нетрудно видеть, представимы в виде (4) (в качестве φ достаточно взять любую функцию из множества B, существенно зависящую хотя бы от одной переменной). Достаточно доказать, что $|T| \geqslant 3$, где T — произвольный ЕДТ для произвольной неизбыточной схемы S в базисе B, реализующей функцию f, если такая схема существует (а при $n \geqslant 3$ она существует — см. замечание 1).

Из (5) следует, что в схеме S содержится выходной элемент E, причём на его выходе в этой схеме реализуется неконстантная булева функция. Среди всех элементов схемы S, на выходах которых реализуются неконстантные булевы функции, выберем произвольный «верхний» элемент E'. Пусть элемент E' имеет k входов и реализует булеву функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, где $x_1, \ldots, x_k$ — значения, подаваемые на эти входы. Каждый вход элемента E' в схеме S соединён либо с каким-то входом схемы S, либо с выходом элемента, реализующего булеву константу. Поэтому на выходе элемента E' в схеме S реализуется функция $\psi(\tilde{x}^n) = \varphi(y_1, \ldots, y_k)$, где $y_1, \ldots, y_k \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n\}$. Так как функция f не представима в виде (4), то

$$\psi^\sigma \not\equiv f \tag{6}$$

для $\sigma = 0,\ 1$.

При неисправности типа α, $\alpha \in \{0, 1\}$, элемента E функция неисправности схемы S тождественно равна α. Пусть при неисправности типа δ,

$\delta \in \{0, 1\}$, элемента E' функция неисправности схемы S равна g_δ. Докажем, что $g_0 \not\equiv g_1$. Пусть $\tilde{\pi}$ — произвольный двоичный набор длины n, на котором $g_0(\tilde{\pi}) \neq f(\tilde{\pi})$ (такой набор существует, так как схема S неизбыточна). Тогда $\psi(\tilde{\pi}) = 1$, так как при выполнении равенства $\psi(\tilde{\pi}) = 0$ неисправность типа 0 на выходе элемента E' нельзя было бы обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$. Но в таком случае неисправность типа 1 на выходе элемента E' нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$, поэтому $g_1(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}) \neq g_0(\tilde{\pi})$, т.е. $g_0 \not\equiv g_1$, что и требовалось доказать.

Если ни одна из функций g_0, g_1 не равна булевой константе, то все функции $f, 0, 1, g_0, g_1$ попарно различны, следовательно, $|T| \geqslant 3$ (на двух наборах какие-то две из пяти указанных функций обязательно примут одинаковую пару значений, так как всего таких пар четыре — (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1)).

Пусть теперь какая-то функция g_δ, $\delta \in \{0, 1\}$, равна булевой константе α. Так как функции $f, 0, 1$ попарно различны, то в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\pi}_1$, на котором $f(\tilde{\pi}_1) = \alpha$, и набор $\tilde{\pi}_2$, на котором $f(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$. Заметим, что

$$\psi(\tilde{\pi}_2) = \overline{\delta}, \tag{7}$$

так как при выполнении равенства $\psi(\tilde{\pi}_2) = \delta$ неисправность типа δ на выходе элемента E' нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}_2$ и $\alpha = g_\delta(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$, что невозможно. Если $\psi(\tilde{\pi}_1) = \overline{\delta}$, то неисправность типа $\overline{\delta}$ элемента E' нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$, поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, откуда $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать. Пусть $\psi(\tilde{\pi}_1) = \delta$. Из (7) следует, что $g_{\overline{\delta}}(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$.

Если $g_{\overline{\delta}} \not\equiv \overline{\alpha}$, то функции f, $\overline{\alpha}$ и $g_{\overline{\delta}}$ попарно различны, но на наборе $\tilde{\pi}_2$ принимают одно и тоже значение $\overline{\alpha}$. На наборе $\tilde{\pi}_1$ хотя бы две из этих функций также принимают одинаковое значение, поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор и $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать. Пусть $g_{\overline{\delta}} \equiv \overline{\alpha}$. Тогда для любого двоичного набора $\tilde{\pi}$ длины n, на котором $\psi(\tilde{\pi}) = \overline{\delta}$, имеем

$$(\psi(\tilde{\pi}))^{\overline{\delta} \oplus \alpha} = (\overline{\delta})^{\overline{\delta} \oplus \alpha} = \overline{\alpha} = g_{\overline{\delta}}(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}), \tag{8}$$

так как неисправность типа $\overline{\delta}$ элемента E' нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$. Далее, из соотношения $g_\delta \equiv \alpha$ следует, что для любого двоичного набора $\tilde{\pi}'$ длины n, на котором $\psi(\tilde{\pi}') = \delta$, справедливо соотношение

$$(\psi(\tilde{\pi}'))^{\overline{\delta} \oplus \alpha} = \delta^{\overline{\delta} \oplus \alpha} = \alpha = g_\delta(\tilde{\pi}') = f(\tilde{\pi}'). \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что $\psi^{\overline{\delta} \oplus \alpha} \equiv f$, однако это противоречит соотношению (6).

Неравенство $|T| \geqslant 3$, а вместе с ним и теорема 5 доказаны.

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января — 2 февраля 1984 г.). — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.

5. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — V. 21. — No. 1. — P. 124–141.

6. Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов. — Дисс. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. — М., 2013. — 77 с.

7. Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

8. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1986. — №1. — С. 72–74.

9. Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

10. Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

11. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1988. — №2. — С. 17–21.

12. Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1992. — №5. — С. 43–46.

13. Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2008. — №1. — С. 40–44.

14. Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — №74. — 21 с.

15. Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — №5. — С. 49–52.

16. Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискретная математика. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

17. Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2016. — №50. — 16 с.

18. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.