ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Фимин Н.Н., **Чечеткин В.М.**

Вихревые решения уравнения Эйлера и их свойства

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Вихревые решения уравнения Эйлера и их свойства // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 135. 20 с. doi:**10.20948/prepr-2016-135**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-135**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Н.Н. Фимин, В.М. Чечеткин

ВИХРЕВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И ИХ СВОЙСТВА

Москва — 2016

Н.Н. Фимин, В.М. Чечеткин

Вихревые решения уравнения Эйлера и их свойства

Рассматривается вопрос о существовании и форме общего решения стационарного уравнения Эйлера в форме Лэмба/Гельмгольца, приводимого к виду уравнения Джойса–Монтгомери/Лиувилля, описывающего динамику вихревых гидродинамических структур.

Ключевые слова: вихри Онсагера, вихри Рэнкина, статистический интеграл, конформное отображение, уравнение Джойса–Монтгомери.

Nikolay Nikolaevich Fimin, Valery Mihailovich Chechetkin

Vortex solutions of Euler equation and its properties

We consider existence and form of general solution of steady–state Euler–Helmholtz equation. This equation transforms to Joyce–Montgomery equation for analysis of vortex hydrodynamical structures.

Key words: Onsager vortices, Rankine vortices, statistical integral, conformal mapping, Joyce–Montgomery equation.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00670 и № 14-29-06086.

Содержание

1. Введение. Когерентные структуры и вихревая динамика

Определение понятия “когерентная структура” зависит от того, в какой области науки работает исследователь, имеющий дело с определяемым объектом. При этом квантово–статистические, гидродинамические и механические (далеко не полный перечень) когерентные системы, возможно, обладают некими общими, вне зависимости от морфологии, свойствами. Нас интересует природа вполне определённых структур, возникающих в гидродинамических течениях при наличии в жидкости/газе поля завихрённости. Примерами таких структур могут служить: Большое Красное Пятно (долгоживущий антициклон на Юпитере), океанские течения типа Гольфстрима, Куро–Сио, торнадо, устойчивые воздушные потоки типа муссонов и пассатов и т. д.

Обычно определяют когерентные структуры интересующего нас типа, в соответствии с [1], как связанные, крупномасштабные турбулентные, жидкие массы с завихренностью, скоррелированной по фазе во всей области пространства, которые они занимают. Сходные определения приведены также в работах [2] и [3], авторы (считающиеся основоположниками теории гидродинамической когерентности) которых полагают, что наиболее характерными свойствами когерентных структур являются изолированность их от внешнего течения в том смысле, что внутри данных структур завихрённость и макрохарактеристики распределены квазидетерминистическим образом, т. е. “в среднем упорядоченно”, и, кроме того, обладают достаточно продолжительным временем существования в таком виде.

Подобного рода “художественная описательность” в определении физического явления едва ли уместна при желании понять его природу и при необходимости смоделировать его. Введение здесь в качестве определения некоторых “численных критериев когерентности” (критерий Окубо–Вайсса, Δ– и λ_2–критерии) также вряд ли оправдано, поскольку выбор таковых достаточно произволен. Поэтому с целью обоснования вышеупомянутого второго подхода к моделированию турбулентных процессов рационально обратиться к математическому аппарату вариационного исчисления функционалов для пуассоновых систем [4]–[5], использование которого позволяет дать строгие определения обобщенных состояний относительного равновесия [6]–[7] гидродинамической системы на плоскости (как решений экстремальных задач с ограничениями на некоторый Казимировский набор), к которым можно приписать и “когерентную структуру”, понимаемую как поле завихренности, являющееся решением уравнения Эйлера–Гельмгольца.

Методика построения решений 2–мерного уравнения Эйлера (гидродинамического уравнения, отвечающего переносу импульса), в том числе в форме

Гельмгольца, является предметом интенсивного изучения уже более столетия, что обусловлено как значимостью данных решений в плане анализа теоретических аспектов и свойств нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа и теории соответствующих им граничных задач, так и возможностью непосредственных практических приложений к прикладным задачам газогидродинамики.

Исходя из представления вышеупомянутого уравнения (Эйлера–Гельмгольца, или УЭГ) в виде $\partial\omega/\partial t = [\psi, \omega]$ (где $\omega(x, y) = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial x_y$ — локальная завихрённость потока, $\psi(x, y)$ — функция тока, $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial x$ — компоненты скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, $[., .]$ — каноническая скобка Пуассона), представляется естественным сопоставить его с уравнением Власова (для статистических функций распределения), использующемся в кинетической теории, в плане существования сходных методов исследования и нахождения решений.

Безусловно, правомерен вопрос о степени и внутренней непротиворечивости подобного соответствия (целесообразность его очевидна и состоит в возможности распространения методов неравновесной статистической механики, в частности, на описание эволюции гидродинамических систем). Обсуждению и анализу данной задачи, впервые поставленной (для частного модельного случая) Л. Онсагером [8], в последние годы уделяется весьма пристальное внимание. В основном проводились исследования различных аспектов метода контурной динамики и эволюции системы точечных вихрей, где, безусловно, были получены чрезвычайно интересные и полные результаты, связанные не только с вопросами существования и единственности решений соответствующих уравнений динамики, но и с возможностью практического применения точечных вихрей при моделировании гидродинамических течений, например, для с использованием комплексов таких вихрей (диполей, квадруполей и т. п.), рассматриваемых в качестве геометрического базиса численных методов для исследования турбулентных течений.

Одним из наиболее актуальных аспектов рассматриваемого вопроса в настоящее время авторы считают исследование различного типа задач, связанных с эволюцией вихревых решений УЭГ, обладающих нелокальной пространственной структурой, на основе вышеупомянутых статистических подходов. Однако построение континуально–дискретного обобщения теории (когда носителями завихренности являются конечные структуры) требует переформулировки существующих и создания новых методов анализа вихревой динамики. Вполне рациональным представляется обратиться к их изучению на основе уже имеющегося материала, касающегося поведения кластеров точечных вихрей.

Такие вихревые конгломераты могут служить базисом для построения эффективных вычислительных алгоритмов для решения задач гидродинамики, таких, как, например, моделирование турбулентных режимов сдвиговых течений и эволюция крупномасштабных когерентных объектов. Квазиравновесная динамика вихревых объектов описывается с помощью уравнения Джойса–Монтгомери (УДМ), которое можно трактовать как некий аналог уравнения Пуассона для систем электромагнитных или гравитирующих частиц (эволюция последних может быть исследована в рамках теории самосогласованного поля). Тем самым, действительно правомерно развивать соответствующую методологию анализа гидродинамических течений; для этого первоначально следует установить вид решений (общего функционально–инвариантного и максимально широкого набора частных) совокупности УЭГ и УДМ.

2. Базисные решения УЭГ

Простейшими вихревыми решениями 2–мерного УЭГ являются *точечный вихрь* $\omega_{\delta,1}(x,y;t) = \gamma_1\delta(x-x(t))\delta(y-y(t))$, а также совокупность N точечных вихрей $\omega_{\delta,\sum}(x,y;t) = \sum_{k=1}^{N}\gamma_k\delta(x-x_k(t))\delta(y-y_k(t))$ (где $\gamma_{k=\overline{1,N}}$ — интенсивность k–ого точечного вихря, равная *локальной циркуляции* течения: $\int_{S_k}\omega_{\delta,k}\,dS$, $S_k = \operatorname{supp}\omega_{\delta,k}(x,y;t)$, $S_k\cap S_\ell = \varnothing$ при $k\neq\ell$).

При этом $\psi_k(x,y) = -\gamma_k/(4\pi)\cdot\ln\big((x-x_k)^2+(y-y_k)^2\big)$, так как связь $\omega = \omega(\psi)$ представляется посредством 2–мерного уравнения Пуассона, и функция тока ψ_k для одиночного точечного вихря есть фактически *фундаментальное решение* данного уравнения. Очевидно, формально выражения для компонент линейной скорости $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}$ рассматриваемого простейшего вихря имеют вид: $(v_x)_k \equiv (v_1)_k = -\gamma/(2\pi)\cdot(y-y_k)/\big((x-x_k)^2+(y-y_k)^2\big)$, $(v_y)_k \equiv (v_y)_k = \gamma/(2\pi)\cdot(x-x_k)/\big((x-x_k)^2+(y-y_k)^2\big)$.

Вихрь Рэнкина, представляющий собой следующий класс вихревых решений 2D УЭГ, есть круговая область $S_R\subset D$ ($S_R\equiv\{(r,\varphi)\,|\,r\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi]\}$) постоянной ненулевой завихрённости $\omega=\omega_0\in\mathbb{R}^1$, вне данной области $\omega\equiv 0$:

$$\omega(\mathbf{r}) = \begin{cases} \omega_0, & r\le R,\\ 0, & r>R,\end{cases}\qquad \psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{4}(R^2-r^2) - \pi R^2\omega_0\cdot\ln R, & r\le R,\\ -\dfrac{R^2\omega_0}{2}\ln r, & r>R\end{cases}$$

(в ядре вихря Рэнкина происходит твёрдотельное вращение жидкости с угловой скоростью $\Omega_{in}^{(R)} = \omega_0/2$). Системы точечных вихрей и вихрей Рэнкина являются гамильтоновыми, причём функции Гамильтона (Кирхгофа–Рауса) в данном случае имеют применение в виде точной, а не приближённой формы. Уравнения динамики вихрей каждого из этих типов образуют сопряжённую пару (для канонических сопряжённых переменных x и y).

Функция Кирхгофа–Рауса области S 2–мерного гидродинамического течения (кинетическая энергия Ламба): $H = \frac{1}{2}\int_S |\mathbf{v}|^2 dS$ (плотность жидкости $\rho = 1$). Используя *декомпозицию Гельмгольца* поля скорости в области $\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \wedge \psi$ (ϕ — скалярный потенциал скорости, определяемый посредством соотношения $\phi \equiv -\nabla \mathbf{F}_{\phi,\psi}$, $\mathbf{F}_{\phi,\psi}(\mathbf{r}) \equiv -\int_S G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{v}(\mathbf{r}')dS'$, $G(\mathbf{r}) \equiv -(2\pi)^{-1}\ln|\mathbf{r}|$ — решение Грина уравнения $\Delta_2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$), можно записать: $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}\cdot(\nabla\phi + \nabla\wedge\psi) = \nabla\left(\mathbf{v}\phi + \psi\wedge\mathbf{v}\right) + \omega\cdot\psi$. Таким образом, для функции Кирхгофа–Рауса имеем окончательно следующую общую форму:

$$H = \frac{1}{2}\int_S \omega\cdot\psi\, dS + \frac{1}{2}\int_{\partial S} \mathbf{v}\cdot(\mathbf{n}\phi + \mathbf{n}\wedge\psi)\, dS,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор ориентированной нормали к ∂S. Как известно, асимптотика 2–мерного векторного потенциала ($\operatorname{diam} S \to \infty$) такова: $\psi = -(2\pi)^{-1}(\Gamma_\infty \mathbf{e}_z \ln|\mathbf{r}| + \nabla \ln|\mathbf{r}\wedge\mathbf{I}|) + O(r^{-m})\big|_{m\geq 2}$ ($\mathbf{I} \equiv \int \omega\mathbf{r}\wedge\mathbf{e}_z\, dS$), и при физически адекватном допущении $\Gamma_\infty = 0$ (циркуляция течения по контуру, устремляемому к бесконечности) ядро поверхностного интеграла во втором слагаемом имеет порядок убывания $\sim r^{-2}$. Таким образом, для неограниченной области $H = (2\pi)^{-1}\int_S\int_{S'} G\omega\cdot\omega'\, dSdS'$.

Подстановка выражения $\omega_{\sum,1} = \sum_{j=1}^N \gamma_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t))$ в УЭЛ даёт систему уравнений Гамильтона: $\gamma_k \dot{x}_j = \partial H_\delta/\partial y_j$, $\gamma_j\dot{y}_j = -\partial H_\delta/\partial x_j$, где $H_\delta \equiv -(4\pi)^{-1}\sum_{i<j}^N \gamma_i\gamma_j \ln\left((x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2\right)$ (гамильтониан системы N точечных вихрей, получаемый из соответствующей функции Кирхгофа–Рауса гидродинамического вихревого течения с учётом вырождения интегралов по площади в суммы по дискретным носителям δ–вихрей).

Для системы вихрей Рэнкина (не меняющих свои индивидуальные характеристики — площадь/форму, внутреннюю завихрённость — в процессе эволюции) гамильтониан можно получить, учитывая кусочно–постоянное распределение завихрённости на плоскости; предполагая $R_i = R$ ($\forall i = \overline{1,N}$), при $r_{ij} > 2R$ ($r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, $r_{i,j}$ — координаты центров круговых областей–носителей $\chi_{i,j} \equiv \chi[\omega_{i,j}]$, внутри которых завихрённости $\omega_{i,j} \neq 0$) имеем

$$H = H_{out} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j\neq i}^N \gamma_i^{(R)}\gamma_j^{(R)} \ln|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad \gamma_i^{(R)} = \pi R^2(\omega_0)_i,$$

при $R < r_{ij} \le 2R$ и $r_{ij} \le R$ соответственно:

$$H \equiv H_{in}^1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i\cap S_j}(\omega_0)_i\cdot\big(\frac{(\omega_0)_i}{4}(R^2-r_{ij}^2)-\gamma_i^{(R)}\ln R\big)\,dS_{ij}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{\gamma_i^{(R)}}{2\pi}\gamma_j^{(R)}\ln r_{ij},\quad r_{ij}\in(R,2R],$$

$$H \equiv H_{in}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i\cap S_j}(\omega_0)_i\cdot\big(\frac{(\omega_0)_i}{4}(R^2-r_{ij}^2)-\gamma_i^{(R)}\ln R\big)\,dS_{ij},\quad r_{ij}\in[0,R],$$

где $S_{ij} = S_i \cap S_j$ — область перекрытия носителей завихрённости $\chi[(\omega_0)_i]$ и $\chi[(\omega_0)_j]$ ($S_{ij} = \varnothing$ при $i \neq j$). В данном случае рассмотрен случай 2–вихревого "близкого" взаимодействия; при m–вихревых ($2 < m \le N$) перекрытиях ($S_{i_1 i_2 .. i_m} = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap ... \cap S_{i_m} \neq \varnothing$) общая формула Кирхгофа–Рауса для непрерывного течения переходит в дискретизованный по носителям гамильтониан системы без сингулярностей (что характерно для точечных вихрей), что позволяет, в частности, рассматривать при оценке роста статистического интеграла мажоранты с априори заданным асимптотическим поведением.

При учёте только скользящих взаимодействий вихрей Рэнкина ($r_{ij} > 2R$) уравнения Гамильтона N–вихревой системы формально совпадают по форме с таковыми для δ–вихрей, с учётом того, что интенсивности в этом случае: $\gamma_i \equiv \pi R_i^2 (\omega_0)_i$.

3. Статистическое обоснование уравнения Джойса–Монтгомери

Известно, что при наличии произвольной функциональной связи $\psi = f(\omega)$ (причём для функции тока по определению выполнено условие $\Delta_2\psi = -\omega$) и достаточной гладкости функции f УЭГ, записанное в декартовых координатах x, y

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

имеет, как легко можно видеть, стационарное решение с функциональным произволом $\omega(x, y)$. Таким образом, для полной определенности течения с данной независимой от времени завихренностью необходимо конкретизировать применительно к реальному гидродинамическому потоку функцию $f(x, y; \omega)$. Аналогичная, но в некотором смысле более простая и в то же время богатая возможностями в плане физической картины течения, ситуация возникает при рассмотрении задачи о движении жидкости в радиально–симметричной области (например, при анализе проблем типа Тейлора–Куэтта); это обусловлено именно наличием указанной степени симметрии (и возможностью отклонения от таковой) и правомерностью использования в процессе исследования уже известных методик, ранее использовавшихся в других областях физики (в частности, в теории горения, термодинамике звездных атмосфер) и дифференциальной геометрии многообразий.

В общем случае постановка задачи о нахождении режимов гидродинамического течения сводится к следующей. В 2–мерной выпуклой односвязной области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, с границей ∂D класса не ниже C^3 (при наличии таковой), движение невязкой несжимаемой жидкости может быть описано УЭГ для функции тока $\psi : D \to \mathbb{R}^1$ с дополнительными условиями:

$$\frac{\partial \Delta_2 \psi}{\partial t} + [\Delta_2 \psi, \psi] = 0, \quad \psi|_{\partial D} = \psi_{\text{гр}}, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0 \ \ (t \in (0, T]), \tag{2}$$

где принято во внимание, что $(\partial\psi/\partial\mathbf{k})|_{\partial D} = \mathbf{k} \cdot \nabla\psi|_{\partial D} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial D}$ ($\mathbf{n}$, $\mathbf{k}$ — орты внешней нормали и ассоциированный с ним касательный соответственно). Без потери общности будем полагать $\psi_{\text{гр}} = 0$. В случае стационарности задачи система условий (1) переходит в совокупность таковых $\Delta_2\psi = g(\psi)$ (в области D), $\psi|_{\partial D} = 0$, где $g(\psi)$ — некоторая функция. Произвол выбора последней ограничен физическими соображениями: например, для $g(\psi) = -\omega_1 \text{Heav}\,(\psi_1 - \psi)$, где $\omega_1, \psi_1 \in \mathbb{R}^1$, имеем случай вихреподобного течения типа Прандтля–Бэтчелора [9].

Представляется целесообразным, однако, обратиться вначале к анализу внешне достаточно частного, но в действительности чрезвычайно важного случая $g(\psi) = -\exp(\beta\psi)$ ($\beta \in \mathbb{R}^1$), который соответствует наличию в гидродинамическом течении точечных вихрей. Ему отвечает классическое уравнение Джойса–Монтгомери [10] (формально совпадающего с т. н. конформным уравнением Лиувилля): $\Delta_2\widetilde{\psi} = -\beta \exp(\widetilde{\psi})$ ($\widetilde{\psi} \equiv \beta \cdot \psi$).

Физическая обусловленность данного выбора функции $g(\psi)$ объясняется следующим образом. Если рассмотреть систему N идентичных точечных вихрей в области D, то ее функция Гамильтона $H_N = H_N^{(self)} + \gamma^2 H_N^{(0)}$, где первое слагаемое правой части представляет собой "собственную энергию" каждого из N вихрей ($H_N^{(self)} = \gamma \sum_{i=1}^N \psi^{(0)}(\mathbf{r}_i)$), а второе можно записать как

$$H_N^{(0)}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \geq 1}^{N} U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \sum_{k=1}^{N} \Re(\mathbf{r}_k),$$

причем $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N$ — координаты δ–вихрей, γ — их интенсивности (для простоты предполагаем $\gamma = 1$), $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения Пуассона на области D с граничными условиями Дирихле, $\mathfrak{R}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ ($\tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ — функция Робэна); $H_N^{(self)}$ не принимаем во внимание (положим формально $\psi_{i=1,...,N}^{(0)} \equiv 0$).

Каноническая мера Гиббса, ассоциированная с вышеприведенным гамильтонианом, имеет вид

$$\mu_{\gamma,\beta',N} = Z_{\gamma,\beta}(N)^{-1} \exp\left(-\beta'\gamma^2 H_N^{(0)}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)\right) d\mathbf{r}_1 ... d\mathbf{r}_N, \tag{3}$$

$$Z_{\gamma,\beta'}(N) = \int_{D^N} \exp\left(-\gamma^2\beta' H_N^{(0)}\right) d\mathbf{r}_1 ... d\mathbf{r}_N \quad \text{(статистический интеграл)},$$

где параметр $\beta' \sim 1/T$, T — температура вихревой системы в смысле Онсагера–Хинчина, $T \lesseqgtr 0$. Статистический интеграл (имеющий смысл нормировочного множителя) ограничен при условии $\beta' \in \left(-8\pi/(\gamma^2 N), +\infty\right)$. Эмпирическое распределение вероятности завихренности в рассматриваемой системе вихрей: $\rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = N^{-1}\sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r}_i)[d\mathbf{r}_i]$, где символ $\delta(\mathbf{s})[d\mathbf{s}]$ означает меру Дирака, сосредоточенную в точке $\mathbf{s}$. Введем семейство корреляционных функций $\{\rho_j\}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j) = \int \mu_N \prod_{i=j+1}^N d\mathbf{r}_i$; в соответствии с результатами работы [11], в асимптотическом пределе $N \to \infty$ справедливо: $\rho_N(\mathbf{r}) \to \rho(\mathbf{r})(= \omega(\mathbf{r}))$. Прямое вычисление дает:

$$N^{-1} H_N^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{N-1}) = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2, \quad \mathfrak{H}_1^{(0)} = N^{-1} H_{N-1}^{(0)}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{N-1}),$$

$$\mathfrak{H}_2^{(0)} = (2N\pi)^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \ln\left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|\right).$$

Использование вышеприведенной асимптотики позволяет аппроксимировать второе слагаемое в правой части для $N \gg 1$: $\mathfrak{H}_2 \approx N/(2\pi)\int_D \ln\left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)\omega(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \equiv -\psi(\mathbf{r})$. Таким образом, $\rho(\mathbf{r}) \approx \rho_{N\to\infty}(\mathbf{r}) \approx \widetilde{Z}(N - 1) Z_N^{-1} \exp\left(-\beta'\gamma^2\psi(\mathbf{r})\right)$, где

$$\widetilde{Z}(N-1) = \int_{D^N} \exp\left(-\beta' N^{-1} H_{N-1}^{(0)}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{N-1})\right) d\mathbf{r}_1 ... d\mathbf{r}_{N-1}.$$

Поскольку функции $\rho_N(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ обе являются плотностями распределения, мы имеем необходимым образом, что при $N \to \infty$: $Z(N)/\widetilde{Z}(N-1) \approx \int_D \exp\left(-\beta'\psi(\mathbf{r})\right) \mathbf{dr}$. Таким образом, в рассматриваемом пределе получаем окончательно уравнение среднего поля для системы точечных вихрей (на бесконечной плоскости): $\Delta_2\psi = \exp(-\beta\psi)/\int_D \exp(-\beta\psi(\mathbf{r}))\mathbf{dr}$ (здесь $\beta N \equiv \beta'$, нормировочный интеграл можно положить без потери общности равным единице).

Тем самым, действительно, при анализе стационарных гидродинамических режимов δ–вихревых потоков, описываемых УЭГ, получение решений УДМ (с учетом соответствующих граничных условий) является основополагающей проблемой.

4. Динамика вихрей Рэнкина на плоскости

Рассмотрим на плоскости систему N одинаковых (радиуса $\varrho/2 > 0$) вихрей Рэнкина, т. е. круговых областей $E_{i=\overline{1,N}}$ ($E_i = \{\mathbf{r} \equiv \{x, y\} \mid |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}| \le \varrho/2\}$, $\mathfrak{a}(\mathbf{r}_i) \equiv \{\mathbf{r}_i\}_{i=\overline{1,N}} \ni \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}_i$ — точки, соответствующие центрам i–го круга) с постоянной завихренностью $\omega(\mathbf{r}) = \omega_0\chi(E_i)$, $\chi(E_i)$ — функция–индикатор i–го кругового носителя вихря Рэнкина, в ограниченной связной области $D = D(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂D; функция тока в этом случае имеет вид:

$$\psi(\mathbf{r}) = \omega_0\frac{(\varrho/2)^2 - r^2}{4} - \gamma_E \ln(\varrho/2) \ \text{при}\ 2r \le \varrho, \quad \psi(\mathbf{r}) = -\frac{\gamma_E \ln r}{2\pi}, \ \text{при}\ 2r > \varrho,$$

где интенсивность одиночного вихря $\gamma_E = \pi\varrho^2\omega_0/4$. Для простоты ниже будем рассматривать круговую область радиуса $\rho_D \gg \varrho$, выделяя при необходимости отдельно случаи $\rho_D < \infty$ и $\rho_D \to \infty$ (т. е. $D = D_\infty = \mathbb{R}^2$).

Функция Кирхгофа–Рауса данной N–вихревой системы имеет вид: $H_N(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1,k\neq i}^{N} U(\mathbf{r}_i; \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} \mathcal{F}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_m)$, где: $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) \in D^N$ — поливектор текущих центров областей $E_i\big|_{i=1,...,N}$, регулярная часть гамильтониана $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ гармонична по обоим аргументам в области D и определена таким образом, что $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv U(\mathbf{r}; \mathbf{r}') + \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является функцией Грина уравнения Пуассона в области D с граничными условиями Дирихле,

$$U(\mathbf{r}; \mathbf{r}')\big|_{\mathbf{r},\mathbf{r}' \in \mathfrak{a}(\mathbf{r}_i)} = \begin{cases} U^{(+)} \equiv (2\pi)^{-1} \ln\left((x - x')^2 + (y - y')^2\right)^{-1/2}, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ge \varrho, \\ U^{(-)}: \ (2\pi)^{-1} \int_{\bigcap_{k=1}^{Q \le N} E_k} U^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\omega(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = & \\ = (R^2 - r^2)\sum_{k=1}^{Q} \omega_{E_k}/4 - \gamma_{\bigcup_{k=1}^{Q \le N}} \ln(\varrho/2), & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \varrho, \end{cases}$$

где "внутренняя" часть потенциала Грина взаимодействия вихрей $U^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определяется как аддитивная по модулю аксиального вектора завихренности на данном носителе (ненулевой площади) величина, что связано с возможностью геометрического "перекрытия" вихрей в процессе их взаимодействия (интегральное уравнение для определения $U^{(-)}$ является следствием обращения уравнения Пуассона $\Delta_2\psi(\mathbf{r}) = -\omega(\mathbf{r})$). Поскольку нас в настоящей работе интересует глобальная динамика вихрей Рэнкина (в макрообласти), представляется правомерным на основе Теоремы 6.12 работы [12] ввести в рассмотрение упрощающее основное

▼ *Допущение*: $U^{(-)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = (2\pi)^{-1}\ln\tilde{\varrho}^{-1}$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \le \tilde{\varrho}$, $\tilde{\varrho} \in \mathbb{R}^1$ (соответственным образом при этом должна быть изменена область определения функции $U^{(+)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$). ▲

При этом вне круговой области $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \le \tilde{\varrho}$ ($\mathbf{r} \in \mathfrak{a}(\mathbf{r}_i)$) потенциал Грина U гармоничен, а внутри — постоянен (и равен значению интеграла от него по данной области в точке $\mathbf{r}$, см. выражение для $U^{(-)}$ с учётом того, что там $\omega(\mathbf{r}) = \omega_0 = \mathrm{const}$). Поэтому целесообразно в качестве $\tilde{\varrho}$ в используемой модели (учитывая симметрию взаимодействия) принять $\tilde{\varrho} = \varrho$ (т. е. при соприкосновении границ вихрей происходит изменение поведения потенциала, и вихри перестают оказывать силовое воздействие друг на друга). Очевидно, с одной стороны, такая модель позволяет учесть возможный процесс “конденсации” вихревых структур в конечной области конфигурационного пространства, что принципиально отличает их от точечных вихрей с наличием сингулярности взаимодействия, а с другой — соответствует их асимптотическому поведению для больших межвихревых расстояний. Тем самым, при исследовании свойств введённой модели можно существенно использовать уже имеющийся наработанный математический аппарат анализа систем δ–вихрей.

Каноническая мера Гиббса, ассоциированная с введённой выше функцией Кирхгофа–Рауса, имеет вид

$$\mu_{\beta,N}(d\mathbf{R}) = \big(Z_{\beta'}(N)\big)^{-1}\exp\big(-\beta' H(\mathbf{R})\big)d\mathbf{R}, \quad d\mathbf{R} \equiv \prod_{j=1}^{N} d\mathbf{r}_j,$$

где $Z_{\beta'}(N) = \int_{D^N}\exp\big(-\beta' H(\mathbf{R})\big)\,d\mathbf{R}$ — статистический интеграл, соответствующий мере, $\beta' = \beta/N$, $\beta = 1/T$ — обратная температура. В соответствии с теорией Онсагера, величина β индефинитна ($\beta \in \mathbb{R}^1$).

Установим, при каких условиях статистический интеграл $Z_{\beta'}(N)$ является ограниченным ($D \ne D_\infty$). Сначала рассмотрим случай $\beta' > 0$. Поскольку на $\overline{D}\times\overline{D}$ функция $G \ge 0$ [13], то очевидна оценка:

$$Z_{\beta'}(N) \le \left(\int_D \exp\big(-\frac{\beta'}{2}\mathcal{F}(\mathbf{r},\mathbf{r}) + \beta'|U^{(-)}|\big)\,d\mathbf{r}\right)^N.$$

Так как функция Робэна [14] $F_R(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathbf{r},\mathbf{r}) \sim \ln|\mathbf{r}|$ при $\mathbf{r} \to \partial D$, то $Z_{\beta'} \le$

$\big(C_0(\beta', \varrho, \mathrm{meas}\, D)\big)^N$, где $C_0 > 0$ — постоянная функция параметрических аргументов (ограниченной нормы). При $\beta' < 0$ имеем:

$$Z_{\beta'}(N) \leq \int_{D^N} \prod_{j=1}^{N} \prod_{m=1,\, m\neq j}^{N} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta'\big(U^{(+)}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m) + \mathcal{F}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m) + U^{(-)}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m)\big)\right) \times$$

$$\times \prod_{s}^{N} d\mathbf{r}_s \leq \prod_{j=1}^{N} \bigg(\int_{D^N} k_0(\rho) \exp\big(-\frac{1}{2}\beta'(U^{(+)}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m) + \mathcal{F}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m)\big) \prod_{s=1}^{N} d\mathbf{r}_s\bigg)^{1/N},$$

где $k_0(\rho, \beta', N)$ — постоянная ограниченная функция, возникающая из–за присутствия сомножителя $\propto \exp\big(\beta' U^{(-)}\big)$. Поскольку $U^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \leq -(2\pi)^{-1} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + k_1$ ($k_1 = \mathrm{const} > 0$), то статистический интеграл $Z_{\beta'}(N)$ ограничен ($Z_{\beta'}(N) < C_1^N(\beta', \varrho, \mathrm{meas}\, D)$), в частности при $-\beta' N < 8\pi$.

С другой стороны, пусть $\beta > -8\pi$, тогда существует такая постоянная функция $C_2 = C_2(\beta, \varrho, \mathrm{meas}\, D)$, что $C_2^N \leq Z_\beta(N)$ (ограниченная по аргументу β для $\beta \in (-8\pi, \infty)$). Действительно, в соответствии с неравенством Иенсена [15] имеем (полагая $\int_D G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \leq C_3 \;\; \forall \mathbf{r}_1 \in D$):

$$Z_\beta(N) \geq (\mathrm{meas}\, D)^N \exp\big(-\frac{\beta}{2N(\mathrm{meas}\, D)^N} \sum_{i\neq j}^{N} \int_{D^N} G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \prod_{k=1}^{N} d\mathbf{r}_k\big) \geq$$

$$\geq (\mathrm{meas}\, D)^N \exp\big(-\frac{4\pi(N-1)}{(\mathrm{meas}\, D)^2} \int_{D^2} |G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|\, d\mathbf{r} d\mathbf{r}'\big) \geq$$

$$\geq (\mathrm{meas}\, D)^N \exp\big(-C_3(N-1)\big) \geq C_2^N.$$

Тем самым, установлена справедливость следующей

▼ *Теоремы 1.* Статистический интеграл $Z_\beta(N) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\beta \in (-8\pi, +\infty)$. В данном интервале температур справедлива оценка $Z_{\beta'}(N) \leq \big(C(\beta', \varrho, \mathrm{meas}\, D)\big)^N$. ▲

Семейство корреляционных (мартингальных) функций, в соответствии с [16], определим следующим образом (полагаем величину β фиксированной):

$$f_{\ell,N}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_\ell) \equiv \int_{D^{N-\ell}} \mu_N(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)\, \mathbf{r}_{\ell+1} ... \mathbf{r}_N = \big(Z_\beta(N)\big)^{-1} \times \tag{2}$$

$$\times \exp\big(-\beta' H(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_\ell)\big) \int_{D^{N-\ell}} \exp\big(-\beta'(H^{(2)}(\ell, N-\ell) + H(N-\ell))\big) \prod_{s=1}^{N-\ell} d\mathbf{r}_s,$$

$$H^{(2)}(\ell, N_\ell) \equiv \sum_{\mathbf{r}\in\mathbf{R}_\ell} \sum_{\mathbf{r}'\in\mathbf{R}_{N-\ell}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad H(N-\ell) \equiv H(\mathbf{R}_{N-\ell}), \quad \mathbf{R}_s \equiv (\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_s),$$

при этом редуцированная ℓ–вихревая функция $f_{\ell,N}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_\ell)$ отвечает плотности вероятности обнаружения центров первых $\ell < N$ вихрей Рэнкина в точках (макро)области D с координатами $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_\ell$.

Следующее утверждение является обобщением на случай вихрей Рэнкина теоремы 3.1 работы [17]:

▼ *Теорема 2.* Для $\forall\beta \in (-8\pi, +\infty)$ существует такая постоянная функция $C_f = C_f(\beta, \varrho, \mathrm{meas}\, D)$, что $f_{\ell,N}(\mathbf{R}_\ell) \le C_f \exp\big(-\beta' H(\mathbf{R}_\ell)\big)$, $\mathbf{R}_\ell \in D^\ell$ $(\ell \ge 2)$. ▲

Доказательство. Если $\beta > 0$, то в связи с неотрицательностью функции Грина $(G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \ge 0)$ на $\overline{D}$ имеем: $f_{\ell,N}(\mathbf{R}_\ell) \le \exp\left(-\beta' H(\mathbf{R}_\ell)\right) \int_{D^{N-\ell}} \exp\big(-\beta' \times \times H(\mathbf{R}_{N-\ell})\big)\, d\mathbf{R}_{N-\ell} \cdot (Z'_\beta(N))^{-1}$. С другой стороны, для $s \le N-1$:

$$\int_{D^s} \exp\big(-\beta' H(\mathbf{R}_s)\big) d\mathbf{R}_s \le \big(\inf_{\mathbf{R}_s} \int_D \exp(-\beta'[H^{(2)}(s, s{+}1) {+} F_R(\mathbf{r}_{s+1})]) d\mathbf{r}_{s+1}\big)^{-1} \times$$

$$\times \big(\int_{D^s} \exp\left(-\beta' H(\mathbf{R}_s)\right) \int_D \exp\left(-\beta'[H^{(2)}(s, s+1) + F_R(\mathbf{r}_{s+1})]\right) d\mathbf{r}_{s+1}\big)\, d\mathbf{R}_s.$$

Оценим знаменатель правой части вышеприведенного выражения (с помощью неравенства Иенсена):

$$(\mathrm{meas}\, D) \cdot \exp(-\beta'[\max_{\mathbf{r}'} F_R(\mathbf{r}') + s \cdot (\mathrm{meas}\, D)^{-1} \sup \int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}') d\mathbf{r}']).$$

Отсюда

$$\big(\int_{D^s} \exp\big(-\beta' H(\mathbf{R}_s)\big) d\mathbf{R}_s\big) / \big(\int_{D^{s+1}} \exp\big(-\beta' H(\mathbf{R}_{s+1})\big) d\mathbf{R}_{s+1}\big) \le$$

$$(\mathrm{meas}\, D)^{-1} \exp\left(\beta[(\mathrm{meas}\, D)^{-1} \sup \int_D G(\mathbf{r},\mathbf{r}') d\mathbf{r}']) + \max_{\mathbf{r}'} F_R(\mathbf{r}')/N]\right),$$

и оценка $f_{\ell,N}(\mathbf{R}_\ell)$ из условия теоремы осуществляется с помощью постоянной функции C_f, задаваемой правой частью последнего неравенства.

Если $\beta < 0$, то сначала оценим с помощью неравенства Гёльдера правую часть соотношения (2):

$$f_{\ell,N}(\mathbf{R}_\ell) \le \big(\int_{D^{N-\ell}} \exp\big(-\beta' s_1 H(\mathbf{R}_{N-\ell})\big)\, d\mathbf{R}_{N-\ell}\big)^{1/s_1} \times$$

$$\times \big(\int_{D^{N-\ell}} \exp\big(-\beta' s_2 \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{n=\ell+1}^{N} H(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n)\big)\, d\mathbf{R}_{N-\ell}\big)^{1/s_2}, \quad s_1 = \frac{N}{N-2\ell}, \quad s_2 = \frac{N}{2\ell}.$$

Так как $|\beta| s_2 \ell/(2\pi N) = |\beta|/(4\pi) < 2$, то, в соответствии с результатами Теоремы 1, 2–й сомножитель правой части последнего выражения (в скобках) ограничен постоянной функцией C_4^ℓ, $C_4 = C_4(\beta', \varrho, \operatorname{meas} D)$. Первый сомножитель равен $\big(Z_{\beta''}(N-\ell)\big)^{1/s_1}$, $\beta'' \equiv \beta' s_1(N-\ell)$. По аналогии с Леммой 2 работы [18] можно показать, что существует постоянная $C_5 = C_5(\beta, N, \operatorname{meas} D)$, такая, что $\big(Z_{\beta''}(N-\ell)\big)^{1/s_1} \le C_5^\ell \big(Z_{\beta s_1}(N)\big)^{1/s_1}$. Далее, снова в соответствии с неравенством Гёльдера для новых параметров, имеем $\big(Z_{\beta s_1}(N)\big)^{1/s_1} \le \big(Z_{\beta s_4}(N)\big)^{s_3/s_4} \big(Z_\beta(N)\big)^{1-s_3}$, то есть $\big(Z_{\beta s_1}(N)\big)^{1/s_1}/Z_\beta(N) \le \big(Z_{\beta s_4}\big)^{s_3/s_4} \big(Z_\beta(N)\big)^{-s_3}$, где число $s_3 \in (0,1)$ удовлетворяет соотношению $1/s_1 = s_3/s_4 + (1-s_3)$, т. е. $s_3 = 2\ell s_4/(N s_4 - N))$. Если выбрать ограничения на постоянную s_4 таким образом, что $\beta \ge -8\pi/s_4$ ($\beta > -8\pi$), то в соответствии с Теоремой 1 существуют такие постоянные функции $C_{1,2}(\beta', \varrho, \operatorname{meas} D)$ ($C_2^N \le Z_{\beta'}(N) \le C_1^N$), что $\big(Z_{\beta s_4}\big)^{s_3/s_4} \le C_1^{N s_3/s_4} \le C_5^\ell$, $\big(Z_{\beta s_4}\big)^{-s_3} \le C_2^{-N s_3} \le C_5^\ell$. Таким образом, $Z_{\beta''}(N-\ell) \le C_5^\ell Z_\beta(N)$ и в качестве искомой верхней постоянной границы можно принять $C_f = C_4 C_5^\ell$.

Следствием Теоремы 2 является возможность оценки редуцированной корреляционной ℓ–вихревой функции $f_{\ell,N}$ по норме $L^r(D^\ell)$, $r \in [1, +\infty]$: $\|f_{\ell,N}\|_{L^r} \le (f_0(r,\beta))^\ell$ ($\forall \ell \in \mathbb{N}$ и достаточно большого N) и существование при $r > 1$ подпоследовательности $\{f_{\ell,N_j}\}\big|_{j\in\mathbb{N}}$, слабо сходящейся в $L^r(D^\ell)$: $f_{\ell,N_j} \rightharpoonup f_\ell \in L^r(D^\ell)$.

5. Общие решения системы уравнений квазиравновесной 2–мерной вихревой гидродинамики

Далее мы ограничимся рассмотрением вихрей Онсагера, поскольку видоизменения анализа на случай вихрей Рэнкина довольно очевидны.

Если рассмотреть случай течения внутри круговой/кольцевой области ($r = R_1^{(circ)} = 1$ для круговой, с внутренним и внешним радиусами без ограничения общности соответственно и $r = R_2^{(in)} \in (0,1)$, $r = R_2^{(out)} = 1/R_2^{(in)}$ для кольцевой), то задача о нахождении режимов течения в радиальном случае сводится к краевой задаче (Дирихле) для ОДУ (в предположении $\omega \in L_\infty(D)$ или $\omega \ln \omega \in L_1(D)$) 2–го порядка:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \beta \exp(\psi) = 0, \quad r > 0, \tag{3}$$

причём для $R_1 = 0$ имеем $\psi'(r=0) = \psi(r = R_1) = 0$, а для $R_1 > 0$, соответственно, $\psi(R_1) = \psi(R_2) = 0$ (знак тильды над ψ опускаем для краткости).

Рассмотрим сначала подробнее случай круговой области (для простоты $R_2 = 1$). Для случая $\beta \in (-8\pi, 2)$ (наличие нижней границы области изменения параметра обусловлено необходимостью сходимости статистического интеграла [19], а верхней — установлено в работе [21], см. также [22]) существует несколько возможностей, влияющих на количество решений (в зависимости от знака эффективной температуры). Для $\beta < 0$ решение краевой задачи единственно и имеет следующую форму:

$$\psi_{\beta<0}(r) = \ln\big(2/(|\beta|r^2 \mathrm{sh}^2 \ln((\sqrt{2/|\beta|} + \sqrt{1+2/|\beta|})r))\big). \tag{4}$$

Для $\beta = 0$ также имеем единственное (тривиальное, $\psi_{\beta=0}(r) \equiv 0$) решение рассматриваемой задачи. Однако при $\beta > 0$ решения уже два:

$$\psi_{0<\beta<2}(r) = \ln\big(2/(\beta r^2 \mathrm{ch}^2 \ln\, \varkappa(\beta) r)\big), \quad \varkappa(\beta) = \sqrt{2/\beta} \pm \sqrt{2/\beta - 1}. \tag{5}$$

Очевидно, для положительности аргумента логарифмической функции необходимо выполнение условия $\beta \in (0, 2)$. При $\beta \equiv 2$ имеем: $\psi_{\beta=2}(r) = 2\ln(2r/(r^2+1))$ (соответственно, $\omega_{\beta=2}(r) = 8(1+r^2)^{-2}$).

Ситуация с кольцевой областью несколько менее прозрачна. Это обусловлено, в первую очередь, возможностью наличия неоднородных решений (т. е. зависящих не только от радиальной переменной).

При априорно утверждаемой зависимости решения уравнения (3) только от r общее решение краевой 2–точечной задачи Дирихле для кольца получено в следующем виде в работе [23]:

$$e^{\overline{\psi}(x)} = \frac{\sigma^2(\beta/2)^{-1} K m^{\sigma/2} e^{\sigma x}}{(1 + K m^{\sigma/2} e^{\sigma x})^2}, \quad \frac{\sigma^2(\beta/2)^{-1} K}{(1+K)^2} = \frac{(1+Km^{\sigma})^2}{\sigma^2(\beta/2)^{-1} K m^{\sigma}} = \frac{1}{m} = (R_2^{(in)})^2,$$

где K, σ неявно определены посредством цепочки вышеприведенных соотношений, $x = \ln(r)$, $\overline{\psi}(x) = \psi(r) + 2\ln(r)$.

Анализ свойств решения с использованием следствий Теоремы 5 работы [20] приводит опять–таки к наличию трех возможных случаев в зависимости от знака параметра β. При $\beta < 0$ имеем единственное решение задачи Дирихле: $\psi_{\beta<0}(r) = \ln\big(2/(|\beta| r^2 \mathrm{sh}^2 \ln(\varkappa_+ r))\big)$; при $\beta = 0$ решение данной краевой задачи тривиально: $\psi_{\beta=0}(r) = 0$; при $\beta \in (0, 2)$ наличествуют 2 решения: $\psi_{0<\beta<2}(r) = \ln\big(2/(\beta r^2 \mathrm{ch}^2 \ln(\varkappa_\pm r))\big)$ ($\varkappa_\pm = \sqrt{2/|\beta|} \pm \sqrt{2/|\beta|+1}$); ограничение на параметр β сверху обусловлено необходимостью положительности аргумента логарифма. Для критической точки $\beta = \beta^* = 2$ решение единственно: $\psi_{\beta=2} = 2\ln(2r/(r^2+1))$ (решения для круговой и кольцевой области формально совпадают).

Таким образом, установлены формы общих решений краевых задачи Дирихле для УЭГ (приведенного к форме уравнения Лиувилля) в случае радиальной их симметрии для круговой области и области, имеющей форму кольца. Однако, следует отметить, для кольцевых областей на плоскости уравнение Лиувилля/УДМ может обладать решениями, зависящими от двух переменных. Поэтому необходимо определенным образом расширить рамки исследуемой ситуации.

Обратимся к рассмотрению возможности получения общего решения граничной задачи для УДМ в произвольной односвязной 2–мерной области (с достаточно гладкой границей). Как известно, общее решение соответствующей краевой задачи (Дирихле) в комплексном виде имеет следующую форму:

$$\psi(z) = \ln \frac{(8/\beta)|\mathfrak{Q}'_z(z)|^2}{\left(1+|\mathfrak{Q}|^2(z)\right)^2}, \quad z \equiv x+iy, \tag{4}$$

где $\mathfrak{Q}(z)$ — произвольная функция, мероморфная в области D и имеющая в ней простые полюса (и нули) [24]. Данное общее решение разделяется на фазовой полуплоскости (ψ–$\beta|_{\beta>0}$) на две ветви — т. н. минимальную ветвь $\widetilde{\varpi}_\beta[\psi]$ и сингулярную ветвь $\varpi_\beta[\psi]$ Вестона–Мозли [25]–[26] (в полосе $\beta \in]0,\beta^*[$ зависимость $\psi(\beta)$ не является унивалентной, причем $\psi_m < \psi_s$, $\psi_m \in \widetilde{\varpi}_\beta$, $\psi_s \in \varpi_\beta$). При этом поведение сингулярной ветви при $\beta \to 0+$ существенно зависит от геометрических свойств области D (в частности, для круговой области асимптотическое достижение указанной ветви оси $\beta = 0$ происходит в единственной “точке” $\psi_0 = 8\pi G(x,0) = -4\ln|x|$, $G(x,y)$ — функция Грина оператора $-\Delta$ области D при наличии условий Дирихле на границе, а для кольцевой области существует бесконечный набор критических точек x^*, функции ψ которых $\big(\psi(x^*)\big)|_{\varpi_\beta} \to \infty$).

Представляет определенный интерес вопрос о возможности использовать известные явные выражения для решений краевых задач для УДМ в простых “базисных” областях (таких, как круговая и кольцевая — в последнем случае возможно получение набора бесконечного сингулярных/неминимальных решений) с целью установления вида решений соответствующих задач в областях существенно более сложной формы. Для этого можно использовать методы конформного отображения на комплексной плоскости. Основой указанного подхода является теорема Рауса [27], утверждающая, что при конформном отображении точечные вихри переходят точечные вихри той же интенсивности. При этом, если функция тока $\psi(x_0, y_0)$ определяет движение вихря $\omega|_z(x_0, y_0)$ с завихренностью γ на плоскости z, то функция

$\psi(x_0^\dagger, y_0^\dagger) = \psi(x_0, y_0) + \gamma/(4\pi) \cdot \ln\, |dz/dz^\dagger|_{z_0}$, $z_0^\dagger = \mathfrak{f}(z_0)$ определяет движение вихря $\omega|_{z_0^\dagger}(x_0^\dagger, y_0^\dagger)$ ($z^\dagger = \mathfrak{f}(z)$ — соответствующее конформное отображение комплексной плоскости); следует указать, что при указанном отображении динамика вихрей может качественно измениться: например, покоящийся в плоскости z вихрь оказывается в общем случае движущимся в плоскости $z^\dagger$, и, тем самым, в вышеприведенном гамильтониане N–вихревой системы следует учитывать слагаемое с собственными энергиями вихрей ($H_N^{(self)}$). Если рассматривать конформное отображение $\mathfrak{f}:\ z \to z^\dagger$ некоторой односвязной области на круговую (с единичным радиусом), то N–вихревую функцию Гамильтона получим в виде: $H_N = -(4\pi)^{-1}\sum_{i=1}^N \ln\big(|\mathfrak{f}'(z_i)|/(1-|\mathfrak{f}(z_i)|^2)\big) - (4\pi)^{-1}\sum_{i\neq j}^N \ln\big(|\mathfrak{f}(z_i)-\mathfrak{f}(z_j)|/|1-\mathfrak{f}(z_i)\mathfrak{f}(\overline{z_j})|\big)$; интересно рассмотреть распределение Гиббса с таким гамильтонианом и соответвующее ему УДМ.

При конформном преобразовании $z = \mathfrak{f}_{(-)}(z^\dagger)$ внутренней области произвольной односвязной области $D|_z$ внутрь единичного круга $D^\circ_{z^\dagger} = \{z^\dagger\,|\,|z^\dagger| < 1\}$ краевая задача Дирихле для УДМ в $z^\dagger$–представлении приобретает вид: $\Delta_2\psi = -\beta|\mathfrak{f}'_{(-)}|^2 \exp(\psi)$ (при $|z^\dagger| < 1$), $z^\dagger|_{\partial D} = 0$ (оператор Лапласа при указанном преобразовании инвариантен с точностью до растяжения координат с модулем $|\mathfrak{f}'_{(-)}|^2$ [28]). Общее решение последней задачи в новом представлении:

$$\psi(z^\dagger) = \ln\, \frac{(8/\beta)|\mathfrak{f}'_{(-)}(z^\dagger)|^{-2}|d(\mathfrak{Q}[\mathfrak{f}_{(-)}(z^\dagger)])/dz^\dagger|^2}{(1+|\mathfrak{Q}[\mathfrak{f}_{(-)}(z^\dagger)]|^2)^2},$$

$$|\mathfrak{f}'_{(-)}(z^\dagger)|^2\Big|_{|z^\dagger|=1} = \frac{(8/\beta)|d(\mathfrak{Q}[\mathfrak{f}_{(-)}(z^\dagger)])/dz^\dagger|^2}{(1+|\mathfrak{Q}[\mathfrak{f}_{(-)}(z^\dagger)]|^2)^2}\Bigg|_{|z^\dagger|=1}. \qquad (5)$$

В специальном случае $\mathfrak{f}'(z^\dagger) = 1$ (т. е. $D_z = D^\circ_{z^\dagger}$) получаем $\mathfrak{Q}[z] = Cz$ или $= C/z$, где C — постоянная, определяющаяся из граничного условия, $C = \sqrt{4/\beta}\sqrt{1-4/\beta+\sqrt{1-\beta/2}}$. При $\beta \to 0+$ имеем: $\beta \to 8/\beta$, $\mathfrak{Q}[z] \sim z\sqrt{8/\beta}$.

Можно рассмотреть более сложные конформные преобразования, например, задаваемые интегралом Кристоффеля–Шварца $\mathfrak{f}_{CS}:\ D^\circ_{z^\dagger} \to D_z$ (единичного круга на многоугольник); хотя вид УДМ не упрощается, существует возможность построить приближенное решение. Для этого проведем следующие преобразования: сначала запишем формулу Лиувилля в виде

$$\exp\big(-\frac{\psi}{2}\big) = \sqrt{\frac{\beta}{8}} \cdot \frac{|\mathfrak{f}'(z^\dagger)| \cdot (1+|\mathfrak{Q}[z^\dagger]|^2)}{|\mathfrak{Q}[z^\dagger]|}.$$

Введем замену произвольной аналитической функции:

$$(\mathfrak{Q}[z^\dagger])^{-1} = \sqrt{\beta/8}\int^{z^\dagger} v^{-2}(t)\mathfrak{f}'(t)\,dt,$$

где: $v(z^\dagger)$ — аналитическая функция, такая, что правая часть последнего равенства должна быть унивалентной. Получаем

$$\exp\big(-\frac{\psi}{2}\big) = |v(z^\dagger)|^2 + \frac{\beta}{8}\Big|v(z^\dagger)\int^z \frac{\mathfrak{f}'(t)}{v^2(t)}\,dt\Big|^2.$$

Представим для аппроксимации $v(z^\dagger,\beta) = z^\dagger/w(z^\dagger,\beta)$, $w(z^\dagger,\beta) \equiv 1+\beta\cdot w_1(z^\dagger)+...+\beta^n\cdot w_n(z^\dagger)$. Решение УДМ примет следующий вид:

$$\exp\big(\frac{\psi}{2}\big) = |w(z^\dagger,\beta)|^{-2}\cdot\big(|z^\dagger|^2+\frac{\beta}{8}\cdot|z^\dagger\int^{z^\dagger}\mathfrak{f}'(t)w^2(t,\beta)t^{-2}dt|^2\big).$$

Подстановка сюда разложения для w приводит к последовательности уточняющих приближенное решение (записанное в неявном виде) УДМ на претерпевшей конформное отображение области комплексной плоскости.

6. Заключение

Получение точных общих вихревых решений стационарного УЭГ позволяет нам рассматривать квазиравновесные состояния, описываемые указанными решениями, и выявлять возможность рождения бифуркационных ветвей при гомотопическом изменении параметров типа параметра температуры β. Как легко можно видеть, переход к его отрицательным значениям приводит к качественной перестройке всей структуры вихревой системы, причем, в отличие от стандартной локальной бифуркации, здесь происходит скачкообразное преобразование решения, которое невозможно описать с помощью стандартного метода Ляпунова–Шмидта и разложения решения по степеням параметра в малой окрестности особой точки. Это обусловлено существенной неаналитичностью структуры максимального решения уравнения Лиувилля [29].

Следует указать, что помимо точечных вихрей можно рассмотреть в рамках развиваемого формализма также и конечные вихри, например, типа Рэнкина или Кирхгофа.

Список литературы

[1] Perry A.E., Lim T.T., Chong M.S., Tex E.W. *The fabric of turbulence* // AIAA Paper. 1980. V. 80. P. 1358.

[2] Lesieur M. *Turbulence in fluids.* Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers. 1997.

[3] Hussain A.K.M. *Role of coherent structures in turbulent shear flows* // Proc. Indian Acad. Sci. (Engg. Sci.) 1981. V. 4. Pt. 2. P. 129–175.

[4] *van de Fliert B.W., van Groesen E.* On variational principles for coherent vortex structures // Appl. Scient. Research. V. 51. 1993. P. 399–403.

[5] *Fledderus E.R., van Groesen E.* Deformation of coherent structures // Rep. Prog. Phys. V. 59. 1996. P. 511–600.

[6] *van de Fliert B.W., van Groesen E.* Monopolar vortices as relative equilibria and their dissipative decay // Nonlinearity. V. 5. 1992. P. 473–495.

[7] *van Groesen E.* Time–asymptotics and the self–organization hypothesis for 2D Navier–Stokes equations // Physica A. V. 148. 1988. P. 312–330.

[8] Onsager L. *Statistical hydrodynamics* // Nuovo Cimento Suppl. 1949. V. 6. P. 279–289.

[9] Batchelor G. *Steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number* // J. Fluid Mech. V. 1. P. 177–190. 1957.

[10] Montgomery D., Joyce G. *Statistical mechanics of "negative temperature" states* // Phys. Fluids. V. 17. P. 1139–1145. 1974.

[11] Kiessling M.K.-H. *Statistical mechanics of classical particles with logarithmic interactions* // Comm. Pure Appl. Math. V. 47. PP. 27–56. 1993.

[12] Helms L.L. *Introduction to potential theory.* New York – London – Sydney – Toronto: Wiley Interscience. 1969.

[13] Брело М. *Основы классической теории потенциала.* М.: Мир. 1964.

[14] Smets D., Schaftingen J.V. *Desingularization of vortices for the Euler equation* // Arch. Rat. Mech. Anal. 2010. V. 198. P. 869–925.

[15] Neri C. *Statistical mechanics of the N–point vortex system with random intensities on* $\mathbb{R}^2$ // Electr. J. Diff. Eqs. 2005. V. 2005(2005). № 92. P. 1–26.

[16] Rey O. *The role of the Green's function in a non–linear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent* // J. Funct. Anal. 1990. V. 89. P. 1–52.

[17] Caglioti E., Lions P.L., Marchioro C., Pulvirenti M. *A special class of stationary flows for two–dimensional Euler equations: a statistical mechanics description* // Comm. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 501–525.

[18] Neri C. *Mécanique statistique des systèmes de N vortex ponctuels à intensitiés aléatoires sur un domaine borné* // Ann. de l'Inst. H. Poincare. Sec. A. 2004. V. 21. P. 381–399.

[19] Messer J., Spohn H. *Statistical mechanics of the isothermal Lane–Emden equation* // Journ. Stat. Phys. V. 29. № 3. PP. 561–578. 1982.

[20] Cohen N., Benavides J.V.T. *Explicit radial Bratu solutions in dimension* $n = 1, 2$ // UNICAMP–IMECC report 22-07, http://www1.ime.unicamp.br/rel pesq/2007/pdf/rp22-07.ps

[21] Гельфанд И.М. *Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений* // УМН. 1959. Т. 14. Вып. 2(86). СС. 87–158.

[22] Jacobsen J., Schmitt K. *The Liouville–Bratu–Gelfand problem for radial operators* // J. Diff. Eqs. V. 184. PP. 283–298. 2002.

[23] Lin S.S. *On the existence of positive radial solutions for nonlinear elliptic equations in annular domains* // J. Diff. Eqs. V. 81. PP. 221–233. 1989.

[24] Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications*. London: Pitman. 1980.

[25] Weston V.H. *On the asympptotic solution of a partial differential equation with an exponential nonlinearity* // SIAM J. Math. V. 9. № 6. PP. 1030–1053. 1978.

[26] Nagasaki K., Suzuki T. *Asymptotic analysis for two–dimensional elliptic eigenvalue problems with exponetially–dominated nonlinearities* // Asymptotic Analysis. V. 3. PP. 173–188. 1990.

[27] Routh E.J. *Some applications of conjugate functions* // Proc. Lond. Math. Soc. V. 12. № 170/171. PP. 73–89. 1881.

[28] Polyanin A.D. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. Boca Raton – London – N.Y.: Chapman and Hall/CRC. 2002.

[29] Suzuki T. *Global analysis for a two–dimensional elliptic eigenvalue problem with the exponential nonlinearity* // Ann. de l'I.H.P. T. 9. No. 4. PP. 367–397. 1992.