



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 129 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Люпа А.А., Савенков Е.Б.

Модель двухфазной
фильтрации с релаксацией
потока и анализ
эффективности применения
явных схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Люпа А.А., Савенков Е.Б. Модель двухфазной фильтрации с релаксацией потока и анализ эффективности применения явных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 129. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2016-129](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-129)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-129>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.А. Люпа, Е.Б. Савенков

Модель двухфазной фильтрации с релаксацией
потока и анализ эффективности применения
явных схем

Москва — 2016

Люпа А.А., Савенков Е.Б.

Модель двухфазной фильтрации с релаксацией потока и анализ эффективности применения явных схем

В работе рассматривается модификация классической модели изотермической двухфазной фильтрации в пористых средах, полученная введением релаксации потока в уравнения неразрывности. Представлены результаты численного исследования предложенной модели, а также применения явных численных методов со сниженным ограничением на шаг по времени.

Ключевые слова: течение жидкости в пористой среде, явные конечно-разностные схемы

Anastasiya Alexandrovna Lyupa, Evgeny Borisovich Savenkov

Two-phase flow model with flow relaxation and effectiveness analysis of the explicit schemes application

The paper focuses on the modification of the classical model of isothermal two-phase flow in porous media by addition of flow relaxation to the continuity equation. The results of a numerical study of the proposed model are presented. Explicit numerical methods with a reduced restriction on time step are applied.

Key words and phrases: fluid flow in a porous medium, explicit finite difference schemes

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15095-офи_м, 15-01-03445-а, 15-01-03654-а.

Оглавление

1	Введение	3
2	Классическая модель	3
3	Модифицированная модель	4
4	Постановка тестовой задачи	9
5	Эталонное решение	9
6	Явная схема для модифицированной модели	14
7	Результаты расчетов	15
8	Заключение	16
	Библиографический список	16

1 Введение

Все большее распространение получает моделирование физических явлений с учетом времени распространения возмущений и времени выравнивания таких макропараметров, как давление, температура, плотность. Множество трудов посвящено применению этого подхода в моделировании динамики жидкостей и газов. В книге [1] этот подход рассмотрен в применении к моделированию двухфазной двухкомпонентной фильтрации несжимаемых жидкостей, то есть для решения классической задачи Баклея-Левретта. В данной работе время релаксации потока вводится при моделировании двухфазной двухкомпонентной фильтрации слабосжимаемых жидкостей. На примере решения тестовой задачи проведено сравнение используемых в расчетах численных методов, исследована возможность снизить ограничение на шаг по времени при расчетах явными схемами модифицированной модели в сравнении с классической.

2 Классическая модель

Система уравнений для описания двухфазной неизотермической фильтрации в пористой среде может быть представлена в виде [2], [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}_i) = q_i, \quad (1a) \\ \vec{u}_i = -\frac{Kk_i}{\mu_i}(\operatorname{grad} P_i - \rho_i g \operatorname{grad} z), \quad (1b) \\ P_n = P_w + P_c(\bar{S}_w), \quad (1c) \\ S_w + S_n = 1, \quad (1d) \\ k_i = k_i(\bar{S}_w), \quad (1e) \\ \rho_i = \rho_i(P_i), \quad (1f) \\ i = w, n. \end{array} \right.$$

Здесь P_i – давление фазы, P_c – капиллярное давление на границе раздела фаз, S_i – насыщенность фазы, ρ_i – плотность фазы, q_i – источниковые члены, K – абсолютная проницаемость среды, ϕ – пористость среды, \vec{u}_i – скорость фильтрации фазы, μ_i – вязкость фазы, k_i – относительная фазовая проницаемость, g – ускорение свободного падения, (1a) – уравнения неразрывности, (1b) – закон Дарси, (1c) – связь давлений фаз, (1d) – связь насыщенностей фаз, (1e) – уравнения относительных фазовых проницаемостей, (1f) – уравнения состояния.

Для удобства дальнейших выкладок введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } q_t &= \frac{q_n}{\rho_n} + \frac{q_w}{\rho_w}, c_n = \frac{1}{\rho_n} \frac{d\rho_n}{dP_n}, c_w = \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dP_w}, P_{avg} = \frac{P_n + P_w}{2}, P_n = P_{avg} + \frac{P_c}{2}, \\ P_w &= P_{avg} - \frac{P_c}{2}, \lambda_n = -\frac{Kk_n}{\mu_n}, \lambda_w = -\frac{Kk_w}{\mu_w}, \vec{u}_t = \vec{u}_n + \vec{u}_w, f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_n + \lambda_w}, \\ h_w &= -\frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_n + \lambda_w} \frac{dP_c}{dS_w}. \end{aligned}$$

Для последующего использования численного метода IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation) — метода неявного по давлению, явного по насыщенности, проводится преобразование уравнений модели (1) [4].

Разложим член $\frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t}$ на сумму слагаемых:

$$\frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} = \rho_i S_i \frac{d\phi}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \phi S_i \frac{d\rho_i}{dP_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} + \phi\rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t}. \quad (2)$$

Разделим уравнения неразрывности (1a) на ρ_i и сложим их. Также используем принятые выше обозначения. Получим следующее уравнение для определения среднего давления:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_n} \operatorname{div}(\rho_n \lambda_n \operatorname{grad} P_{avg}) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_{avg}) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_n} \operatorname{div}(\rho_n \lambda_n \operatorname{grad} P_c) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_c) \right] + q_t = \\ & = \left[\frac{d\phi}{dP_{avg}} + \phi(S_n c_n + S_w c_w) \right] \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \frac{1}{2} \phi(S_n c_n - S_w c_w) \frac{\partial P_c}{\partial t} + \\ & + g \left[\frac{1}{\rho_n} \operatorname{div}(\rho_n^2 \lambda_n \operatorname{grad} z) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w^2 \lambda_w \operatorname{grad} z) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Получим уравнение для нахождения насыщенности S_w , исходя из предположения, что давление P_{avg} к этому моменту уже известно. Из (1c) следует, что $\operatorname{grad} P_c = \operatorname{grad} P_n - \operatorname{grad} P_w$ или $\lambda_n \lambda_w \operatorname{grad} P_c = \lambda_n \lambda_w \operatorname{grad} P_n - \lambda_n \lambda_w \operatorname{grad} P_w$. Используем (1a), (1b) и принятые обозначения. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_w h_w \operatorname{grad} S_w) - \operatorname{div}(\rho_w f_w [\vec{u}_t + \lambda_n(\rho_w - \rho_n)g \operatorname{grad} z]) + \\ + q_w = \frac{\partial(\phi\rho_w S_w)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4)$$

3 Модифицированная модель

Запишем уравнение (1a) кратко в виде

$$\frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{Q}_i = q_i, i = w, n, \quad (5)$$

где \vec{Q}_i – поток фазы. Пусть $\vec{Q}_i^D = \rho_i \vec{u}_i$ – поток Дарси. В модели (1) $\vec{Q}_i = \vec{Q}_i^D$. Мы же введем релаксацию потока, положим

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_i^D - \tau \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial t}, \quad (6)$$

где τ – параметр релаксации, довольно малая величина, характеризующая время установления равновесия в системе. Откуда следует, что

$$\operatorname{div} \vec{Q}_i = \operatorname{div} \vec{Q}_i^D - \tau \operatorname{div} \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial t}. \quad (7)$$

Продифференцируем по времени уравнения (5) и домножим на τ :

$$\tau \frac{\partial^2(\phi \rho_i S_i)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial(\operatorname{div} \vec{Q}_i)}{\partial t} = \tau \frac{\partial q_i}{\partial t}. \quad (8)$$

С учетом (7) от (5) перейдем к конечному виду модифицированного уравнения неразрывности путем введения релаксации потока:

$$\tau \frac{\partial^2(\phi \rho_i S_i)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{Q}_i^D = q_i + \tau \frac{\partial q_i}{\partial t}. \quad (9)$$

Сделаем некоторые вспомогательные выкладки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\phi \rho_i S_i)}{\partial t^2} &= \rho_i S_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi S_i \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial t^2} + \phi \rho_i \frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} + \\ &+ 2S_i \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + 2\rho_i \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial t} + 2\phi \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial t} = \\ &= \rho_i S_i \left(\frac{d^2 \phi}{dP_{avg}^2} \cdot \left(\frac{\partial P_{avg}}{\partial t} \right)^2 + \frac{d\phi}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial^2 P_{avg}}{\partial t^2} \right) + \\ &+ \phi S_i \left(\frac{d^2 \rho_i}{dP_i^2} \cdot \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{d\rho_i}{dP_i} \cdot \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} \right) + \phi \rho_i \frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2} + \\ &+ 2S_i \frac{d\phi}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} \cdot \frac{d\rho_i}{dP_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} + 2\rho_i \frac{d\phi}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial t} + \\ &+ 2\phi \frac{d\rho_i}{dP_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{d^2 \phi}{dP_{avg}^2} \cdot \left(\frac{\partial P_{avg}}{\partial t} \right)^2 + \frac{d\phi}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial^2 P_{avg}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial t^2} = \frac{d^2 \rho_i}{dP_i^2} \cdot \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{d\rho_i}{dP_i} \cdot \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{dq_i}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial P_{avg}}{\partial t},$$

Проведя преобразования, аналогичные выполненным в разделе 2, получим с учетом результатов (10), (11) следующие уравнения для определения среднего давления и насыщенности водной фазы:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho_n} \operatorname{div} (\rho_n \lambda_n \operatorname{grad} P_{avg}) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_{avg}) + \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_n} \operatorname{div} (\rho_n \lambda_n \operatorname{grad} P_c) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_c) \right] + \\
& + q_t = \left[\frac{d\phi}{dP_{avg}} + \phi(S_n c_n + S_w c_w) \right] \left(\frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P_{avg}}{\partial t^2} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2} \phi(S_n c_n - S_w c_w) \left(\frac{\partial P_c}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P_c}{\partial t^2} \right) + \\
& + g \left[\frac{1}{\rho_n} \operatorname{div} (\rho_n^2 \lambda_n \operatorname{grad} z) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\rho_w^2 \lambda_w \operatorname{grad} z) \right] + \\
& + \tau \left[\frac{d^2 \phi}{dP_{avg}^2} + \phi \left(\frac{1}{\rho_n} S_n \frac{d^2 \rho_n}{dP_n^2} + \frac{1}{\rho_w} S_w \frac{d^2 \rho_w}{dP_w^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2(S_n c_n + S_w c_w) \frac{d\phi}{dP_{avg}} \right] \left(\frac{\partial P_{avg}}{\partial t} \right)^2 + \\
& \quad + \tau \left[\phi \left(\frac{1}{\rho_n} S_n \frac{d^2 \rho_n}{dP_n^2} - \frac{1}{\rho_w} S_w \frac{d^2 \rho_w}{dP_w^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (S_n c_n - S_w c_w) \frac{d\phi}{dP_{avg}} \right] \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_c}{\partial t} + \\
& \quad + \frac{1}{4} \tau \phi \left(\frac{1}{\rho_n} S_n \frac{d^2 \rho_n}{dP_n^2} + \frac{1}{\rho_w} S_w \frac{d^2 \rho_w}{dP_w^2} \right) \left(\frac{\partial P_c}{\partial t} \right)^2 - \\
& \quad - \tau \left(\frac{1}{\rho_n} \frac{dq_n}{dP_{avg}} + \frac{1}{\rho_w} \frac{dq_w}{dP_{avg}} \right) \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \\
& \quad + 2\tau \phi \left(c_n \frac{\partial S_n}{\partial t} + c_w \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \\
& \quad + \tau \phi \left(c_n \frac{\partial S_n}{\partial t} - c_w \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \frac{\partial P_c}{\partial t},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} (\rho_w h_w \operatorname{grad} S_w) - \operatorname{div} (\rho_w f_w [\vec{u}_t + \lambda_n (\rho_w - \rho_n) g \operatorname{grad} z]) + q_w = \\
& = \rho_i S_i \frac{d\phi}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \phi S_i \frac{d\rho_i}{dP_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} + \phi \rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} + \\
& \quad + \tau \frac{\partial^2 (\phi \rho_w S_w)}{\partial t^2} - \tau \frac{dq_w}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial P_{avg}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку целью данной работы является проверка возможности в принципе снизить ограничение на шаг по времени при использовании явного численного метода для решения уравнения для среднего давления с помощью введения релаксации потока в уравнения неразрывности (1а), то на данном этапе будем исходить из дополнительных предположений, позволяющих значительно упростить уравнения для среднего давления и насыщенности, не изменяя существенно их характера в целом. В частности, пористость среды положим постоянной, уравнения состояния - линейными, капиллярными эффектами пренебрежем:

$$\phi = const, \quad \frac{d^2 \rho_i}{dP_i^2} = 0, \quad P_w = P_n = P_{avg}. \quad (14)$$

При перечисленных допущениях, действуя как в разделе 2, получим уравнение для определения давления:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_n} \operatorname{div} (\rho_n \lambda_n \operatorname{grad} P_{avg}) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_{avg}) + q_t = \\ & = \phi (S_n c_n + S_w c_w) \left(\frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P_{avg}}{\partial t^2} \right) + \\ & + g \left[\frac{1}{\rho_n} \operatorname{div} (\rho_n^2 \lambda_n \operatorname{grad} z) + \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div} (\rho_w^2 \lambda_w \operatorname{grad} z) \right] - \\ & - \tau \left(\frac{1}{\rho_n} \frac{dq_n}{dP_{avg}} + \frac{1}{\rho_w} \frac{dq_w}{dP_{avg}} \right) \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \\ & + 2\tau \phi \left(c_n \frac{\partial S_n}{\partial t} + c_w \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \frac{\partial P_{avg}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Несмотря на то, что полностью избавиться от насыщенности в уравнении не получилось, в силу малости слагаемого

$$2\tau \phi \left(c_n \frac{\partial S_n}{\partial t} + c_w \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \frac{\partial P_{avg}}{\partial t}$$

при вычислениях будем считать допустимым задание $\frac{\partial S_i}{\partial t}$ явно — будем использовать данные значения с предыдущего временного слоя.

А для определения насыщенности достаточно использовать исходное уравнение неразрывности (9), раскрыв слагаемые, в которых присутствуют

частные производные по времени от произведения переменных:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_w \lambda_w \operatorname{grad} P_{avg}) + q_w = g \cdot \operatorname{div}(\rho_w^2 \lambda_w \operatorname{grad} z) + \phi \rho_w S_w c_w \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} + \\ + \phi \rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} + \tau \phi \rho_w \frac{\partial^2 S_w}{\partial t^2} + \tau \phi \rho_w S_w c_w \frac{\partial^2 P_{avg}}{\partial t^2} + \\ + 2\tau \phi \rho_w c_w \frac{\partial P_{avg}}{\partial t} \cdot \frac{\partial S_w}{\partial t} - \tau \frac{dq_w}{dP_{avg}} \cdot \frac{\partial P_{avg}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (16)$$

Относительные фазовые проницаемости определяются в работе в соответствии с приближением Стоуна [2]:

$$k_w(\bar{S}_w) = \begin{cases} \bar{S}_w^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - \bar{S}_w^{\frac{n-1}{n}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)^2, & 0 < \bar{S}_w < 1 \\ 1, & \bar{S}_w \geq 1 \\ 0, & \bar{S}_w \leq 0 \end{cases}, \quad (17)$$

$$k_n(\bar{S}_w) = \begin{cases} (1 - \bar{S}_w)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \bar{S}_w^{\frac{n-1}{n}} \right)^{\frac{2(n-1)}{n}}, & 0 < \bar{S}_w < 1 \\ 1, & \bar{S}_w \leq 0 \\ 0, & \bar{S}_w \geq 1 \end{cases}, \quad (18)$$

где \bar{S}_w – эффективная насыщенность водной фазы: $\bar{S}_w = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{nr}}$, где S_{wr} , S_{nr} – остаточные насыщенности фаз. Для наглядности функции (17) и (18) представлены на графиках рис. 1 и рис. 2 при $S_{wr} = S_{nr} = 0.05$.

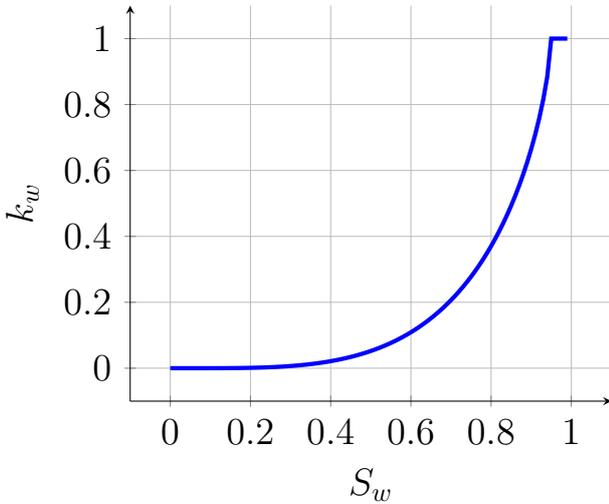


Рис. 1. $k_w(S_w)$

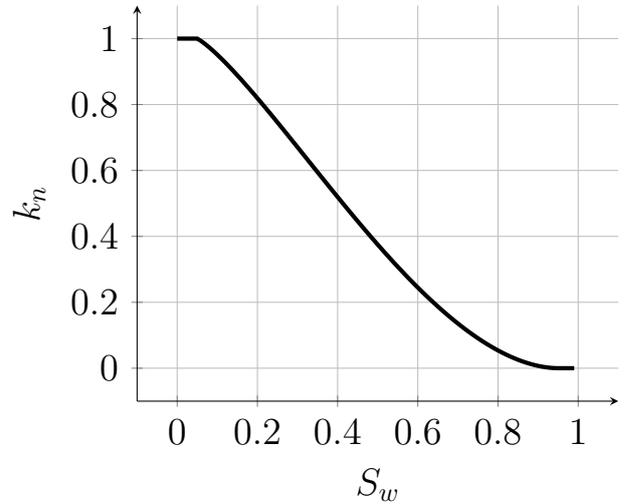


Рис. 2. $k_n(S_w)$

4 Постановка тестовой задачи

Рассмотрим одномерную задачу двухфазной двухкомпонентной фильтрации (присутствуют только вода и легкая нефть в жидком состоянии) в однородной изотропной пористой среде с учетом упрощений раздела 3. Исследуемая область имеет форму параллелепипеда со сторонами 5м, 1м, 1м, но в силу симметрии задача сводится к одномерной. Зафиксируем шаг по пространству $h = 0.05$ м. Зададим следующие начальные условия: $S_w = 0.35$, P_{avg} линейно убывает от $3.3 \cdot 10^7$ Па к $3.0 \cdot 10^7$ Па слева направо. Граничные условия: $S_w|_{\text{left}} = 0.7$, $S_w|_{\text{right}} = 0.35$, $P_{avg}|_{\text{left}} = 3.3 \cdot 10^7$ Па, $P_{avg}|_{\text{right}} = 3.0 \cdot 10^7$ Па.

Таблица 1

Параметры фаз

Физ. величина	вода, w	нефть, n
Плотность, кг/м ³	1000	850
Динамическая вязкость, Па · с	10^{-3}	10^{-2}
Сжимаемость, Па ⁻¹	$4.4 \cdot 10^{-10}$	10^{-9}
Остаточная насыщенность	0.05	0.05

Таблица 2

Параметры среды

Пористость	0.4
Абсолютная проницаемость, м ²	$6.64 \cdot 10^{-11}$

5 Эталонное решение

В силу сильной нелинейности системы уравнений (1) найти точное общее решение не представляется возможным. В этом случае в качестве эталонного решения возьмем решение, полученное с помощью часто используемого и проверенного на практике IMPES-метода с расчетным шагом по времени $\Delta t = 10^{-4}$ с. Величина шага подобрана с помощью сравнения результатов расчетов при различных шагах. Дальнейшее уменьшение шага не привело к существенному изменению результатов. Детальные данные представлены в таблице 3.

С учетом упрощений тестовой задачи из уравнения (3) получим неявное разностное уравнение для давления, а из (4) — явное для насыщенности.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\rho_{n_i}} (\rho_{n_{i+0.5}} \lambda_{n_{i+0.5}} (P_{i+1}^{m+1} - P_i^{m+1}) - \right. \\
& \quad \left. - \rho_{n_{i-0.5}} \lambda_{n_{i-0.5}} (P_i^{m+1} - P_{i-1}^{m+1})) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\rho_{w_i}} (\rho_{w_{i+0.5}} \lambda_{w_{i+0.5}} (P_{i+1}^{m+1} - P_i^{m+1}) - \right. \\
& \quad \left. - \rho_{w_{i-0.5}} \lambda_{w_{i-0.5}} (P_i^{m+1} - P_{i-1}^{m+1})) \right) + \\
& + q_{t_i} = \phi (S_{n_i} c_{n_i} + S_{w_i} c_{w_i}) \frac{P_i^{m+1} - P_i^m}{\Delta t} + \\
& + \frac{g}{\Delta x} \left(\frac{1}{\rho_{n_i}} (\rho_{n_{i+0.5}}^2 \lambda_{n_{i+0.5}} - \rho_{n_{i-0.5}}^2 \lambda_{n_{i-0.5}}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\rho_{w_i}} (\rho_{w_{i+0.5}}^2 \lambda_{w_{i+0.5}} - \rho_{w_{i-0.5}}^2 \lambda_{w_{i-0.5}}) \right), \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_{w_i}^{m+1} = S_{w_i}^m - S_{w_i} c_{w_i} (P_i^{m+1} - P_i^m) + \\
& + \frac{\Delta t}{\phi \rho_{w_i}} \left(\frac{1}{\Delta x^2} \left(\rho_{w_{i+0.5}} \lambda_{w_{i+0.5}} (P_{i+1}^{m+1} - P_i^{m+1}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \rho_{w_{i-0.5}} \lambda_{w_{i-0.5}} (P_i^{m+1} - P_{i-1}^{m+1}) \right) + \right. \\
& \quad \left. + q_{w_i} - \frac{g}{\Delta x} \left(\rho_{w_{i+0.5}}^2 \lambda_{w_{i+0.5}} - \rho_{w_{i-0.5}}^2 \lambda_{w_{i-0.5}} \right) \right). \tag{20}
\end{aligned}$$

Запишем уравнение (19) в матричном виде:

$$\overrightarrow{AP^{m+1}} = \vec{b} \tag{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1N-2} & a_{N-1N-1} & a_{N-1N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} P_{\text{left}} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ P_{\text{right}} \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
a_{ii-1} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{\rho_{n_{i-0.5}} \lambda_{n_{i-0.5}}}{\rho_{n_i}} + \frac{\rho_{w_{i-0.5}} \lambda_{w_{i-0.5}}}{\rho_{w_i}} \right), \\
a_{ii} &= -\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{\rho_{n_{i-0.5}} \lambda_{n_{i-0.5}} + \rho_{n_{i+0.5}} \lambda_{n_{i+0.5}}}{\rho_{n_i}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho_{w_{i-0.5}} \lambda_{w_{i-0.5}} + \rho_{w_{i+0.5}} \lambda_{w_{i+0.5}}}{\rho_{w_i}} \right) - \\
&\quad - \frac{\phi}{\Delta t} (S_{n_i} c_{n_i} + S_{w_i} c_{w_i}), \\
a_{ii+1} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{\rho_{n_{i+0.5}} \lambda_{n_{i+0.5}}}{\rho_{n_i}} + \frac{\rho_{w_{i+0.5}} \lambda_{w_{i+0.5}}}{\rho_{w_i}} \right), \\
b_i &= -\frac{\phi}{\Delta t} (S_{n_i} c_{n_i} + S_{w_i} c_{w_i}) P_i^m - q_t + \\
&\quad + \frac{g}{\Delta x} \left(\frac{1}{\rho_{n_i}} (\rho_{n_{i+0.5}}^2 \lambda_{n_{i+0.5}} - \rho_{n_{i-0.5}}^2 \lambda_{n_{i-0.5}}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho_{w_i}} (\rho_{w_{i+0.5}}^2 \lambda_{w_{i+0.5}} - \rho_{w_{i-0.5}}^2 \lambda_{w_{i-0.5}}) \right).
\end{aligned} \tag{23}$$

В данном тестовом примере заданы граничные условия первого рода. Матрица коэффициентов трехдиагональная. Для решения полученной СЛАУ используется итерационный численный метод.

Зависимости насыщенностей и давления от времени представлены на графиках рис. 3 – рис. 10. Видно постепенное вытеснение нефти водой вплоть до уровня источника.

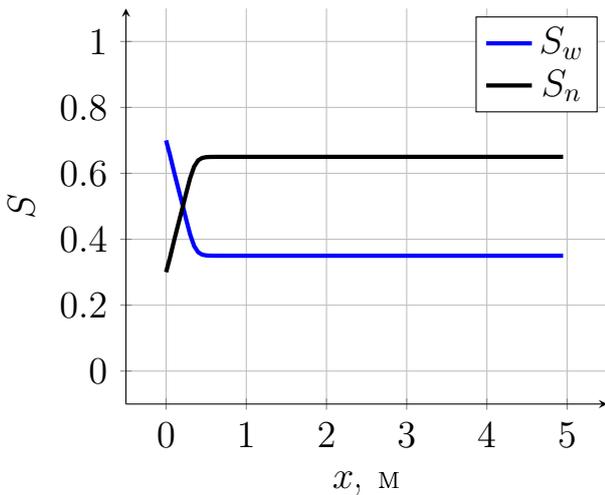


Рис. 3. Насыщенности, $t=10с$

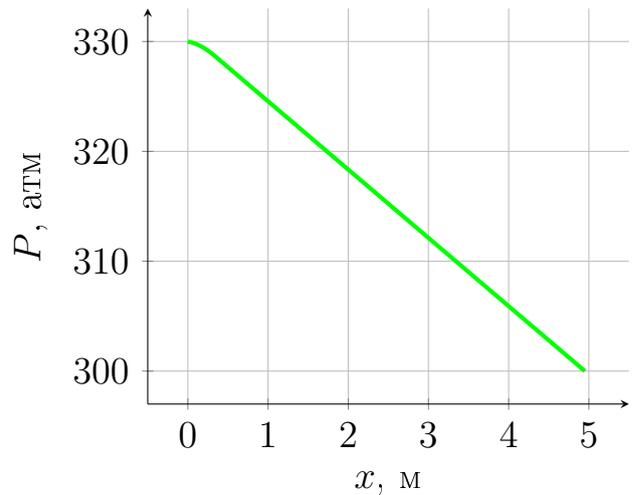


Рис. 4. Давление, $t=10с$

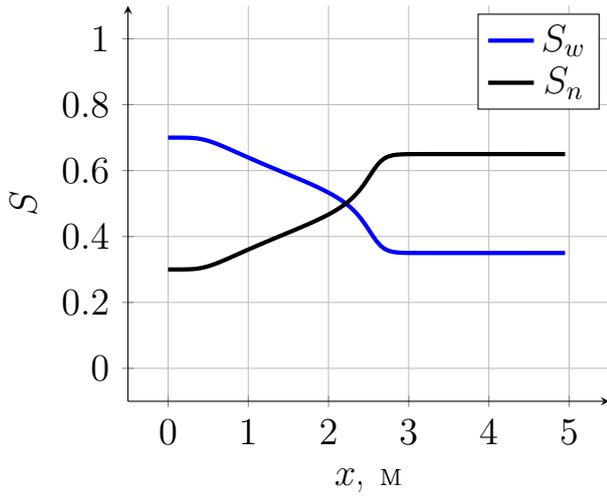


Рис. 5. Насыщенности, $t=100$ с

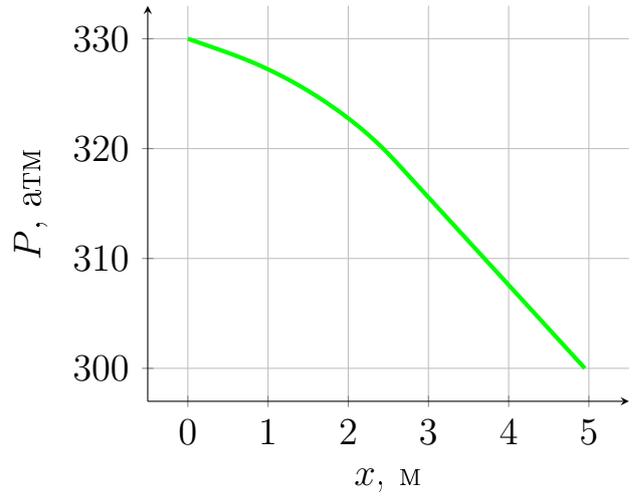


Рис. 6. Давление, $t=100$ с

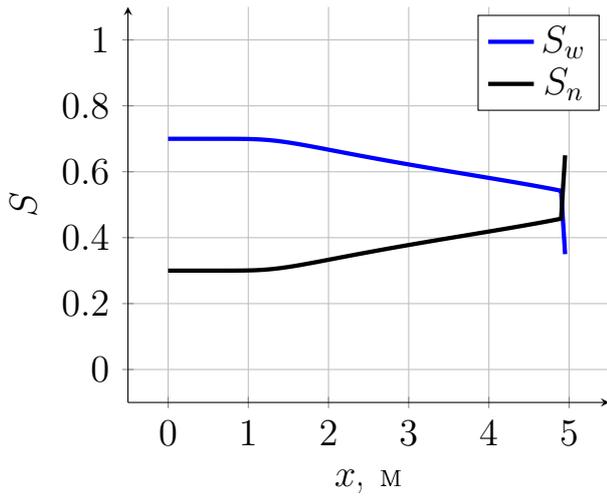


Рис. 7. Насыщенности, $t=200$ с

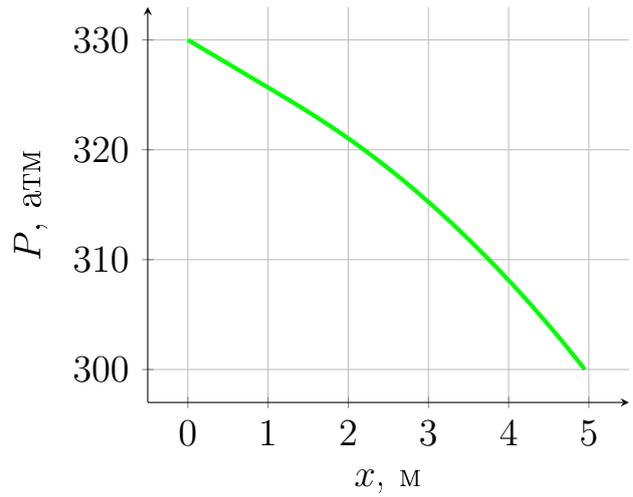
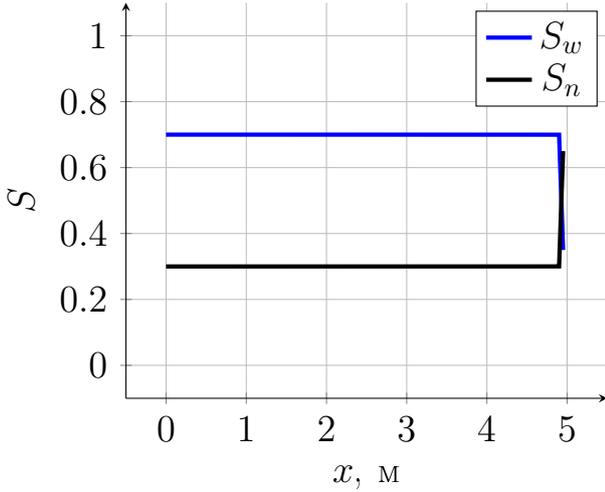
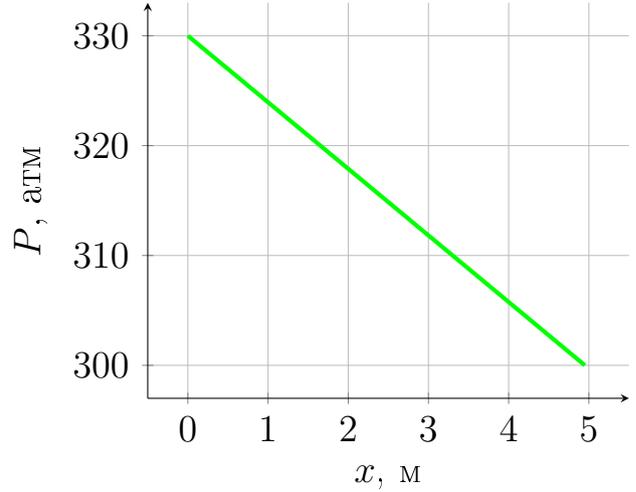


Рис. 8. Давление, $t=200$ с

Рис. 9. Насыщенности, $t=500\text{с}$ Рис. 10. Давление, $t=500\text{с}$

В таблице 3 представлены погрешности расчета IMPES-методом в моменты времени $t=30\text{с}$, $t=60\text{с}$ и $t=90\text{с}$. при различных Δt по сравнению с $\Delta t = 10^{-5}\text{с}$. Относительная ошибка между величинами A и B вычислялась следующим образом:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{A_i - B_i}{A_i} \right)^2} / N. \quad (24)$$

Погрешность менее 10^{-6} считаем несущественной. Обращаем внимание как на погрешность расчета давления, так и насыщенности водной фазы. Исследуем данные значения в разные моменты времени для исключения быстрого набегания ошибки. Из чего делаем вывод, что решение при $\Delta t = 10^{-4}\text{с}$ можно взять в качестве эталонного для продолжительных расчетов. При этом ε_p меняется незначительно, ε_s возрасла на $0.4 \cdot 10^{-7}$ за 60с.

Таблица 3

Погрешность IMPES-метода в зависимости от шага по времени

$\Delta t, \text{с}$	$\varepsilon_p, \varepsilon_s$ при $t=30\text{с}$	$\varepsilon_p, \varepsilon_s$ при $t=60\text{с}$	$\varepsilon_p, \varepsilon_s$ при $t=90\text{с}$
10^{-3}	$1.4 \cdot 10^{-8}, 1.4 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-8}, 1.6 \cdot 10^{-6}$	$0.9 \cdot 10^{-8}, 1.8 \cdot 10^{-6}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$6.7 \cdot 10^{-9}, 6.8 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-9}, 7.8 \cdot 10^{-7}$	$4.7 \cdot 10^{-9}, 8.9 \cdot 10^{-7}$
10^{-4}	$1.2 \cdot 10^{-9}, 1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-9}, 1.4 \cdot 10^{-7}$	$0.9 \cdot 10^{-9}, 1.6 \cdot 10^{-7}$
$5 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-10}, 5.6 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-10}, 6.4 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-10}, 7.2 \cdot 10^{-8}$

6 Явная схема для модифицированной модели

Приведем разностные схемы для модифицированной модели, полученной в разделе 3. Уравнению (16) соответствует разностное уравнение:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x^2} \left(\rho_{w_{i+0.5}} \lambda_{w_{i+0.5}} (P_{i+1}^{m+1} - P_i^{m+1}) - \rho_{w_{i-0.5}} \lambda_{w_{i-0.5}} (P_i^{m+1} - P_{i-1}^{m+1}) \right) + \\
& + q_{w_i} = \phi \rho_{w_i} S_{w_i} c_{w_i} \frac{P_i^{m+1} - P_i^m}{\Delta t} + \phi \rho_{w_i} \frac{S_{w_i}^{m+1} - S_{w_i}^m}{\Delta t} + \\
& + \frac{g}{\Delta x} \left(\rho_{w_{i+0.5}}^2 \lambda_{w_{i+0.5}} - \rho_{w_{i-0.5}}^2 \lambda_{w_{i-0.5}} \right) - \tau \frac{q_{w_i}^m - q_{w_i}^{m-1}}{\Delta t} + \\
& + \tau \phi \rho_{w_i} S_{w_i} c_{w_i} \frac{P_i^{m+1} - 2P_i^m + P_i^{m-1}}{\Delta t^2} + \tau \phi \rho_{w_i} \frac{S_{w_i}^{m+1} - 2S_{w_i}^m + S_{w_i}^{m-1}}{\Delta t^2} + \\
& + 2\tau \phi \rho_{w_i} c_{w_i} \frac{S_{w_i}^{m+1} - S_{w_i}^m}{\Delta t} \cdot \frac{P_i^{m+1} - P_i^m}{\Delta t},
\end{aligned} \tag{25}$$

где i – пространственный индекс, а m – временной. Опущенный временной индекс соответствует текущему шагу.

А уравнению (15) – разностное уравнение:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{\rho_{n_i}} (\rho_{n_{i+0.5}} \lambda_{n_{i+0.5}} (P_{i+1}^m - P_i^m) - \rho_{n_{i-0.5}} \lambda_{n_{i-0.5}} (P_i^m - P_{i-1}^m)) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho_{w_i}} (\rho_{w_{i+0.5}} \lambda_{w_{i+0.5}} (P_{i+1}^m - P_i^m) - \rho_{w_{i-0.5}} \lambda_{w_{i-0.5}} (P_i^m - P_{i-1}^m)) \right) + q_{t_i} = \\
& = \phi (S_{n_i} c_{n_i} + S_{w_i} c_{w_i}) \frac{P_i^{m+1} - P_i^m}{\Delta t} + \\
& + \frac{g}{\Delta x} \left(\frac{1}{\rho_{n_i}} (\rho_{n_{i+0.5}}^2 \lambda_{n_{i+0.5}} - \rho_{n_{i-0.5}}^2 \lambda_{n_{i-0.5}}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\rho_{w_i}} (\rho_{w_{i+0.5}}^2 \lambda_{w_{i+0.5}} - \rho_{w_{i-0.5}}^2 \lambda_{w_{i-0.5}}) \right) - \tau \frac{q_{t_i}^m - q_{t_i}^{m-1}}{\Delta t} + \\
& + \tau \phi (S_{n_i} c_{n_i} + S_{w_i} c_{w_i}) \frac{P_i^{m+1} - 2P_i^m + P_i^{m-1}}{\Delta t^2} + \\
& + 2\tau \phi (c_{w_i} - c_{n_i}) \frac{S_{w_i}^m - S_{w_i}^{m-1}}{\Delta t} \cdot \frac{P_i^{m+1} - P_i^m}{\Delta t}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Фазовые проницаемости определяются «вверх по потоку» [5]:

$$k_{w_{i+0.5}} = \begin{cases} k_w(S_{w_i}), & P_{i+1} - P_i - \rho_{w_i} g \Delta x \leq 0; \\ k_w(S_{w_{i+1}}), & P_{i+1} - P_i - \rho_{w_i} g \Delta x > 0. \end{cases} \tag{27}$$

Аналогично вычисляется $k_{n_{i+0.5}}$.

Из схем получаем явные уравнения для давления P_i^{m+1} и насыщенности $S_{w_i}^{m+1}$ в каждом расчетном узле.

Для вычисления потока берем значения величин в «полуцелых» узлах как среднее арифметическое значений в узлах. Например, плотность на границе ячеек:

$$\rho_{i+0.5} = \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2}, \rho_{i-0.5} = \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{2}. \quad (28)$$

Отметим, что, если положить $\tau = 0$, модифицированная модель совпадает с классической моделью (1), а представленная явная трехслойная разностная схема для модифицированной модели совпадает с явной двухслойной для расчетов по модели (1).

7 Результаты расчетов

Для проведения расчетов по моделям (1) и ее модификации написана программа на языке Python с использованием научных библиотек NumPy, SciPy. Параметр τ , при котором расчеты были бы устойчивы, подбирался эмпирически в зависимости от размера шага по времени. Проведено сравнение решения IMPES-методом модели (1) и решения трехслойной явной разностной схемой модифицированной модели. Результаты представлены в таблице 4.

Таблица 4

Погрешность явной схемы относительно эталонного решения при различных τ при $t=10c$

$\Delta t, c$	τ, c	ε_p	ε_s
10^{-5}	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0.003
10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0.001
$5 \cdot 10^{-4}$	0.01	10^{-4}	0.003
0.001	0.025	$5 \cdot 10^{-4}$	0.03

Например, при $\Delta x = 0.05m$ явная двухслойная схема становится неустойчивой при $\Delta t \geq 5 \cdot 10^{-5}c$, а явная трехслойная при $\Delta t = 0.001c$, $\tau = 0.025c$ позволяет проводить расчеты с приемлемой с точки зрения моделирования погрешностью $\varepsilon_p = 0.0005$, $\varepsilon_s = 0.03$ на момент времени $t = 10c$.

8 Заключение

Тестовые расчеты показали, что использование предложенной модификации модели и явной трехслойной разностной схемы для ее реализации позволяет существенно ускорить численное решение за счет увеличения шага по времени по крайней мере на порядок. Кроме того, для параллельных вычислений явные схемы предпочтительнее. При этом погрешность вычислений остается приемлемой.

Библиографический список

- [1] Хасанов М. М., Булгакова Г. Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
- [2] Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982. 407 с.
- [3] Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
- [4] Peaceman D. W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. Elsevier, 1977. 176 p.
- [5] Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.: Институт компьютерных исследований, 2003. 127 с.