



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 116 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Д.М. Буланов, [В.В. Сазонов](#)

Исследование эволюции
вращательного движения
спутника Фотон М-2

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Буланов Д.М., Сазонов В. В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 116. 38 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2016-116>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-116>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

Д.М. Буланов, В.В. Сазонов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА *ФОТОН М-2*

Москва – 2016

Буланов Д.М., Сазонов В.В.

**Исследование эволюции вращательного движения
спутника *Фотон М-2***

Описаны результаты повторной обработки магнитных измерений, выполненных на спутнике *Фотон М-2* (находился на орбите 31.V – 16.VI.2005). Обработка проводилась с целью реконструкции неуправляемого вращательного движения этого спутника. При повторной обработке использовалась более простая математическая модель вращательного движения, чем при обработке, выполненной сразу после полета. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким в его теоретическом анализе эволюции неуправляемого вращательного движения спутника в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. В результате за счет некоторого огрубления реконструкции удалось напрямую сопоставить полученные экспериментальные результаты с теорией и провести их анализ.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли, вращательное движение, реконструкция движения по данным измерений, эволюция движения

Bulanov D.M., Sazonov V.V.

Investigation of evolution of spacecraft *Foton M-2* attitude motion

This preprint presents the results of the repeated reconstruction of the uncontrolled attitude motion of the spacecraft *Foton M-2* (was in orbit 31.V – 16.VI.2005) by measurements of onboard magnetometers. This problem was already solved successfully a few years ago. The repeated reconstruction was made by using the more simple mathematical model of spacecraft attitude motion than the model used in processing just after the flight. Simplifications were made in order the new model corresponded to the models in Beletsky's analysis of spacecraft attitude motion closed to Euler's regular precession of an axisymmetric rigid body. As a consequence of some roughening of the reconstruction, we made a direct comparison of the reconstruction results and Beletsky's theory.

Key words: spacecraft, attitude motion, reconstruction of motion
by measurement data, evolution of attitude motion

1. Введение. Вскоре после полета *Фотона М-2* его вращательное движение было реконструировано с помощью достаточно детальных математических моделей [1, 2]. Наиболее полная реконструкция была выполнена по данным бортовых измерений напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Из этих данных, охватывающих первые две трети полета, выбирались отрезки длиной несколько часов. На каждом таком отрезке данные обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения спутника относительно центра масс. При обработке оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели. Полученные результаты дали полное представление о движении спутника. Это движение, начавшееся с малой угловой скоростью, постепенно становилось быстрее и через двое суток стало близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. В последний день измерений 09.VI.2005 угловая скорость спутника относительно его продольной оси составляла примерно 1.1 град/с , проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную этой оси, имела модуль около 0.11 град/с .

Ниже описаны результаты повторной обработки отрезков магнитных измерений, использованных в [1]. Обработка проведена с помощью более простой, чем в [1, 2], математической модели вращательного движения спутника. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким при исследовании эволюции неуправляемого вращательного движения спутника в случае, когда это движение близко регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела [3]. В результате за счет некоторого огрубления реконструкции удалось напрямую сопоставить полученные экспериментальные результаты с теорией. Как оказалось, эволюция движения *Фотона М-2* хорошо согласуется с теорией В.В. Белецкого, при значениях угловой скорости вокруг продольной оси более 0.8 град./с .

2. Математическая модель вращательного движения спутника. Спутник считаем осесимметричным твердым телом. Для записи уравнений движения спутника и соотношений, используемых при обработке данных измерений, введем пять правых декартовых систем координат.

Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Точка O – центр масс спутника, ось Ox_1 – ось материальной симметрии спутника. Эта ось близка к продольной оси спутника и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку. Момент инерции спутника относительно оси Ox_1 обозначим I_1 , равные моменты инерции относительно осей Ox_2 и Ox_3 обозначим I_2 .

Вспомогательная система координат $Oy_1y_2y_3$ служит для записи уравнений вращательного движения спутника. Ось Oy_1 совпадает с осью Ox_1 ; оси Ox_2 и Ox_3 получаются из осей Oy_2 , Oy_3 поворотом системы $Oy_1y_2y_3$ на угол φ вокруг оси Oy_1 . Кинематическая связь между системами $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ задается условием, что проекция абсолютной угловой скорости второй из них на ось Oy_1 равна нулю. Проекции этой угловой скорости на оси Oy_2 , Oy_3 обозна-

чим w_2, w_3 . Пусть абсолютная угловая скорость спутника ω имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ компоненты $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогда $\dot{\varphi} = \omega_1$ и

$$\omega_2 = w_2 \cos \varphi + w_3 \sin \varphi, \quad \omega_3 = -w_2 \sin \varphi + w_3 \cos \varphi. \quad (1)$$

Здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по времени t .

В приборной системе координат $Oz_1z_2z_3$ интерпретируются данные измерений бортовых магнитометров. Эту систему можно перевести в систему $Ox_1x_2x_3$ двумя последовательными поворотами. Первый поворот выполняется на угол α_c вокруг оси Oz_2 , второй поворот – на угол β_c – выполняется вокруг оси Oz_3 , получившейся после первого поворота. В общем случае, чтобы задать положение одной системы координат относительно другой, необходимы три угла. В данном случае можно было бы ввести еще угол поворота приборной системы вокруг ее оси Oz_1 , получившееся после первых двух поворотов. Однако поскольку направление одной из осей Ox_2, Ox_3 можно выбирать произвольно, третий угол удобно принять равным нулю, фиксируя тем самым положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $Oz_1z_2z_3$. Матрицу перехода между этими системами координат обозначим $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где b_{ij} – косинус угла между осями Oz_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через углы α_c и β_c по формулам

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c, & b_{12} &= -\cos \alpha_c \sin \beta_c, & b_{13} &= \sin \alpha_c, \\ b_{21} &= \sin \beta_c, & b_{22} &= \cos \beta_c, & b_{23} &= 0, \\ b_{31} &= -\sin \alpha_c \cos \beta_c, & b_{32} &= \sin \alpha_c \sin \beta_c, & b_{33} &= \cos \alpha_c. \end{aligned}$$

Гринвичская система координат $CY_1Y_2Y_3$ используются для записи уравнений движения спутника. Начало этой системы находится в центре масс Земли, плоскость CY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, положительная полуось CY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось CY_3 направлена в Северный полюс. Полагаем, что эта система вращается с постоянной угловой скоростью ω_e вокруг оси CY_3 .

Квазиинерциальная система координат $CZ_1Z_2Z_3$ служит для графического представления вращательного движения спутника. В каждый момент времени ось CZ_2 параллельна вектору кинетического момента орбитального движения спутника, ось CZ_3 лежит в плоскости CY_1Y_2 и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты спутника. Абсолютная величина угловой скорости этой системы не превышает 5 град./сут.

Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к гринвичской системе обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, a_{ij} – косинус угла между осями CY_i и Oy_j . Элементы этой матрицы будем выражать в функции углов γ, δ и β , которые введем так, чтобы систему $CY_1Y_2Y_3$ можно было перевести в систему $Oy_1y_2y_3$ тремя последовательными

поворотами (полагаем, что точки C и O совпадают): 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси CY_2 , 2) на угол β вокруг новой оси CY_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси CY_1 , совпадающей с осью Oy_1 .

Направление оси Oy_1 в системе $CZ_1Z_2Z_3$ будем задавать углами θ и ψ : θ – угол между этой осью и плоскостью CZ_1Z_2 , ψ – угол между проекцией оси Oy_1 на плоскость CZ_1Z_2 и осью CZ_1 . Направления отсчета углов θ и ψ согласованы с направлениями осей Oy_2 и CZ_3 соответственно. Орт оси Oy_1 имеет в системе $CZ_1Z_2Z_3$ компоненты $(\cos\theta\cos\psi, \cos\theta\sin\psi, -\sin\theta)$.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая – его движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Решения этой подсистемы находились из условия наилучшей аппроксимации движения, построенного по двухстрочным элементам орбиты (two line elements) *Фотона М-2* на отрезках времени длиной 2–3сут [1].

Вторая подсистема образована динамическими уравнениями Эйлера для угловых скоростей w_2, w_3 и кинематическими уравнениями Пуассона для первой и второй строк матрицы $\|a_{ij}\|$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также постоянный момент вдоль оси Ox_1 . При вычислении аэродинамического момента атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, внешняя оболочка спутника принимается сферой с центром на оси Ox_1 . При сделанных допущениях аэродинамический момент характеризуется одним скалярным параметром. Вторая подсистема имеет вид [4, 5]

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 + \lambda\omega_1 w_3 &= -3\frac{\mu_e}{r^5}(1-\lambda)y_1 y_3 + pE\rho_a v v_3, \\ \dot{w}_3 - \lambda\omega_1 w_2 &= 3\frac{\mu_e}{r^5}(1-\lambda)y_1 y_2 - pE\rho_a v v_2, \\ \dot{a}_{11} + w_2 a_{13} - w_3 a_{12} &= \omega_e a_{21}, \\ \dot{a}_{12} + w_3 a_{11} = \omega_e a_{22}, \quad \dot{a}_{13} - w_2 a_{11} &= \omega_e a_{23}, \\ \dot{a}_{21} + w_2 a_{23} - w_3 a_{22} &= -\omega_e a_{11}, \\ \dot{a}_{22} + w_3 a_{21} = -\omega_e a_{12}, \quad \dot{a}_{23} - w_2 a_{21} &= -\omega_e a_{13}, \\ \omega_1 = \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \lambda = \frac{I_1}{I_2}, \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь y_i и v_i – компоненты в системе $Oy_1y_2y_3$ геоцентрического радиус-вектора точки O и скорости этой точки относительно системы $SY_1Y_2Y_3$; p – аэродинамический параметр; ρ_a – плотность атмосферы в точке O ; μ_e – гравитационный параметр Земли; Ω и ε – постоянные величины; E – масштабирующий множитель. В (2) использован явный вид решения одного из уравнений Эйлера $\dot{\omega}_1 = \varepsilon$ с начальным условием $\omega_1(t_0) = \Omega$. Выбор t_0 будет указан ниже.

При численном интегрировании уравнений (2) единицами измерения времени и длины служат $1000c$ и $1000km$, единицы измерения других величин: $[v_i] = km/c$, $[\omega_i] = [w_i] = 10^{-3} c^{-1}$, $[\varepsilon] = 10^{-6} c^{-2}$, $[p] = cm/kg$, $[\rho_a] = kg/m^3$, $E = 10^{10}$. Плотность атмосферы задается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Переменные a_{1i} и a_{2i} зависимы, они связаны условиями ортогональности матрицы $\|a_{ij}\|$. По этой причине начальные условия для a_{1i} и a_{2i} выражаются через углы γ , δ и β . Элементы третьей строки матрицы $\|a_{ij}\|$ вычисляются как векторное произведение первых двух ее строк. Формулы (1) и соотношение $\varphi = \Omega(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0)^2 / 2$ позволяют найти функции $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ и движение системы $Ox_1x_2x_3$, решая уравнения (2).

Проектные значения параметров α_c , β_c и λ : $\alpha_c = \beta_c = 0$, $\lambda = 0.24$ оказались достаточно точными. Тем не менее, эти параметры и параметры p , ε определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т. е. служат параметрами согласования.

Уравнения (2) и некоторые другие принятые ниже математические модели проще, чем уравнения движения и модели [1]. Это сделано для уменьшения числа уточняемых параметров и чтобы избежать использования априорной информации и методов регуляризации в статистических процедурах. Для компенсации сделанных упрощений ограничимся реконструкцией сравнительно простых движений спутника, в которых компонента угловой скорости ω_1 достаточно велика.

3. Реконструкция вращательного движения спутника по магнитным измерениям. На борту *Фотона М-2* находилась аппаратура "Мираж", с несколькими трехкомпонентными магнитометрами. Основной вклад их измерения вносило МПЗ, и движение спутника было неуправляемым, потому полученные данные и уравнения (2) позволили определить фактическое вращательное движение спутника по обычным статистическим методикам.

Методика, использованная ниже, состоит в следующем [1, 2]. По измерениям, выполненным на некотором отрезке времени $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $T = 270 \text{ мин}$, строились аппроксимирующие выражения $\hat{h}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, которые задавали на этом отрезке компоненты вектора местной напряженности магнитного поля в приборной системе координат. Каждое такое выражение представляло собой сумму линейной функции и отрезка ряда Фурье по синусам с частотами кратными π/T [6]. Коэффициенты этих выражений находились методом наимень-

ших квадратов. Среднеквадратичные ошибки аппроксимации компоненты $\hat{h}_i(t)$ не превышали 200γ ($1\gamma = 10^{-5}$ Э). Затем вычислялись псевдоизмерения $h_i^{(n)} = \hat{h}_i(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. В большинстве случаев $t_{n+1} - t_n = 1 \text{ мин}$, иногда этот промежуток был больше из-за наличия на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ сбойных данных. Псевдоизмерения служили исходной информацией для отыскания решений уравнений (2), описывающих фактическое движение спутника.

Представление о точности псевдоизмерений дает сравнение модуля измеренного вектора напряженности магнитного поля с модулем напряженности, рассчитанным по модели IGRF. При минимизации среднеквадратичного рассогласования σ_* этих модулей определялись корректирующие поправки в измерениях: масштабирующий коэффициент, сдвиг времени и постоянные смещения. После внесения этих поправок значения σ_* для большинства обрабатываемых отрезков псевдоизмерений не превышали 500γ .

Примеры сравнения расчетного и скорректированного измеренного модулей МПЗ приведены на рис. 1. В верхней части рисунка расчет по псевдоизмерениям представлен маркерами, расчет по модели IGRF – сплошными линиями. Графики в нижней части рисунка характеризуют отклонения псевдоизмерений от модели. Эти графики – ломаные, вершины которых отвечают ошибкам аппроксимации. В подписи к рисунку указаны значения σ_* . Ниже при обработке используются псевдоизмерения со внесенными поправками за масштабирующий коэффициент и сдвиг времени. Постоянные смещения в измерениях корректируются иначе.

В соответствии с методом наименьших квадратов реконструкцией фактического движения спутника считалось решение уравнений (2), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=1}^N [h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 - (N+1)\Delta_i^2 \right\}, \quad (3)$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N [h_i^{(n)} - h_i(t_n)], \quad h_i(t) = \sum_{j,k=1}^3 H_j(t) a_{jk}(t) b_{ik}.$$

Здесь Δ_i – оценки постоянных смещений в псевдоизмерениях, $H_i(t)$ – компоненты вектора напряженности МПЗ в гринвичской системе координат в момент времени t , рассчитываемые по модели IGRF2005. В качестве t_0 в уравнениях (2) всегда использовалась начальная точка обрабатываемого отрезка данных. Некоторые псевдоизмерения наследовали локальные ошибки данных измерений, что становилось ясным в процессе минимизации функционала (3). Такие псевдоизмерения из дальнейшей обработки исключались.

Функционал (3) минимизировался по 11 величинам: начальным условиям решения системы (2) $\gamma(t_0)$, $\delta(t_0)$, $\beta(t_0)$, Ω , $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$ и ее параметрам λ , p , ε , α_c , β_c . Заключительный этап минимизации выполнялся методом Гаусса

– Ньютона. Точность аппроксимации псевдоизмерений и разброс в оцениваемых величинах характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Стандартные отклонения рассчитывались в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях $h_i^{(n)}$ некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в псевдоизмерениях с одинаковым нижним индексом i одинаковы (величины Δ_i в (3) – оценки этих средних значений).

Стандартные отклонения вычислялись так. Пусть Φ_{\min} – значение функционала (3) в точке минимума, C – матрица системы нормальных уравнений метода Гаусса – Ньютона в этой точке (матрица $2C$ приблизительно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi$ в точке минимума Φ). Тогда дисперсия ошибок в псевдоизмерениях оценивается величиной

$$\sigma_H^2 = \frac{\Phi_{\min}}{3N - 11}.$$

Стандартные отклонения оцениваемых величин равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma_H^2 C^{-1}$. Стандартные отклонения величин $\gamma(t_0)$, $\delta(t_0)$, $\beta(t_0)$, Ω , $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$, λ , p , ε , α_c , β_c обозначим соответственно σ_γ , σ_δ , σ_β , σ_Ω , σ_{w_2} , σ_{w_3} , σ_λ , σ_p , σ_ε , σ_{α_c} , σ_{β_c} .

Результаты реконструкции фактического движения спутника *Фотон М-2*, полученные описанным способом, приведены на рис. 2 – 7 и в табл. 1. В подписях к рисункам и в таблице использовано Всемирное координированное время (UTC). Движение реконструировано на 17 временных интервалах. Длина каждого интервала 270 мин. Длина выбрана так, чтобы значение σ_H на большинстве интервалов не более чем в 3 раза превышало соответствующее значение σ_* , т. е. принятая модель движения была достаточно адекватна. Рисунки иллюстрируют качество аппроксимации псевдоизмерений с помощью найденных решений уравнений (2) и описываемое этими решениями движение спутника относительно системы координат $CZ_1Z_2Z_3$. Отдельный рисунок характеризует движение лишь на сравнительно коротком интервале времени, но взятые вместе они позволяют получить представление об эволюции движения на продолжительном отрезке неуправляемого полета. Каждый из рис. 2–7 естественным образом разбивается на три части – левую, среднюю и правую. В правой части сплошные кривые суть графики функций $h_i(t)$ на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, маркеры указывают точки $(t_n, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Такие графики и графики остатков $h_i^{(n)} - \Delta_i - h_i(t_n)$ служили для выявления сбойных псевдоизмерений. Количественно аппроксимация псевдоизмерений характеризуется стандартным отклонением σ_H , значения которого приведены в табл. 1 и в подписях к рисункам. Приведенные примеры демонстрируют менее точную, чем в [1] аппроксимацию псевдоизмерений. Значения σ_H в табл. 1 несколько выше, чем в [1]. Тем не менее, достигнутая точность достаточна для целей данной работы.

В средней части рисунков помещены графики компонент угловой скорости ω_1 , w_2 и w_3 в найденных решениях уравнений (2). Похожий режим вращательного движения был у *Фотон-11* и *-12* [7, 8]. По мере увеличения угловой скорости спутника его движение становилось все больше похоже на регулярную прецессию Эйлера осесимметричного твердого тела. Формирование регулярной прецессии с медленно возрастающей угловой скоростью ω_1 и мало меняющимся значением $\omega_{\perp} = \sqrt{w_2^2 + w_3^2}$ завершилось после полутора – двух суток полета.

Таблица 1. Результаты обработки измерений МПЗ, выполненных на *Фотоне М-2*

Инт. №	Дата VI.05	t_0 UTC	σ_H, γ	$\bar{\omega}_1$ град./с	$\delta\omega_1$ град./с	$\bar{\omega}_{\perp}$ Град./с	$\delta\omega_{\perp}$ град./с
1	1	11:11:21	1453	0.3133	0.013	0.0816	0.046
2	2	0:12:03	1206	0.4416	0.014	0.1007	0.039
3	2	11:12:38	1424	0.5208	0.0090	0.0669	0.030
4	3	00:13:19	822	0.6459	0.016	0.0708	0.024
5	3	11:13:53	1046	0.7462	0.0061	0.0562	0.016
6	4	00:14:37	1102	0.7890	0.0056	0.0953	0.029
7	4	13:15:14	825	0.8502	0.0065	0.1475	0.014
8	5	00:19:03	1146	0.8943	0.0036	0.1497	0.013
9	5	10:36:28	1137	0.9316	0.0012	0.1490	0.011
10	5	23:25:37	1293	0.9726	0.0041	0.1482	0.011
11	6	11:17:43	818	1.0094	0.0070	0.1476	0.011
12	6	22:18:29	982	1.0423	0.0032	0.1421	0.010
13	7	09:18:53	917	1.0665	0.0009	0.1330	0.010
14	7	21:19:54	1004	1.0863	0.0037	0.1148	0.011
15	8	09:20:09	999	1.1116	0.0007	0.1163	0.010
16	8	21:20:48	840	1.1293	0.0046	0.1094	0.011
17	9	09:21:25	928	1.1499	0.0002	0.1147	0.010

Точная регулярная прецессия Эйлера может иметь место лишь в случае, когда спутник осесимметричен и главный момент приложенных к нему внешних сил равен нулю. Тогда величины ω_1 и ω_{\perp} остаются неизменными во время движения. Для используемой модели первое условие выполнено, а второе – нет. По этой причине можно говорить лишь о движениях, близких к регулярной прецессии. Такие движения удобно характеризовать величинами

$$\bar{\omega}_{\perp} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \omega_{\perp} dt, \quad \delta\omega_{\perp} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\omega_{\perp} - \bar{\omega}_{\perp})^2 dt \right]^{1/2}$$

и определяемыми аналогичными формулами величинами $\bar{\omega}_1$, $\delta\omega_1$. Для последних имеют место формулы

$$\bar{\omega}_1 = \Omega + \frac{\varepsilon T}{2}, \quad \delta\omega_1 = \frac{|\varepsilon| T}{2\sqrt{3}}.$$

Среднеквадратичные отклонения $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_\perp$ характеризуют близость движения спутника к регулярной прецессии с параметрами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_\perp$. Значения величин $\bar{\omega}_1$, $\delta\omega_1$, $\bar{\omega}_\perp$, $\delta\omega_\perp$ и $\delta\omega_\perp$ указаны в табл. 1.

Вернемся к рисункам. В левой части рис. 2–7 находятся графики зависимости от времени углов Λ , ψ и θ , задающих положение оси Ox_1 относительно координат $CZ_1Z_2Z_3$. Движение спутника по углам установилось только к интервалу 7.

Таблица 2. Стандартные отклонения оценок начальных условий вращательного движения *Фотона М-2*

Инт. №	σ_γ	σ_δ	σ_β	σ_Ω	σ_{w2}	σ_{w3}
1	0.013	0.014	0.012	0.0049	0.012	0.018
2	0.010	0.0056	0.0044	0.0036	0.026	0.014
3	0.011	0.0094	0.0087	0.0035	0.020	0.013
4	0.0061	0.0036	0.0043	0.0028	0.0095	0.012
5	0.0071	0.0026	0.0039	0.0027	0.015	0.014
6	0.0089	0.0053	0.0043	0.0037	0.012	0.014
7	0.0056	0.0042	0.0044	0.0037	0.018	0.0092
8	0.0081	0.0059	0.0026	0.0048	0.015	0.026
9	0.0067	0.0057	0.0060	0.0048	0.029	0.012
10	0.0074	0.0064	0.0040	0.0055	0.010	0.030
11	0.011	0.011	0.0024	0.0047	0.0082	0.020
12	0.010	0.0080	0.0047	0.0039	0.012	0.019
13	0.0083	0.0071	0.0023	0.0043	0.010	0.025
14	0.010	0.010	0.0059	0.0035	0.022	0.012
15	0.0062	0.0056	0.0056	0.0043	0.020	0.019
16	0.0064	0.0059	0.0024	0.0030	0.020	0.0075
17	0.0069	0.0030	0.0047	0.0040	0.011	0.021

Дополнительные сведения о точности построенных реконструкций даны в табл. 2, 3. В этих таблицах размерные величины выражены в единицах, использованных при интегрировании уравнений (2). В табл. 2 приведены стандартные отклонения оценок параметров, задающих начальные условия найденных решений системы (2), в табл. 3 приведены оценки параметров p , λ , ε , α_c , β_c и их стандартные отклонения. Сопоставление значений $\bar{\omega}_1$ и ε в табл. 1 и 3 показывает, что с ростом $\bar{\omega}_1$ значения ε имеют тенденцию к уменьшению. По-

видимому, возрастает не учитываемый в уравнениях (2) момент сопротивления $\sim \omega_1$. Значения p в табл. 3 меняются более чем в 2 раза, хотя сохраняют знак и для всех приведенных интервалов $\sigma_p \ll |p|$. Вариации p не удивительны, поскольку принятая модель действующего на спутник аэродинамического момента весьма упрощенная. По сравнению с параметром p оценки параметра λ намного более стабильны, хотя в них заметна зависимость от $\bar{\omega}_1$.

4. Увеличение угловой скорости спутника. Согласно высказанной выше гипотезе раскрутка спутника происходила под действием механического момента, компоненты которого были неизменны в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Раскрутка происходила вокруг оси Ox_1 и согласно принятой модели вызывалась компонентой $I_1\varepsilon$ указанного постоянного момента.

На спутник действовали и другие моменты, не учтенные в уравнениях (2) и аналогичных уравнениях работ [1, 2, 4, 5, 7, 8], в частности, диссипативный аэродинамический момент и диссипативный момент от вихревых токов, наведенных МПЗ в корпусе спутника. Оба эти момента линейно зависят от угловой скорости спутника и очень малы. Их невозможно отделить от постоянного момента на интервалах времени длиной 270 мин, но именно эти диссипативные моменты препятствовали неограниченному возрастанию угловой скорости ω_1 . Наличие этих моментов проявляется как уменьшение оценок величины ε с ростом $\bar{\omega}_1$ (см. табл. 1, 3 и аналогичные таблицы в [1, 2]). В действительности оценка ε представляет собой некоторое среднее значение деленной на I_1 суммы постоянного момента и ряда других малых внешних моментов, в том числе, диссипативных. Принимая во внимание характер движения спутника, влияние перечисленных выше малых моментов на эволюцию ω_1 во время неуправляемого полета можно приближенно описать уравнением

$$\dot{\omega}_1 + a\omega_1 = \varepsilon. \quad (4)$$

Здесь a и ε – постоянные параметры, причем $I_1\varepsilon$ и $-I_1a\omega_1$ – компоненты постоянного момента и диссипативного момента вдоль оси Ox_1 . Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\omega_1 = \omega_1^* + c \exp(-at), \quad \omega_1^* = \frac{\varepsilon}{a}, \quad (5)$$

где c – произвольная постоянная. Будем искать a , c и ω_1^* из условия наилучшей аппроксимации величин $\bar{\omega}_1$ в табл. 1 формулой (5). Эти величины относим к серединам интервалов, для которых они были вычислены. За начало отсчета времени примем момент 12:09:49 UTC. 31.05.2005. Аппроксимация строилась обычным методом наименьших квадратов. Аппроксимация строилась обычным методом наименьших квадратов. Ее результат представлен на рис. 8. В верхней части этого рисунка сплошной линией изображен график найденного выражения (5), маркерами указаны значения $\bar{\omega}_1$. В нижней части рисунка маркеры изображены ошибки аппроксимации.-

Таблица 3. Оценки и стандартные отклонения параметров уравнений движения

Инт. №	p	σ_p	λ	σ_λ	ε	σ_ε	α_c	$\sigma_{\alpha c}$	β_c	$\sigma_{\beta c}$
1	-0.0171	0.00043	0.2812	0.00052	0.0481	0.00052	-0.0051	0.0030	0.0286	0.0030
2	-0.0161	0.00017	0.2805	0.00016	0.0502	0.00030	-0.0033	0.0023	0.0144	0.0023
3	-0.0015	0.00043	0.2709	0.00030	0.0337	0.00034	-0.0052	0.0030	0.0181	0.0029
4	-0.0223	0.00025	0.2727	0.00014	0.0609	0.00025	-0.0051	0.0016	0.0151	0.0016
5	-0.0189	0.00067	0.2644	0.00019	0.0226	0.00029	-0.0037	0.0021	0.0146	0.0021
6	-0.0054	0.00051	0.2651	0.00010	0.0210	0.00036	-0.0045	0.0021	0.0171	0.0021
7	-0.0138	0.00039	0.2664	0.00016	0.0244	0.00023	-0.0060	0.0018	0.0178	0.0018
8	-0.0129	0.00060	0.2643	0.00023	0.0134	0.00031	-0.0047	0.0023	0.0177	0.0023
9	-0.0097	0.00073	0.2627	0.00020	0.0046	0.00023	-0.0041	0.0026	0.0181	0.0026
10	-0.0076	0.00071	0.2637	0.00021	0.0153	0.00026	-0.0052	0.0026	0.0195	0.0026
11	-0.0115	0.00049	0.2623	0.00019	0.0261	0.00019	-0.0059	0.0019	0.0175	0.0019
12	-0.0104	0.00056	0.2617	0.00016	0.0118	0.00018	-0.0052	0.0019	0.0180	0.0019
13	-0.0129	0.00057	0.2597	0.00017	0.0033	0.00021	-0.0019	0.0021	0.0157	0.0021
14	-0.0115	0.00052	0.2618	0.00013	0.0137	0.00013	-0.0055	0.0020	0.0184	0.0020
15	-0.0087	0.00064	0.2613	0.00017	0.0028	0.00021	-0.0035	0.0023	0.0172	0.0023
16	-0.0104	0.00051	0.2618	0.00012	0.0171	0.00014	-0.0049	0.0017	0.0191	0.0017
17	-0.0082	0.00060	0.2603	0.00015	0.0006	0.00020	-0.0073	0.0021	0.0161	0.0021

Методом наименьших квадратов получены следующие значения параметров формулы: $a = 0.289 \text{сут}^{-1}$, $\omega_1^* = 1.242 \text{град./с}$, $c = -1.251 \text{град./с}$. Средне-квадратичная ошибка аппроксимации величин $\bar{\omega}_1$ и стандартные отклонения уточняемых параметров составили

$$\sigma_{\bar{\omega}_1} = 0.0114 \text{град./с}, \quad \sigma_a = 0.012 \text{сут}^{-1}, \quad \sigma_{\omega_1^*} = 0.015 \text{град./с}, \quad \sigma_c = 0.014 \text{град./с}.$$

В этом случае $\varepsilon = a\omega_1^* = 0.0707 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-2}$. Оценки ω_1^* и ε наиболее интересны из полученных оценок. В частности, ω_1^* является предельным значением компоненты угловой скорости ω_1 при $t \rightarrow +\infty$. Если судить по найденному значению ω_1^* и значению $\bar{\omega}_1 = 1.303 \text{град./с}$, полученному обработкой сеанса измерений угловой скорости спутника от 13.06.2005 [2], то к концу полета процесс раскрутки практически завершился.

5. Вращательное движение спутника с большой угловой скоростью.

Ниже рассматриваются усредненные уравнения, описывающие движение спутника с большой угловой скоростью, в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. В случае *Фотона М-2* эти уравнения адекватны начиная с пятых-шестых суток полета. Переменными в оригинальной версии этих уравнений являются вектор кинетического момента движения спутника вокруг собственного центра масс и угол нутации в оскулирующей регулярной прецессии [3]. Прежде, чем перейти к усредненным уравнениям, рассмотрим поведение указанных величин в реконструированных движениях. Собственный кинетический момент спутника \mathbf{L} будем представлять его ортом $\mathbf{E}_1 = \mathbf{L} / |\mathbf{L}|$ и величиной $l = |\mathbf{L}| / I_2$. В переменных уравнений (2) $l = \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$, компоненты орта \mathbf{E}_1 в системе $CY_1Y_2Y_3$ выражаются формулами

$$E_{Y_i} = (\lambda a_{i1} \omega_1 + a_{i2} w_2 + a_{i3} w_3) / l \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6)$$

В системе $CZ_1Z_2Z_3$ $\mathbf{E}_1 = (\sin \rho \sin \alpha, \cos \rho, \sin \rho \cos \alpha)$, где ρ – угол между ортом \mathbf{E}_1 и осью CZ_2 , α – угол между проекцией орта \mathbf{E}_1 на плоскость CZ_1Z_3 и осью CZ_3 . Направление отсчета угла α согласовано с направлением оси CZ_2 . Угол нутации ϑ между осью Ox_1 и ортом \mathbf{E}_1 задается формулой $\cos \vartheta = \lambda \omega_1 / l$.

Интервалы времени длиной 270 мин представляются слишком короткими, чтобы наглядно продемонстрировать решения усредненных уравнений и эволюцию регулярной прецессии Эйлера. Для такой демонстрации решения, найденные на отрезках $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, продолжались за их правый конец на 200 мин и более. Вдоль продолженных решений вычислялись введенные выше величины. Графики некоторых из них на продолженных интервалах приведены на рис. 9–12. В левой части этих рисунков изображены графики зависимости от времени величин l , ϑ , ρ и α , в правой части – проекции годографов ортов оси

Ox_1 и \mathbf{E}_1 на плоскость OZ_1Z_3 . Как видно из этих рисунков, движение спутник представляет собой возмущенную регулярную прецессию Эйлера. Длины интервалов продолжения подобраны так, чтобы проекция годографа орта \mathbf{E}_1 была замкнутой кривой.

Регулярная прецессия Эйлера осесимметричного твердого тела при $l > 0$ обычно описывается углом нутации \mathcal{G} , углом прецессии ϕ_1 и углом собственного вращения ϕ_2 . В регулярной прецессии $\mathcal{G} = \text{const}$,

$$\dot{\phi}_1 = l, \quad \dot{\phi}_2 = \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) l \cos \mathcal{G}.$$

Адаптируя эти формулы к движению *Фотона М-2*, имеем

$$\text{tg } \mathcal{G} \approx \frac{\bar{\omega}_\perp}{\lambda \bar{\omega}_1}, \quad \dot{\phi}_1 \approx \sqrt{\lambda^2 \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_\perp^2}, \quad \dot{\phi}_2 \approx (1 - \lambda) \bar{\omega}_1.$$

В функциях w_2 и w_3 (см. рис. 2 – 7) доминирует частота $\lambda \bar{\omega}_1$, в соответствующих функциях (1) – частота $(1 - \lambda) \bar{\omega}_1$.

6. Эволюционные уравнения. Судя по данным табл. 1 и рис. 2, 3, через несколько суток после начала полета угловая скорость спутника увеличилась настолько, что для исследования его вращательного движения стало возможным воспользоваться приближенной аналитической теорией, развитой в [3]. Приведем основные соотношения этой теории применительно к рассматриваемой модели движения *Фотона М-2*.

Кинетический момент \mathbf{L} спутника в его движении относительно центра масс и угловая скорость спутника $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{I_2} + \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1, \quad (7)$$

где \mathbf{e}_1 — орт оси Ox_1 . Выписанное соотношение устанавливается непосредственной проверкой в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Уравнения вращательного движения спутника запишем в виде

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \quad \dot{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{e}_1}{I_2}. \quad (8)$$

Здесь \mathbf{M} — вычисленный относительно точки O главный момент внешних сил, приложенных к спутнику. Первое уравнение (8) выражает общую теорему динамики об изменении кинетического момента \mathbf{L} , второе уравнение — следствие формулы (7) и кинематического уравнения Пуассона $\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1$.

Уравнения (8) не дают полного описания вращательного движения спутника. Они описывают только изменение его собственного кинетического момента и движение оси Ox_1 . Однако для описания эволюции движения спутника с большой угловой скоростью эти уравнения достаточны.

В уравнениях (8) будем учитывать: 1) гравитационный момент, 2) восстанавливающий аэродинамический момент, 3) диссипативный момент, направ-

ленный вдоль оси Ox_1 , 4) момент с постоянными компонентами в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Это, по-видимому, минимальный состав моментов, позволяющий объяснить эволюцию вращательного движения спутника. Гравитационный момент \mathbf{M}_g и аэродинамический момент \mathbf{M}_a зададим формулами, использованными при записи уравнений (2)

$$\mathbf{M}_g = -\frac{3I_2\mu_e}{r^5}(1-\lambda)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{M}_a = I_2 E p \rho_a |\mathbf{v}|(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1).$$

Здесь \mathbf{r} – геоцентрический радиус-вектор точки O , \mathbf{v} – скорость этой точки относительно гринвичской системы координат.

Диссипативный момент вдоль оси Ox_1 зададим выражением

$$\mathbf{M}_d = -I_1 \kappa (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1,$$

где κ – постоянный положительный коэффициент.

Момент с постоянными компонентами в системе $Ox_1x_2x_3$ представим в этой системе в виде $\mathbf{M}_0 = (I_1 \varepsilon, M_{02}, M_{03})$. Такой момент использован в (2) при $M_{02} = M_{03} = 0$.

Согласно сказанному выше в уравнениях (8) $\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_d + \mathbf{M}_0$. Эти уравнения допускают интегральное соотношение $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$. Приведем еще одно следствие этих уравнений, которое будет использовано в дальнейшем. Умножим скалярно первое уравнение (8) на \mathbf{e}_1 , второе – на \mathbf{L} . Получим после некоторых преобразований с учетом (7)

$$\frac{d(\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1)}{dt} = I_1 [\varepsilon - \kappa (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1)]. \quad (9)$$

Движение спутника с большим значением $L = |\mathbf{L}|$ близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. При изучении такого движения внешние моменты можно рассматривать как малые возмущения. Приближенное интегрирование системы (8) в такой ситуации выполняется методом усреднения. Правые части первого уравнения этой системы и уравнения (9) усредняются по регулярной прецессии Эйлера в предположении, что параметры прецессии и положение спутника на орбите остаются неизменными. Замена точных уравнений усредненными допустима, если за период прецессии указанные параметры и положение меняются мало [3].

Прежде чем приступить к усреднению, приведем основные соотношения, описывающие регулярную прецессию Эйлера. В этом движении $\mathbf{L} = \text{const}$, изменение орта \mathbf{e}_1 описывается вторым уравнением (6), и в силу этих двух соотношений $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1 = \text{const}$. Для описания регулярной прецессии введем новый ортонормированный базис

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{L}}{L}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}}, \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}}.$$

Орт \mathbf{E}_1 сохраняет неизменное направление в абсолютном пространстве и образует постоянный угол с ортом \mathbf{e}_1 , орты \mathbf{E}_2 и \mathbf{E}_3 вращаются вокруг \mathbf{E}_1 с постоянной угловой скоростью $\omega_p = L/I_2$. Последнее утверждение следует из соотношений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_2 &= \frac{\dot{\mathbf{e}}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{e}_1}{I_2 \sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \\ &= \frac{L(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1)}{I_2 \sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \frac{\omega_p (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1)}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \omega_p \mathbf{E}_3, \\ \dot{\mathbf{E}}_3 &= \mathbf{E}_1 \times \dot{\mathbf{E}}_2 = \omega_p (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_3) = -\omega_p \mathbf{E}_2. \end{aligned}$$

Перейдем к усреднению правой части первого уравнения (8). Начнем с гравитационного момента. Операцию усреднения некоторой функции по регулярной прецессии Эйлера будем обозначать угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$. Поскольку при усреднении вектор \mathbf{r} считается неизменным, имеет место соотношение

$$\langle \mathbf{M}_g \rangle = -\frac{3I_2 \mu_e}{r^5} (1 - \lambda) [\mathbf{r} \times \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \rangle].$$

Дальнейшие вычисления основаны на равенствах

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3, \\ \frac{d}{dt}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_3] &= \omega_p [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2]. \end{aligned}$$

Первое из них имеет место, поскольку базиса \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 и \mathbf{E}_3 ортонормирован; при выводе второго учитывалось, что здесь $\mathbf{r} = \text{const}$, и использовались приведенные выше выражения для производных $\dot{\mathbf{E}}_2$ и $\dot{\mathbf{E}}_3$. Из выписанных равенств получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 &= \frac{1}{2}[\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1] - \frac{1}{2\omega_p} \frac{d}{dt}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_3], \\ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 &= \frac{1}{2}[\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1] + \frac{1}{2\omega_p} \frac{d}{dt}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_3]. \end{aligned}$$

Усредним эти равенства по регулярной прецессии Эйлера и учтем, что среднее значение полной производной по времени ограниченной функции равно нулю. Получим

$$\langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 \rangle = \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \rangle = \frac{1}{2}[\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1].$$

Так как $\mathbf{e}_1 = c_1 \mathbf{E}_1 + c_2 \mathbf{E}_2$, $c_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1$, $c_2 = \sqrt{1 - c_1^2}$, то

$$\langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \rangle = c_1^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1 + c_1 c_2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \langle \mathbf{E}_2 \rangle + c_1 c_2 (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{E}_2 \rangle) \mathbf{E}_1 + c_2^2 \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2 \rangle.$$

Имеем также $\langle \mathbf{E}_2 \rangle = -\omega_p^{-1} \langle \dot{\mathbf{E}}_3 \rangle = 0$, поэтому

$$\langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \rangle = c_1^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1 + \frac{c_2^2}{2} [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1] = \frac{1 - c_1^2}{2} \mathbf{r} + \frac{3c_1^2 - 1}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1.$$

Окончательно получаем

$$\langle \mathbf{M}_g \rangle = -\frac{3I_2 \mu_e}{2r^5} (1 - \lambda) (3c_1^2 - 1) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) (\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1).$$

Усреднение аэродинамического момента приводит к формуле

$$\langle \mathbf{M}_a \rangle = I_2 E p \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \langle \mathbf{e}_1 \rangle) = I_2 E p c_1 \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1).$$

Здесь использовано соотношение $\langle \mathbf{e}_1 \rangle = c_1 \mathbf{E}_1$.

Усредняем диссипативный момент. Так как в регулярной прецессии Эйлера $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1) / I_1 = L c_1 / I_1$, имеем

$$\langle \mathbf{M}_d \rangle = -I_1 \kappa (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1) \langle \mathbf{e}_1 \rangle = -\kappa c_1^2 \mathbf{L}, \quad \langle \mathbf{M}_d \cdot \mathbf{e}_1 \rangle = -I_1 \kappa (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1) = -\kappa c_1 L.$$

Усреднение моментов \mathbf{M}_0 проведем при условии

$$c_1 \neq \frac{I_1}{I_2 - I_1}, \quad (10)$$

которое далее полагаем выполненным. Сначала установим несколько вспомогательных соотношений. Рассмотрим уравнения Пуассона для ортов \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 осей Ox_2 , Ox_3 . Подставим в уравнение $\dot{\mathbf{e}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2$ выражение (7), предварительно преобразовав его к виду

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_p \mathbf{E}_1 + \omega_n \mathbf{e}_1, \quad \omega_n = \omega_p c_1 \frac{I_2 - I_1}{I_1}.$$

С учетом соотношения $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ рассматриваемое уравнение Пуассона можно записать следующим образом

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \omega_p \mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_2 + \omega_n \mathbf{e}_3.$$

Аналогичным образом из уравнения $\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3$ следует уравнение

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \omega_p \mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_3 - \omega_n \mathbf{e}_2.$$

Усреднение полученных уравнений по регулярной прецессии Эйлера дает

$$\omega_p \mathbf{E}_1 \times \langle \mathbf{e}_2 \rangle + \omega_n \langle \mathbf{e}_3 \rangle = 0, \quad \omega_p \mathbf{E}_1 \times \langle \mathbf{e}_3 \rangle - \omega_n \langle \mathbf{e}_2 \rangle = 0.$$

Умножив последние уравнения скалярно на \mathbf{E}_1 и полагая $\omega_n \neq 0$, будем иметь $\mathbf{E}_1 \cdot \langle \mathbf{e}_2 \rangle = \mathbf{E}_1 \cdot \langle \mathbf{e}_3 \rangle = 0$. Умножив те же уравнения векторно на $\omega_p \mathbf{E}_1$, получим

после несложных преобразований

$$(\omega_p^2 - \omega_n^2)\langle \mathbf{e}_2 \rangle = (\omega_p^2 - \omega_n^2)\langle \mathbf{e}_3 \rangle = 0.$$

При выполнении условия (10) $\omega_p^2 \neq \omega_n^2$ ($\omega_p = \dot{\phi}_1, \omega_n = \dot{\phi}_2$, см. п. 5), поэтому

$$\langle \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_3 \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{M}_0 \rangle_1 = \langle M_{01}\mathbf{e}_1 + M_{02}\mathbf{e}_2 + M_{03}\mathbf{e}_3 \rangle = I_1 \varepsilon c_1 \mathbf{E}_1.$$

Последняя формула оправдывает учет в системе (2) постоянного момента только по оси Ox_1 . Величины M_{02} , M_{03} слабо влияют на функционал (3) в случае движений, близких к регулярной прецессии, и при обработке определялись бы плохо.

Полученные соотношения позволяют выписать первое уравнение (8) и уравнение (9), усредненные по регулярной прецессии Эйлера (вместо переменной $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1$ используем переменную $c_1 = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1)/L$):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} = & -\frac{3I_2\mu_e}{2r^5}(1-\lambda)(3c_1^2-1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \\ & + I_2 E p c_1 \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1) - \kappa c_1^2 \mathbf{L} + I_1 \varepsilon c_1 \mathbf{E}_1, \\ \dot{c}_1 = & c_2^2 \left(\frac{I_1 \varepsilon}{L} - \kappa c_1 \right). \end{aligned}$$

Выписанные уравнения образуют замкнутую систему относительно переменных \mathbf{L} и c_1 . Входящие в их правые части величины \mathbf{E}_1 и c_2 должны быть выражены через указанные переменные по формулам, приведенным выше. Учтем, что $\dot{\mathbf{L}} = I_2 \dot{\mathbf{E}}_1 + I_2 \dot{l} \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_1 \cdot \dot{\mathbf{E}}_1 = 0$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 = & \frac{3\mu_e}{2r^5 l} (1-\lambda)(1-3c_1^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \frac{p c_1}{l} E \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1), \quad (11) \\ \dot{l} = & \varepsilon \lambda c_1 - \kappa c_1^2 l, \quad \dot{c}_1 = c_2^2 \left(\frac{\lambda \varepsilon}{l} - \kappa c_1 \right). \end{aligned}$$

Последние два уравнения образуют замкнутую подсистему, которую можно проинтегрировать. Эта подсистема допускает первый интеграл $l c_2 = \text{const}$, а произведение $z = l c_1$ удовлетворяет уравнению $\dot{z} + \kappa z = \lambda \varepsilon$ (напомним, $c_1^2 + c_2^2 = 1$). В терминах пп. 4, 5 имеем $z = \lambda \bar{\omega}_1$, $l c_2 = \bar{\omega}_\perp$, $c_1 = \cos \vartheta$, $c_2 = \sin \vartheta$. Отсюда следует равенство $\kappa = a$. По табл. 1 можно проверить постоянство величины $\bar{\omega}_\perp$. Она менялась со временем, хотя в последние 2 суток магнитных измерений ее изменение было малым. Из уравнения относительно z следует, что предельное при $t \rightarrow +\infty$ значение l_∞ величины l оценивается неравенством $l_\infty \leq \lambda \varepsilon / \kappa$, и если $l c_2 > 0$, то предельное значения величин c_2 и $\vartheta = \vartheta_\infty$ положительны. Величины l_∞ и ϑ_∞ выражаются через предельные значения величин $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_\perp$ по формулам (см. п. 5)

$$\operatorname{tg} \mathcal{G}_\infty = \frac{\bar{\omega}_\perp}{\lambda \bar{\omega}_1}, \quad l_\infty = \sqrt{\lambda^2 \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_\perp^2}.$$

Приняв предельные значения $\bar{\omega}_1 = \omega_1^* = 1.242 \text{град./с}$, $\bar{\omega}_\perp = 0.11 \text{град./с}$ и взяв $\lambda = 0.262$, получим $\mathcal{G}_\infty = 18.7^\circ$, $l_\infty = 0.34 \text{град./с}$. Исползованная здесь величина ω_1^* найдена в п. 4.

На непродолжительных отрезках времени можно считать, что z и, следовательно, ω_1 – линейные функции времени. В этом случае систему (11) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \dot{\omega}_\perp = 0, \\ \dot{\mathbf{E}}_1 &= \frac{3\mu_e}{2r^5 l} (1 - \lambda)(1 - 3c_1^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \frac{pc_1}{l} E\rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1), \quad (12) \\ l &= \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + \omega_\perp^2}, \quad c_1 = \frac{\lambda \omega_1}{l}. \end{aligned}$$

Выписанная система получается усреднением системы (2) по регулярной прецессии Эйлера.

Система (12) интегрировалась численно в гринвичской системе $CY_1Y_2Y_3$. Ее решения сравнивались с гринвичскими компонентами $E_{Y_i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) орта \mathbf{E}_1 , построенными по решениям системы (2). Последние были найдены посредством обработки магнитных измерений и продолжены за соответствующую точку $t_0 + T$. Длины всех интервалов сравнения 1000мин . Параметры p , λ , Ω и ε в (14) задавались по результатам обработки на соответствующем интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. Начальные условия $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$ системы (12) уточнялись методом наименьших квадратов посредством подгонки ее решения к значениям функций $E_{Y_i}(t)$ на равномерной сетке с шагом 20 с. Построенные таким образом решения системы (14) пересчитывались в систему координат $CZ_1Z_2Z_3$ и представлялись графиками зависимости величин l , ρ , и α от времени. Эти графики сравнивались с аналогичными графиками, построенными по решениям системы (2).

Примеры такого сравнения на некоторых интервалах табл. 1, для которых $\bar{\omega}_1 > 0.85 \text{град./с}$, приведены на рис. 13–20. Графики, построенные по решениям системы (12), представлены в виде последовательностей маркеров, графики, построенные по решениям системы (2), изображены сплошными линиями. Рис. 13, 15 иллюстрируют целесообразность подгонки решений системы (14) к функциям $E_{Y_i}(t)$, вычисленным вдоль решений системы (2). В левой части этих рисунков решение системы (12) построено с начальными условиями $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$, вычисленными по начальным условиям решения системы (2). В правой части рис. 13, 15 решение системы (12) построено с уточненными значениями $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$. Графики функций $E_{Y_i}(t)$, изображенные на этих рисунках сплошными линиями, в левой и правой частях этих рисунков одинаковы. Во всех

таких примерах найденное значение $\omega_{\perp}(t_0)$ отличалось от $\bar{\omega}_{\perp}$ для реконструкции на соответствующем отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ на величину порядка $\delta\omega_{\perp}$. Без уточнения начальных условий $\omega_{\perp}(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$ близость решений систем (2) и (12) в большинстве случаев имеет место только в начале отрезка сравнения. После подгонки близость (такая же, как в приведенных примерах) имеет место на всем интервале сравнения.

На рис. 14, 16–20 изображены графики, иллюстрирующие движение вектора кинетического момента относительно системы координат $CZ_1Z_2Z_3$. В левых частях этих рисунков приведены графики величин l , ρ , и α , в их правых частях изображены годографы проекций орта оси Ox_1 и орта \mathbf{E}_1 на плоскость CZ_1Z_3 . Как видим, при $\bar{\omega}_1 > 0.85 \text{ град./с}$ усредненная система правильно описывает тенденцию изменения величин E_{Y_i} , l , ρ и α . В случае $\bar{\omega}_1 < 0.8 \text{ град./с}$ согласие решений систем (2) и (12) не имеет места. Таким образом, полученные в рамках теории В.В. Белецкого усредненные уравнения (12) достаточно точно описывают изменение собственного кинетического момента спутника в случае, когда угловая скорость последнего достаточно велика. При этом согласие решений систем (2) и (12) имеет место на интервалах времени более 0.5 сут.

В системе (11) последние два уравнения можно заменить эквивалентными уравнениями $\dot{z} + kz = \lambda\varepsilon$, $\dot{\omega}_{\perp} = 0$, приняв в первом уравнении $l = \sqrt{z^2 + \omega_{\perp}^2}$. Однако очень точного совпадения решений такой системы с реальным движением спутника на отрезках времени в несколько суток ожидать не приходится вследствие упрощенного задания аэродинамического момента и механического момента относительно оси Ox_1 .

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

1. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое движение спутника *Фотон М-2* и квазистатические микроускорения на его борту // *Космические исследования*. 2007. Т.45. №5. С.450-470.
2. Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным бортовых измерений угловой скорости // *Космические исследования*. 2008. Т.46. №2. С.146-167.
3. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
4. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным измерений микроускорения // *Космические исследования*. 2009. Т.47. №6. С.537-549.

5. Сазонов В.В. Обработка данных измерений угловой скорости и микроускорения, полученных на спутнике *Фотон-12* // Космические исследования. 2011. Т.49. № 5. С.419-435.
6. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1960.
7. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т.41. №1. С.45-56.
8. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11* // Космические исследования. 2004. Т.42. №2. С.185-200.

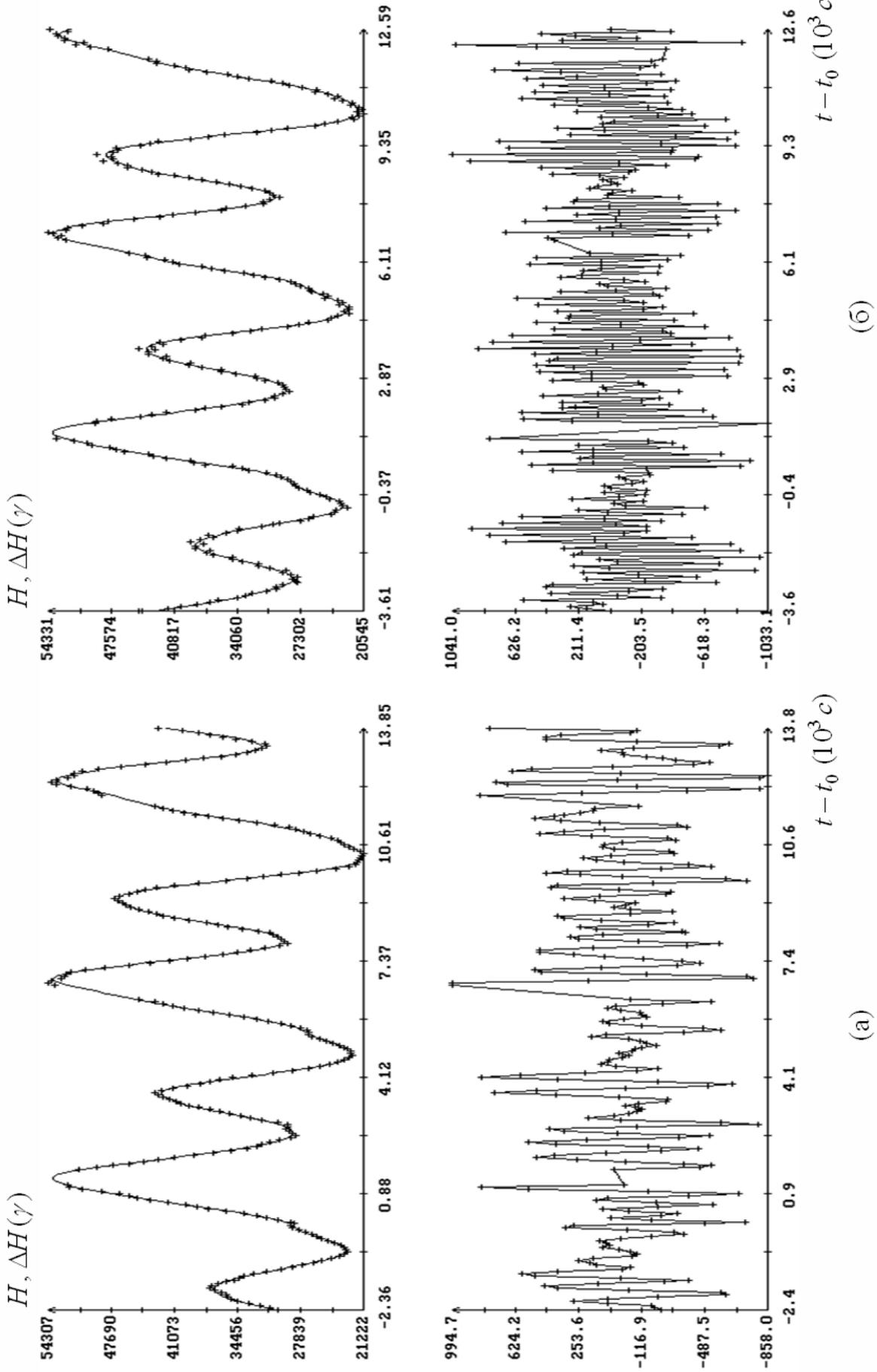


Рис. 1. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ; (а) момент времени $t_0 = 11:12:38$ UTC 02.06.2005, $\sigma_* = 352\gamma$; (б) момент времени $t_0 = 09:20:09$ UTC 08.06.2005, $\sigma_* = 473\gamma$.

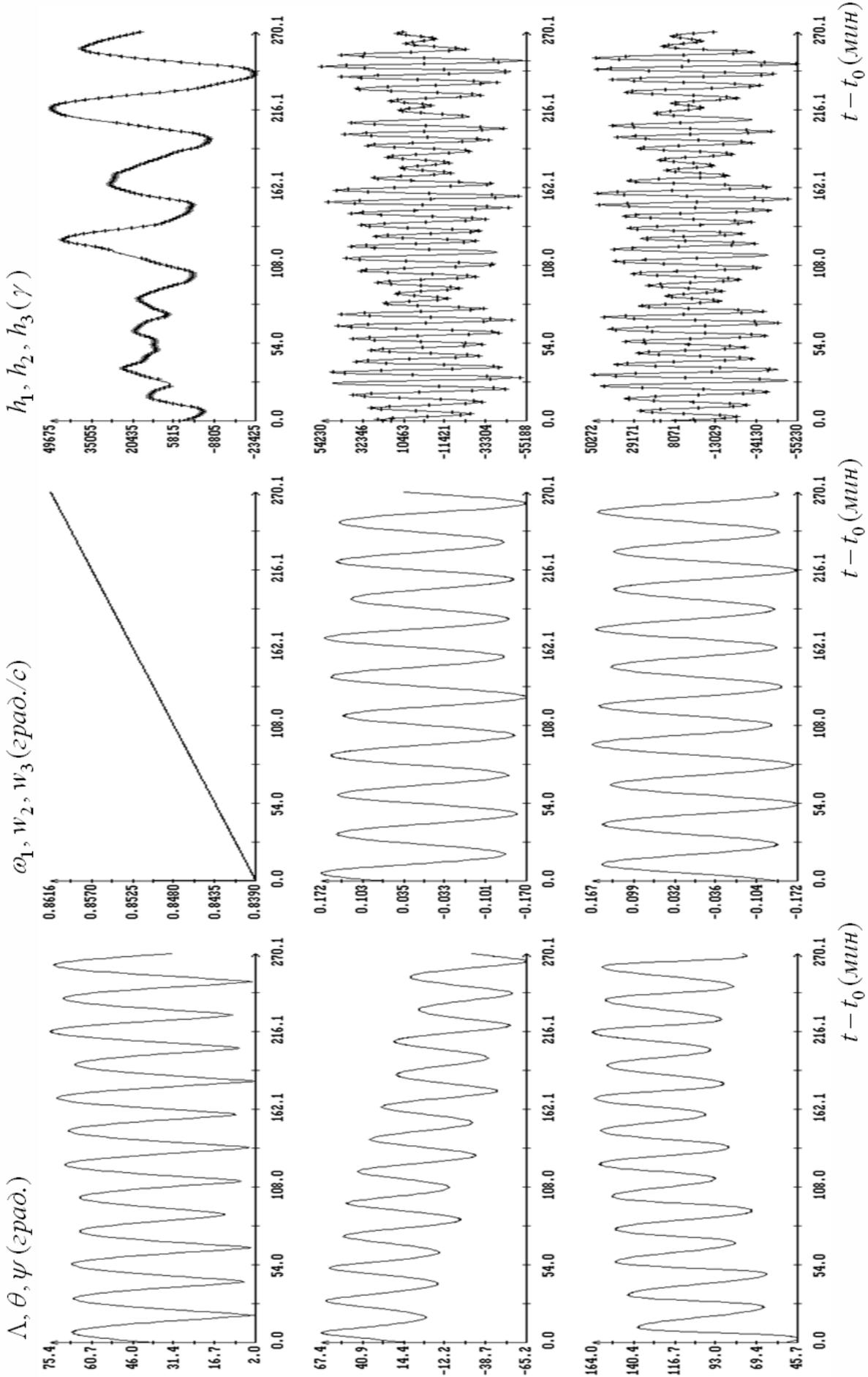


Рис. 2. Интервал 7, $t_0 = 13:15:14$ UTC 04.06.2005, $\sigma_H = 825 \gamma$.

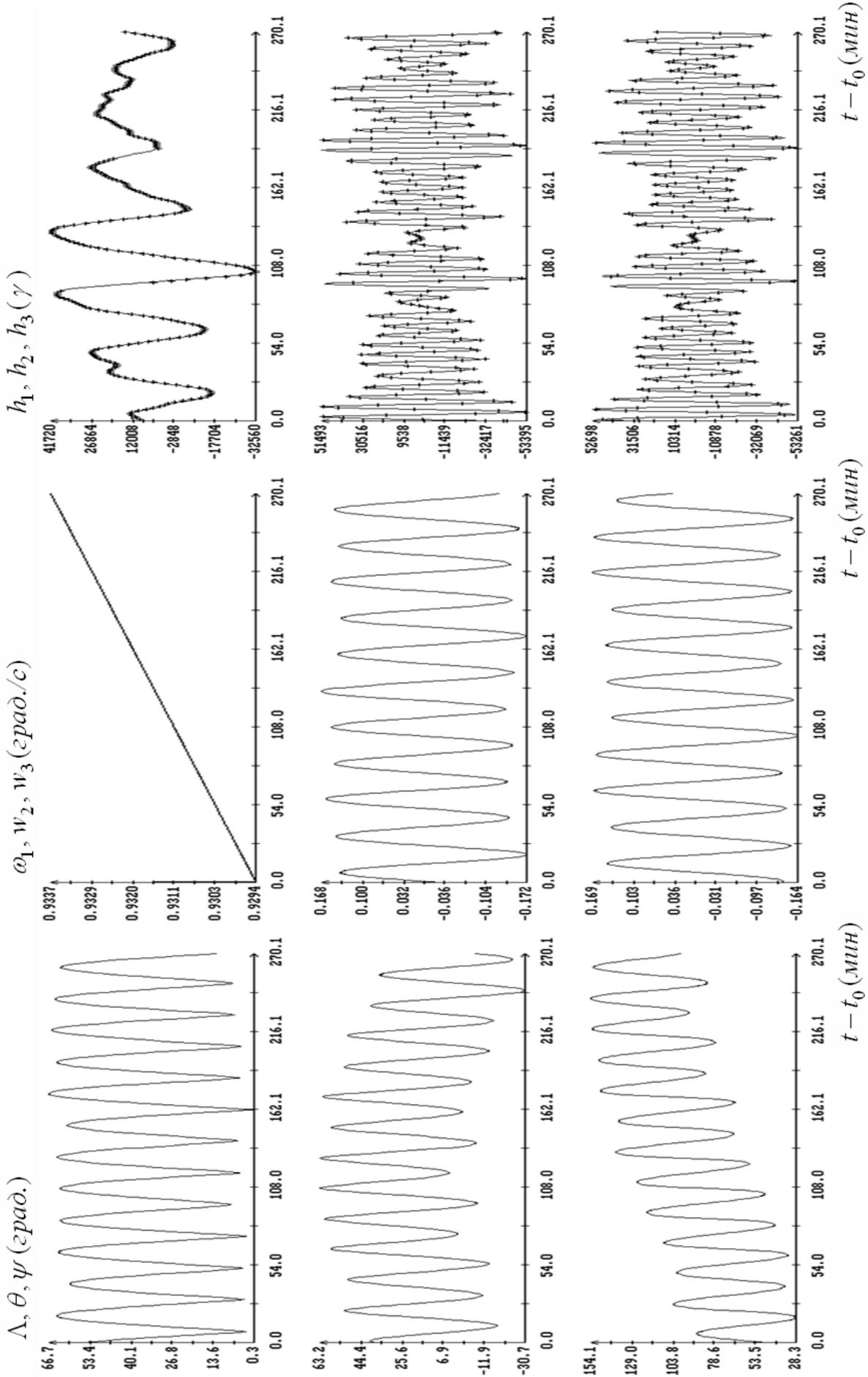


Рис. 3. Интервал 9, $t_0 = 10:36:28$ UTC 05.06.2005, $\sigma_H = 1137$ γ.

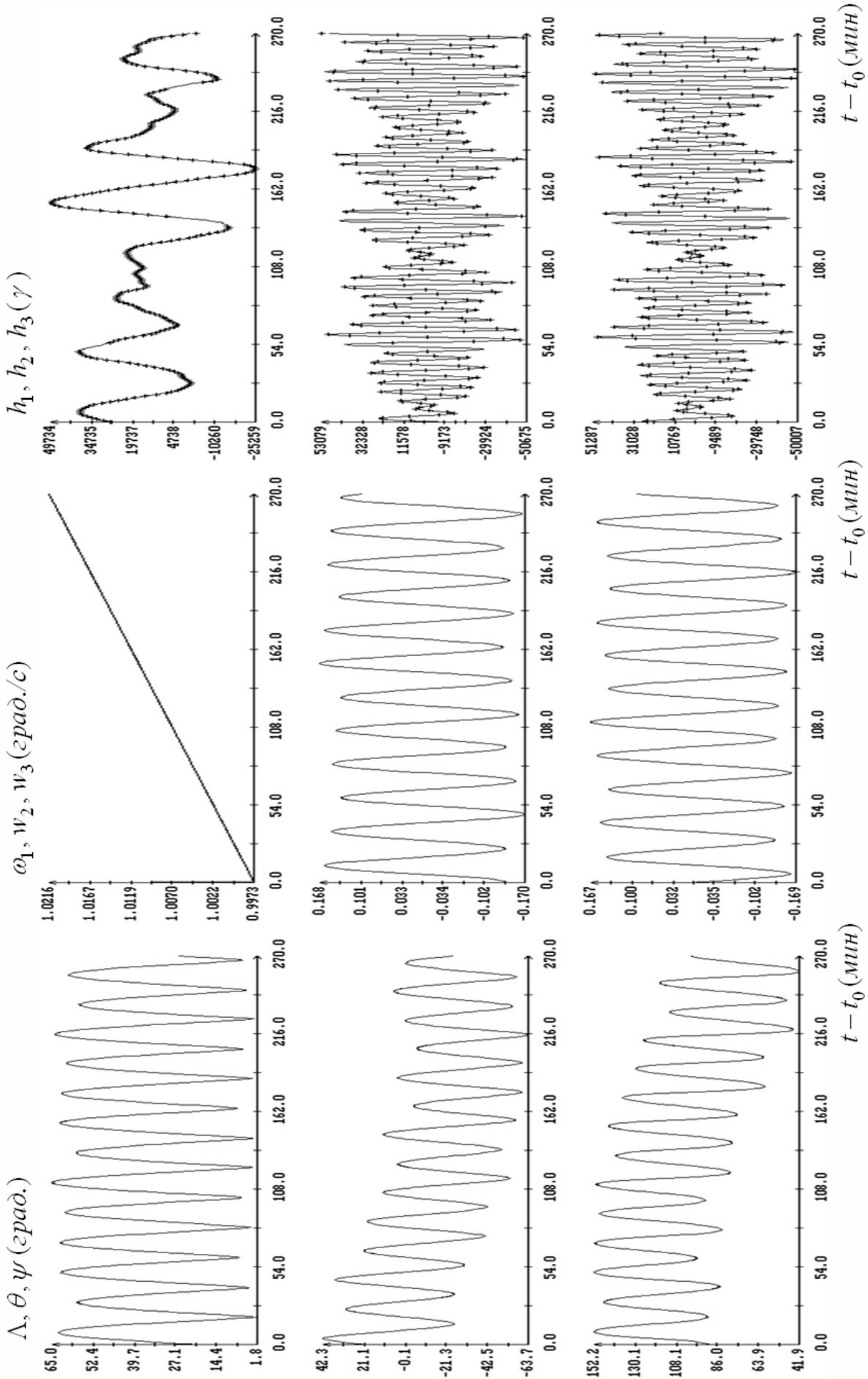


Рис. 4. Интервал 11, $t_0 = 11:17:43$ UTC 06.06.2005, $\sigma_H = 818 \gamma$.

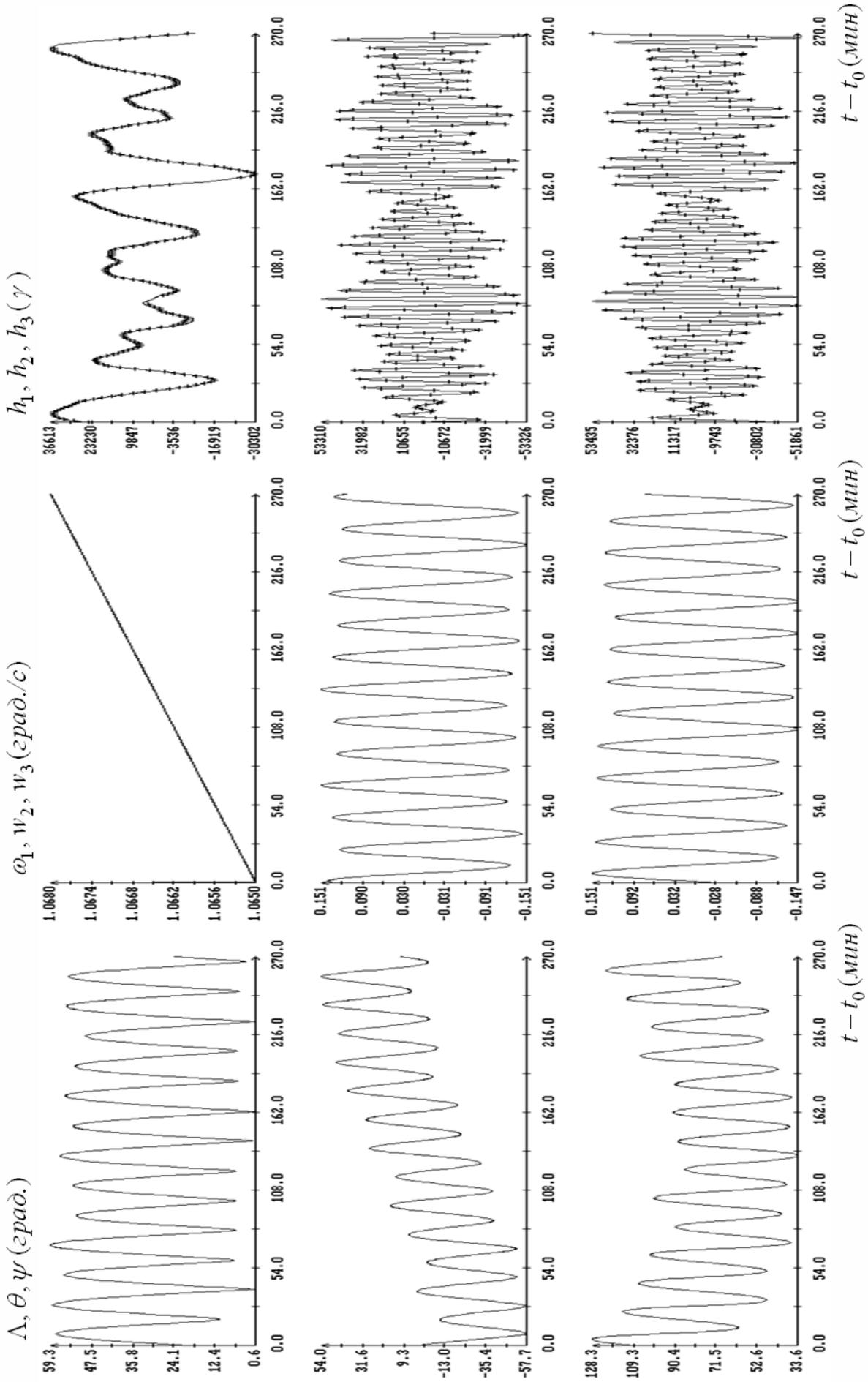


Рис. 5. Интервал 13, $t_0 = 09:18:53$ UTC 07.06.2005, $\sigma_H = 917 \gamma$.

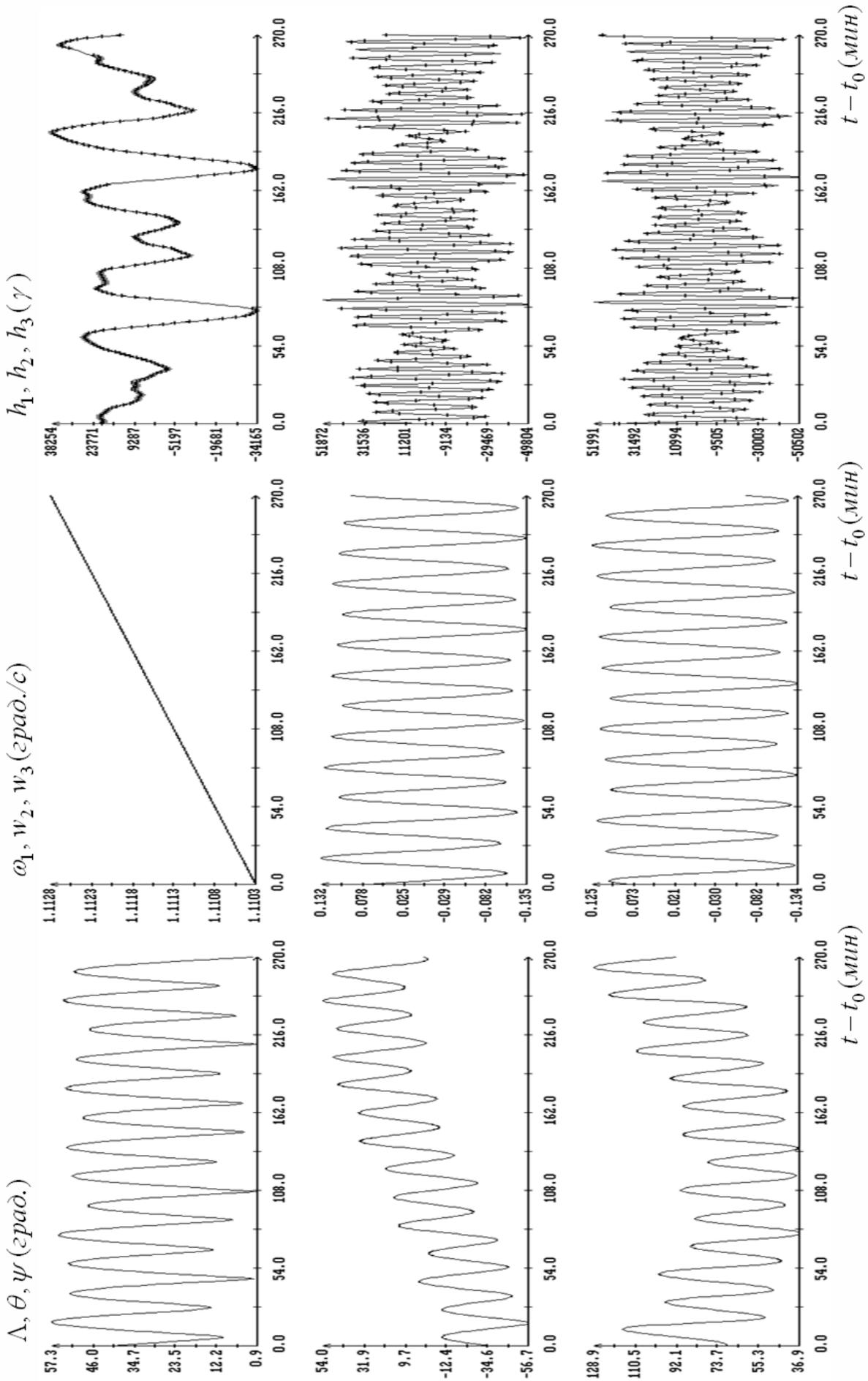


Рис. 6. Интервал 15, $t_0 = 09:20:09$ UTC 08.06.2005, $\sigma_H = 999 \gamma$.

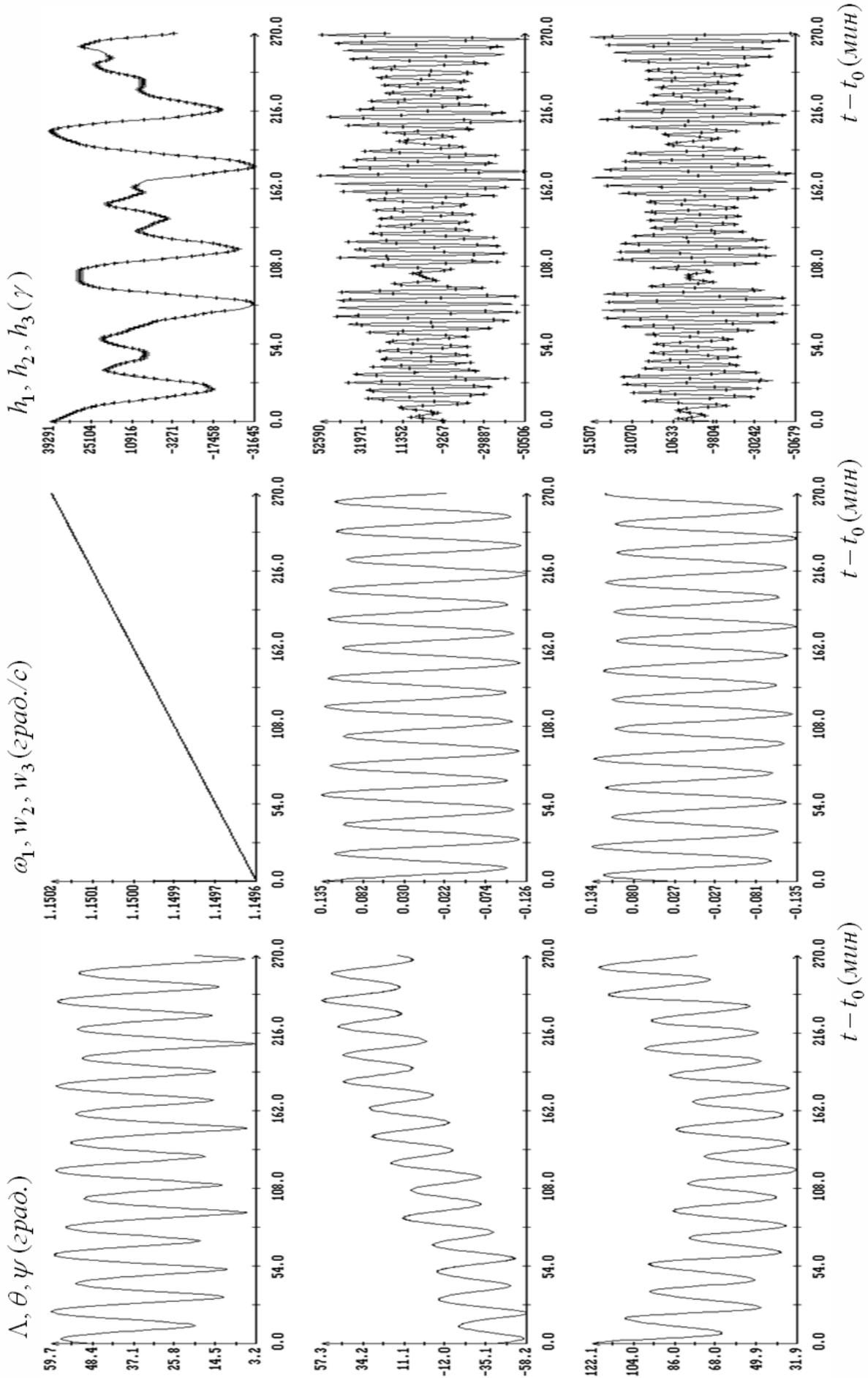


Рис. 7. Интервал 17, $t_0 = 09:21:25$ UTC 09.06.2005, $\sigma_H = 928 \gamma$.

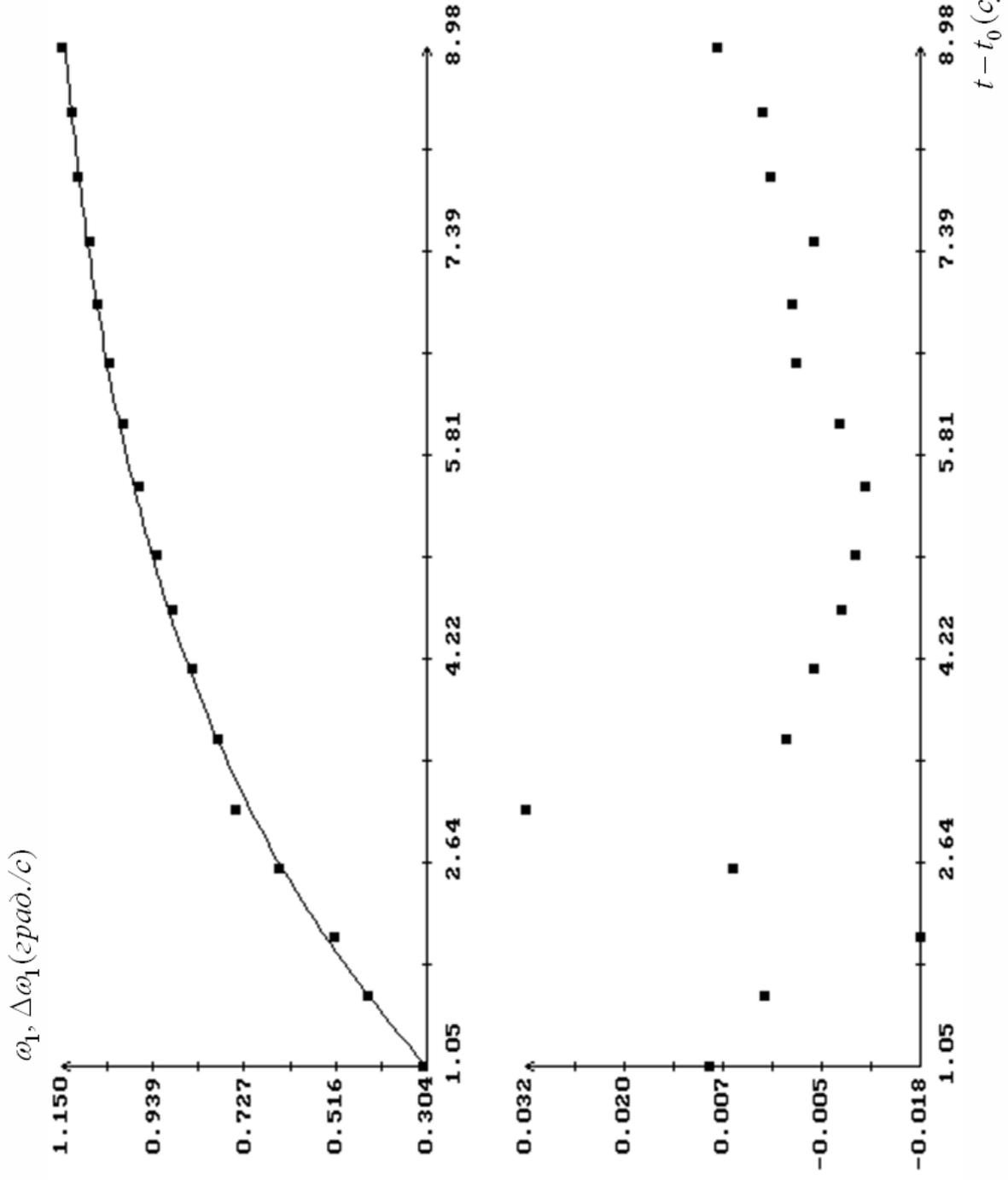


Рис. 8. Увеличение угловой скорости $\bar{\omega}_1$, $t_0 = 12:09:49$ UTC 31.05.2005.

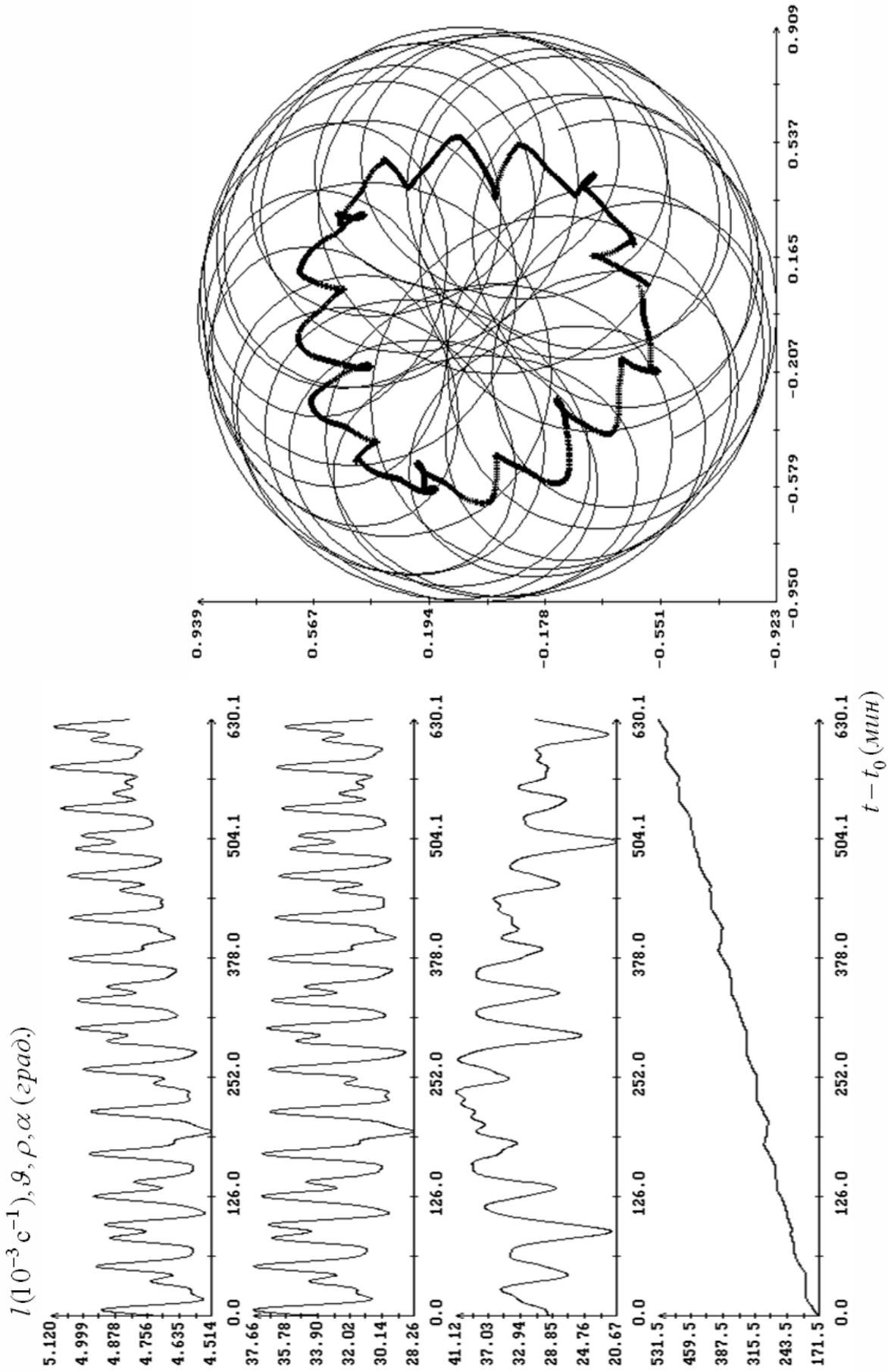


Рис. 9. Продолжение интервала 7. Слева характеристики возмущенной прецессии Эйлера, $t_0 = 13:15:14$ UTC 04.06.2005. Справа проекция на плоскость орбиты CZ_1Z_3 годографа орта оси Ox_1 (тонкие кривые) и орта E_1 .

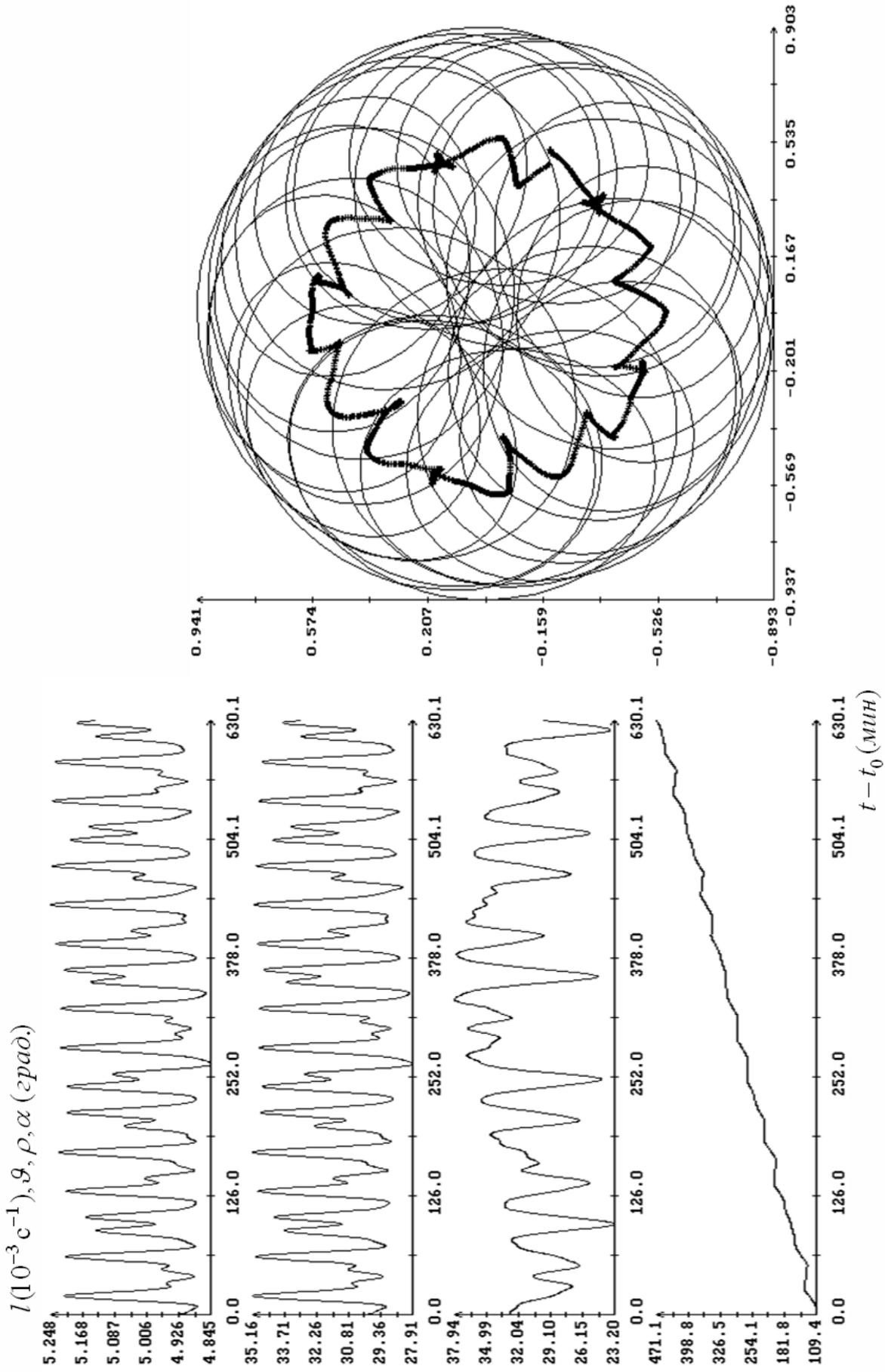


Рис. 10. Продолжение интервала 9. Слева характеристики возмущенной прецессии Эйлера, $t_0 = 10:36:28$ UTC 05.06.2005. Справа проекция на плоскость орбиты CZ_1Z_3 годографа орта оси Ox_1 (тонкие кривые) и орта E_1 .

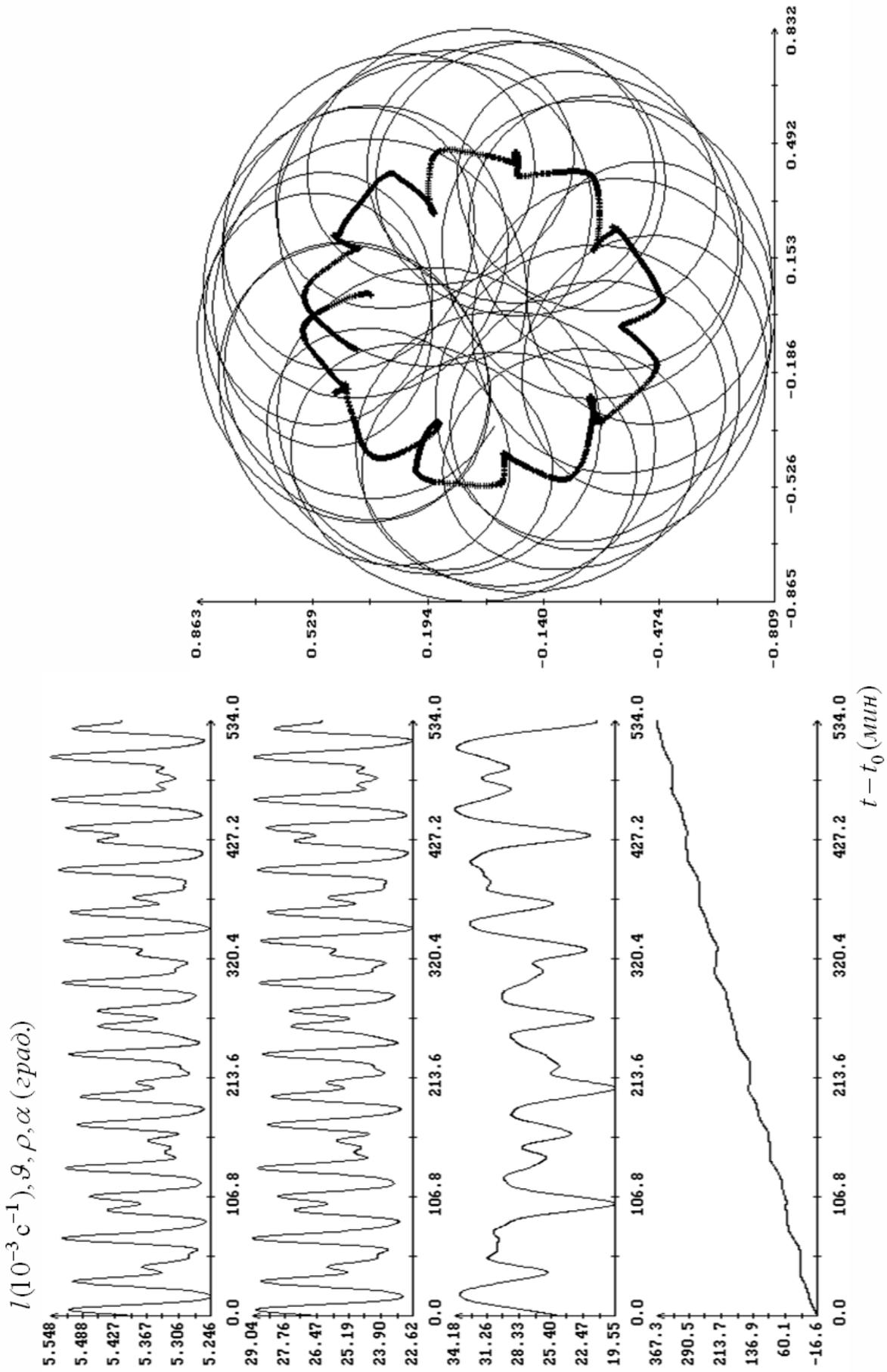


Рис. 11. Продолжение интервала 13. Слева характеристики возмущенной прецессии Эйлера, $t_0 = 09:18:53$ UTC 07.06.2005. Справа проекция на плоскость орбиты CZ_1Z_3 годографа орта оси Ox_1 (тонкие кривые) и орта E_1 .

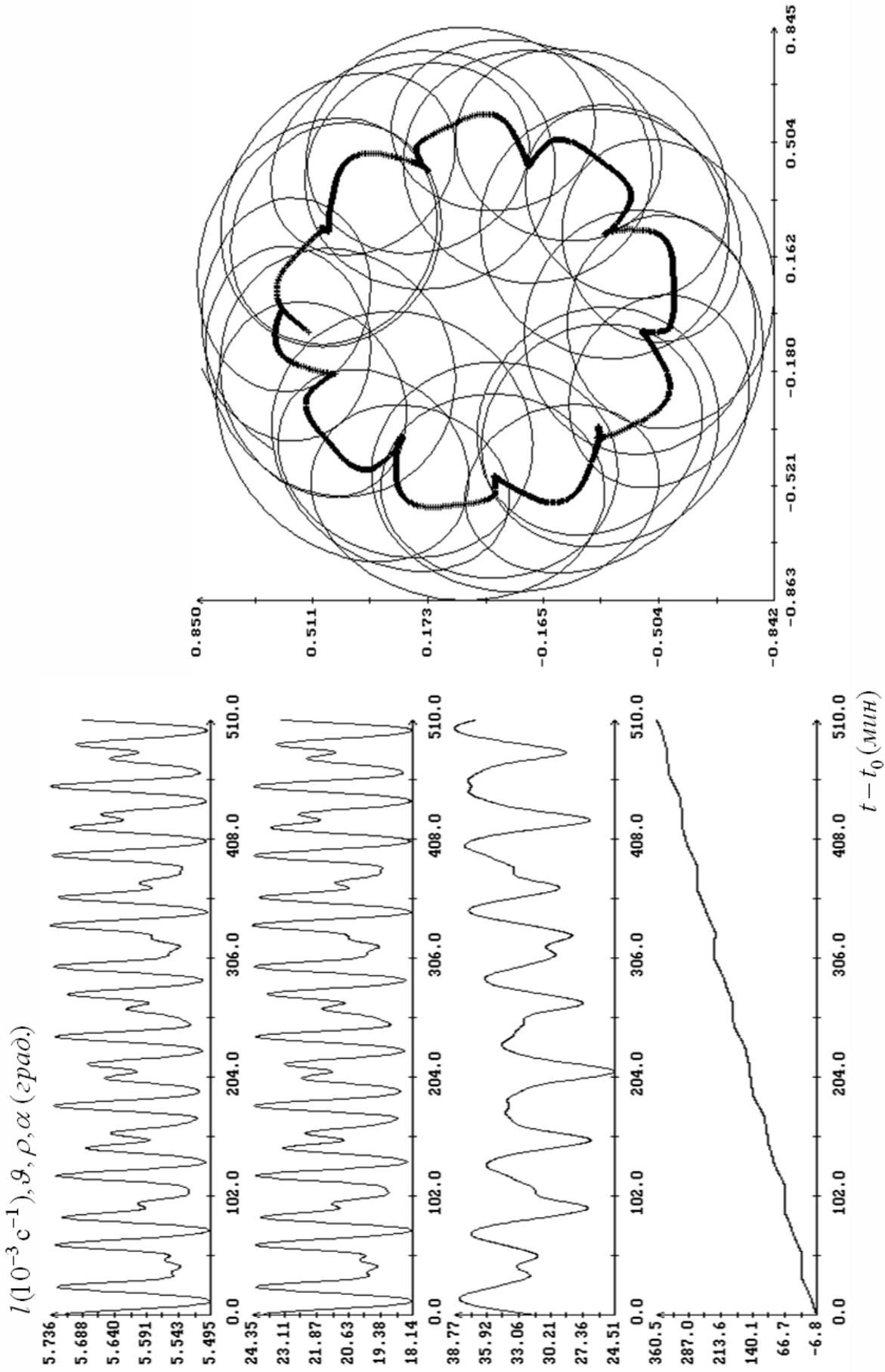


Рис. 12. Продолжение интервала 17. Слева характеристики возмущенной прецессии Эйлера, $t_0 = 09:21:25$ UTC 09.06.2005. Справа проекции на плоскость орбиты Ox_1z_3 годографа орта оси Ox_1 (тонкие кривые) и орта E_1 .

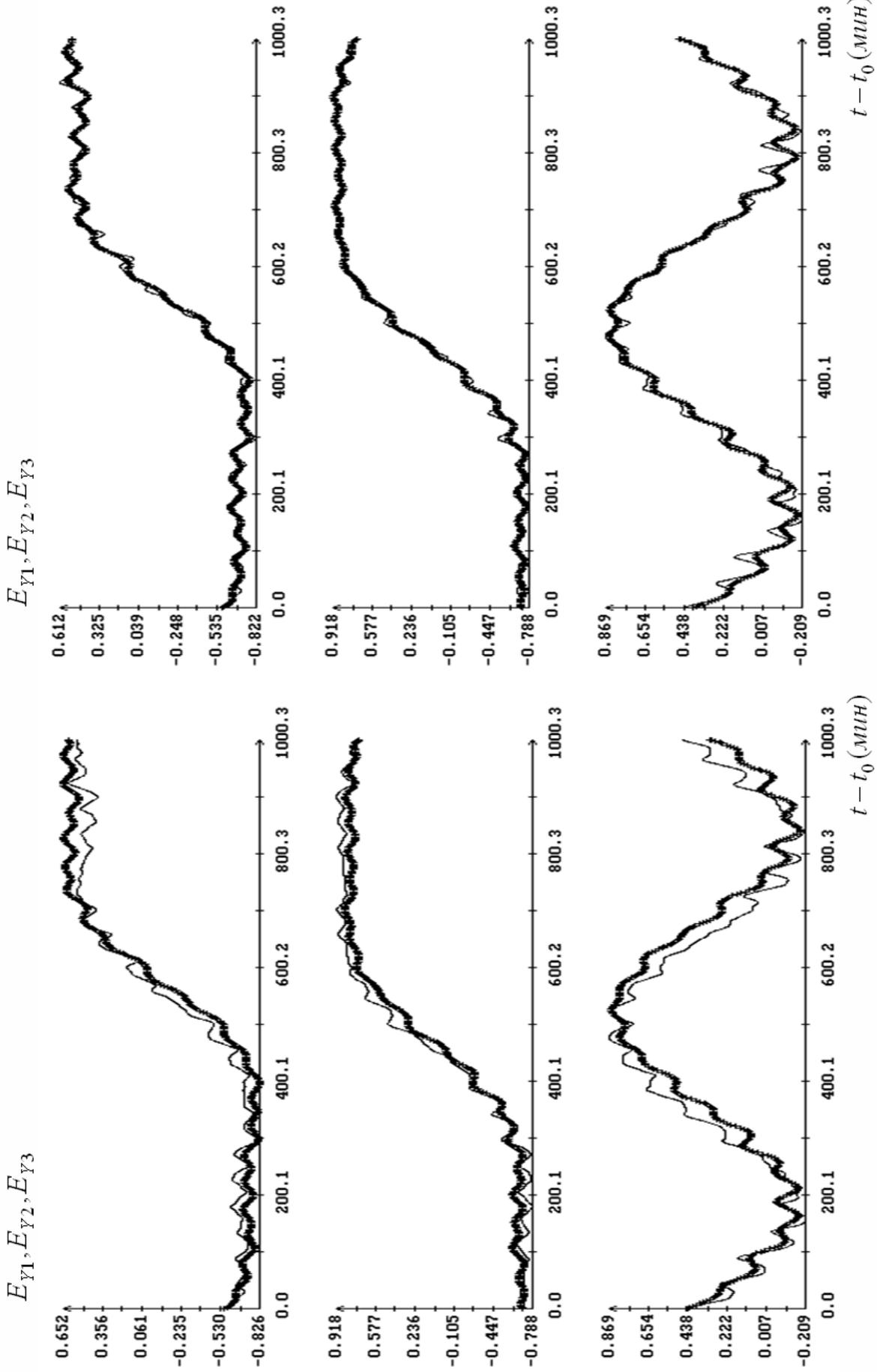


Рис. 13. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 7, $t_0 = 13:15:14$ UTC 04.06.2005.

Слева – до подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0)$; справа – после подгонки.

$I(10^{-3} \text{ c}^{-1}), \vartheta, \rho, \alpha$ (град.)

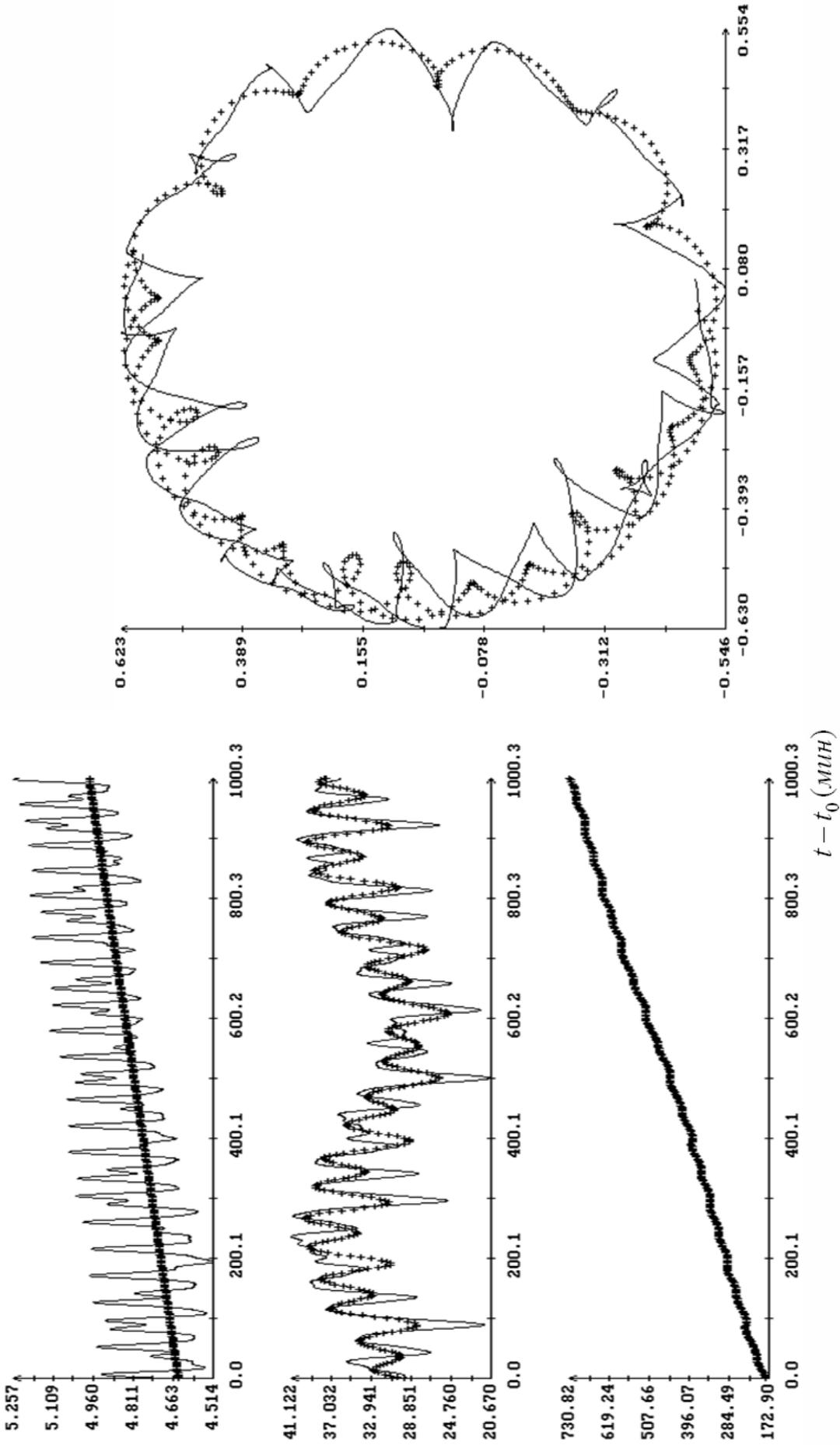


Рис. 14. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 7 после подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{Y_1}(t_0), E_{Y_2}(t_0), E_{Y_3}(t_0)$.

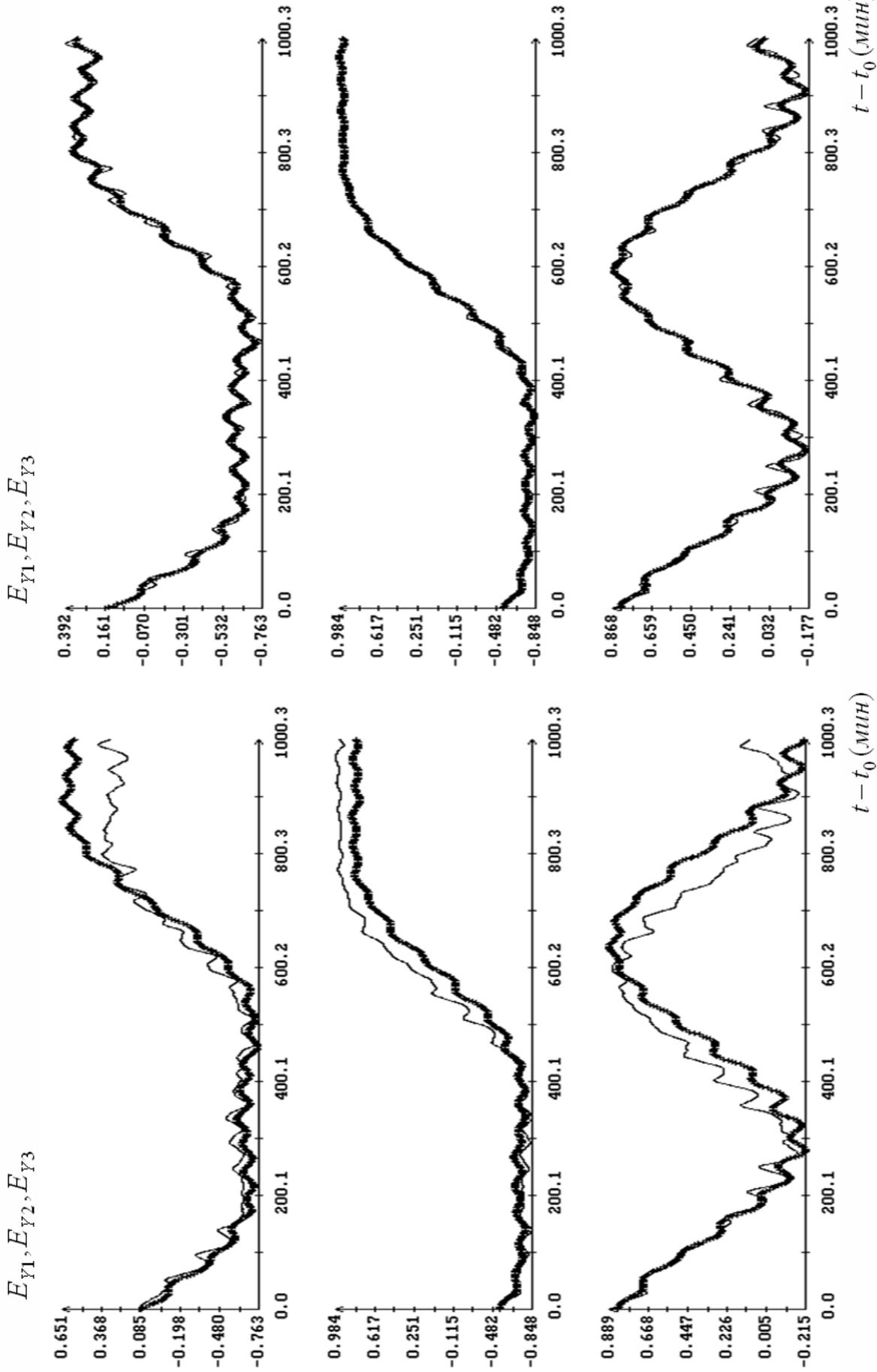


Рис. 15. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 9, $t_0 = 10:36:28$ UTC 05.06.2005.

Слева – до подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0)$; справа – после подгонки.

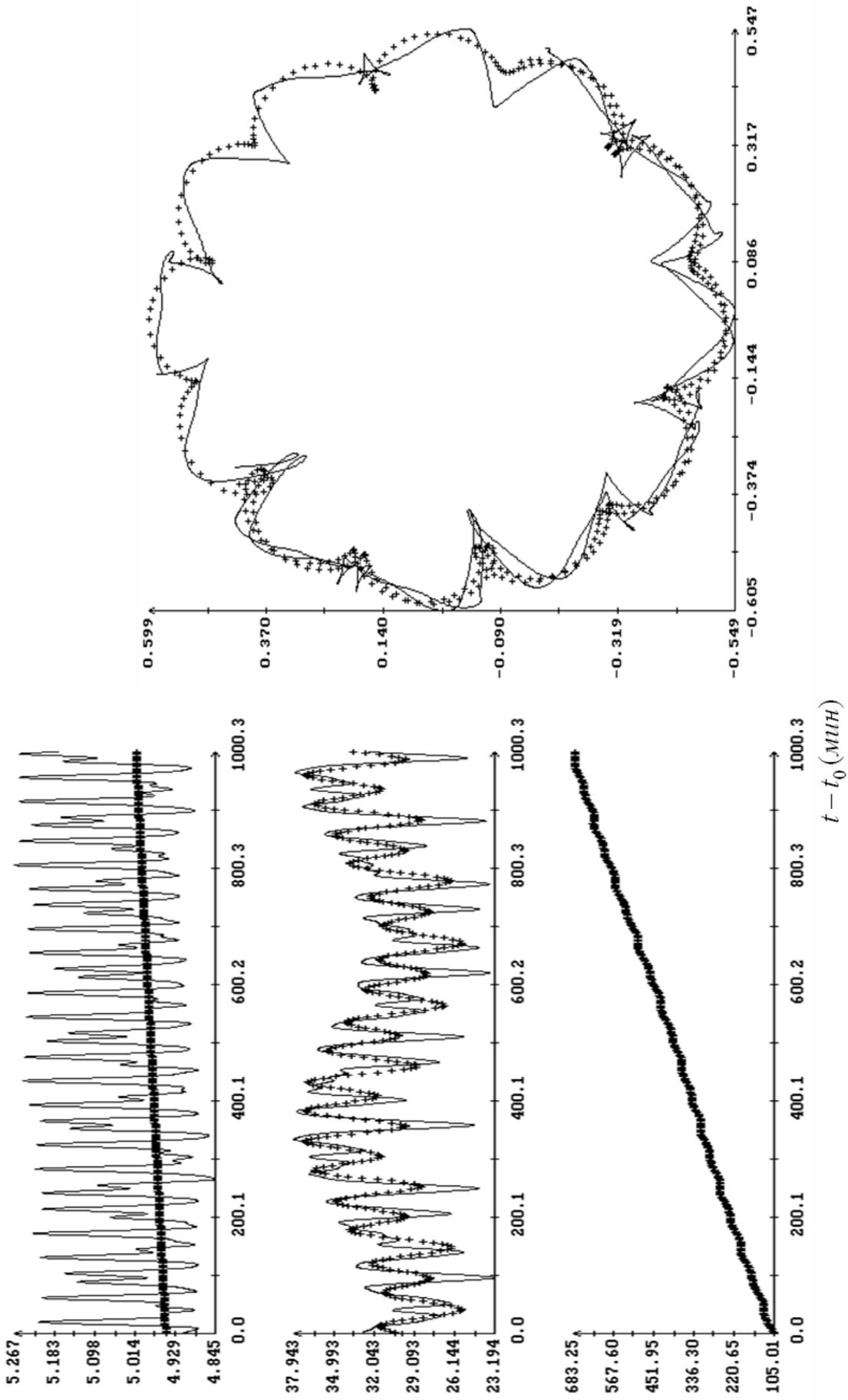
$I(10^{-3} \text{ c}^{-1}), \vartheta, \rho, \alpha (\text{град.})$


Рис. 16. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 9 после подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{\gamma 1}(t_0), E_{\gamma 2}(t_0), E_{\gamma 3}(t_0)$.

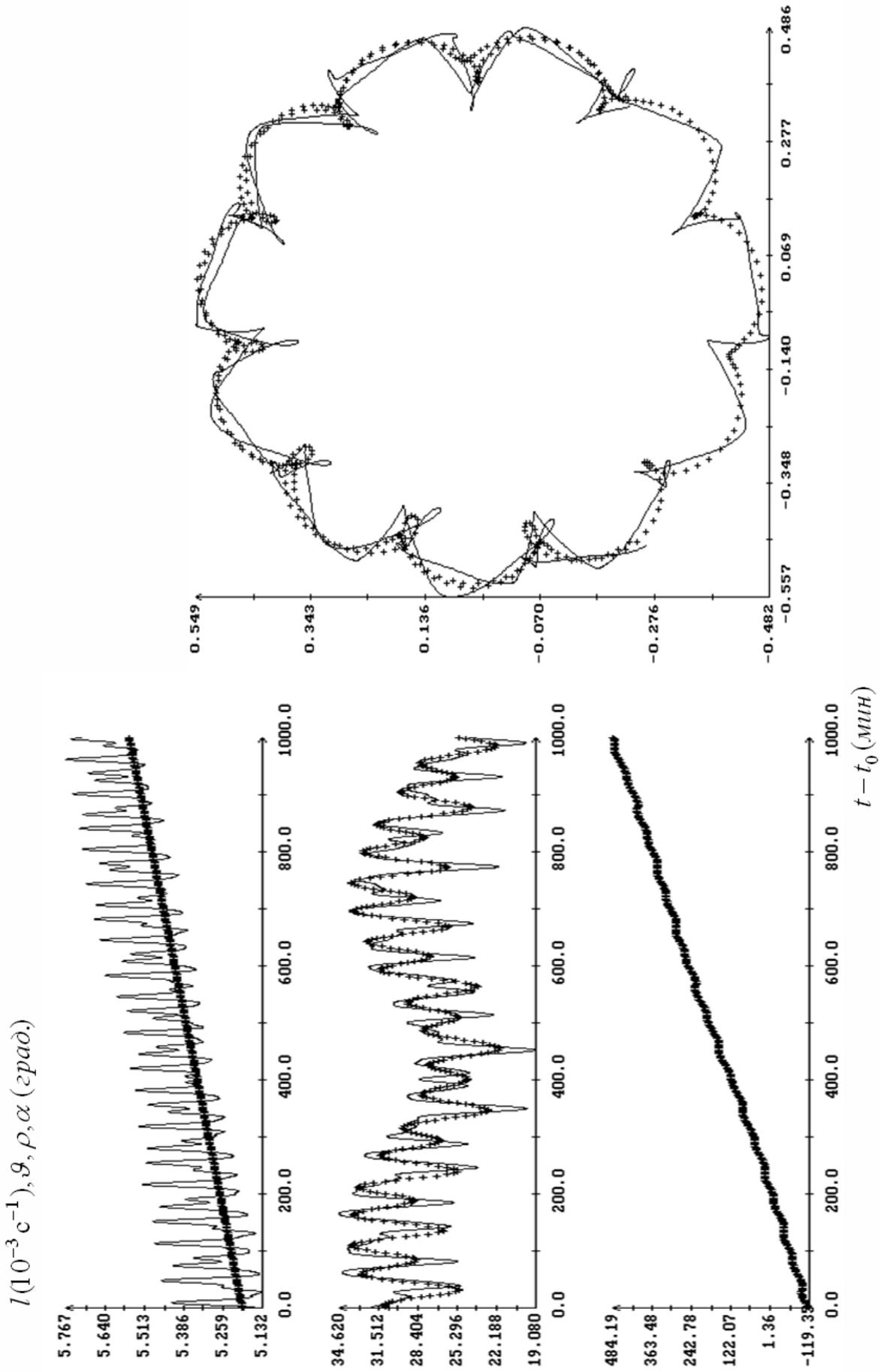


Рис. 17. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 11 после подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0)$; $t_0 = 11:17:43 \text{ UTC } 06.06.2005$.

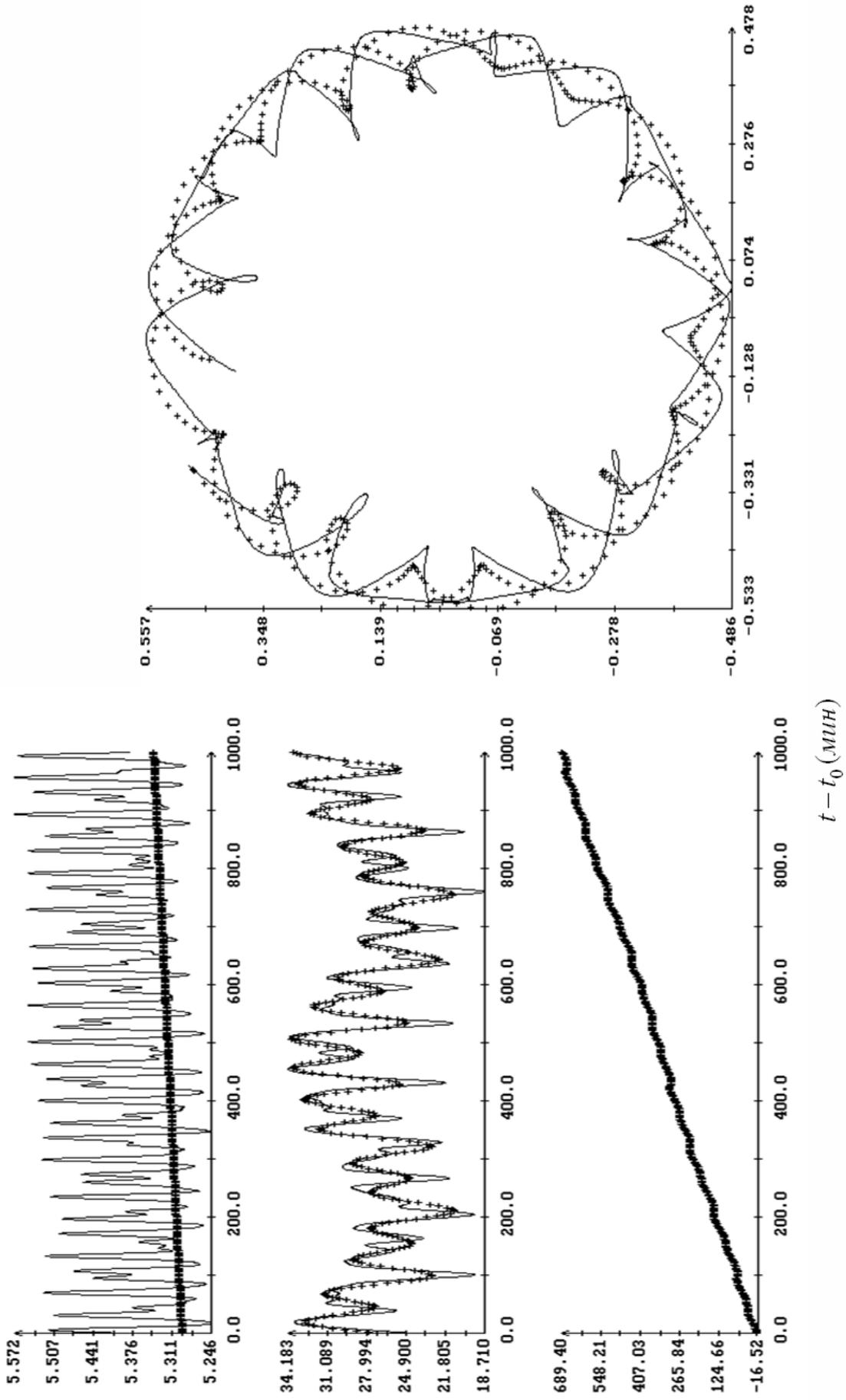
$I(10^{-3} \text{ c}^{-1}), \vartheta, \rho, \alpha (\text{град.})$


Рис. 18. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 13 после подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0); t_0 = 09:18:53 \text{ UTC } 07.06.2005$.

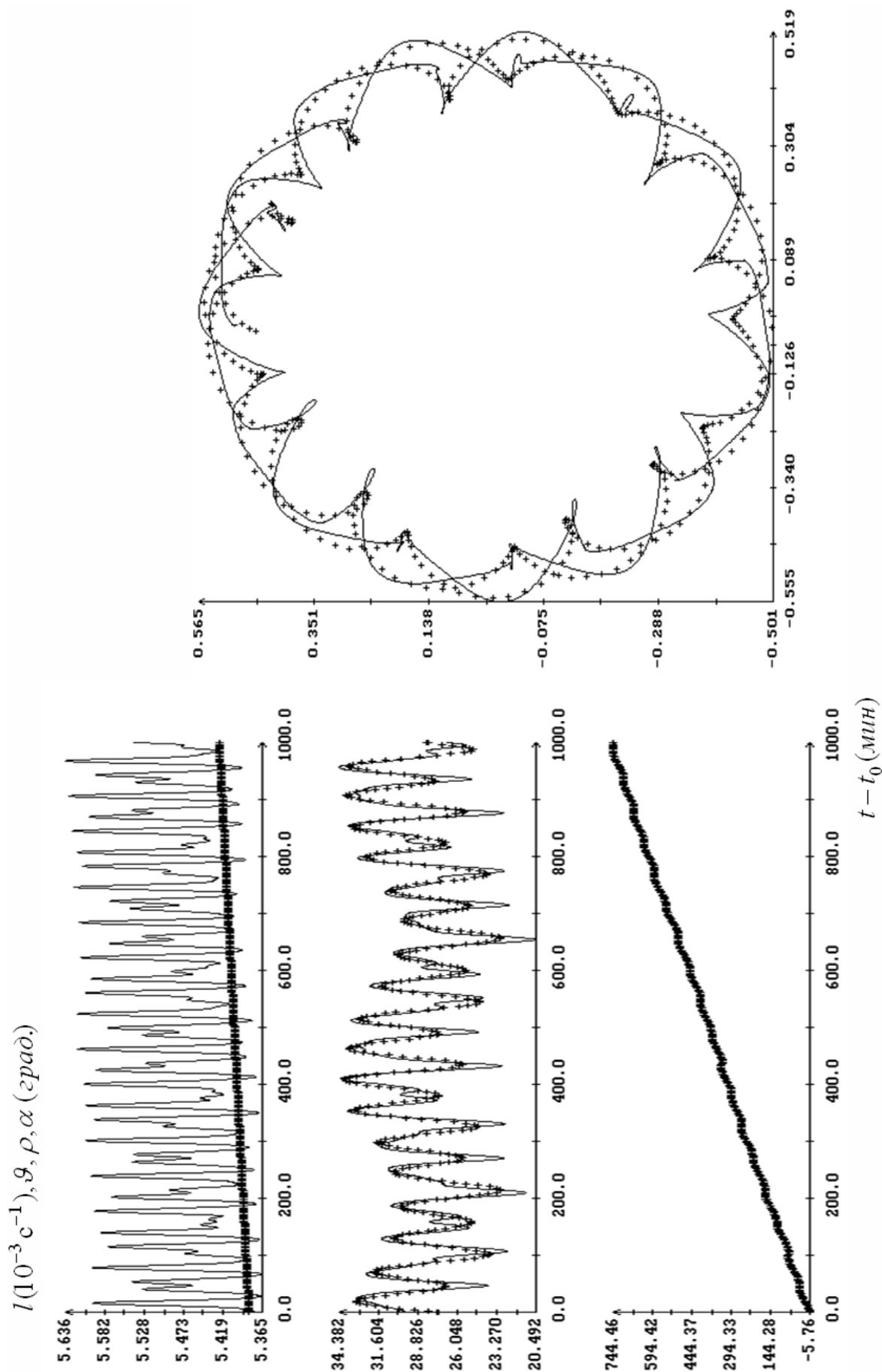


Рис.19. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 15. после подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0)$; $t_0 = 09:20:09 \text{ UTC } 08.06.2005$.

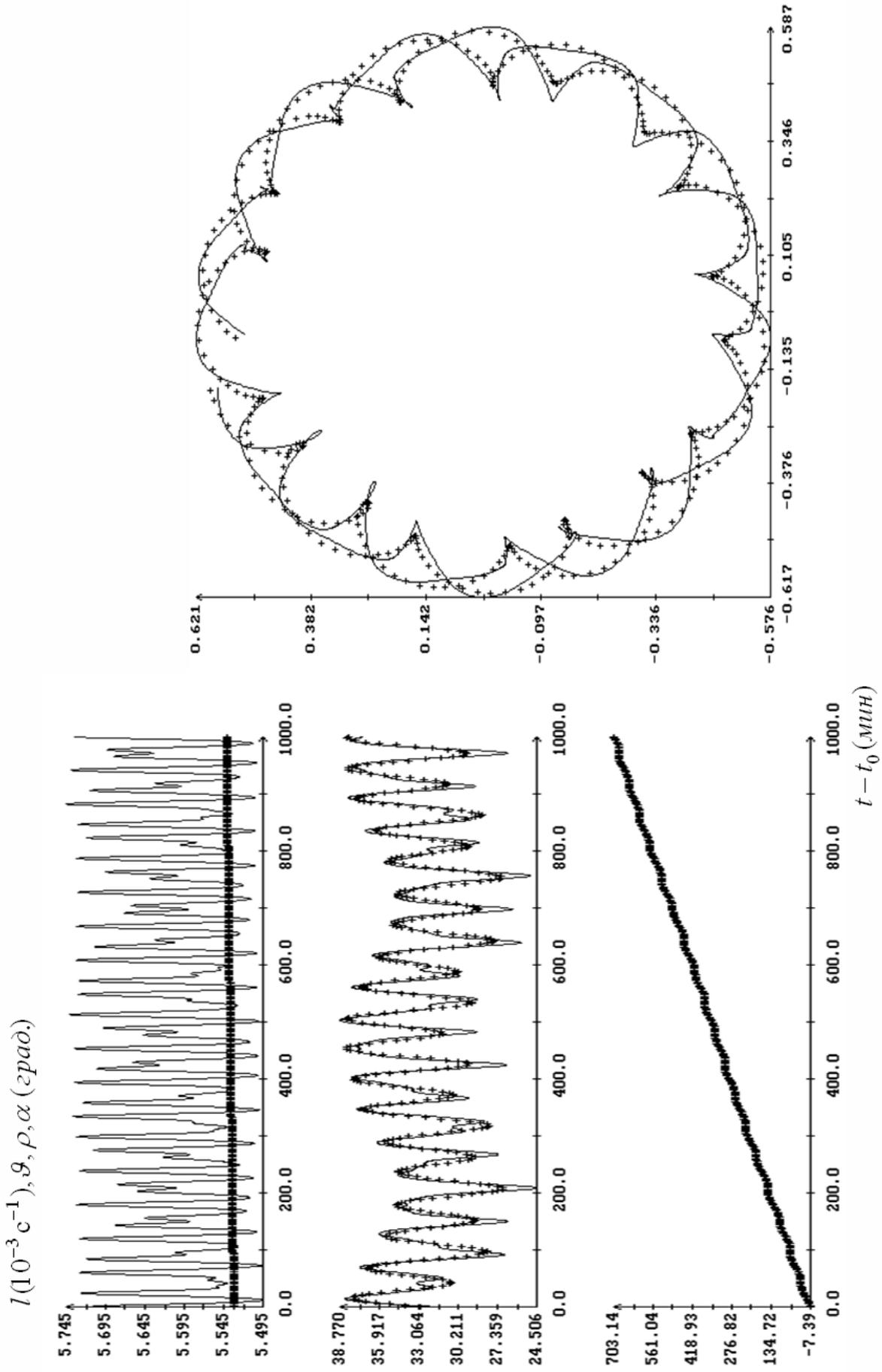


Рис. 20. Сравнение решений систем (2) и (12) на продолжении интервала 17 после подгонки ω_{\perp} и начальных условий $E_{\gamma 1}(t_0), E_{\gamma 2}(t_0), E_{\gamma 3}(t_0); t_0 = 09:21:25 \text{ UTC } 09.06.2005$.