ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 115 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лапик М.А.

Экстремальная мера и внешнее поле в двупараметрических векторных задачах равновесия логарифмического потенциала

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лапик М.А. Экстремальная мера и внешнее поле в двупараметрических векторных задачах равновесия логарифмического потенциала // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 115. 20 с. doi:10.20948/prepr-2016-115
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-115

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М. А. Лапик

Экстремальная мера и внешнее поле в двупараметрических векторных задачах равновесия логарифмического потенциала

Москва — 2016

УДК 517.53+517.9

Лапик М. А., Экстремальная мера и внешнее поле в двупараметрических векторных задачах равновесия логарифмического потенциала, *Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016*

Аннотация: Рассматриваются векторные задачи равновесия теории логарифмического потенциала во внешнем поле, с независимыми параметрами. В. С. Буяров и Е. А. Рахманов получили явные формулы, позволяющие найти равновесную меру во внешнем поле, и выразить внешнее поле, используя семейство носителей равновесных мер. Формулы эти применялись для решения одной гиперболической системы (т.н. континуального предела цепочки Тоды) методом обратной задачи. Нашей целью является получение аналогичных интегральных формул в векторном случае, где векторные меры параметризованы массами компонент. *Стр. 20, библ. назв. 19*

Ключевые слова: метод обратной задачи, векторная теория логарифмического потенциала, равновесные меры

Lapik M. A., Extremal measure and external field for two parameters vector equilibrium logarithmic potential problems. *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS Preprint, Moscow, 2016*

Abstract. The vector equilibrium problem of the logarithmic potential theory in external field with two independent parameters is considered. V. Buyarov and E. Rakhmanov obtained explicit formulas that allow to find the equilibrium measure, and to express the external field through the family of equilibrium measures supports. These formulas are useful to obtain solutions of the continuum limit Toda lattice by means of the inverse problem method. Our goal is to obtain similar integral formulas for the vector case, where the vector measures are parameterized by the component masses. *Pages 20, Bibl. 19*

Key words: the inverse problem method, vector equilibrium logarithmic potential theory, equilibrium measures.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

1. Введение

Экстремальной мерой $\lambda_Q^{t,\sigma}$ называется мера, обеспечивающая *функционалу энергии* $I_Q[\mu]$ в (непрерывном) *внешнем поле* Q минимум среди всех борелевских мер массы t, ограниченных мерой σ (с носителем $S_\sigma \Subset \mathbb{R}$) * :

$$I_Q[\mu] := \int U^\mu \, d\mu + 2 \int Q \, d\mu \to \inf \quad : \qquad I_Q[\lambda_Q^{t,\sigma}] = \inf_{\mu(\mathbb{R})=t, \ \mu \leqslant \sigma} I_Q[\mu], \quad (1.1)$$

где функция

$$U^\mu(\lambda) = \int \log \frac{1}{|\lambda - y|} \, d\mu(y), \quad (1.2)$$

называется *логарифмическим потенциалом* борелевской меры μ, см. [18]. Для экстремальной задачи (1.1) с *ограничением* σ во внешнем поле Q экстремальная мера $\lambda_Q^{t,\sigma}$ существует и единственна (в случае конечных энергий), см. [19], [12]. Она однозначно характеризуется *условиями равновесия*: для некоторой константы $F = F_Q^{t,\sigma}$ имеем

$$U^{\lambda_Q^{t,\sigma}} + Q \begin{cases} \leqslant F & \text{на} \quad S_{\lambda_Q^{t,\sigma}}, \\ \geqslant F & \text{на} \quad S_{\sigma - \lambda_Q^{t,\sigma}}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Множеством равновесия называют множество $S_{\lambda_Q^{t,\sigma}} \bigcap S_{\sigma - \lambda_Q^{t,\sigma}}$, а экстремальную меру называют также *равновесной*.

В. С. Буяров и Е. А. Рахманов в [8, 9], используя семейство носителей равновесных мер, параметризованное массой меры, получили формулы для равновесной меры и внешнего поля. Эти формулы лежат в основе метода обратной задачи для одной гиперболической системы уравнений в частных производных (т.н. непрерывного предела цепочки Тоды), см. [4, 2, 3].

Мы будем рассматривать *векторные экстремальные задачи* для логарифмического потенциала с внешним полем, см. [10, 18]. Нашей целью будет получение аналогичных формул для семейства экстремальных мер и для внешнего поля в векторном случае, где семейства векторных мер параметризованы массами компонент. Мотивирована эта задача разработкой метода обратной задачи для многомерных (по пространственной переменной) специальных гиперболических систем, являющихся обобщениями непрерывного предела цепочки Тоды, см. [4, 5, 6]. В следующем разделе мы напомним детали скалярного случая. Затем сформулируем основные результаты работы, приведем их доказательства и обсудим многомерные обобщения.

Автор выражает признательность А. И. Аптекареву и Д. Н. Тулякову за полезные обсуждения результатов этой работы.

*Мы в дальнейшем предполагаем, что минимум внешнего поля равен нулю , то есть $\min_{\lambda \in S_\sigma} Q(\lambda) = 0$ и потенциал меры σ непрерывен. Это требование гарантирует отсутствие точечных масс у σ.

2. Предел цепочки Тоды и метод обратной задачи

Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = -\dfrac{\beta-\alpha}{4}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial t} = \dfrac{\beta-\alpha}{4}\dfrac{\partial\beta}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.1}$$

эквивалентна (ввиду линейной замены $\alpha = a - 2b, \quad \beta = a + 2b$) системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b\ \dfrac{\partial b}{\partial x}\ , \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2}\ \dfrac{\partial a}{\partial x}\ , \end{cases} \tag{2.2}$$

которую называют (см. [11]) *a Continuum limit of the Toda lattice*, так как она является пределом

$$\lim_{N\to\infty, k/N\to x} \{a_{k,N}(Nt),\, b_{k,N}(Nt)\} = \{a(x,t),\, b(x,t)\} \tag{2.3}$$

известной вполне интегрируемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (*цепочка Тода*):

$$\begin{cases} \dfrac{da_{k,N}}{dT} = (b_{k,N}^2 - b_{k-1,N}^2), \\ \dfrac{db_{k,N}}{dT} = \dfrac{b_{k,N}}{2}(a_{k+1,N} - a_{k,N}), \end{cases} \qquad k = 1,2,\dots\ . \tag{2.4}$$

Здесь обозначено

$$a_{n,N} := a\left(\frac{n}{N}, \cdot\right),\ b_{n,N} := b\left(\frac{n}{N}, \cdot\right)$$

и проведено масштабирование временной переменной $T := Nt$.

Пусть множество равновесия $S_{\mu_Q^{x,\sigma}} \cap S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}}$ есть интервал $[\alpha(x,t_0), \beta(x,t_0)]$, внешнее поле зависит от времени

$$Q(\lambda,t) := -\frac{\lambda t}{2} + Q(\lambda,t_0), \tag{2.5}$$

а ограничение σ от времени не зависит. При этих условиях в [13], [14] непосредственно показано, что концы интервала равновесия локально удовлетворяют системе (2.1). Отметим, что на множестве равновесия экстремальная мера строго меньше ограничения σ, т.е. на этом множестве потенциал уравновешивает внешнее поле. Так же известно, что при росте массы мер равновесные меры возрастают:

$$1 \geq t_1 > t_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_Q^{t_1,\sigma} \geq \lambda_Q^{t_2,\sigma}.$$

Из чего следует, что носители равновесных мер $S_{\lambda_Q^{t,\sigma}}$ возрастают по t, а множества $S_{\sigma-\lambda_Q^{t,\sigma}}$, где мера не "ударилась"в ограничение, убывают. Если предположить, что пересечение этих двух множеств, т. е. множество равновесия, есть интервал Δ_t, то концы, как функции от t, имеют один максимум и один минимум. Таким образом, рассмотрение введение ограничения σ на меры в экстремальной задаче (1.1) позволит нам рассмотреть немонотонные начальные условия в (2.1).

Метод обратной задачи (в нашем случае) состоит в том, что рассматривается зависимость от времени только спектральных данных (тут внешнего поля Q), см. (2.5). Мы должны уметь по $S_{\mu_Q^{x,\sigma}} \cap S_{\sigma-\mu_Q^{x,\sigma}} = [\alpha(x,t), \beta(x,t)]$ (множеству равновесия) находить спектральные данные (внешнее поле) и по спектральным данным восстанавливать множество равновесия (*прямая и обратная задачи*). Прямая задача решается с помощью формул Буярова –Рахманова, а обратная – с помощью экстремального функционала Машкара – Саффа, см. [17].

Для полноты изложения мы напомним результат Буярова – Рахманова, который приведем в несколько ослабленной форме, в наших обозначениях и для нашей постановки задачи.

Теорема 2.1. *(См. [8], [9])*

1. *Семейства носителей равновесных мер $S_x = S_{\lambda^x}$ и множеств равновесия $S^x = S^{\lambda^x}$ монотонно возрастают по x, для любого x и для любого $0 < \varepsilon < x$ верно $S^{x-\varepsilon} \subset S_x \subset S^x$. Эти семейства непрерывны справа:*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} S^{x+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} S_{x+\varepsilon} = S^x, \tag{2.6}$$

и слева:

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} S_{\lambda^{x-\varepsilon}}} = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} S^{\lambda^{x-\varepsilon}}} = S_x. \tag{2.7}$$

2. *Семейство равновесных мер λ^x монотонно возрастает, непрерывно и дифференцируемо всюду, за исключением не более чем счетного множества. Существуют всюду левые производные и правые производные:*

$$\frac{\partial_+}{\partial x}\lambda^x = \omega_{S^x}, \quad \frac{\partial_-}{\partial x}\lambda^x = \omega_{S_x}. \tag{2.8}$$

3. Для экстремальной меры справедливо представление при $x > 0$

$$\lambda^x = \int_0^x \omega_{S_\tau}\, d\tau. \tag{2.9}$$

4. Для внешнего поля Q *справедведлива формула: для любого* $y \in \bigcup_{x>0} S_{\lambda^x}$

$$Q(y) = \int_0^{+\infty} g_\tau(y)\, d\tau, \tag{2.10}$$

где $g_\tau(y)$ *– функция Грина области* $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\tau$*, с полюсом в бесконечности.*

Как мы уже отмечали во Введении, наша цель – обобщение этой теоремы на векторный случай.

3. Векторная задача. Основные результаты

Пусть $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ векторный компакт в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ с непересекающимися регулярными компонентами $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ с пустой внутренностью $\Gamma_i^0 = \emptyset$. Обозначим $\mathcal{M}^{xy} = \mathcal{M}^{xy}_{\mathbf{\Gamma}}$ – множество векторных борелевских мер $\overline{\mu}$:

$$\mathcal{M}^{xy}_{\mathbf{\Gamma}} = \{\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2),\ S_{\mu_i} \subset \Gamma_i,\, i = 1{,}2;\ \mu_1(\Gamma_1) = x,\, \mu_2(\Gamma_2) = y\}.$$

Внешним полем будем называть непрерывную вектор-функцию

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2), \qquad Q_i : \Gamma_i \longrightarrow \mathbb{R},\ \ i = 1{,}2.$$

Вектор-функцию $\mathbf{W}^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q}} = (W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},1}, W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},2})$, такую, что

$$\Big(W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},1}(z),\ \ W^{\overline{\mu}}_{\mathbf{Q},2}(z)\Big) = \big(U^{\mu_1}(z),\ \ U^{\mu_2}(z)\big) \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix} + \big(Q_1(z),\ \ Q_2(z),\big)$$

называют *векторным логарифмическим потенциалом* меры $\overline{\mu} \in \mathcal{M}^{xy}$ с *внешним полем* $\mathbf{Q}$ и *матрицей взаимодействия* $\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$, где $a, b > 1$. Поскольку условия равновесия можно делить на константу, то описанный вид матриц является максимально общим для симметричных матриц с положительной диагональю и отрицательными остальными членами. Имея ввиду приложения к уравнениям в частных производных, мы будем рассматривать область изменения весов x, y следующего вида

$$x, y : \begin{cases} a, b > 1, \\ ax > y > 0, \\ by > x > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

В [16] был рассмотрен пограничный случай: $a = b = 2$, $x = 2y$.

Энергия для векторных мер $\overline{\mu} \in \mathcal{M}^{xy}$ во внешнем поле $\mathbf{Q}$ задается функционалом

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) = I_1^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) + I_2^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}), \quad I_i^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) = \int \Big(W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\mu}}(z) + Q_i(z) \Big) d\mu_i(z). \tag{3.2}$$

Аналогично скалярному случаю ставится *векторная экстремальная задача с внешним полем*: найти меру $\overline{\lambda}_Q^{xy} = \overline{\lambda}^{xy} \in \mathcal{M}^{xy}$, такую, что

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}^{xy}) = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}^{xy}} I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}). \tag{3.3}$$

Существует единственное решение $\overline{\lambda}^{xy} \in \mathcal{M}^{xy}$ задачи (3.3), см. [10], [18]. Экстремальная мера однозначно характеризуется следующими соотношениями равновесия:

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\lambda}^{xy}}(z) \begin{cases} = F_i^{xy}, & z \in S_{\lambda_i^x}, \\ \geq F_i^{xy}, & z \in \Gamma_i, \end{cases} \tag{3.4}$$

для некоторых констант F_i^{xy}, $i = 1{,}2$. Множество, на котором в (3.4) достигается равенство, называют *множеством равновесия*, и оно обозначается $\mathbf{S}^{\overline{\lambda}^{xy}} = (S_1^{\overline{\lambda}^{xy}}, S_2^{\overline{\lambda}^{xy}})$. Справедливо включение $\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{xy}} \subset \mathbf{S}^{\overline{\lambda}^{xy}}$.

Мерой Робена компакта (не обязательно регулярного) $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$, для нашей постановки экстремальной задачи, называют меру $\overline{\omega}^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}^{\alpha\beta}$, минимизирующую энергию (3.2) в отсутствие внешнего поля ($\mathbf{Q} \equiv 0$). В [18] показано, что условия равновесия для меры $\overline{\omega}^{\alpha\beta}(\mathbf{K})$ есть

$$\begin{aligned} &aU^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \begin{cases} \leq \gamma_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{на} \quad S_{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \\ \geq \gamma_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{кв. в. на} \quad K_1, \end{cases} \\ &bU^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \begin{cases} \leq \gamma_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{на} \quad S_{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \\ \geq \gamma_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{кв. в. на} \quad K_2. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Допустимым путем параметризованным натуральным параметром t мы будем называть пару функций $x(\cdot), y(\cdot) \in C^1[0{,}1]$ со значениями в области (3.1), причем вектор скорости также должен принадлежать этой области, то есть

$$\frac{1}{a} < \frac{\dot{x}}{\dot{y}} < b. \tag{3.6}$$

В этой работе мы будем исследовать вдоль допустимых путей свойства величин

$$\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{x(t)y(t)}}, \quad \mathbf{S}^{\overline{\lambda}^{x(t)y(t)}}, \quad \overline{\lambda}^{x(t)y(t)}, \quad F_1^{x(t)y(t)}, \quad F_2^{x(t)y(t)}.$$

Введем упрощающие обозначения: $\overline{\lambda}^t = \overline{\lambda}^{x(t)y(t)}$, $\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{x(t)y(t)}}$, $\mathbf{S}^t = \mathbf{S}^{\overline{\lambda}^{x(t)y(t)}}$, $W_i^t = W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\lambda}^{x(t)y(t)}}$. В настоящей статье все векторные выражения следует понимать покомпонентно. Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 3.1. *Фиксируем некоторый допустимый путь* $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$, *тогда для семейства равновесных мер* $\overline{\lambda}^t \in \mathcal{M}^{x(t)y(t)}$ *во внешнем поле* $\mathbf{Q}$ *справедливы утверждения:*

1. *Семейства носителей равновесных мер* $\mathbf{S}_t$ *и множеств равновесия* $\mathbf{S}^t$ *монотонно возрастают вдоль пути (то есть по* t*), для любого* t *и для любого* $0 < \varepsilon < t$ *верно* $\mathbf{S}^{t-\varepsilon} \subset \mathbf{S}_t \subset \mathbf{S}^t$. *Эти семейства непрерывны справа, то есть*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{t+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{t+\varepsilon} = \mathbf{S}^t, \tag{3.7}$$

и непрерывны слева, то есть

$$\overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{t-\varepsilon}} = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{t-\varepsilon}} = \mathbf{S}_t. \tag{3.8}$$

2. *Семейство равновесных мер* $\overline{\lambda}^{x(t)y(t)}$ *монотонно возрастает, непрерывно и дифференцируемо всюду, за исключением не более чем счетного множества. Всюду существуют правые производные и, за исключением не более чем счетного множества, левые производные:*

$$\frac{\partial^-}{\partial t}\overline{\lambda}^{x(t)y(t)} \overset{a.e.}{=} \overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_t), \quad \frac{\partial^+}{\partial t}\overline{\lambda}^{x(t)y(t)} = \overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}^t). \tag{3.9}$$

3. *Для экстремальной меры справедливо*

$$\overline{\lambda}^{x(1)y(1)} = \int_0^1 \overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_t)\, dt. \tag{3.10}$$

4. *Для компонент внешнего поля* Q_i, $i = 1,2$, *(фиксируем нормировку* $\min_{\Gamma_i} Q_i = 0$*) верна следующая интегральная формула: для любого* $y \in S_{t(1),i}$

$$Q_i(y) = \int_0^1 \left[\gamma_i^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_t) - W_{0,i}^{\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_t)}(y)\right] d\tau. \tag{3.11}$$

В [16] найдено обобщение функционала, предложенного Маскаром и Саффом в [17] на векторный случай. Мы определим аналогичный функционал для нашей постановки задачи.

Определение 3.1. *Функционалом Маскара-Саффа для векторных задач называют функционал, определенный на компактах* $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{\Gamma}$ *формулой*

$$F^{xy}_{\alpha\beta}(\mathbf{K}) := x\gamma_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) + y\gamma_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) + \int Q_1\, d\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) + \int Q_2\, d\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K}), \qquad (3.12)$$

где α, β *принадлежат области (3.1).*

Предложение 3.1. *Для любого компакта* $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ *верно*

$$F^{xy}_{\alpha\beta}(\mathbf{K}) \geq F^{xy}_{\alpha\beta} := \alpha F^{xy}_1 + \beta F^{xy}_2. \qquad (3.13)$$

Равенство достигается, только если $\boldsymbol{S}_{\overline{\lambda}^{xy}} \subset \boldsymbol{S}_{\overline{\omega}^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \subset \boldsymbol{S}^{\overline{\lambda}^{xy}}$.

4. Доказательства

Докажем утверждение 1. Покажем, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} aU^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} &\begin{cases} = \gamma_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{кв.в. на} \quad S_{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \\ < \gamma_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{на} \quad \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}, \end{cases} \\ bU^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} &\begin{cases} = \gamma_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{кв.в. на} \quad S_{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \\ < \gamma_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) & \text{на} \quad \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}. \end{cases} \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Функция $aU^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}$ субгармонична в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}$. Из принципа максимума для субгармонических функций и принципа мажорации для логарифмического потенциала (см. [19],ч.2, Теорема 3.2) следует, что для любого $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}$ верно

$$\left(aU^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}\right)(z) < \sup_{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}} \left(aU^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}\right)(\zeta) \leq \gamma_1.$$

Для функции $bU^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}$ рассуждения аналогичны. Мы доказали справедливость неравенств (4.1), приступим к доказательству Утверждения.

Рассмотрим произвольный регулярный компакт $\mathbf{K}$. Проинтегрируем (3.4) по $\omega_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K})$, $i = 1{,}2$ и сложим оба неравенства. Применяя теорему Фубини и учитывая (4.1), получим

$$\begin{gathered} F^{xy}_{\alpha\beta} \leq \int \left[aU^{\lambda_1^{xy}} - U^{\lambda_2^{xy}} + Q_1\right] d\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) + \\ + \int \left[bU^{\lambda_2^{xy}} - U^{\lambda_1^{xy}} + Q_2\right] d\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K}) = \int \left[aU^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - \gamma_1^{\alpha\beta}\right] d\lambda_1^{xy} + \\ + \int \left[bU^{\omega_2^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - U^{\omega_1^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} - \gamma_2^{\alpha\beta}\right] d\lambda_2^{xy} + F^{xy}_{\alpha\beta}(\mathbf{K}) \leq F^{xy}_{\alpha\beta}(\mathbf{K}). \end{gathered}$$

В первом неравенстве равенство имеет место, только если $\mathbf{S}_{\overline{\varpi}^{\alpha\beta}(\mathbf{K})} \subset \mathbf{S}^{\overline{\lambda}^{xy}}$, это следует из определения множества равновесия. В последнем неравенстве равенство имеет место, только если $\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{xy}} \subset \mathbf{S}_{\overline{\varpi}^{\alpha\beta}(\mathbf{K})}$, см. (4.1). ■

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 4.1. *Для любого допустимого пути* $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ *и любого положительного* ε *верно то, что* $\overline{\lambda}^{t+\varepsilon} - \overline{\lambda}^{t}$ *есть мера и*

$$\boldsymbol{S}_t \subset \boldsymbol{S}^t \subset \boldsymbol{S}_{t+\varepsilon} \subset \boldsymbol{S}^{t+\varepsilon}. \tag{4.2}$$

Докажем, что мера $\overline{\nu} := \overline{\lambda}^t_{\mathbf{Q}} + \overline{\lambda}^{\Delta x \Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}}}$, где

$$\Delta x = x(t+\varepsilon) - x(t), \quad \Delta y = y(t+\varepsilon) - y(t)$$

равна $\overline{\lambda}^{t+\varepsilon}_{\mathbf{Q}}$. Принадлежность $\overline{\nu}$ классу $\mathcal{M}^{x(t+\varepsilon)y(t+\varepsilon)}$ очевидна. Запишем теперь условия равновесия для экстремальной меры $\overline{\lambda}^{\Delta x \Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}}}$ (мы помним, что $W^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}}}}_{W^t_{\mathbf{Q}},i}(z) = W^{\overline{\nu}}_{\mathbf{Q},i}(z)$ для $i = 1{,}2$)

$$W^{\overline{\nu}}_{\mathbf{Q},1}(z) = aU^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}(z) - U^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}}(z) + W^{\overline{\lambda}^t_{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{Q},1}(z) \begin{cases} = F^\varepsilon_1, & z \in S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}} \\ \geq F^\varepsilon_1, & z \in \Gamma_1, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$W^{\overline{\nu}}_{\mathbf{Q},2}(z) = bU^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}}(z) - U^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}(z) + W^{\overline{\lambda}^t_{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{Q},2}(z) \begin{cases} = F^\varepsilon_2, & z \in S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}} \\ \geq F^\varepsilon_2, & z \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Т.к. условия равновесия однозначно характеризуют меру, нам нужно показать, что на $\mathbf{S}_{\overline{\nu}} = \mathbf{S}_t \bigcup \mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}}}}$ выполняются равенства

$$W^{\overline{\nu}}_{\mathbf{Q},1}(z) = aU^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}(z) - U^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}}(z) + W^{\overline{\lambda}^t_{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{Q},1}(z) = F^\varepsilon_1,$$

$$W^{\overline{\nu}}_{\mathbf{Q},2}(z) = bU^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}}(z) - U^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}(z) + W^{\overline{\lambda}^t_{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{Q},2}(z) = F^\varepsilon_2.$$

Докажем, что на $\mathbf{S}_t \setminus \mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}}}}$ для $i = 1{,}2$ имеет место неравенство

$$W^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}}}}_{W^t_{\mathbf{Q}},i} \leq F^\varepsilon_i. \tag{4.5}$$

Поскольку мы рассматриваем допустимые пути (3.6), то

$$aU^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}} - U^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}} \in sbH\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}\right),$$

и

$$bU^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}} - U^{\overline{\lambda}^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}} \in sbH\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}}\right).$$

Далее будем применять принцип максимума для субгармонических функций и принцип непрерывности для логарифмического потенциала. Рассмотрим $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}$ и, учитывая (3.4), получим

$$aU^{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}(z) - U^{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}}(z) < \sup_{\zeta\in\overline{\mathbb{C}}\setminus S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}} (aU^{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}} - U^{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}})(\zeta)$$
$$\leq \sup_{\zeta\in S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}} (aU^{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}} - U^{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},2}})(\zeta) \leq F_1^{\varepsilon} - \inf_{\zeta\in S_{\lambda^{\Delta x\Delta y}_{W^t_{\mathbf{Q}},1}}} (W^{\overline{\lambda}^t_{W^t_{\mathbf{Q}}}}_{\mathbf{Q},1})(\zeta) = F_1^{\varepsilon} - F_1^{x}. \tag{4.6}$$

Аналогично для второй компоненты. Следовательно, на $\mathbf{S}_{\overline{\nu}}$ для $\overline{\nu}$ имеет место (4.5), т.е. выполняются соотношения равновесия (3.4). ■

Лемма 4.2. *Для любого положительного $\varepsilon < t$ верно:*

$$\begin{gathered}
\frac{\Delta x}{\varepsilon}\gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}}) + \frac{\Delta y}{\varepsilon}\gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}}) \leq \\
\leq \frac{F^{x(t+\varepsilon)y(t+\varepsilon)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)} - F^{x(t)y(t)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}}{\varepsilon} \leq \\
\leq \frac{\Delta x}{\varepsilon}\gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) + \frac{\Delta y}{\varepsilon}\gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}), \\
\frac{\Delta x}{\varepsilon}\gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S^{t+\varepsilon}}) + \frac{\Delta y}{\varepsilon}\gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S^{t+\varepsilon}}) \leq \\
\leq \frac{F^{x(t+\varepsilon)y(t+\varepsilon)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)} - F^{x(t)y(t)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}}{\varepsilon} \leq \\
\leq \frac{\Delta x}{\varepsilon}\gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S^t}) + \frac{\Delta y}{\varepsilon}\gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S^t}).
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Используя свойство (3.13) функционала (3.12), получим

$$F^{x(t+\varepsilon)y(t+\varepsilon)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)} \leq F^{x(t+\varepsilon)y(t+\varepsilon)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) = (\Delta x + x(t))\gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) +$$

$$+(\Delta y + y(t))\gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) + \int Q_1 d\omega_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) + \int Q_2 d\omega_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) =$$

$$= F^{x(t)y(t)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)} + \Delta x\gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) + \Delta y\gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}),$$

$$F^{x(t)y(t)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)} \le F^{x(t)y(t)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}}) = (x(t+\varepsilon)-\Delta x)\gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}})+$$

$$+(y(t+\varepsilon)-\Delta y)\gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}}) + \int Q_1 d\omega_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}}) + \int Q_2 d\omega_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_t}) =$$

$$= F^{x(t+\varepsilon)y(t+\varepsilon)}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)} - \Delta x \gamma_1^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}}) - \Delta y \gamma_2^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S_{t+\varepsilon}}).$$

Для множеств равновесия неравенства получаются аналогично. ■

Лемма 4.3. *Для любого положительного $\varepsilon < t$ верно: для i=1,2*

$$\left(W_i^{t+\varepsilon} - W_i^t\right)(z) \begin{cases} = F_i^{t+\varepsilon} - F_i^t, & z \in S_i^t, \\ < F_i^{t+\varepsilon} - F_i^t, & z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_i^t, \end{cases}$$
$$\left(W_i^{t} - W_i^{t-\varepsilon}\right)(z) \begin{cases} = F_i^{t} - F_i^{t-\varepsilon}, & z \in S_i^{t-\varepsilon}, \\ < F_i^{t} - F_i^{t-\varepsilon}, & z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_i^{t-\varepsilon}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Докажем первую часть утверждения, поскольку вторая совпадает с ней с точностью до обозначений. Утверждение леммы на множестве $S_{t+\varepsilon,i}$ следует из соотношений равновесия.

Докажем неравенство на $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{t+\varepsilon,i}$. На этом множестве векторный логарифмический потенциал меры $\overline{\lambda}^{t+\varepsilon} - \overline{\lambda}^{t}$ непрерывен в $\mathbb{C}$, поскольку потенциал равновесной меры непрерывен по принципу непрерывности для логарифмического потенциала [19]. Этот потенциал является субгармонической в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_{t+\varepsilon,i}$ функцией, так как мы рассматриваем допустимые пути (3.1), следовательно, для нее имеет место принцип максимума: для $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{t+\varepsilon,i}$ выполняются соотношения

$$W_i^{t+\varepsilon}(z) - W_i^t(z) < \sup_{S_{t+\varepsilon,i}} (W_i^{t+\varepsilon} - W_i^t) = F_i^{t+\varepsilon} - F_i^t. \qquad ■$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 2. Мы помним, что $\overline{\lambda}^t = \overline{\lambda}^{x(t)y(t)}$ – упрощающие обозначения для векторных мер, у которых вес изменяется вдоль допустимых путей (3.6).

Заметим, что для любого положительного ε мера $\Delta_t^{\pm\varepsilon} := \dfrac{\overline{\lambda}^t - \overline{\lambda}^{t\pm\varepsilon}}{\mp\varepsilon} \in \mathcal{M}^{\frac{\Delta x}{\varepsilon}\frac{\Delta y}{\varepsilon}}$. Из теоремы о слабой компактности сферы в сопряженном пространстве следует, что из множества $\Delta_t^{\pm\varepsilon_n}$, $\varepsilon_n \to 0$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, поскольку носители компонент мер компакты и веса ограниченны по (3.1):

$$\Delta_t^{\pm\varepsilon_n} \to \widetilde{\Delta}_t^{\pm}, \quad n \to \infty. \tag{4.9}$$

Для того, чтобы доказать дифференцируемость равновесных мер справа и слева, достаточно показать, что слабые пределы $\widetilde{\Delta}_t^+$ и $\widetilde{\Delta}_t^-$ являются мерами $\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}^t)$ и $\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_t)$ соответственно.

Множество

$$\left\{\frac{F_1^t - F_1^{t\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}, \quad \frac{F_2^t - F_2^{t\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ограниченно, так как для $z \in \Gamma_i$ верно:

$$-\infty \neq W_{\mathbf{0},i}^{\widetilde{\Delta}_t^{\pm}}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} W_{\mathbf{0},i}^{\Delta_t^{\pm\varepsilon_n}}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{F_i^t - F_i^{t\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}. \tag{4.10}$$

Первое неравенство следует из определения слабой сходимости мер и Теоремы 1.1 Гл. 5 в [18] (Принцип понижения), второе – из Леммы 3, а Лемма 2 дает нам ограниченность данного множества сверху, поскольку у нас пути таковы, что вектор скорости принадлежит сектору (3.1). Теперь без ограничения общности можно считать, что существуют пределы

$$\widetilde{\gamma}_1^{\pm} := \lim_{n\to\infty} \frac{F_1^t - F_1^{t\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}, \quad \widetilde{\gamma}_2^{\pm} := \lim_{n\to\infty} \frac{F_2^t - F_2^{t\pm\varepsilon_n}}{\mp\varepsilon_n}. \tag{4.11}$$

Экстремальные меры слабо непрерывны, т.е. $\overline{\lambda}^{t-\varepsilon} \to \overline{\lambda}^t$ и $\overline{\lambda}^{t+\varepsilon} \to \overline{\lambda}^t$ при $\varepsilon \searrow 0$, это легко проверить по определению слабой сходимости, учитывая, что вектор скорости пути имеет ограниченные компоненты.

Мы готовы доказать п.1 Теоремы. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и $i = 1{,}2$

$$\lambda_i^t\left(S_{t,i} \setminus \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} S_i^{t-\varepsilon}}\right) \leq \lambda_i^t\left(S_{t,i} \setminus S_i^{t-\varepsilon}\right) = \left(\lambda_i^t - \lambda_i^{t-\varepsilon}\right)\left(S_{t,i} \setminus S_i^{t-\varepsilon}\right) \leq \varepsilon(a+b).$$

Слева стоит неотрицательная константа, из выбора произвольного $\varepsilon > 0$ заключаем, что $\overline{\lambda}^t\left(\mathbf{S}_t \setminus \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbf{S}^{t-\varepsilon}}\right) = 0$, по определению носителя меры заключаем, что верно (3.8).

Из (4.2) следует включение $\mathbf{S}^t \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{t+\varepsilon}$. Рассмотрим произвольное $z \in \bigcap_{\varepsilon>0} S_{t+\varepsilon,i} = \bigcap_{\varepsilon_n} S_{t+\varepsilon_n,i}$, $i = 1{,}2$. Из (4.11) следует , что $F_i^{t+\varepsilon_n} \to F_i^t$ и $\overline{\lambda}^{t+\varepsilon_n} \to \overline{\lambda}^t$ при $n \to \infty$. Тогда, по принципу понижения,

$$\lim_{n\to\infty} W_i^{t+\varepsilon_n}(z) \geq W_i^t(z)$$

и

$$W_i^{t+\varepsilon_n}(z) = F_i^{t+\varepsilon_n} \longrightarrow F_i^t \leq W_i^t(z), \quad n \to \infty.$$

Это дает обратное включение $\mathbf{S}^t \supset \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{S}_{t+\varepsilon}$. Мы завершили доказательство п.1 Теоремы.

Проведем доказательство п. 2 Теоремы. Из доказанного выше следует, что $\mathbf{S}_{\widetilde{\Delta}_t^+}=\mathbf{S}^t$, $\mathbf{S}_{\widetilde{\Delta}_t^-}=\mathbf{S}_t$, $\widetilde{\Delta}_t^{\pm}\in\mathcal{M}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}$.

Докажем, что мера дифференцируема справа. Используя принцип максимума для субгармонических функций, принцип понижения для логарифмического потенциала, (3.7) и Лемму 3, мы получим неравенства,

$$
\begin{aligned}
W_{\mathbf{0},1}^{\widetilde{\Delta}_t^+}(z)&\le\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}W_{\mathbf{0},1}^{\widetilde{\Delta}_t^{+\varepsilon n}}(z)=\widetilde{\gamma}_1^+ & \text{на}\quad S_1^t\supset S^1_{\widetilde{\Delta}_t^+},\\ \widetilde{\gamma}_1^+ & \text{на}\quad \mathbb{C},\end{cases}\\
W_{\mathbf{0},2}^{\widetilde{\Delta}_t^+}(z)&\le\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}W_{\mathbf{0},2}^{\widetilde{\Delta}_t^{+\varepsilon n}}(z)=\widetilde{\gamma}_2^+ & \text{на}\quad S_2^t\supset S^2_{\widetilde{\Delta}_t^+},\\ \widetilde{\gamma}_2^+ & \text{на}\quad \mathbb{C}.\end{cases}
\end{aligned}\tag{4.12}
$$

Интегрируя (4.12) почленно по $\widetilde{\Delta}_{t,i}^+$ и складывая, мы получаем, что

$$
I(\widetilde{\Delta}_t^+)\le\dot{x}(t)\widetilde{\gamma}_1^++\dot{y}(t)\widetilde{\gamma}_2^+\le I(\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}^t)),
$$

последнее следует из Леммы 2. Носитель $\widetilde{\Delta}_t^+$ содержится в $\mathbf{S}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}$ и $\widetilde{\Delta}_t^+\in\mathcal{M}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}$, из экстремальности энергии меры $\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}$ следует, что $\widetilde{\Delta}_t^+=\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)})$. Из единственности равновесной меры следует дифференцируемость справа $\overline{\lambda}^t$.

Используя принцип максимума для субгармонических функций, принцип понижения для логарифмического потенциала, (3.8) и Лемму 3, мы получим неравенства,

$$
\begin{aligned}
W_{\mathbf{0},1}^{\widetilde{\Delta}_t^-}(z)&\le\begin{cases}\lim W_{\mathbf{0},1}^{\widetilde{\Delta}_t^{-\varepsilon n}}(z)=\widetilde{\gamma}_1^- & \text{на}\quad S_t^1\supset S^1_{\widetilde{\Delta}_t^-},\\ \widetilde{\gamma}_1^- & \text{на}\quad \mathbb{C},\end{cases}\\
W_{\mathbf{0},2}^{\widetilde{\Delta}_t^-}(z)&\le\begin{cases}\lim W_{\mathbf{0},2}^{\widetilde{\Delta}_t^{-\varepsilon n}}(z)\widetilde{\gamma}_2^- & \text{на}\quad S_t^1\supset S^1_{\widetilde{\Delta}_t^-},\\ \widetilde{\gamma}_2^- & \text{на}\quad \mathbb{C}.\end{cases}
\end{aligned}\tag{4.13}
$$

Интегрируя (4.13) почленно по $\widetilde{\Delta}_{t,i}^-$ и складывая, мы имеем

$$
I(\widetilde{\Delta}_t^-)\le\dot{x}(t)\widetilde{\gamma}_1^-+\dot{y}(t)\widetilde{\gamma}_2^-\le I(\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_{t-0}))\overset{a.e.}{=}I(\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_t)),
$$

последнее верно всюду, за исключением не более чем счетного множества, т.е. множества разрывов монотонной функции. Аналогично случаю с положительным приращением мы получаем $\widetilde{\Delta}_t^-\overset{a.e.}{=}\overline{\omega}^{\dot{x}(t)\dot{y}(t)}(\mathbf{S}_{\dot{x}(t)\dot{y}(t)})$. Из единственности равновесной меры следует дифференцируемость слева меры $\overline{\lambda}^t$. Мы доказали п. 2 Теоремы.

Нам осталось установить справедливость формулы (3.10) для равновесной меры.

Положим $\overline{\mu}^t := \displaystyle\int_0^t \overline{\omega}^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)\,d\tau$ и рассмотрим нейтральный заряд $\overline{\nu}^t := \overline{\lambda}^t - \overline{\mu}^t$. Наша цель – доказать, что $\overline{\nu}^t$ есть нулевой заряд.

Докажем сначала, что $\overline{\nu}^t$ не зависит от t. Заряд $\overline{\nu}^t$ непрерывен по t. Мера $\overline{\mu}^t$ дифференцируема слева и справа в точках непрерывности $\overline{\omega}_\tau = \overline{\omega}^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)$ слева и справа соответственно. Покажем , что $\overline{\omega}_{\tau+\varepsilon} \to \overline{\omega}^\tau$ при $\varepsilon \searrow 0$. Из $\overline{\omega}_{\tau+\varepsilon}$ можно выбрать сходящуюся к $\widetilde{\omega}$ подпоследовательность по теореме о слабой компактности шара в сопряженном пространстве. Из принципа понижения для логарифмического потенциала следует, что $I(\widetilde{\omega}) \le \lim_{\varepsilon\searrow 0} I(\overline{\omega}_{\tau+\varepsilon}) \le I(\overline{\omega}_\tau)$. Носитель $\mathbf{S}_{\widetilde{\omega}} \subset \mathbf{S}^\tau$, из минимальности энергии экстремальной меры следует, что $\widetilde{\omega} = \overline{\omega}^\tau = \overline{\omega}^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}^\tau)$. Аналогичные рассуждения показывают, что всюду, за исключением не более чем счетного множества, $\overline{\omega}_{\tau-\varepsilon} \to \overline{\omega}_\tau$ при $\varepsilon \searrow 0$.

Мы показали, что заряд $\overline{\nu}^t$ непрерывен по t и всюду существуют правые производные равные нулю и всюду, за исключением не более чем счетного множества, существуют нулевые левые производные

$$\frac{\partial^+}{\partial t}\overline{\nu}^t = 0, \quad \frac{\partial^-}{\partial t}\overline{\nu}^t \overset{a.e.}{=} 0.$$

Рассмотрим произвольное борелевское множество $\mathbf{B} \subset \mathbf{\Gamma}$ и определим функцию $f(t) := \overline{\nu}^t(\mathbf{B})$. Функция f непрерывна, и производная справа от нее всюду равна нулю, а слева равна нулю всюду, за исключением не более чем счетного множества. Учитывая, что $\overline{\lambda}^t$ и $\overline{\mu}^t$ суть возрастающие меры, получим, что $f_1(t) := \overline{\lambda}^t(\mathbf{B})$ и $f_2(t) := \overline{\mu}^t(\mathbf{B})$ суть абсолютно непрерывные функции. Следовательно, $f = f_1 - f_2$ – абсолютно непрерывная функция с всюду, за исключением не более чем счетного множества, равной нулю производной. Следовательно, f – константа и заряд $\overline{\nu} = \overline{\nu}^t$ не зависит от t.

Допустим, что $\overline{\nu}$ есть ненулевой заряд с полной вариацией $A > 0$. Рассмотрим разложение Жордана заряда $\overline{\nu}$: пусть $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$ – такие подмножества $\mathbf{\Gamma}$, что $\overline{\nu}(\mathbf{S}_+) = -\overline{\nu}(\mathbf{S}_-) = \dfrac{A}{2}$. Тогда для любого t имеем

$$\overline{\lambda}^t(\mathbf{S}_-) = \overline{\mu}^t(\mathbf{S}_-) + \overline{\nu}(\mathbf{S}_-) = \overline{\mu}^t(\mathbf{S}_-) - \frac{A}{2} \ge 0,$$

что приводит к противоречию при $0 < t < \dfrac{A}{2}$. Следовательно, существует точка t_0, такая, что $\overline{\nu} \equiv 0$ при $0 < t \le t_0$.

Пусть теперь $\overline{\lambda}^t = \overline{\mu}^t$ при $t \le t_0$ и $\overline{\lambda}^t \ne \overline{\mu}^{xt}$ при некотором $t > t_0$. Тогда при этом t, как и раньше, $\overline{\nu} := \overline{\lambda}^t - \overline{\mu}^t$ – ненулевой заряд, который можно представить в виде разности двух мер :

$$\overline{\nu} := \left(\overline{\lambda}^t - \overline{\lambda}^{t_0}\right) - \left(\overline{\mu}^t - \overline{\mu}^{t_0}\right) = \left(\overline{\lambda}^\theta - \overline{\lambda}^{t_0}\right) - \int_{t_0}^t \overline{\omega}_\tau \, d\tau.$$

Как в предыдущем случае, рассмотрим разложение Жордана заряда $\overline{\nu}$. Пусть $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$ такие, что $\overline{\nu}(\mathbf{S}_+) = -\overline{\nu}(\mathbf{S}_-) = \dfrac{A}{2}$, тогда

$$\left(\overline{\lambda}^t - \overline{\lambda}^{t_0}\right)(\mathbf{S}_-) = \left(\overline{\mu}^t - \overline{\mu}^{t_0}\right)(\mathbf{S}_-) + \overline{\nu}\,(\mathbf{S}_-) = \left(\overline{\mu}^t - \overline{\mu}^{t_0}\right)(\mathbf{S}_-) - \frac{A}{2} \geq 0.$$

Аналогично предыдущему приходим к противоречию при $t - t_0 < \dfrac{A}{2}$. Следовательно, в качестве t_0 можно выбрать $t_0 + \dfrac{A}{2}$ и повторить последние рассуждения. Повторяя этот процесс, можно получить, что формула (3.10) верна для любого t. Доказан пункт 3 Теоремы.

Приступим к доказательству последнего пункта.

Из предыдущего доказательства следует, что $\frac{d}{dt}F_i^t \overset{a.e.}{=} \gamma_i^{\dot{x}(t)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_t)$, докажем, что для констант равновесия F_i^t верны интегральные формулы

$$F_i^t = \int_0^t \gamma_i^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)\, d\tau. \tag{4.14}$$

По аналогии с (3.8), обозначим $\mathbf{S}^0$ пересечение всех носителей экстремальных мер, и $\mathbf{S}_0$ – множество, где внешнее поле достигает минимума:

$$\mathbf{S}^0 = \bigcap_{t>0} \mathbf{S}_t, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{S}_0 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{\Gamma} : Q_i(z_i) = 0, \quad i = 1{,}2\}. \tag{4.16}$$

Очевидно, что эти множества не пусты.

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbf{S}^0$, для любого $t > 0$ верно, что $\mathbf{z} \in \mathbf{S}_t$. Напишем условия равновесия в этой точке:

$$\begin{aligned} F_1^t = W_1^t(z_1) = Q_1(z_1) &+ \int_0^t \left[aU^{\overline{\omega}_1^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)})} - U^{\overline{\omega}_2^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)})}\right](z_1)\; d\tau \\ &= Q_1(z_1) + \int_0^t \gamma_1^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)\; d\tau, \\ \\ F_1^t = W_1^t(z_1) = Q_2(z_2) &+ \int_0^t \left[bU^{\overline{\omega}_2^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)})} - U^{\overline{\omega}_1^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)})}\right](z_2)\; d\tau \\ &= Q_2(z_2) + \int_0^t \gamma_2^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)\; d\tau. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Во втором равенстве в обеих строках мы применили формулу (3.10) для экстремальной меры и теорему Фубини. Из (4.17) следует, что внешнее поле на множестве $\mathbf{S}^0$ равно некоторой константе $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$. Следовательно, формулы (4.14) верны с точностью до констант $c_1, \quad c_2$, из дальнейших рассуждений будет следовать, что эти константы нулевые.

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbf{S}_t$, напишем условия равновесия в этой точке для $i = 1{,}2$

$$\begin{aligned} F_i^t = \int_0^t \gamma_i^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)\ d\tau + c_i = W_i^t(z_i) = \\ = Q_i(z_i) - c_i + \int_0^t \left[W_{\mathbf{0}i}^{\omega_i^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)}(z_i) \pm \gamma_i^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau) \right]\ d\tau + c_i. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Т.е. для любого $t > 0$ и $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbf{S}_t$, $i = 1{,}2$

$$Q_i(z_i) - c_i = -\int_0^t \left[W_{\mathbf{0}i}^{\omega_i^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau)}(z_i) - \gamma_i^{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)}(\mathbf{S}_\tau) \right]. \tag{4.19}$$

Подынтегральное выражение в (4.19) больше либо равно 0, следовательно, $Q_i(z_i) - c_i \geq 0$. При $\mathbf{z} \in \mathbf{S}^0$ по формуле (4.19)

$$Q_i(z_i) - c_i = 0. \tag{4.20}$$

Учитывая нормировку внешнего поля, получаем $c_i = 0$ для $i = 1{,}2$. ■

5. Метод обратной задачи для многомерных обобщений

В работе [2] изучено многомерное обобщение цепочки Тода (2.4):

$$\begin{cases} \dot{a}_{\vec{n},k} = \sum_{j=1}^{d} (b_{\vec{n},j}^2 - b_{\vec{n}+e_k,j}^2), \quad k = 1, \ldots, d, \\ \dot{b}_{\vec{n},k} = \dfrac{b_{\vec{n},k}}{2}(a_{\vec{n}+e_k,k} - a_{\vec{n},k}), \quad k = 1, \ldots, d\,, \end{cases} \tag{5.1}$$

т.н. *многомерная решетка Тода.* Континуальный предельный переход типа (2.3), см. [3], [1], приводит к многомерным по пространственной переменной системам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \nabla |\vec{b}|^2, \\ \dfrac{\partial b_j}{\partial t} = \dfrac{b_j}{2}\ \dfrac{\partial a_j}{\partial x_j}\ , \quad j = 1, \ldots, d\,, \end{cases} \tag{5.2}$$

где $\vec{a}(\vec{x}, t)$, $\vec{b}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}_d$, $(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}_d^+ \times \mathbb{R}^+$.

В работе [1] системе (5.2) континуального предела многомерных решеток Тода поставлена в соответствие векторная экстремальная задача (3.3) теории логарифмического потенциала с внешним полем и предложен векторный аналог функционала Машкара - Саффа (см. также [15],[16]). Тем самым, получена формула для решения обратной задачи: нахождения носителя равновесной меры.

С другой стороны, в настоящей работе получена формула (3.11), восстанавливающая внешнее поле, что решает прямую задачу рассматриваемого метода.

Тем самым, мы получили формулы для решения прямой и обратной задачи. Осталось два момента.

1. Продиффиренцировать (по параметру) концы компонент носителей равновесной меры задачи (3.3) и получить многомерный (по пространственной переменной) аналог системы (2.1). Другими словами, найти систему уравнений, которую будет решать предлагаемый метод обратной задачи.

2. Найти связь между решениями искомой системы, т.е. многомерного (по пространственной переменной) аналога системы (2.1), и системы (5.2) континуального предела многомерных решеток Тода.

Список литературы

[1] *A. I. Aptekarev.* The Mhaskar-Saff variational principle and location of the shocks of certain hyperbolic equations, Contemp. Math., 661, 2016, 167-186.

[2] *A. I. Aptekarev, M. Derevyagin, Hiroshi Miki, W. Van Assche.* Multidimensional Toda Lattices: Continuous and Discrete Time, SIGMA, 12 (2016), 054.

[3] *А. И. Аптекарев*, Интегрируемые полудискретизации гиперболических уравнений – "схемная"дисперсия и многомерная перспектива, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2012, №20.

[4] *А. И. Аптекарев, Ю. Г. Рыков*, О вариационном представлении решений некоторой гиперболической системы уравнений с помощью логарифмического потенциала во внешнем поле, Докл. РАН, 409:1, (2006), 12–14.

[5] *A. I. Aptekarev, Yu. G. Rykov*, “On the variational representation of solutions to some quasilinear equations and systems of hyperbolic type on the basis of potential theory”, Russ. J. Math. Phys., 13:1 (2006), 4–12.

[6] *А. И. Аптекарев, В. Ван Ассше, А. Б. Куилаарс,* Континуальные пределы цепочек Тоды и дискретные ортогональные многочлены, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2000, №12.

[7] *A. I. Aptekarev, W. Van Assche*, Asymptotics of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice, J. Phys. A, 34:48 (2001), 10627–10637.

[8] *В. С. Буяров, Е. А. Рахманов.* О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси. Матем. сб. 190:5 (1999), 11-22.

[9] *В. С. Буяров*, О логарифмической асимптотике многочленов, ортогональных на R с несимметричным весом, Матем. заметки, 50:2 (1991), 28-36.

[10] *А. А. Гончар, Е. А. Рахманов.* О задаче равновесия для векторных потенциалов. УМН, 40: 4(244), (1985), 155-156.

[11] *P. Deift, K. T-R McLaughlin*, A Continuum Limit of the Toda Lattice, Memoirs Amer. Math. Soc. 624, Providence, RI, 1998.

[12] *P. D. Dragnev, E. B. Saff.* Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable. J.Anal. Math. 72(1997), 223-259.

[13] *M. A. Lapik*, Interval of Equilibrium for the Logarithmic potential of an Extremal Measure with a Constraint, and the Continuum Limit of the Toda Lattice. Russian Journal of Mathematical Physics, 13:1(2006), 119-121.

[14] *M. A. Lapik* A continuum limit of the Toda lattice and the equilibrium for the constrained energy problem in the presence of an external field. Preprint, Inst. Appl. Mathem. Russian Acad. Sci , 2004, №58.

[15] *М. А. Лапик.* О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия. Матем. сб., 197:8 (2006), 101-118.

[16] *М. А. Лапик.* О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле. Матем. сб., 206:2 (2015), 41-56.

[17] *H. N. Mhaskar, E. B. Saff.* Where does the sup norm of a weighted polynomial live? Constr. Approx., 1(1985), 71-91.

[18] *Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. Москва, "Наука". 1988.

[19] *E. B. Saff, V. Totik.* Logarithmic Potentials with External Fields. Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin, 1997.

Оглавление

Maria A. Lapik *(mashalapik@gmail.com)*
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation