



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Ахметшин Р.З.**

Влияние вариаций  
геопотенциала при  
многовитковых перелетах на  
геостационарную орбиту  
космического аппарата с  
малой тягой

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ахметшин Р.З. Влияние вариаций геопотенциала при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 111. 27 с. doi:[10.20948/prepr-2016-111](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-111)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-111>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Р.З. Ахметшин**

**Влияние вариаций геопотенциала  
при многовитковых перелетах  
на геостационарную орбиту  
космического аппарата с малой тягой**

**Москва — 2016**

*Ахметшин Р.З.*

**Влияние вариаций геопотенциала при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой**

На примере нескольких оптимальных многовитковых траекторий перелета на геостационарную орбиту космического аппарата (КА) с постоянно действующей (без пауз) малой тягой исследуется влияние вариаций геопотенциала в сравнении с перелетами в центральном ньютоновом поле.

**Ключевые слова:** космический аппарат, малая тяга, многовитковые перелеты, геостационарная орбита, возмущения, вариации геопотенциала

*Rauf Zulfarovich Akhmetshin*

**The influence of Earth gravity variations onto the multi-orbital transfers to the geostationary orbit of the spacecraft with low thrust**

Some trajectories of the multi-orbital transfers to the geostationary orbit are considered and two models of spacecraft motion are compared. The first one is the flight in the central Newtonian field, and the next one – with additional influence of the Earth gravity variations.

**Key words:** spacecraft, low thrust, multi-orbital transfers, geostationary orbit, perturbations, Earth gravity variations

## Оглавление

Начальные орбиты.....	3
Траектории перелета в отсутствие возмущений .....	4
Учет возмущений в уравнениях движения КА .....	5
Краевая задача .....	8
Влияние возмущений в зависимости от $t_0$ и $\Omega_0$ .....	9
Влияние возмущений в зависимости от $\theta_0$ и $\Phi$ .....	11
Дополнение .....	15
Литература .....	17
Рисунки.....	18

## Начальные орбиты

В работах [1,2] изучались многовитковые перелеты в сфере действия Земли для модели центрального ньютонова поля без учета каких-либо возмущений. В работах [3,4], на примере нескольких траекторий перелета на геостационарную орбиту (ГСО) продолжительностью от  $\approx 2.5$  месяцев до года и угловой дальностью от 65 до 281 витка, рассматривалось влияние таких возмущающих факторов, как гравитационное притяжение КА Луной и Солнцем. В данной работе на примере тех же траекторий перелета на ГСО исследуется влияние другого возмущающего фактора – вариаций гравитационного поля Земли.

Перелет на геостационарную орбиту с использованием малой тяги представляет собой второй этап комбинированного маневра, в котором задействованы и большая, и малая тяга. На его первом этапе с помощью большой тяги космический аппарат выводится на промежуточную орбиту, с которой затем происходит многовитковая скрутка на ГСО с помощью электроракетных двигателей малой тяги. Промежуточная орбита, которая является начальной для перелета с малой тягой, есть результат компромиссного выбора в пользу большего использования в комбинированном маневре большой тяги, либо малой тяги [5].

*Таблица О*

### Примеры начальных орбит, с которых осуществляется перелет на ГСО с помощью малой тяги

	$H_{\pi}$ [тыс. км]	$H_{\alpha}$ [тыс. км]	$R_{\pi}$ [тыс. км]	$R_{\alpha}$ [тыс. км]	$e$	$i$ [град]	$T$ [сут]	$M_{КА}$ [т]
1	23	55.6	29.371	61.971	0.3569	4	1.124	4.287
2	9.2	76.8	15.571	83.171	0.6846	13	1.264	5.548
3	2.793	78.8	9.164	85.171	0.8057	26	1.180	6.397
4	0.793	79.8	7.164	86.171	0.8465	41	1.161	7.074
5	0.793	68.94	7.164	75.311	0.8263	46.5	0.965	2.325

$H_{\pi}$ ,  $R_{\pi}$  – высота и радиус перигея,  $H_{\alpha}$ ,  $R_{\alpha}$  – высота и радиус апогея,  $e$  – эксцентриситет,  $i$  – наклонение,  $T$  – период,  $M_{КА}$  – масса КА.

Варианты такого компромисса приведены в табл. *O*, где даны характеристики начальных (для перелета с малой тягой) орбит. Наиболее выразительный параметр, по которому различаются эти орбиты – наклонение, возрастающее от  $4^0$  для 1-й орбиты до  $46.5^0$  для 5-й. Также показателен радиус перигея, уменьшающийся с  $\approx 29$  тыс. км для 1-й орбиты до  $\approx 7$  тыс. км для двух последних орбит. Отметим также, что для первых двух орбит радиусы перигея  $> 15$  тыс. км, то есть выше основного радиационного пояса. Наконец, последний вариант выделяется тем, что масса КА заметно меньше, чем в других случаях, а тяговооруженность существенно больше.

Отметим еще, что начальные орбиты имеют большой эксцентриситет. Это связано, в частности, с тем, что при комбинированном маневре необходимо повернуть плоскость орбиты на большой угол, что эффективней осуществлять на большом удалении от Земли, в окрестности апогея.

### **Траектории перелета в отсутствие возмущений**

Характеристики соответствующих оптимальных траекторий перелета с этих орбит приведены в таблице *R*, более подробно – в [3]. Эти траектории получены в результате решения двухточечной краевой задачи на минимум затрат рабочего вещества. Предполагается, что тяга работает постоянно (2 ЭРД СПД-140 с удельной тягой 1790 с и суммарной тягой 0.548 Н). В таком случае получаем задачу на минимум времени перелета, т.е. задачу быстрогодействия. На направление тяги не накладывается никаких ограничений, оно выбирается оптимальным на основе принципа максимума. Для определенности, как и в [3,4], в качестве начала траектории перелета принимается перигей начальной орбиты, а долгота восходящего узла  $\Omega_0$  и угловое расстояние перицентра от узла  $\omega_0$  приняты нулевыми. Используется модель центрального ньютонова поля Земли, которая удобна тем, что результат не зависит от даты старта. Привязка к датам необходима, только когда мы начинаем учитывать вращение Земли – при расчете вариаций геопотенциала, положения Солнца или Луны относительно Земли – при учете их гравитационного влияния, или при определении факта попадания КА в тень Земли. Эти траектории назовем «номинальными», в сравнении с ними будем оценивать влияние различных возмущений. Задача решается в равноденственных переменных в небесной системе координат. В расчетах  $t_0 = 0$  соответствует  $0^{\text{h}}00^{\text{m}} 01.01.2018$  г.

Напомним, что, как показано в [1], краевая задача может иметь много локальных решений – с разной угловой дальностью, причем тем больше, чем больше витков. Траектории, приведенные в табл. *R*, реализуют глобальный экстремум минимизируемого функционала – затрат рабочего вещества, в классе траекторий с целым числом витков (витки вычисляются в равноденственной переменной  $\varphi = \theta + \omega + \Omega$ ,  $\theta$  – истинная аномалия). Далее будут рассмотрены также траектории, у которых угловая дальность последнего витка  $\Phi$  меньше  $2\pi$ .

Таблица *R*

### Траектории перелета на ГСО в отсутствие возмущений

	1	2	3	4	5
$\Delta i$ [град]	$4^0$	$13^0$	$26^0$	$41^0$	$46.5^0$
N [витки]	65	157	232	281	103
T [сут]	69.1	180	269.7	343.9	120.3
$M_{РВ}$ [кг]	186.3	485.3	727.2	927.3	324.2

$\Delta i$  – изменение наклона, N – количество витков, T – продолжительность перелета,  $M_{РВ}$  – затраты рабочего вещества.

Первые четыре траектории по продолжительности перелета можно условно назвать так: 1) «короткая» – 2.3 месяца, 2) «средняя» – 6 месяцев, 3) «длинная» – 9 месяцев, и 4) «очень длинная» – почти год (11.5 месяцев). Последнюю (4 месяца) можно назвать траекторией перелета «легкого» КА.

### Учет возмущений в уравнениях движения КА

Обрисует кратко, без вывода громоздких формул, как учитывается влияние вариаций геопотенциала в уравнениях оптимального движения КА с малой тягой.

Равноденственные переменные  $\langle h, \varphi, y, z, v, w \rangle$  (в обозначениях [1]) определяются через оскулирующие переменные формулами:

$$h = \sqrt{\mu/p}, \quad y = e \cos(\omega + \Omega), \quad v = \cos \Omega \tan(i/2), \\ \varphi = \theta + \omega + \Omega, \quad z = e \sin(\omega + \Omega), \quad w = \sin \Omega \tan(i/2),$$

где  $\mu$  – гравитационная постоянная Земли,  $p$  – фокальный параметр,  $e$  – эксцентриситет,  $i$  – наклонение,  $\theta$  – истинная аномалия,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $\omega$  – угловое расстояние перицентра от узла.

В [1] на основе этих формул и известных уравнений движения КА в оскулирующих переменных (см. например [6]) были получены уравнения движения в равноденственных переменных:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}, \text{ или}$$

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -\gamma f, \quad \dot{h} = -\tilde{T}g, \quad \dot{\varphi} = (\mu/r^2 + \tilde{W}gI)/h, \\ \dot{y} &= (\tilde{S} \sin \varphi + \tilde{T} \cos \varphi (g+1) + \tilde{T}gy - \tilde{W}gIz)/h, \\ \dot{z} &= (-\tilde{S} \cos \varphi + \tilde{T} \sin \varphi (g+1) + \tilde{T}gz + \tilde{W}gIy)/h, \\ \dot{v} &= \tilde{W}gQ \cos \varphi/h, \quad \dot{w} = \tilde{W}gQ \sin \varphi/h. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{x} = \langle m, h, \varphi, y, z, v, w \rangle$  – фазовый вектор,  $m$  – масса КА,

$$g = 1/(1 + y \cos \varphi + z \sin \varphi),$$

$$I = v \sin \varphi - w \cos \varphi, \quad Q = (1 + v^2 + w^2) / 2,$$

$$r = \mu g/h^2 - \text{модуль радиус-вектора КА } \mathbf{r} = \langle r_x, r_y, r_z \rangle,$$

$f$  – величина тяги,  $\gamma$  – константа, а  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{W}$  – компоненты ускорения  $\mathbf{a}$  от всех действующих на КА сил (за исключением нормальной силы притяжения Земли) по радиус-вектору, трансверсали и бинормали.

Случай  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{MT}}$  – когда КА движется в центральном ньютоновом поле под действием только малой тяги, был рассмотрен в [1]. В данной работе дополнительно учитывается влияние на движение КА возмущающего ускорения  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$ , обусловленного вариациями геопотенциала:  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{MT}} + \mathbf{a}_{\text{ВГП}}$ . Компоненты  $\tilde{S}_{\text{ВГП}}$ ,  $\tilde{T}_{\text{ВГП}}$ ,  $\tilde{W}_{\text{ВГП}}$  вектора  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$  получим из

$$\tilde{S}_{\text{ВГП}} = \mathbf{a}_{\text{ВГП}} \mathbf{e}_r, \quad \tilde{T}_{\text{ВГП}} = \mathbf{a}_{\text{ВГП}} \mathbf{e}_n, \quad \tilde{W}_{\text{ВГП}} = \mathbf{a}_{\text{ВГП}} \mathbf{e}_t,$$

где  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_t$  – единичные векторы вдоль радиус-вектора, трансверсали и бинормали.

Поскольку  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{W}$  входят в правые части уравнений движения линейно, при учете  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$  получаем в  $\mathbf{f}$  дополнительные слагаемые. Вводя далее вектор сопряженных переменных  $\boldsymbol{\lambda} = \langle \lambda_m, \lambda_h, \lambda_\varphi, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_v, \lambda_w \rangle$  и выписывая гамильтониан задачи  $\tilde{H} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f}$ , можем представить его в виде трех слагаемых  $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_{\text{MT}} + \tilde{H}_{\text{ВГП}}$ , и тогда уравнения для сопряженных переменных примут вид

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\partial \tilde{H} / \partial \mathbf{x} = -\partial \tilde{H}_0 / \partial \mathbf{x} - \partial \tilde{H}_{\text{MT}} / \partial \mathbf{x} - \partial \tilde{H}_{\text{ВГП}} / \partial \mathbf{x},$$

где  $\tilde{H}_0$  соответствует  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\tilde{H}_{\text{MT}}$  и  $\tilde{H}_{\text{ВГП}}$  добавляются при  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{MT}} + \mathbf{a}_{\text{ВГП}}$ .

Уравнения оптимального движения при  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{MT}}$ , без  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$ , были получены в [1]. Подробно расписывая производные  $\partial \tilde{H}_{\text{ВГП}} / \partial \mathbf{x}$ , получим уравнения оптимального движения КА с учетом возмущений от вариаций геопотенциала.

### Вычисление ускорения $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$

Декартовы компоненты ускорения  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$  вычисляются как производные  $\partial \tilde{U} / \partial \tilde{x}$ ,  $\partial \tilde{U} / \partial \tilde{y}$ ,  $\partial \tilde{U} / \partial \tilde{z}$  от вариаций геопотенциала  $\tilde{U}$  в земной системе координат  $\langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rangle$  [7]. Земная система координат жестко связана с телом Земли и вращается вместе с ней. Преобразование вектора  $\mathbf{r}$  из небесной системы координат в земную выполняется с помощью матрицы перехода  $\tilde{M}$ :

$$\tilde{M} = R_2(-x_p) R_1(-y_p) \tilde{R} \tilde{N} \tilde{P},$$

где  $\tilde{P}$  – матрица прецессии,  $\tilde{N}$  – матрица нутации,  $\tilde{R}$  – матрица вращения Земли,  $R_1(-y_p)$ ,  $R_2(-x_p)$  – матрицы поворота против часовой стрелки вокруг осей соответственно абсцисс и ординат на эмпирические значения координат полюса Земли  $y_p$  и  $x_p$ . Вычисление всех матриц производится по формулам [8].

Вычисление вариаций геопотенциала  $\tilde{U}$  и его производных производится по технологии, описанной в [7]. Каждый член  $u_{nk}$  ряда  $\tilde{U} = \sum_{n=2}^{N_{\text{max}}} \sum_{k=0}^n u_{nk}$  представляется в виде произведения трех сомножителей

$$u_{nk} = R_n(1/r) Z_{nk}(\tilde{z}/r) Q_{nk}(\tilde{x}/r, \tilde{y}/r),$$

причем они вычисляются по рекуррентным формулам как функции от  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ . Одновременно вычисляются и производные этих сомножителей, что позволяет получить производные по  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  от  $u_{nk}$  и в целом от  $\tilde{U}$ . Но в нашем случае, в отличие от [7], для вычисления правых частей дифференциальных уравнений для сопряженных переменных необходимо также определять и вторые производные от  $\tilde{U}$ . А если предполагается интегрировать уравнения в вариациях – для вычисления вектора ньютона – то и третьи производные.

После того, как определены ускорения  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$  и их производные в земной системе координат, с помощью транспонированной матрицы  $\tilde{M}^T$  вычисляем декартовы компоненты  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$  и их производные в небесной системе координат. И уже затем определяем компоненты  $\tilde{S}_{\text{ВГП}}$ ,  $\tilde{T}_{\text{ВГП}}$ ,  $\tilde{W}_{\text{ВГП}}$  вектора  $\mathbf{a}_{\text{ВГП}}$  и необходимые производные в равноденственных переменных.

## Краевая задача

От каких параметров зависит краевая задача? Воздействие возмущающего ускорения на движение КА в начальный момент времени зависит от положения вектора  $\mathbf{a}_{\text{вГП}}$  относительно начальной орбиты. Пренебрегая второстепенными и долгопериодическими факторами, будем считать, в первом приближении, что направление оси вращения Земли в небесной системе координат неизменно. В таком случае краевая задача зависит, во-первых, от положения начальной орбиты в пространстве, т.е. от параметров  $\omega_0$  и  $\Omega_0$ . Параметр  $\omega_0$  задан нулевым (из условий комбинированной задачи), а параметр  $\Omega_0$  может меняться во всем диапазоне углов от  $0^0$  до  $360^0$  – в зависимости от времени старта ракетоносителя в течение суток. Во-вторых, от угла поворота Земли вокруг своей оси, или от начального момента времени  $t_0$ . В-третьих – от положения КА в момент старта его с начальной орбиты, т.е. от угла  $\theta_0$ , который изменяется в диапазоне от  $0^0$  до  $360^0$  в течение суток с небольшим (периоды орбит 0.965–1.264).

Еще один параметр, который влияет на решение задачи – полная угловая дальность перелета, которая зависит от количества  $N$  целых (полных) витков и угловой дальности  $\Phi < 2\pi$  последнего витка. Получить «оптимальные» значения  $N$  и  $\Phi$  в процессе решения краевой задачи проблематично, так как задача имеет много локальных решений, и «результат» будет существенно зависеть от начального приближения. Причем даже при заданном  $N$  может быть несколько экстремумов по  $\Phi$  [1]. С целью упростить решение задачи, в [3,4] рассматривались траектории с  $\Phi = 0$ . Наилучшее значение  $N$  определялось прямым перебором. Дополнительно, для уменьшения варьируемых параметров, в [3,4] было принято, что начало траектории перелета с малой тягой – в перигее орбиты, т.е. полагалось  $\theta_0 = 0^0$ . Здесь влияние параметров  $\theta_0$  и  $\Phi$  будет подробно исследовано.

На правом конце орбита полностью задана. Поскольку тяга работает постоянно, то задача на минимум расхода массы есть задача быстрогодействия, вследствие чего можно обеспечить перелет на орбиту ГСО, но не в конкретную точку на этой орбите, если все витки целые, или если  $\Phi$  выбирается из условия экстремума функционала.

Итак, краевая задача зависит от пяти параметров: времени старта  $t_0$  (будем рассматривать диапазон в одни сутки), долготы восходящего узла  $\Omega_0$ , истинной

аномалии  $\theta_0$ , количества витков  $N$  и угловой дальности последнего витка  $\Phi$ . Все угловые параметры  $\Omega_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\Phi$  могут изменяться в диапазоне от  $0^0$  до  $360^0$ . При этом имеем две модели движения: без возмущений и с возмущениями от вариаций геопотенциала. По сути, имеем две разные краевые задачи. Первая краевая задача играет двойную роль: 1) ее решения в большинстве случаев используются в качестве начального приближения для решения второй краевой задачи, 2) решения второй – сравниваются с решениями первой.

### **Влияние возмущений в зависимости от $t_0$ и $\Omega_0$**

Вначале рассмотрим влияние вариаций геопотенциала в зависимости от параметров  $t_0$  и  $\Omega_0$  (каждого в отдельности), при нулевых  $\theta_0$  и  $\Phi$ , т.е. в классе траекторий с целым количеством витков и началом в перигее исходной орбиты. Отметим, что в отсутствие возмущений, т.е. для центрального ньютонова поля, решение краевой задачи от параметра  $t_0$  вообще не зависит. От параметра  $\Omega_0$  оно зависит, но функционал  $M_{PB}$ , из-за очевидной симметрии, для всех значений  $\Omega_0$  одинаков. Значения  $M_{PB}$  для пяти траекторий, а также продолжительность перелета  $T$  и оптимальное количество витков  $N$  даны в табл. *R*. В сравнении с ними ниже приведены различия  $\Delta M_{PB}$ ,  $\Delta T$  и  $\Delta N$  решений для двух моделей. Результаты расчетов представлены на стр.18-27: на рис. 1<sup>T</sup>, ... 5<sup>T</sup> параметр  $t_0$  изменяется от  $0^h$  до  $24^h$ , с шагом в один час, а  $\Omega_0 = 0^0$ ; на рис. 1 <sup>$\Omega$</sup> ,... 5 <sup>$\Omega$</sup>  параметр  $\Omega_0$  изменяется от  $0^0$  до  $360^0$ , с шагом в  $15^0$ , а  $t_0 = 0^h$ .

Если начальные значения сопряженных переменных, дающих решение первой краевой задачи (без возмущений), использовать для интегрирования оптимальных уравнений движения второй модели (с возмущениями), то полученная траектория не будет удовлетворять краевым условиям. Невязки по радиусу перигея  $\Delta R_p$ , апогея  $\Delta R_a$  и наклонению  $\Delta i$  конечной оскулирующей орбиты приведены на графиках (а),(б).

Решая вторую краевую задачу, мы обнулим невязки, но полученная траектория будет отличаться от решения первой краевой. На правом конце две оптимальные траектории будут различаться только продолжительностью перелета, массой КА (или затратами рабочего вещества) и, возможно, количеством витков. Различия в затратах рабочего вещества  $\Delta M_{PB}$  и продолжительности перелета  $\Delta T$  для двух моделей приведены на графиках (в),(г).

Основные данные по этим графикам: максимальные значения невязок, различий в массе рабочего вещества  $\Delta M_{РВ}$  (в т.ч. в % от  $M_{РВ}$ ) и величины  $\delta \Delta M_{РВ}$  диапазонов изменения  $\Delta M_{РВ}$  при варьировании параметров  $t_0$  и  $\Omega_0$  – собраны в итоговой таблице *S1*. Оптимальное количество витков при варьировании  $t_0$  и  $\Omega_0$  не меняется, и отличается на 1 только для двух последних траекторий.

Таблица *S1*

**Различие в траекториях для двух моделей геопотенциала**  
при варьировании  $t_0$  в диапазоне  $0^h \div 24^h$  и  $\Omega_0$  в диапазоне  $0^0 \div 360^0$

$\theta_0 = 0^0$ $\Phi = 0^0$	Максимальные различия в невязках			Максимальные различия в решениях краевой задачи				
	Траектория (параметр)	$ \Delta R_\pi $ [тыс.км]	$ \Delta R_\alpha $ [тыс.км]	$ \Delta i $ [град]	$\Delta M_{РВ}$ [кг]	% от $M_{РВ}$	$\delta \Delta M_{РВ}$ [кг]	$\Delta N$
Короткая	$(t_0)$	0.033	0.038	0.005	-0.024	0.013%	0.006	0
	$(\Omega_0)$	0.039	0.033	0.007	-0.023	0.012%	0.019	0
Средняя	$(t_0)$	1.08	1.13	0.176	-0.081	0.017%	0.011	0
	$(\Omega_0)$	1.39	0.89	0.185	-0.070	0.015%	0.055	0
Длинная	$(t_0)$	4.73	11.57	1.47	0.784	0.108%	0.015	0
	$(\Omega_0)$	5.13	10.56	1.48	0.908	0.125%	0.137	0
Очень длинная	$(t_0)$	34.30	78.99	127.2	4.811	0.519%	0.050	1
	$(\Omega_0)$	32.14	91.21	127.8	5.002	0.539%	0.219	1
Легкий КА	$(t_0)$	30.36	64.06	100.0	0.605	0.187%	0.033	1
	$(\Omega_0)$	30.76	68.81	109.9	0.629	0.194%	0.039	1

Как видно из таблицы, влияние возмущений геопотенциала сильно зависит от траектории, и для разных траекторий может отличаться на порядки. Наибольших значений  $|\Delta M_{РВ}|$  достигает на самой длинной траектории – 5 кг, а на короткой не превышает 0.024 кг (разница  $\approx$  в 200 раз). В процентах от затрат массы рабочего вещества  $M_{РВ}$  это соответственно 0.54% и 0.013% (разница  $\approx$  в

40 раз). На короткой и средней траекториях, у которых радиусы перигея начальной орбиты  $> 15$  тыс. км, т.е. выше основного радиационного пояса,  $|\Delta M_{PB}|$  не превышает 0.02%. Величины  $\delta \Delta M_{PB}$  диапазонов изменения  $\Delta M_{PB}$  при варьировании  $\Omega_0$  не превышают 0.22 кг, или 0.024%. При варьировании  $t_0$  они еще меньше, что наглядно видно при сравнении графиков (в) на рис. 1<sup>T</sup> и 1<sup>Ω</sup> (так же и для остальных траекторий) – не более 0.05 кг, в процентах  $< 0.011\%$ .

Хотя влияние вариаций геопотенциала по функционалу  $\Delta M_{PB}$  относительно невелико ( $< 0.6\%$ ), их воздействие на траекторию, без коррекции управления, может быть очень большим. В большинстве вариантов на графиках (а),(б) (рис. 4<sup>T</sup>, 4<sup>Ω</sup>, 5<sup>T</sup>, 5<sup>Ω</sup>) невязки столь велики, что соответствующие траектории не подходят в качестве начального приближения для решения второй краевой задачи. В таких случаях приходится решать серию задач, «включая возмущения» постепенно. А именно, в выражении  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{MT} + \mathbf{a}_{ВП}$  ввести коэффициент  $k$ :  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{MT} + k\mathbf{a}_{ВП}$ . Тогда при  $k = 0$  будем иметь задачу без возмущений, для которого у нас есть решение. Постепенно увеличивая  $k$  от 0 до 1 с шагом, равным, например, 0.1, и каждый раз решая краевую задачу, и используя полученное решение в качестве начального приближения для следующей краевой – в результате придем к искомому решению с  $k = 1$ . Главное, чтобы невязки для очередной краевой задачи были небольшими.

Но, как видно из левой части таблицы *H4* (стр. 12), даже при  $k = 0.1$  невязки могут быть слишком велики: для  $\Omega_0 = 195^0$   $\Delta R_\alpha = 27.36$  тыс. км. И только при  $k = 0.01$  получим «небольшую» невязку  $\Delta R_\alpha = 1.9$  тыс. км, при  $k = 0.02$  получим  $\Delta R_\alpha = 3.9$  тыс. км. Но в этом случае придется решать серию из полусотни или сотни краевых задач. В таком случае более практичным оказывается решать краевую задачу «в обратном времени»: интегрировать траекторию справа налево, и обнулять невязки на левом конце. Так как для той же самой траектории сравнимые по величине невязки мы получим при  $k = 0.5$  и  $k = 1$ : 2.3 и 5 тыс. км соответственно (правая часть таблицы *H4*).

## **Влияние возмущений в зависимости от $\theta_0$ и $\Phi$**

В отличие от параметров  $t_0$  и  $\Omega_0$ , параметры  $\theta_0$  (задает положение КА на начальной орбите в момент старта) и  $\Phi$  (угловая дальность последнего витка) влияют на решение краевой задачи как при наличии возмущений  $\mathbf{a}_{ВОЗМ} = \mathbf{a}_{ВП}$ , так и в их отсутствие ( $M_{PB}(\theta_0, \Phi, \mathbf{a}_{ВП})$  и  $M_{PB}(\theta_0, \Phi, \mathbf{0})$  соответственно).

## Невязки на правом и левом концах «очень длинной» траектории

$t_0 = 0$ $\theta_0 = 0^0$	Невязки на правом конце $\mathbf{c} \mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{MT}} + 0.1 \mathbf{a}_{\text{ВП}}$			Невязки на левом конце $\mathbf{c} \mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{MT}} + \mathbf{a}_{\text{ВП}}$		
$\Omega_0$ [град]	$\Delta R_\pi$ [тыс.км]	$\Delta R_\alpha$ [тыс.км]	$\Delta i$ [град]	$\Delta R_\pi$ [тыс.км]	$\Delta R_\alpha$ [тыс.км]	$\Delta i$ [град]
0	-0.11	0.47	0.373	0.04	3.31	1.939
15	-0.51	2.58	0.368	0.06	4.04	2.584
30	-7.88	1.54	0.419	0.06	4.02	2.581
45	-7.88	1.53	0.419	0.03	3.10	1.806
60	-0.87	4.19	0.372	-0.02	1.37	0.353
75	-1.53	7.20	0.398	-0.06	-0.51	-1.311
90	-0.97	4.81	0.371	-0.09	-2.32	-2.852
105	-1.72	0.39	0.382	-0.09	-3.01	<b>-3.530</b>
120	-3.36	0.69	0.390	-0.09	-2.79	-3.335
135	-4.01	0.81	0.394	-0.07	-1.18	-2.006
150	-5.76	1.15	0.404	-0.03	0.93	-0.144
165	<b>-8.33</b>	1.61	0.423	0.03	3.27	1.838
180	-0.44	2.32	0.367	0.08	4.75	3.140
195	-6.85	<b>27.36</b>	<b>1.619</b>	<b>0.10</b>	<b>4.99</b>	3.355
210	-5.94	23.84	1.314	0.06	4.02	2.544
225	-2.47	11.10	0.501	-0.00	2.21	1.046
240	-0.16	0.77	0.373	-0.05	0.40	-0.523
255	-6.08	1.21	0.407	-0.07	-1.18	-1.880
270	-7.64	1.50	0.417	-0.09	-2.15	-2.690
285	-5.42	1.10	0.403	-0.08	-2.09	-2.715
300	-3.97	0.82	0.394	-0.07	-1.59	-2.279
315	-6.10	1.21	0.407	-0.06	-0.66	-1.440
330	-7.39	1.42	0.417	-0.03	0.76	-0.263
345	-4.05	0.82	0.394	-0.00	2.08	0.898

Поэтому, чтобы сравнивать решения двух моделей, прежде необходимо получить решения для модели центрального ньютонова поля. Соответствующим

щие результаты расчетов для пяти траекторий представлены на рис. 1<sup>N</sup>,...5<sup>N</sup>. На графиках (а), (б) показаны решения с  $\Phi = 0^0$ , т.е. когда все витки целые:

$$\Delta^0 M_{PB} = M_{PB}(\theta_0, 0^0, \mathbf{0}) - M_{PB}(0^0, 0^0, \mathbf{0}),$$

$$\Delta^0 N = N(\theta_0, 0^0, \mathbf{0}) - N(0^0, 0^0, \mathbf{0}).$$

Здесь введено обозначение  $\Delta^0$  (вместо  $\Delta$ ), чтобы оттенить тот факт, что сравнение проводится в рамках одной модели, без возмущений (с траекторией с началом в перигее исходной орбиты  $\theta_0 = 0^0$ ).

На графиках (в), (г), (д) показаны решения с  $\Phi = \Phi^*$ , где  $\Phi^*$  – оптимальное значение:

$$\Delta^0 M_{PB} = M_{PB}(\theta_0, \Phi^*, \mathbf{0}) - M_{PB}(0^0, 0^0, \mathbf{0}),$$

$$\Delta^0 N = N(\theta_0, \Phi^*, \mathbf{0}) - N(0^0, 0^0, \mathbf{0}).$$

Напомним еще раз, что здесь  $N$  – количество целых витков, оно всегда подбирается оптимальным. Оптимальное  $\Phi^*$  определялось, как и  $N$ , прямым перебором, с точностью до целых градусов, т.е. решалась серия краевых задач. Ниже на рис. 0 представлен график зависимости  $\Phi^*$  от параметра  $\theta_0$  для «очень длинной» траектории – это почти линейная функция  $\Phi^* = 74^0 - \theta_0 + \Delta\Phi$ , где  $\Delta\Phi$  отличается от нуля только для двух значений  $\theta_0$ :  $190^0$  и  $200^0$  (см. рис. 4<sup>N</sup> (д)). Для других траекторий (за исключением «короткой») зависимость  $\Phi^*$  от  $\theta_0$  также близка к линейной: диапазон изменения  $\Delta\Phi$  для «средней» траектории  $[-2^0, 2^0]$ , для «длинной»  $[-1^0, 1^0]$ , для «легкого» КА  $[-2^0, 1^0]$  (рис. 2<sup>N</sup>, 3<sup>N</sup>, 5<sup>N</sup>).

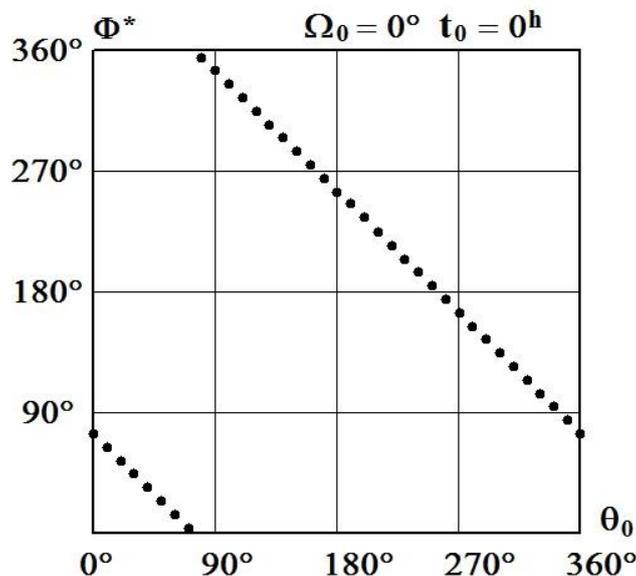


Рис. 0. Оптимальные  $\Phi^*$  для «очень длинной» траектории.

Рассмотрим, что это означает, в более привычных для нас оскулирующих переменных. Поскольку  $\varphi = \theta + \omega + \Omega$ , то в начальный момент времени  $\varphi_0 = \theta_0 + \omega_0 + \Omega_0 = \theta_0$ , т.к.  $\omega_0 = 0^0$  и  $\Omega_0 = 0^0$ . В конечный момент времени  $\varphi_K = \theta_K + \omega_K + \Omega_K$ . В то же время  $\varphi_K = \varphi_0 + \Phi^* = \theta_0 + \Phi^*$ . В результате получаем  $\theta_K = \varphi_K - \omega_K - \Omega_K = \theta_0 + \Phi^* - \omega_K - \Omega_K$ . Или  $\theta_K = 74^0 + \Delta\Phi - (\omega_K + \Omega_K)$  – для «очень длинной» траектории. В конечный момент времени, на круговой орбите,  $\omega_K$  и  $\Omega_K$  не определены, но за 1-2 витка до конца сумма  $(\omega + \Omega)$  обычно отличается от нуля лишь на несколько градусов. Поэтому близость  $\Phi^*(\theta_0)$  к линейной функции означает, что положение КА на правом конце, т.е. на ГСО, изменяется в узком диапазоне, отклоняясь от некоторого среднего лишь на несколько градусов. Главная причина – большой эксцентриситет начальных орбит: от 0.685 до 0.847. Вследствие чего область финиша на ГСО зависит в основном от положения начальной орбиты в пространстве, и слабо зависит от точки старта на начальной орбите. Для короткой траектории эксцентриситет начальной орбиты существенно меньше: 0.357, а диапазон изменения  $\Delta\Phi$   $[-9^0, 34^0]$ .

На рис. 1<sup>0</sup>, ..., 5<sup>0</sup> представлены результаты расчетов для модели с вариациями геопотенциала в сравнении с моделью центрального ньютонова поля. На графиках (а), (б) показаны различия

$$\begin{aligned}\Delta M_{PB} &= M_{PB}(\theta_0, 0^0, \mathbf{a}_{ВГП}) - M_{PB}(\theta_0, 0^0, \mathbf{0}), \\ \Delta N &= N(\theta_0, 0^0, \mathbf{a}_{ВГП}) - N(\theta_0, 0^0, \mathbf{0})\end{aligned}$$

для траекторий с  $\Phi = 0^0$ , т.е. когда все витки целые, а  $t_0$  и  $\Omega_0$  равны нулю.

На графиках (в), (г) показаны различия

$$\begin{aligned}\Delta^* M_{PB} &= M_{PB}(\theta_0, \Phi^*, \mathbf{a}_{ВГП}) - M_{PB}(\theta_0, \Phi^*, \mathbf{0}), \\ \Delta^* N &= N(\theta_0, \Phi^*, \mathbf{a}_{ВГП}) - N(\theta_0, \Phi^*, \mathbf{0})\end{aligned}$$

для траекторий с  $\Phi = \Phi^*$ , где  $\Phi^*$  те же, что и на рис. 1<sup>N</sup>, ..., 5<sup>N</sup>.

Наконец, на графике (д) представлено дополнительное уменьшение массы  $\Delta\Delta M_{PB}$ , получаемое при дальностях  $\Phi = \Phi^* + \Delta\Delta\Phi$ , оптимальных именно для модели с вариациями геопотенциала. В этом случае различие в функционале между моделями равно  $\Delta M_{PB} = \Delta^* M_{PB} + \Delta\Delta M_{PB}$ . Разница  $\Delta\Delta\Phi$  – график (е) – может достигать  $9^0$ , но на изменении  $M_{PB}$  это сказывается слабо:  $|\Delta\Delta M_{PB}| < 0.005$  кг. Оптимальное количество витков при этом также может измениться на величину  $\Delta\Delta N$  – график (ж) на рис. 3<sup>0</sup> (но в остальных случаях  $\Delta\Delta N \equiv 0$ ).

Замечание. «Рваный» характер графика  $\Delta M_{PB}$ , особенно на рис. 1<sup>0</sup>, 3<sup>0</sup>, 5<sup>0</sup>, обусловлен тем, что сравниваются два функционала, каждый из которых может измениться «скачком» из-за изменения «своих»  $\Phi$  и/или  $N$ , и эти «скачки» могут иногда нивелировать, а иногда дополнять воздействие друг друга на разность функционалов, приводя к ее резкому изменению.

Обобщенные данные по этим расчетам собраны в таблице S2.

Таблица S2

**Различие в функционалах для двух моделей геопотенциала  
при варьировании  $\theta_0$  в диапазоне  $0^0 \div 360^0$**

Траектория	$\mathbf{a_{ВОЗМ} = 0}$		$\mathbf{a_{ВОЗМ} = a_{ВП}}$		$\mathbf{a_{ВОЗМ} = a_{ВП}}$ $\theta_0, \Phi$ – оптимальные		
	$\Delta^0 M_{PB}$ [кг] $\Phi = 0^0$	$\Delta^0 M_{PB}$ [кг] $\Phi$ опт.	$\Delta M_{PB}$ [кг] $\Phi = 0^0$	$\Delta M_{PB}$ [кг] $\Phi$ опт.	$\Delta^{opt} M_{PB}$ [кг]	% от $M_{PB}$	$\theta_0^{opt}$ $\Phi^{opt}$
Короткая	-0.095 ÷	-0.294 ÷	-0.023 ÷	-0.028 ÷	-0.263	0.14%	149 <sup>0</sup>
	0.206	0.062	-0.012	0.009			278 <sup>0</sup>
Средняя	-0.292 ÷	-0.477 ÷	-0.070 ÷	-0.105 ÷	-0.400	0.08%	150 <sup>0</sup>
	0.281	0.010	-0.016	0.007			285 <sup>0</sup>
Длинная	-0.259 ÷	-0.457 ÷	0.664 ÷	0.709 ÷	-0.521	0.07%	156 <sup>0</sup>
	0.265	0.013	0.777	0.763			282 <sup>0</sup>
Очень длинная	-0.257 ÷	-0.422 ÷	3.968 ÷	3.996 ÷	-1.182	0.13%	158 <sup>0</sup>
	0.258	-0.077	4.783	4.767			281 <sup>0</sup>
Легкий КА	-0.233 ÷	-0.336 ÷	0.162 ÷	0.229 ÷	-0.654	0.20%	160 <sup>0</sup>
	0.215	-0.136	0.590	0.606			274 <sup>0</sup>

В ней приведены диапазоны изменения  $\Delta^0 M_{PB}$  и  $\Delta M_{PB}$ . А в правой части даны наилучшие значения параметров  $\theta_0^{opt}$ ,  $\Phi^{opt}$ , и снижение массы  $\Delta^{opt} M_{PB} = M_{PB}(\theta_0^{opt}, \Phi^{opt}, \mathbf{a_{ВП}}) - M_{PB}(0^0, 0^0, \mathbf{a_{ВП}})$ , которое может быть при этом получено.

### Дополнение

В работах [3,4] анализ влияния гравитационного возмущения Луны и Солнца при многовитковых перелетах на ГСО проводился только для траекторий с целыми (полными) витками ( $\Phi = 0^0$ ) и началом в перигее

исходной орбиты ( $\theta_0 = 0^0$ ). Чтобы понять, каково в этих случаях влияние параметров  $\Phi$  и  $\theta_0$ , в таблице S3 приведены отдельные примеры. Для самой длинной траектории рассмотрено влияние Солнца и Луны, для легкого КА – влияние Солнца. Рассматривались траектории с разными датами старта  $t_0$  и разными значениями  $\Omega_0$  долготы восходящего узла начальной орбиты. Они выбирались так, чтобы среди примеров были траектории и со значениями  $\Delta M_{PB}$  (характеризующими влияние возмущений), близкими к минимумам и максимумам, и с промежуточными значениями.

Таблица S3

**Различие в функционалах при перелетах на ГСО  
в центральном ньютоновом поле без учета возмущений  
и с учетом возмущений от Солнца ( $\mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}} = \mathbf{a}_C$ ) или Луны ( $\mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}} = \mathbf{a}_L$ )  
при варьировании  $\theta_0$  в диапазоне  $0^0 \div 360^0$   
и нулевой либо оптимальной угловой дальности последнего витка  $\Phi$**

$t_0$ [сут]	$\Omega_0$ [град]	$\Delta M_{PB}$ [кг]	$\delta \Delta M_{PB}$ [кг]	$\Delta M_{PB}$ [кг]	$\delta \Delta M_{PB}$ [кг]
		$\Phi = 0^0$		$\Phi \text{ опт.}$	
«очень длинная» траектория, $\mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}} = \mathbf{a}_C$					
0	$40^0$	6.590 ÷ 6.620	0.030	6.602 ÷ 6.628	0.026
0	$130^0$	0.142 ÷ 0.182	0.040	0.129 ÷ 0.172	0.043
0	$230^0$	-0.064 ÷ -0.035	0.029	-0.056 ÷ -0.022	0.034
0	$290^0$	-9.030 ÷ -9.009	0.021	-9.033 ÷ -9.018	0.015
«очень длинная» траектория, $\mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}} = \mathbf{a}_L$					
0	$300^0$	-12.484 ÷ -12.402	0.082	-12.519 ÷ -12.424	0.095
8	$180^0$	0.472 ÷ 0.530	0.058	0.515 ÷ 0.560	0.045
8	$230^0$	12.827 ÷ 12.941	0.114	12.868 ÷ 12.939	0.071
«легкий» КА, $\mathbf{a}_{\text{ВОЗМ}} = \mathbf{a}_C$					
0	$190^0$	1.826 ÷ 1.844	0.018	1.832 ÷ 1.851	0.019
46	$190^0$	-0.091 ÷ -0.081	0.010	-0.091 ÷ -0.082	0.009
91	$190^0$	-1.882 ÷ -1.865	0.017	-1.881 ÷ -1.868	0.013

В таблице приведены диапазоны изменения  $\Delta M_{PB}$  при варьировании  $\theta_0$  от  $0^0$  до  $360^0$  для  $\Phi$  нулевых или оптимальных, а также величины диапазонов

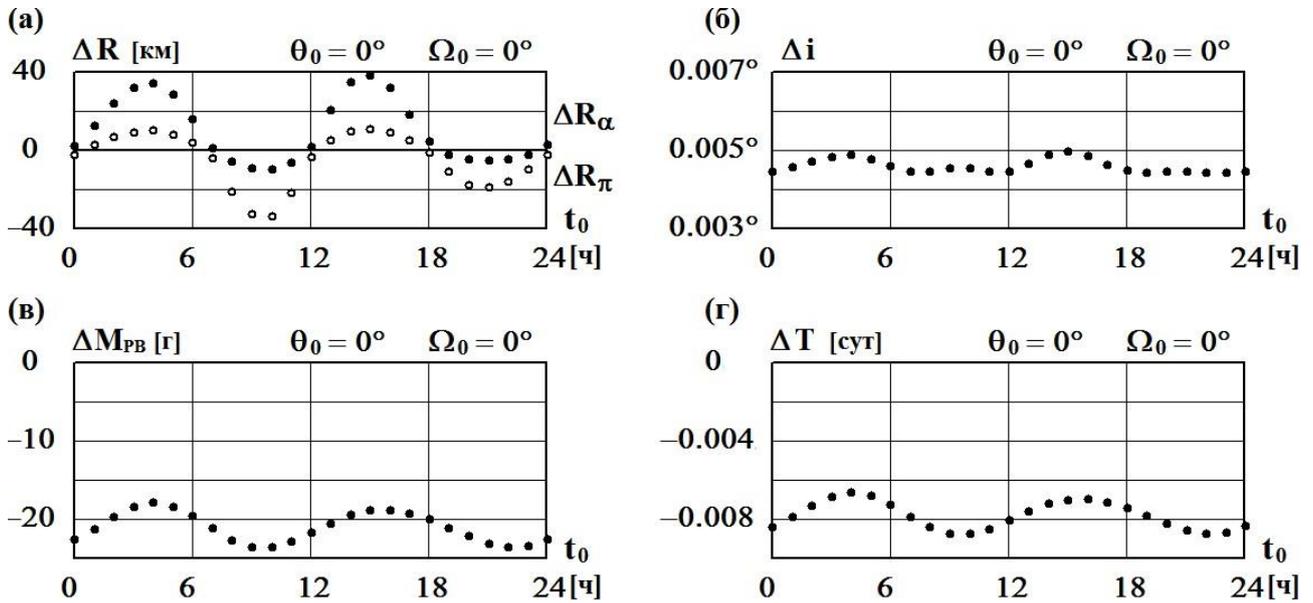
$\delta\Delta M_{PB}$ . Только в одном примере величина  $\delta\Delta M_{PB}$  превышает 0.1 кг (0.114 кг), во всех остальных случаях она меньше 0.1 кг. В процентах от максимальных значений  $\Delta M_{PB}$  ( $\approx 13$  кг на самой длинной траектории для Луны и  $\approx 9$  кг для Солнца;  $\approx 1.9$  кг для легкого КА и Солнца) это  $\approx 1\%$  или меньше.

Автор благодарит Петухова В.Г. за полезные консультации и предоставленные данные для расчетов.

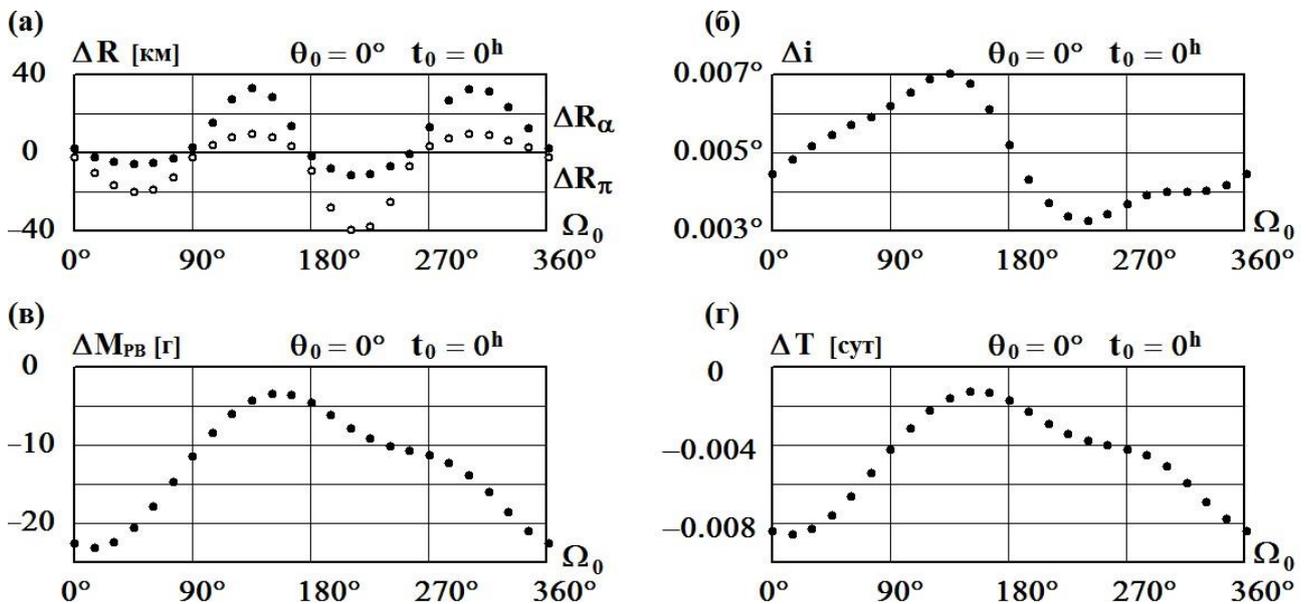
## Литература

1. Ахметшин Р.З. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар // Космические исследования. 2004, т.42, №3, с.248-259; Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2002. — № 37. — 32 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-37>
2. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования, 2004, т. 42, № 3, с.260-279.
3. Ахметшин Р.З. Возмущения от Луны при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2015. — № 107. — 32 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-107>
4. Ахметшин Р.З. Возмущения от Солнца при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2016. — № 77. — 32 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-77>
5. Petukhov V.G., Konstantinov M.S. Easy Engineering Technique of Optimal Electric Propulsion Trajectory Estimation. IAC-06-C4.4.06, 2006.h
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1975.
7. Прогноз орбитального движения космического аппарата. Численная модель. Научно-технический отчет. — URL: [http://www.vadimchazov.narod.ru/text\\_pdf/comalg.pdf](http://www.vadimchazov.narod.ru/text_pdf/comalg.pdf)
8. The International Astronomical union, Standards Of Fundamental Astronomy (SOFA). — URL: <http://www.iausofa.org>

**Влияние вариаций геопотенциала на «короткой» траектории**  
 ( $i = 4^{\circ}$ ,  $R_{\pi} = 29.371$  тыс. км,  $N = 65$ ,  $T = 69.1$  сут,  $M_{PB} = 186.3$  кг)



*Рис. 1<sup>T</sup>*. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $t_0$  (влияет на поворот гравитационного поля Земли)



*Рис. 1<sup>Ω</sup>*. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $\Omega_0$  (влияет на положение траектории)

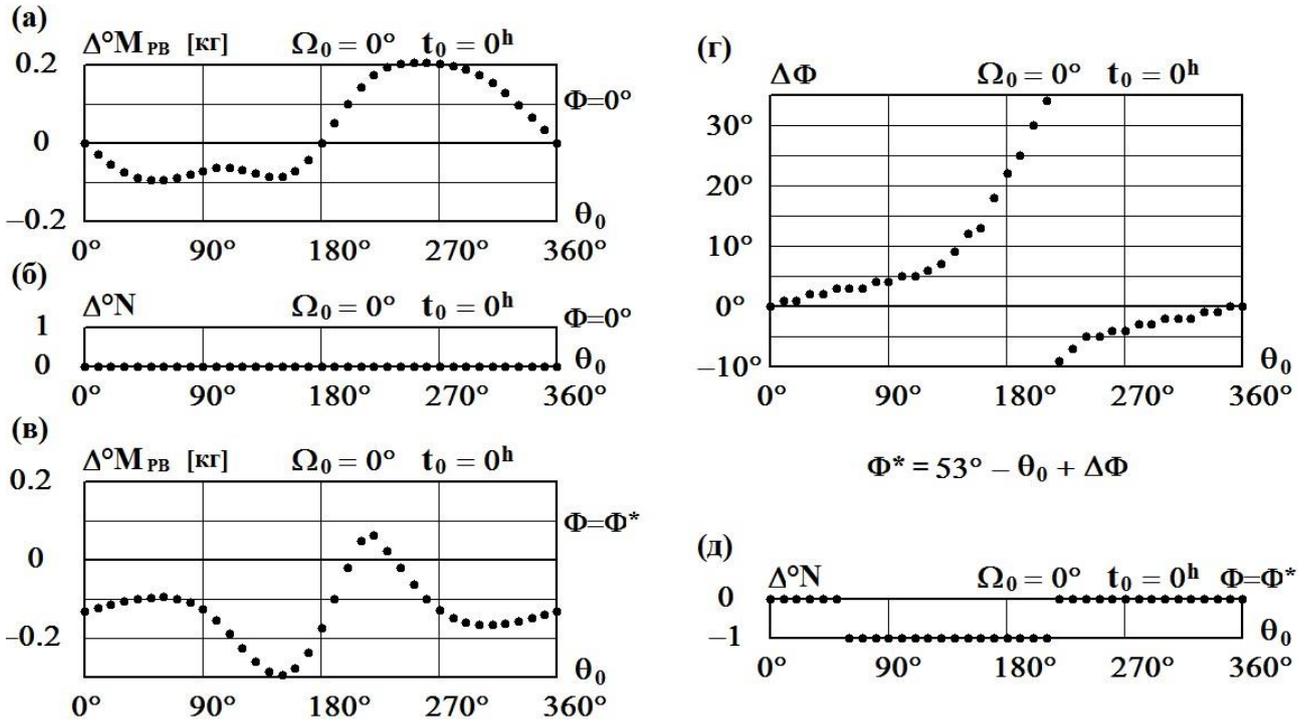


Рис. 1<sup>N</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  в отсутствие возмущений: (а), (б) – когда все витки целые; (в), (д) – угловая дальность последнего витка  $\Phi = \Phi^*$  – оптимальная

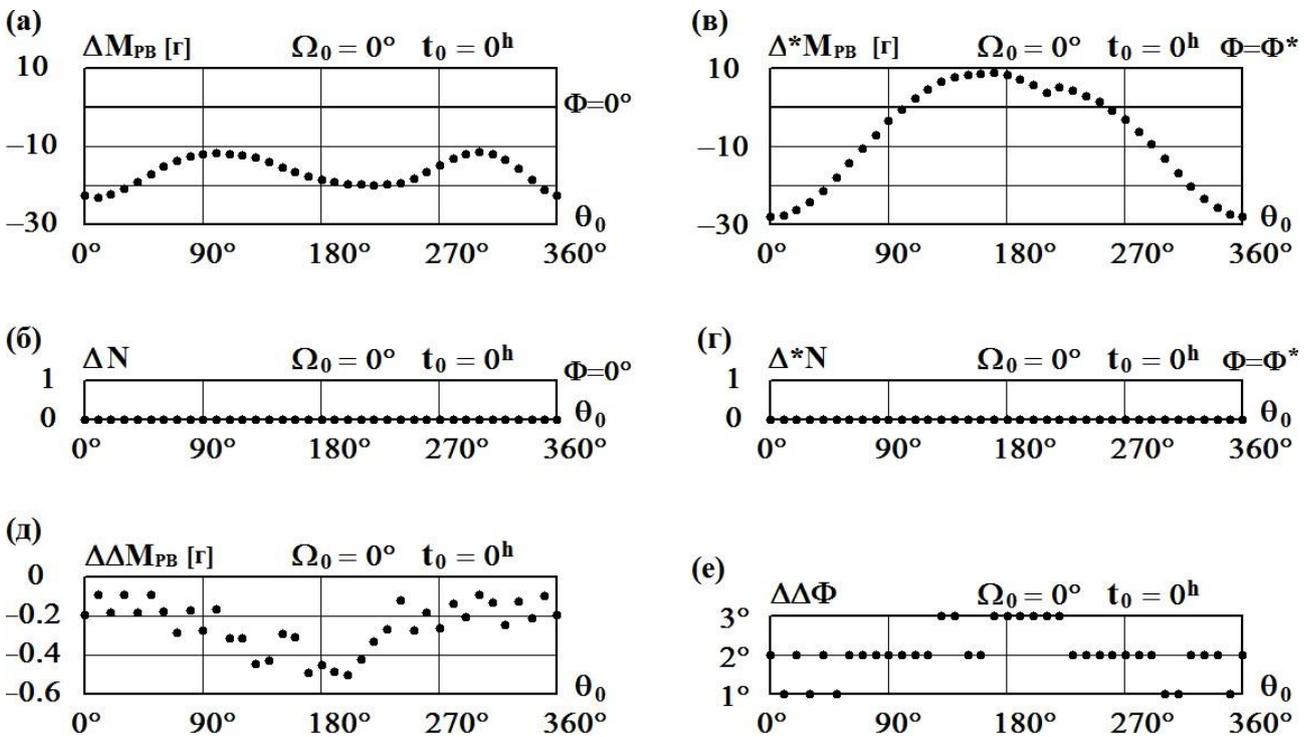


Рис. 1<sup>theta</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  ((а), (б) – когда все витки целые, (в), (д) – когда последний виток нецелый) при наличии возмущений, в сравнении с моделью без возмущений; (д) – дополнительное уменьшение массы из-за того, что изменяется оптимальная дальность последнего витка на величину  $\Delta\Delta\Phi$  (е)

**Влияние вариаций геопотенциала на «средней» траектории**  
 ( $i = 13^{\circ}$ ,  $R_{\pi} = 15.571$  тыс. км,  $N = 157$ ,  $T = 180$  сут,  $M_{РВ} = 485.3$  кг)

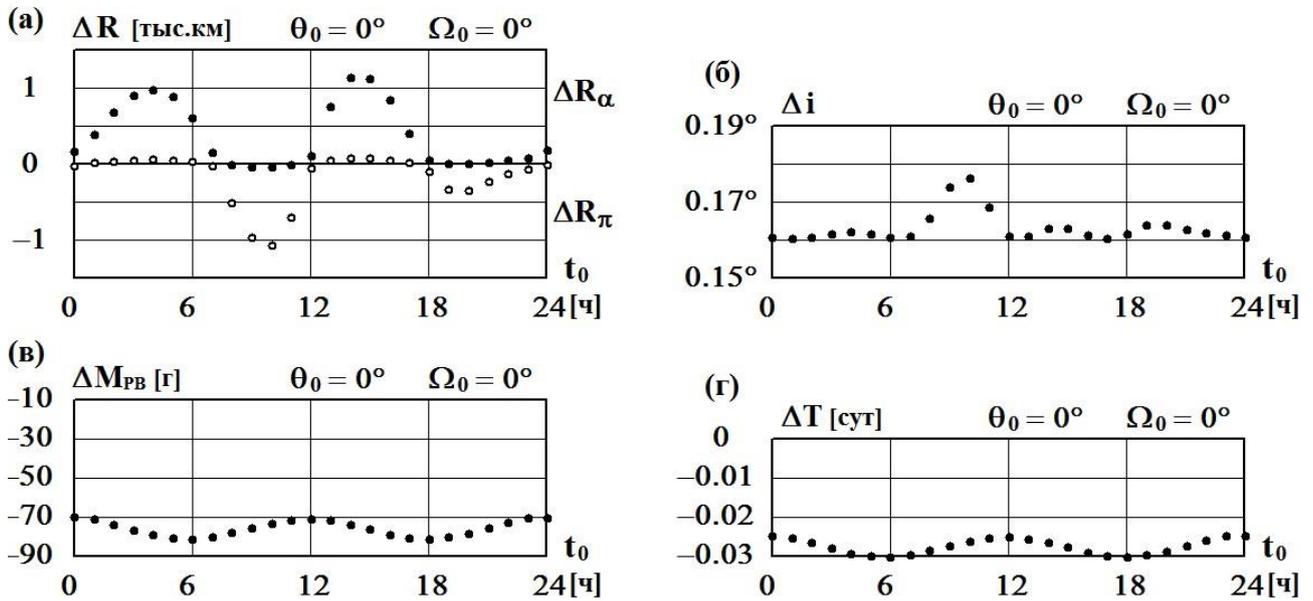


Рис. 2<sup>T</sup>. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $t_0$  (влияет на поворот гравитационного поля Земли)

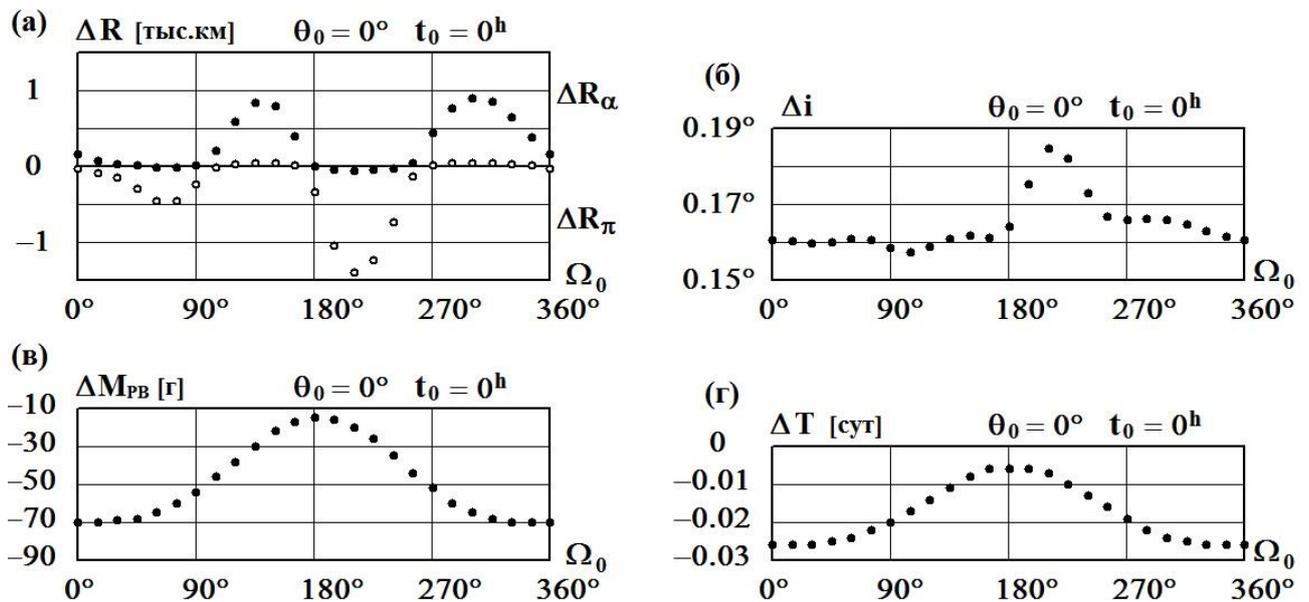


Рис. 2<sup>Ω</sup>. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $\Omega_0$  (влияет на положение траектории)

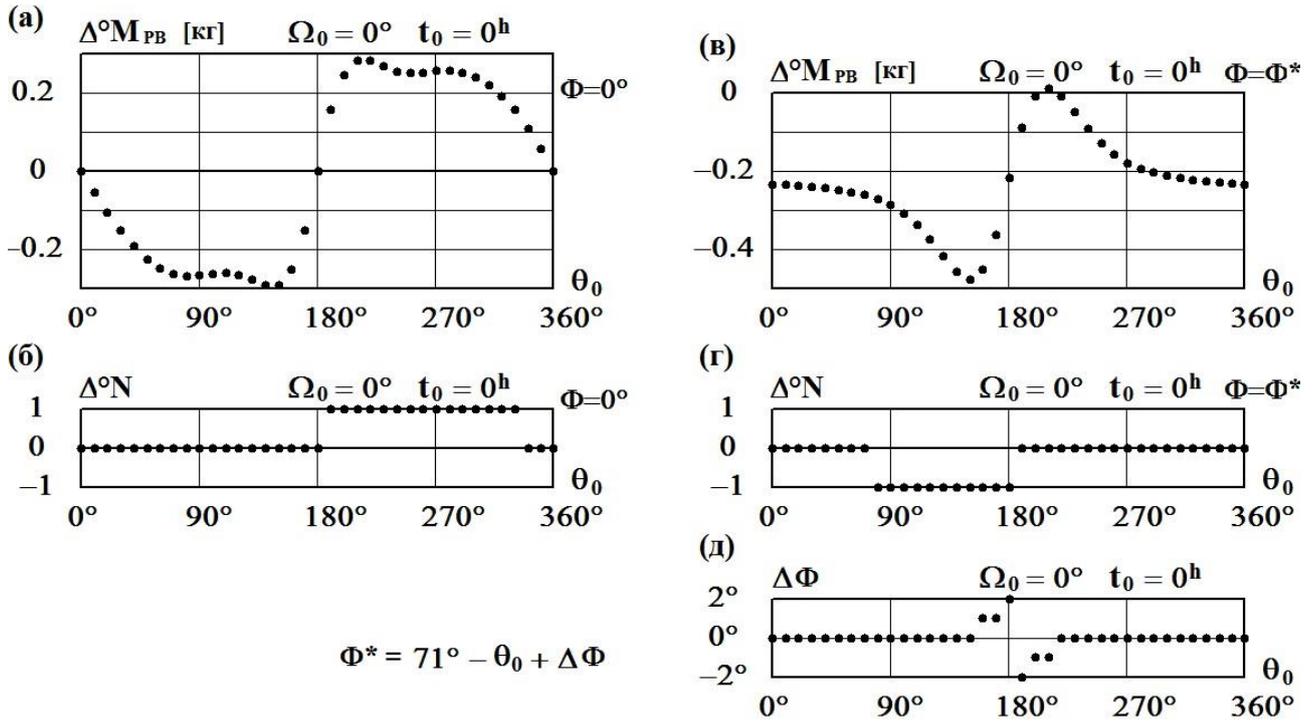


Рис. 2<sup>N</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  в отсутствие возмущений: (а), (б) – когда все витки целые; (в), (д) – угловая дальность последнего витка  $\Phi = \Phi^*$  – оптимальная

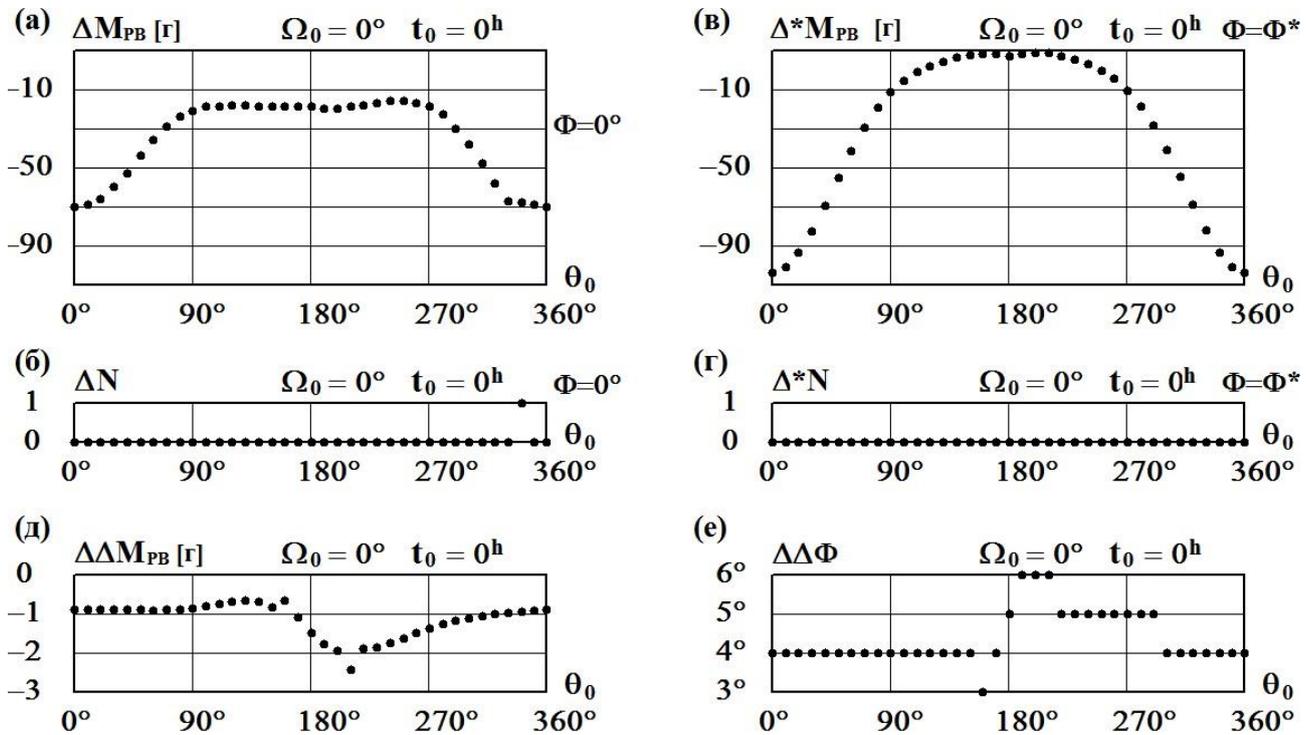


Рис. 2<sup>theta</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  ((а), (б) – когда все витки целые, (в), (д) – когда последний виток нецелый) при наличии возмущений, в сравнении с моделью без возмущений; (д) – дополнительное уменьшение массы из-за того, что изменяется оптимальная дальность последнего витка на величину  $\Delta\Delta\Phi$  (е).

**Влияние вариаций геопотенциала на «длинной» траектории**  
 ( $i = 26^{\circ}$ ,  $R_{\pi} = 9.164$  тыс. км,  $N = 232$ ,  $T = 269.7$  сут,  $M_{PB} = 727.2$  кг)

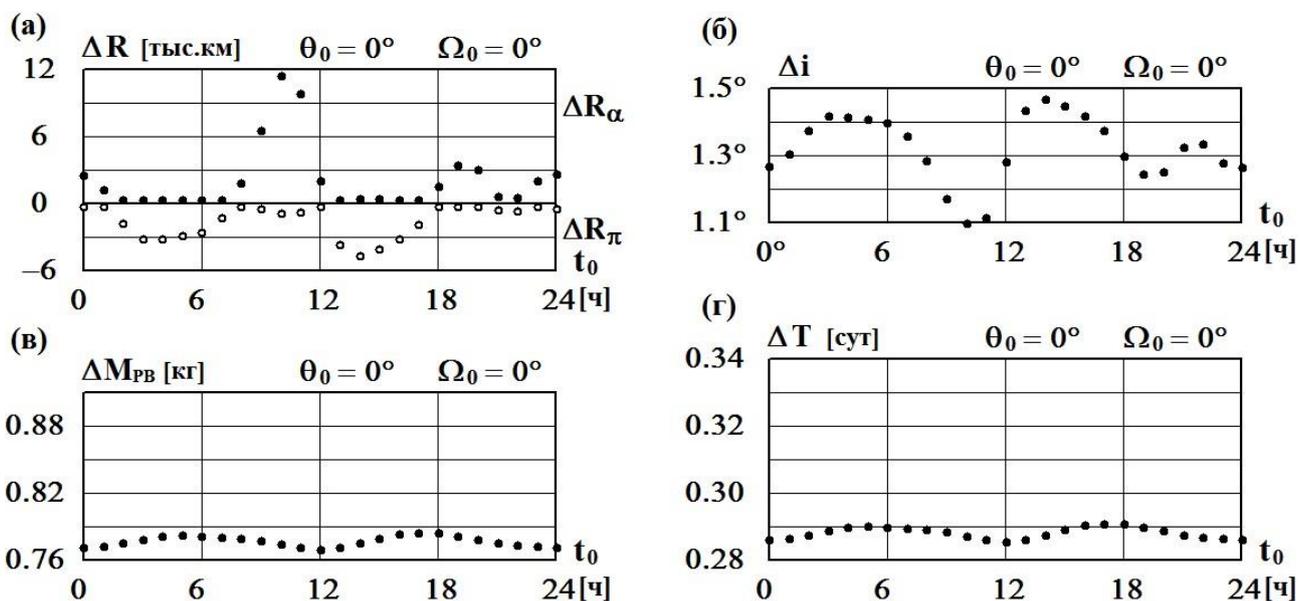


Рис. 3<sup>T</sup>. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $t_0$  (влияет на поворот гравитационного поля Земли)

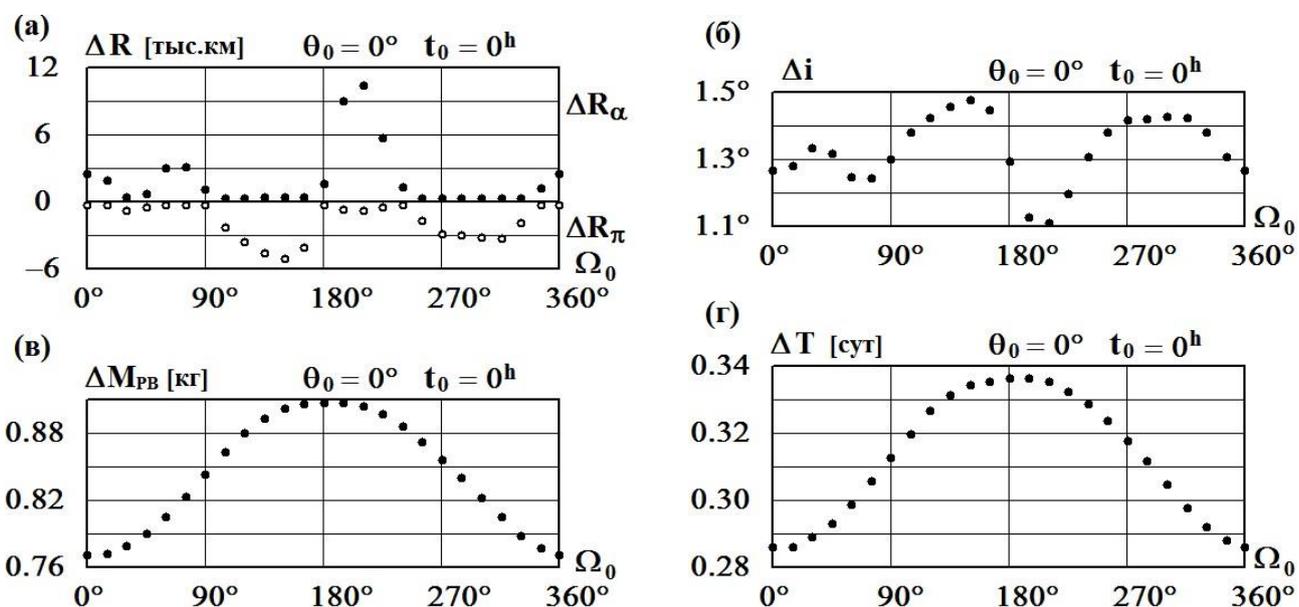


Рис. 3<sup>Ω</sup>. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $\Omega_0$  (влияет на положение траектории)

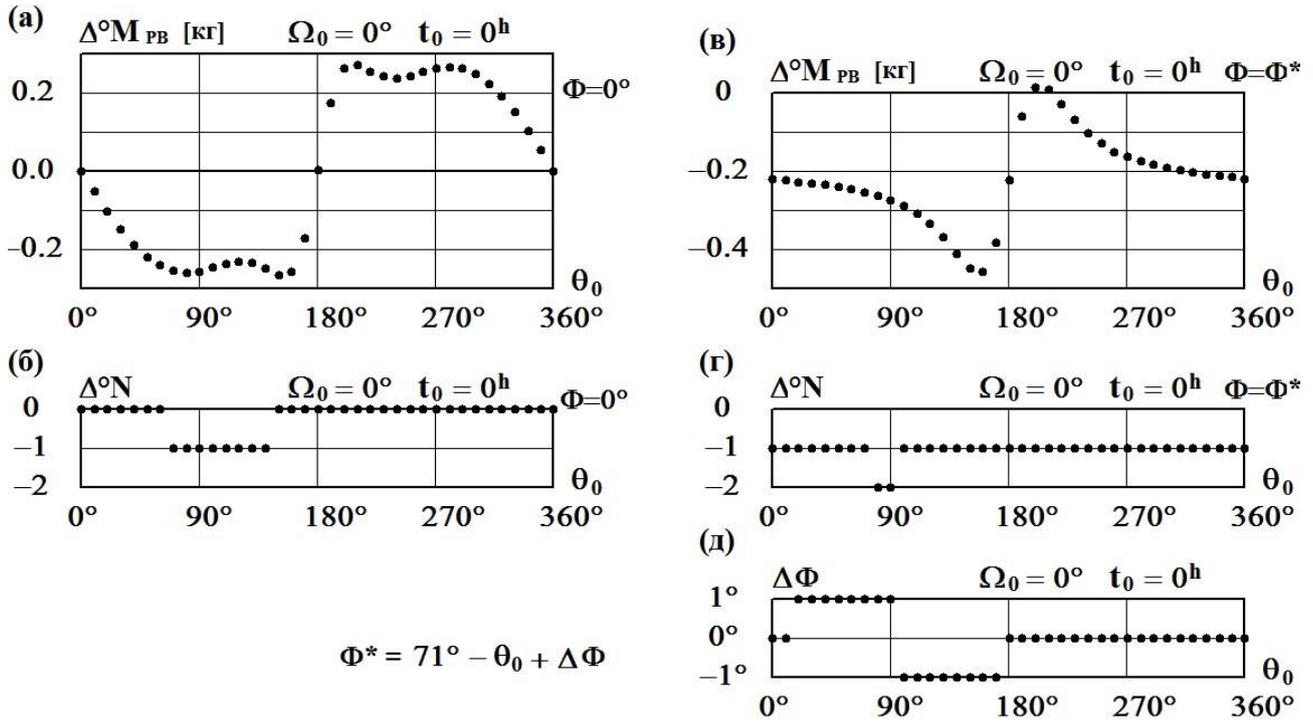


Рис. 3<sup>N</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  в отсутствие возмущений: (а), (б) – когда все витки целые; (в), (д) – угловая дальность последнего витка  $\Phi = \Phi^*$  – оптимальная.

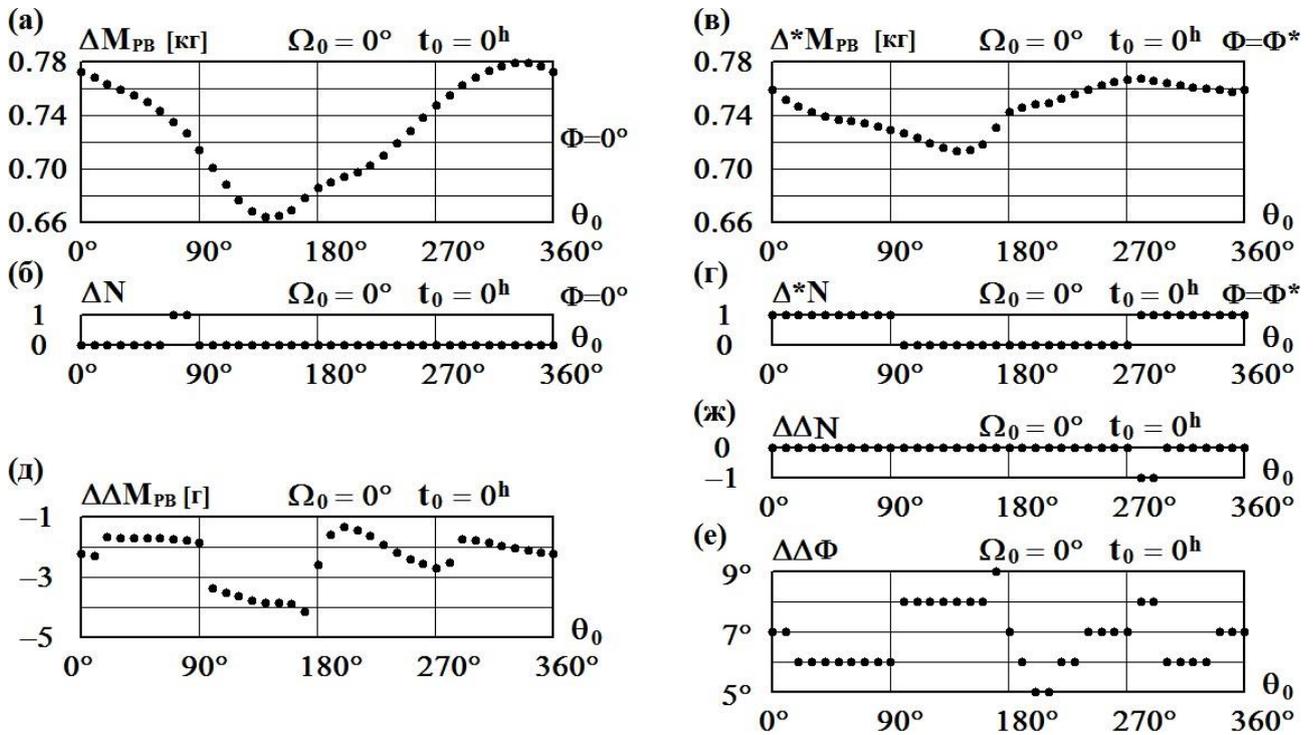


Рис. 3<sup>theta</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  ((а), (б) – когда все витки целые, (в), (г) – когда последний виток нецелый) при наличии возмущений, в сравнении с моделью без возмущений; (д) – дополнительное уменьшение массы из-за того, что изменяются оптимальные  $N$  и дальность последнего витка на величины  $\Delta\Delta N$  (ж) и  $\Delta\Delta\Phi$  (е).

**Влияние вариаций геопотенциала на «очень длинной» траектории**  
 ( $i = 41^\circ$ ,  $R_\pi = 7.164$  тыс. км,  $N = 281$ ,  $T = 343.9$  сут,  $M_{РВ} = 927.3$  кг)

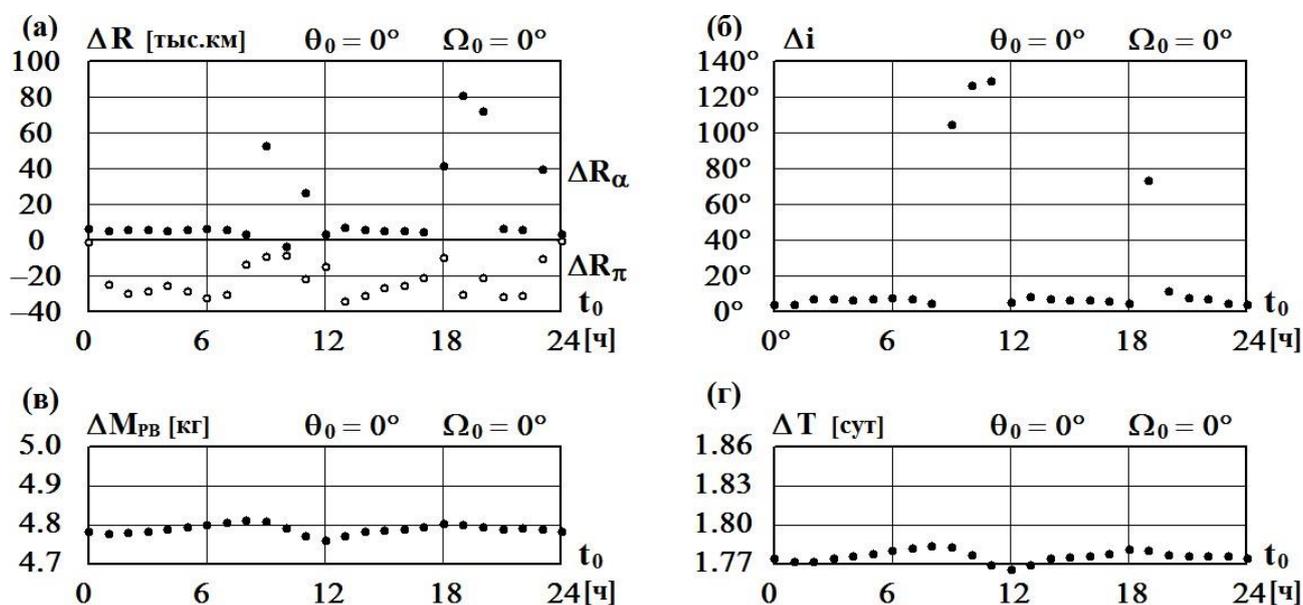


Рис. 4<sup>T</sup>. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $t_0$  (влияет на поворот гравитационного поля Земли)

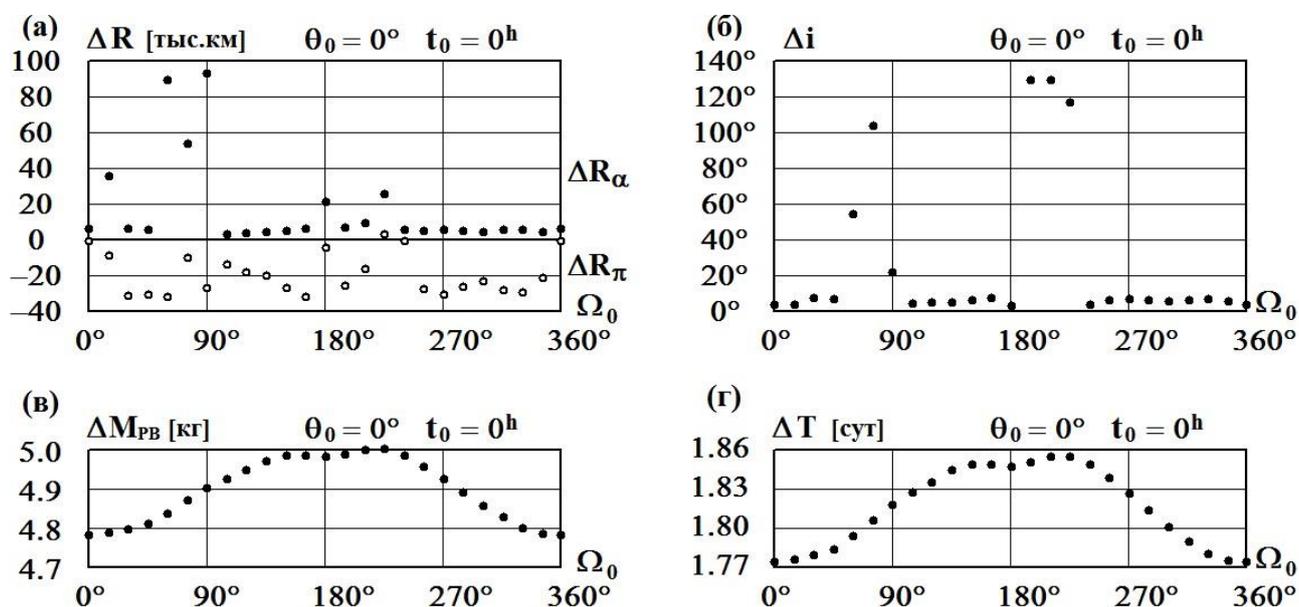


Рис. 4 $\Omega$ . Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $\Omega_0$  (влияет на положение траектории)

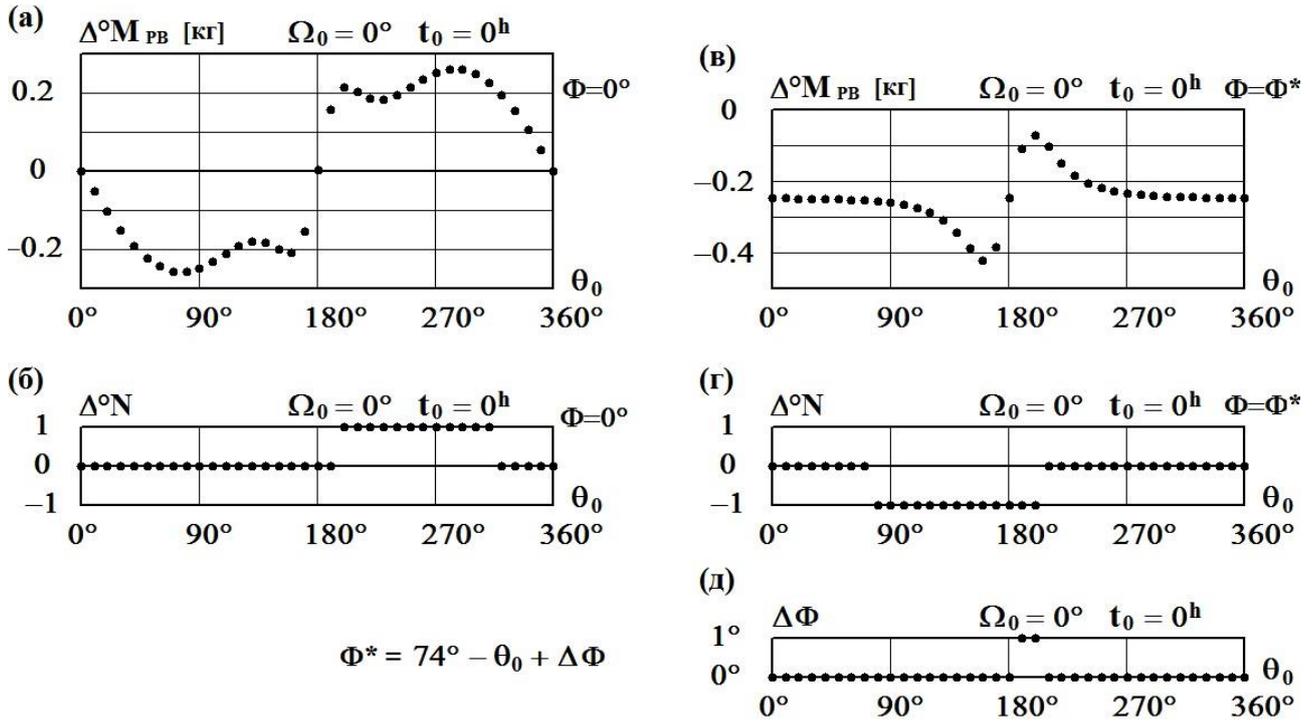


Рис. 4<sup>N</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  в отсутствие возмущений: (а), (б) – когда все витки целые; (в), (д) – угловая дальность последнего витка  $\Phi = \Phi^*$  – оптимальная.

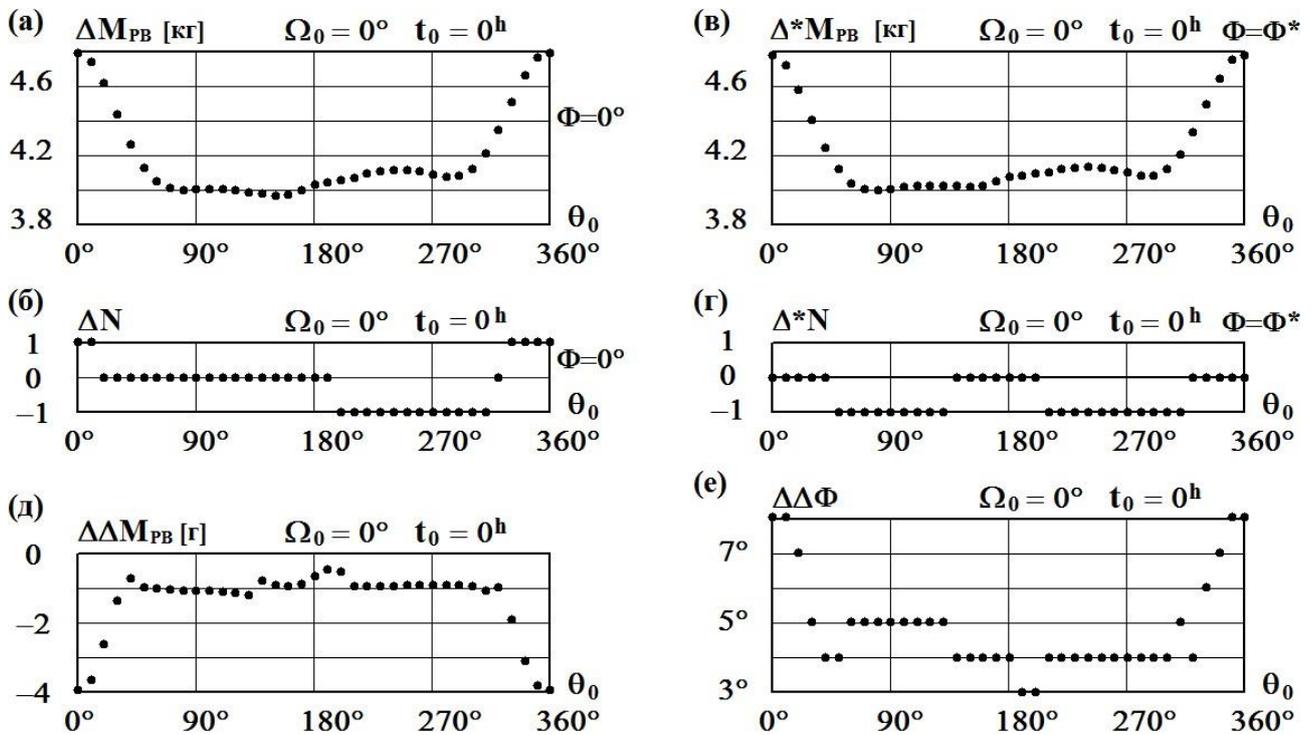


Рис. 4<sup>theta</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  ((а), (б) – когда все витки целые, (в), (д) – когда последний виток нецелый) при наличии возмущений, в сравнении с моделью без возмущений; (д) – дополнительное уменьшение массы из-за того, что изменяется оптимальная дальность последнего витка на величину  $\Delta \Delta \Phi$  (е).

### Влияние вариаций геопотенциала для «легкого» КА

( $i = 46.5^\circ$ ,  $R_\pi = 7.164$  тыс. км,  $N = 103$ ,  $T = 120.3$  сут,  $M_{PB} = 324.2$  кг)

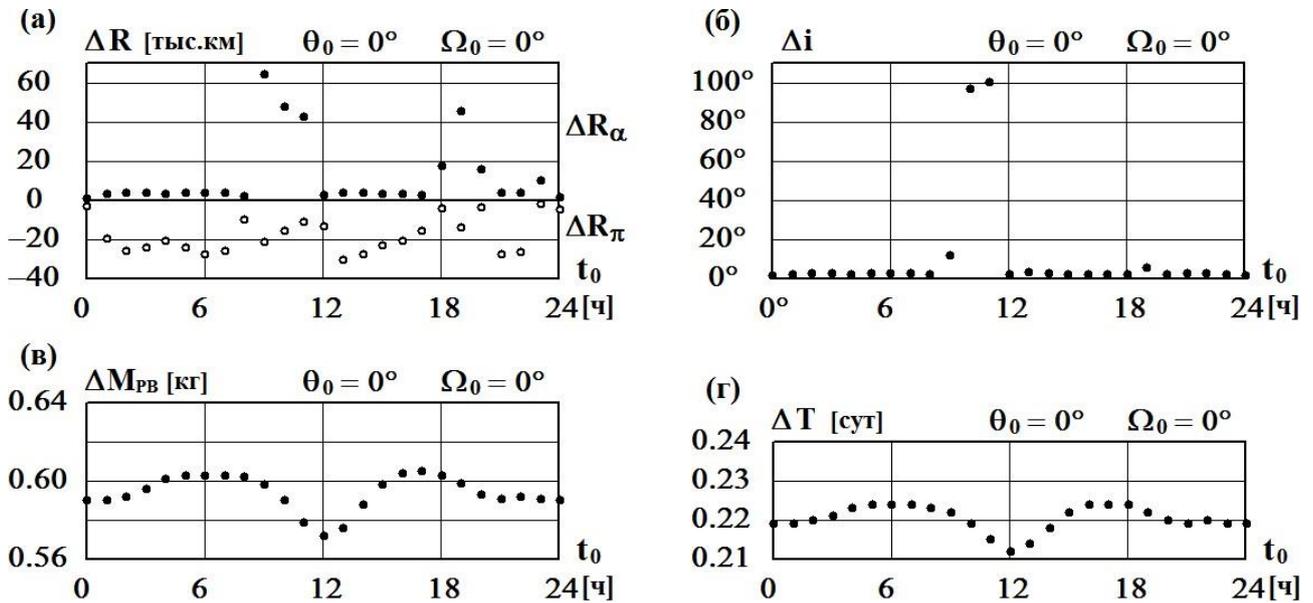


Рис. 5<sup>T</sup>. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $t_0$  (влияет на поворот гравитационного поля Земли)

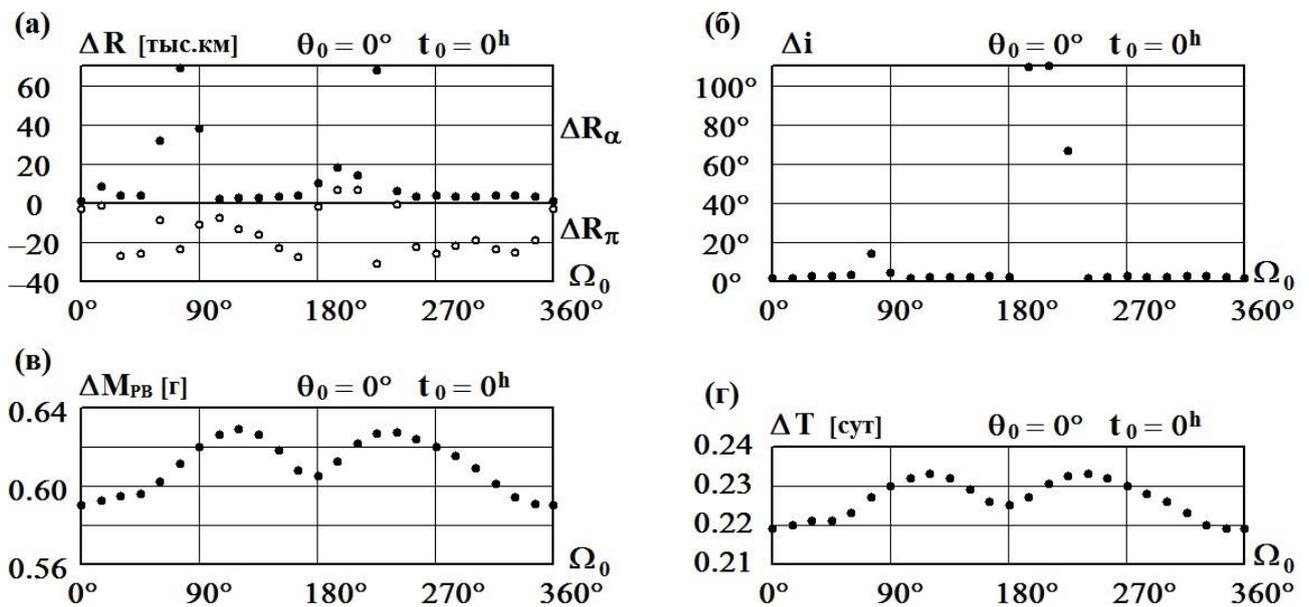


Рис. 5<sup>Ω</sup>. Невязки в перигее, апогее (а) и наклонении (б) на правом конце траектории (до решения краевой задачи) и изменения в массе рабочего вещества (в) и продолжительности перелета (г) (после решения краевой задачи) в зависимости от параметра  $\Omega_0$  (влияет на положение траектории)

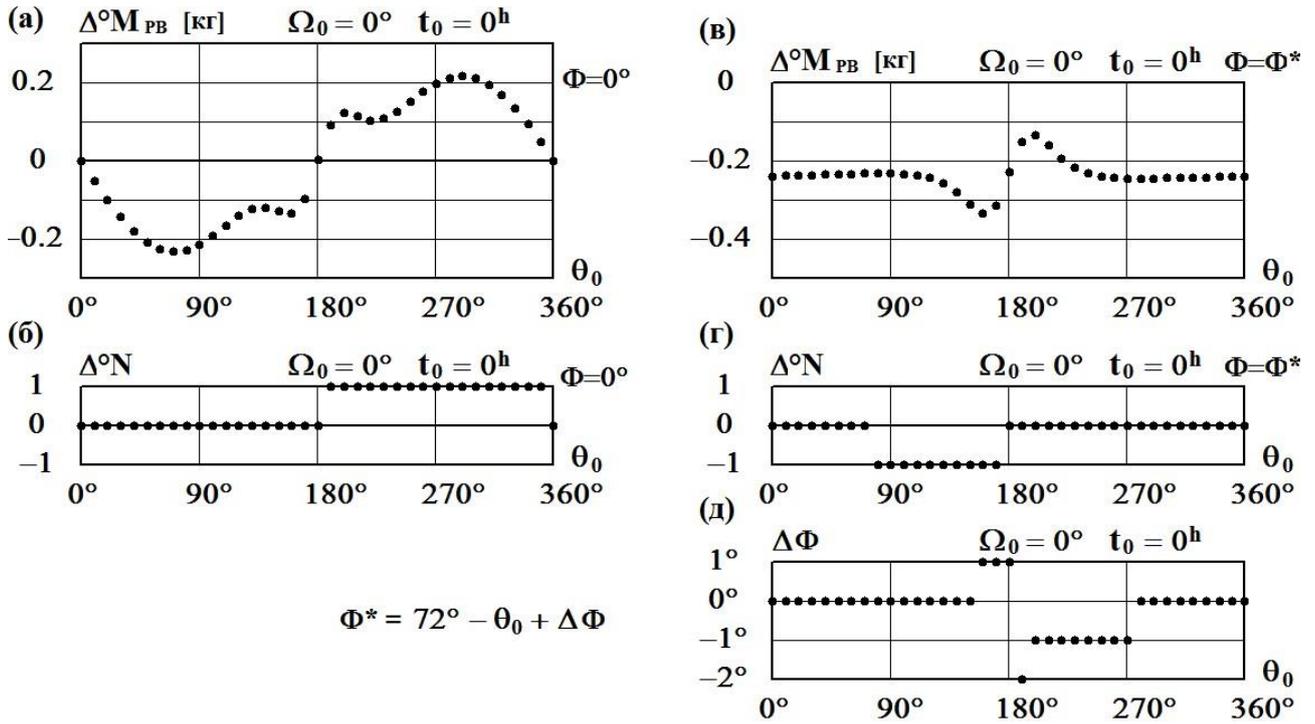


Рис. 5<sup>N</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  в отсутствие возмущений: (а), (б) – когда все витки целые; (в), (д) – угловая дальность последнего витка  $\Phi = \Phi^*$  – оптимальная.

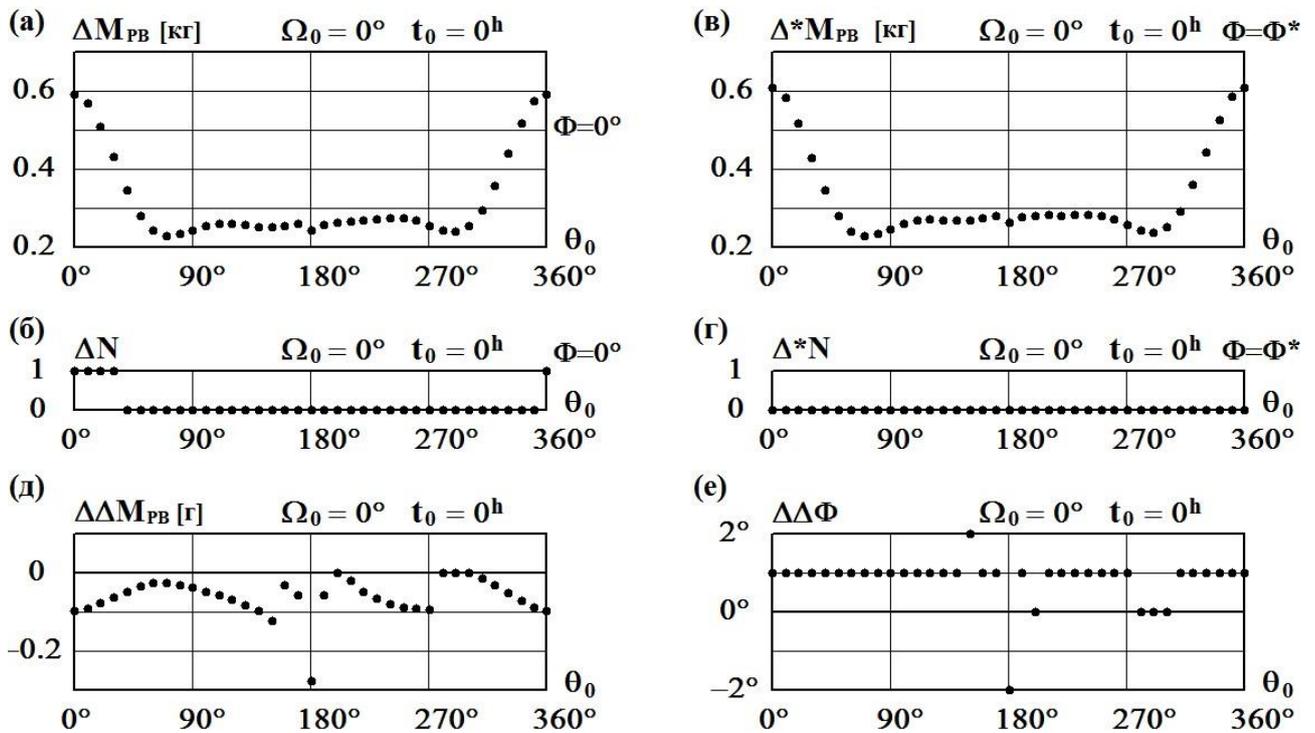


Рис. 5<sup>theta</sup>. Изменение массы рабочего вещества и количества целых витков в зависимости от параметра  $\theta_0$  ((а), (б) – когда все витки целые, (в), (д) – когда последний виток нецелый) при наличии возмущений, в сравнении с моделью без возмущений; (д) – дополнительное уменьшение массы из-за того, что изменяется оптимальная дальность последнего витка на величину  $\Delta \Delta \Phi$  (е).