



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 110 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лысов В. Г., Туляков Д.Н.

О векторной теоретико-
потенциальной задаче с
матрицей Анжелеско

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лысов В. Г., Туляков Д.Н. О векторной теоретико-потенциальной задаче с матрицей Анжелеско // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 110. 36 с. doi:[10.20948/prepr-2016-110](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-110)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-110>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков

О векторной теоретико-потенциальной
задаче с матрицей Анжелеско

Москва – 2016

УДК 517.53

В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков

О векторной теоретико-потенциальной задаче с матрицей Анжелеско

Рассматриваются векторные задачи равновесия логарифмического потенциала с матрицей взаимодействия Анжелеско. Для случая двух произвольных отрезков исследуются решения в классе знакопеременных зарядов и в классе неотрицательных мер. Показано, что решения выражаются через алгебраические функции. Обнаружено, что для задачи в зарядах род алгебраической кривой равен нулю для любых отрезков. Найден явный вид равновесных зарядов. Найден явный вид равновесных мер при некоторых условиях на расположение отрезков.

Ключевые слова: векторная задача равновесия, матрица взаимодействия Анжелеско, экстремальная мера, логарифмический потенциал, многочлены совместной ортогональности, униформизация спектральной кривой.

V. G. Lysov, D. N. Tulyakov

On the vector potential theory problem with the Angelesco matrix

The vector equilibrium problems for the logarithmic potential with the Angelesco matrix of interactions are considered. For the case of two arbitrary intervals the solutions in the class of alternating charges and in the class of non-negative measures are researched. It is shown that the solutions are expressed in terms of algebraic functions. It is found that for the problem in the class of charges the genus of the algebraic curve is equal to zero for any location of the intervals. The explicit formulas of the equilibrium charges are found. The explicit formulas of the equilibrium measures are found under certain restrictions on the location of the intervals.

Key words: vector equilibrium problem, Angelesco matrix of interaction, extremal measure, logarithmic potential, multiple orthogonal polynomials, spectral curve uniformization.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00025).

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2016

© В. Г. Лысов, 2016, © Д. Н. Туляков, 2016

1 Постановка задачи

1.1 Введение

Напомним классические результаты о предельном распределении нулей ортогональных многочленов. Пусть $\{Q_n\}$ — последовательность ортогональных многочленов степени n относительно неотрицательной меры θ :

$$\int_{-1}^1 Q_n(x)x^k d\theta(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Если носитель θ состоит из бесконечного числа точек, то Q_n имеет n простых нулей на $[-1, 1]$. Если, более того, производная абсолютно непрерывной составляющей θ положительна почти всюду по мере Лебега на $[-1, 1]$, то мера, считающая нули Q_n

$$\mu(Q_n) := \sum_{\{x \mid Q_n(x)=0\}} \delta_x,$$

сходится в $*$ -слабой топологии к чебышёвскому распределению:

$$\frac{1}{n} \mu(Q_n) \xrightarrow{*} \lambda, \quad n \rightarrow \infty, \quad d\lambda(x) = \frac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

Предельная мера распределения нулей λ обладает следующими свойствами. Во-первых, она минимизирует функционал энергии в классе всех вероятностных мер с носителем на $[-1, 1]$:

$$\log 2 = I(\lambda) < I(\mu) \quad \forall \mu \neq \lambda : |\mu| = 1, \quad S(\mu) \subset [-1, 1],$$

где использованы следующие обозначения для энергии, полного заряда и носителя меры μ :

$$I(\mu) := \iint \log \frac{1}{|x-y|} d\mu(x)d\mu(y), \quad |\mu| := \mu([-1, 1]), \quad S(\mu) := \text{supp } \mu.$$

Во-вторых, мера λ является равновесной, т.е. ее логарифмический потенциал

$$V^\lambda(z) := \int \log \frac{1}{|z-x|} d\lambda(x) = -\text{Re} \log \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)$$

удовлетворяет условию равновесия на носителе λ :

$$V^\lambda(x) = \log 2, \quad x \in [-1, 1].$$

В-третьих, преобразование Коши меры λ

$$h(z) := \int \frac{d\lambda(x)}{x-z} = \frac{-1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

удовлетворяет простому алгебраическому уравнению:

$$(z^2 - 1)h^2 - 1 = 0.$$

Рассмотрим теперь многочлены совместной ортогональности Анжелеско (см. [1], [2]). Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ — попарно непересекающиеся отрезки вещественной оси, $\theta_1, \dots, \theta_r$ — как и выше, меры на этих отрезках, $\vec{n} := (n_1, \dots, n_r)$ — мультииндекс из \mathbb{Z}_+^r . Многочленом совместной ортогональности Анжелеско $Q_{\vec{n}}$ называется многочлен степени $|\vec{n}| := n_1 + \dots + n_r$, удовлетворяющий соотношениям:

$$\int_{\Delta_j} Q_{\vec{n}}(x)x^k d\theta_j(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 0, \dots, r.$$

Многочлен $Q_{\vec{n}}$ имеет n_j нулей на отрезке Δ_j и определен однозначно с точностью до нормировки. Если выбрать последовательность мультииндексов $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^r$, такую, что $\frac{n_j}{|\vec{n}|} \rightarrow p_j$, $j = 1, \dots, r$, $\vec{n} \in \Lambda$, то считающая мера $\mu(Q_{\vec{n}})$ также имеет $*$ -слабый предел:

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \mu(Q_{\vec{n}}) \xrightarrow{*} \lambda_1 + \dots + \lambda_r, \quad \vec{n} \in \Lambda.$$

Оказывается, что векторная мера $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ обладает теми же тремя свойствами, что и ее скалярный аналог. Чтобы сформулировать эти свойства, введем некоторые обозначения. Для вектора мер $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ рассмотрим функционал энергии $J(\vec{\mu})$ и векторный логарифмический потенциал $(W_1^{\vec{\mu}}, \dots, W_r^{\vec{\mu}})$:

$$J(\vec{\mu}) := I\left(\sum_{j=1}^r \mu_j\right) + \sum_{j=1}^r I(\mu_j) = \sum_{j,k=1}^r a_{jk} I(\mu_j, \mu_k),$$

$$W_j^{\vec{\mu}} := \sum_{k=1}^r a_{jk} V^{\mu_k}, \quad V^{\mu_k}(z) := \int \log \frac{1}{|z-x|} d\mu_k(x),$$

где $A = (a_{jk})$ — матрица взаимодействия Анжелеско, а $I(\mu_j, \mu_k)$ — совместная энергия пары мер:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad I(\mu_j, \mu_k) := \iint \log \frac{1}{|x-y|} d\mu_j(x) d\mu_k(y).$$

Итак, во-первых, векторная мера $\vec{\lambda}$, отвечающая за предельное распределение нулей $Q_{\vec{n}}$, является экстремальной мерой функционала J :

$$J(\vec{\lambda}) < J(\vec{\mu}) \quad \forall \vec{\mu} \neq \vec{\lambda} : |\mu_j| = p_j, S(\mu_j) \subset \Delta_j, j = 1, \dots, r.$$

Во-вторых, векторный потенциал меры $\vec{\lambda}$ удовлетворяет соотношениям равновесия:

$$W_j^{\vec{\lambda}}(x) \begin{cases} = \omega_j, & x \in S(\lambda_j), \\ \geq \omega_j, & x \in \Delta_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, r.$$

Заметим, что в данном случае равновесие выполняется на носителе λ_j , который в случае векторной задачи может уже не совпадать с Δ_j , т.е. равновесная мера может сталкиваться с отрезка. Связь многочленов $Q_{\vec{n}}$ с векторной равновесной мерой была установлена в работе [3].

Наконец, в-третьих, преобразования Коши для равновесной меры:

$$\hbar_j(z) := \int \frac{d\lambda_j(x)}{x-z}, \quad j = 1, \dots, r,$$

являются ветвями алгебраической функции порядка $r+1$. Этот факт для многочленов совместной ортогональности был впервые обнаружен в [4]. Для многочленов Анжелеско функция \hbar изучалась в [5], использовалась при нахождении асимптотики $Q_{\vec{n}}$ в [6] и [7]. В приложениях, связанных со ансамблями случайных матриц [8], соответствующую алгебраическую поверхность называют спектральной кривой.

Основной целью настоящей работы является нахождение функции \hbar в явном виде с использованием униформизации алгебраической кривой, см. [9], [10]. На отрезки Δ_j не накладывается условие попарной непересекаемости, поскольку такие задачи также представляют интерес, см. [11],

[12], [13], [14]. Предлагаемый подход основан на исследовании решения задачи минимизации энергии J в более широком классе знакопеременных зарядов. В этом классе не возникает эффекта столкновения, что существенно упрощает нахождение алгебраической функции. В ряде случаев решение задачи в зарядах позволяет получить некоторую информацию о решении в мерах. Рассматривается случай двух ($r = 2$) произвольных отрезков и диагональных индексов $p_1 = p_2$.

1.2 Векторные задачи равновесия

Сформулируем рассматриваемые в работе теоретико-потенциальные задачи. Введем некоторые обозначения. Пусть Δ — отрезок вещественной оси. Множество неотрицательных конечных борелевских мер μ на Δ обозначим $\mathcal{M}^+(\Delta)$. Подмножество вероятностных мер ($|\mu| = 1$) обозначим $\mathcal{M}_1(\Delta)$. Множества $\mathcal{M}(\Delta)$ и $\mathcal{M}_1(\Delta)$ являются выпуклыми.

Пусть теперь Δ_1, Δ_2 — пара отрезков вещественной оси. На декартовом произведении $\mathcal{M}(\Delta_1) \times \mathcal{M}(\Delta_2)$ определен выпуклый функционал энергии с матрицей взаимодействия Анжелеско:

$$J(\vec{\mu}) = I(\mu_1 + \mu_2) + I(\mu_1) + I(\mu_2), \quad \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{M}(\Delta_1) \times \mathcal{M}(\Delta_2).$$

Этот функционал принимает значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Рассмотрим задачу минимизации функционала J на парах вероятностных мер:

$$J(\vec{\mu}) \rightarrow \min, \quad \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{M}_1(\Delta_1) \times \mathcal{M}_1(\Delta_2).$$

В работе [3] (см. также [15] для пересекающихся отрезков) доказано, что существует и единственная экстремальная мера $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, решающая эту задачу. Существование следует из $*$ -слабой компактности $\mathcal{M}_1(\Delta)$ и полунепрерывности снизу функционала I на $\mathcal{M}(\Delta)$:

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu, \quad n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n) \geq I(\mu).$$

Единственность следует из невырожденности и выпуклости функционала J . Задача минимизации энергии эквивалентна (см. [15]) следующей задаче равновесия логарифмического потенциала.

Задача 1. *Найти меру $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{M}_1(\Delta_1) \times \mathcal{M}_1(\Delta_2)$, удовлетворя-*

ющую следующим соотношениям равновесия:

$$2V^{\lambda_1}(x) + V^{\lambda_2}(x) \begin{cases} = \omega_1, & x \in S(\lambda_1), \\ \geq \omega_1, & x \in \Delta_1, \end{cases} \quad (1a)$$

$$2V^{\lambda_2}(x) + V^{\lambda_1}(x) \begin{cases} = \omega_2, & x \in S(\lambda_2), \\ \geq \omega_2, & x \in \Delta_2, \end{cases} \quad (1b)$$

где ω_1, ω_2 — некоторые константы равновесия.

Эквивалентность задачи минимизации энергии и задачи 1 может быть выведена (см. [16]) из классической теоремы Куна–Таккера.

Помимо неотрицательных мер будем рассматривать знакопеременные заряды ν , то есть σ -аддитивные функции на борелевских подмножествах Δ . Пусть $\nu = \nu^+ - \nu^-$ представление Жордана заряда ν в виде разности двух положительных мер ν^+ и ν^- с непересекающимися носителями: $S(\nu^+) \cap S(\nu^-) = \emptyset$. Будем предполагать, что $S(\nu^+)$ и $S(\nu^-)$ — регулярные компакты, а энергия полной вариации конечна: $I(\nu^+ + \nu^-) < +\infty$. Множество таких зарядов ν на Δ обозначим $\mathcal{E}(\Delta)$. Определения потенциала и энергии естественным образом переносятся на заряды:

$$V^\nu(z) = V^{\nu^+}(z) - V^{\nu^-}(z), \quad I(\nu) = I(\nu^+ - \nu^-) = I(\nu^+) + I(\nu^-) - 2I(\nu^+, \nu^-).$$

Подмножество зарядов $\nu \in \mathcal{E}(\Delta)$, для которых $\nu(\Delta) = |\nu^+| - |\nu^-| = 1$, обозначим $\mathcal{E}_1(\Delta)$. Множества $\mathcal{E}(\Delta)$ и $\mathcal{E}_1(\Delta)$ выпуклы.

Функционал энергии J продолжается на декартово произведение зарядов $\mathcal{E}(\Delta_1) \times \mathcal{E}(\Delta_2)$. Можно рассмотреть задачу минимизации энергии на декартовом произведении единичных зарядов:

$$J(\vec{\nu}) \rightarrow \min, \quad \vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in \mathcal{E}_1(\Delta_1) \times \mathcal{E}_1(\Delta_2).$$

Из теоремы Куна–Таккера выводится эквивалентность задачи нахождения экстремального заряда $\vec{\sigma}$ и следующей задачи равновесия.

Задача 2. Найти заряд $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{E}_1(\Delta_1) \times \mathcal{E}_1(\Delta_2)$, удовлетворяющий следующим соотношениям равновесия:

$$2V^{\sigma_1}(x) + V^{\sigma_2}(x) = \tilde{\omega}_1, \quad x \in \Delta_1, \quad (2a)$$

$$2V^{\sigma_2}(x) + V^{\sigma_1}(x) = \tilde{\omega}_2, \quad x \in \Delta_2, \quad (2b)$$

где $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ — некоторые константы равновесия.

Равновесие потенциала в задаче 2 выполняется на всем отрезке Δ_j . Этот факт существенно упрощает нахождение равновесного заряда в

терминах алгебраических функций. В настоящей работе найден явный вид равновесных зарядов $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$ для произвольной пары отрезков Δ_1 и Δ_2 . Тем самым доказано существование экстремального заряда. Заметим, что доказательство существования экстремальной меры на случай заряда не переносится, так как нет компактности. Доказательство единственности переносится на экстремальные заряды без изменений. Тем самым, одним из результатов работы является следующая теорема.

Теорема. *Решение задачи минимизации функционала энергии с матрицей взаимодействия Анжелеско в классе зарядов существует, единственно и совпадает с решением задачи 2.*

1.3 Связь с алгебраическими функциями

Покажем, что решение задачи 2 может быть найдено в терминах алгебраических функций. Рассмотрим наиболее общий случай расположения отрезков Δ_1, Δ_2 , когда $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$, $\Delta_2 \setminus \Delta_1 \neq \emptyset$ и $\Delta_1 \setminus \Delta_2 \neq \emptyset$, то есть

$$\Delta_1 = [a_1, b_1], \quad \Delta_2 = [a_2, b_2], \quad \text{где } a_1 < a_2 < b_1 < b_2.$$

Будем предполагать абсолютную непрерывность равновесного заряда (2).

Обозначим комплексный логарифмический потенциал заряда σ_j :

$$\mathcal{V}^{\sigma_j}(z) = - \int \log(z - x) d\sigma_j(x), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, b_j], \quad j = 1, 2,$$

где в интеграле выбирается главная ветвь логарифма. Комплексный потенциал является голоморфной функцией в указанной области, причем $\operatorname{Re} \mathcal{V}^{\sigma_j}(z) = V^{\sigma_j}(z)$. Так как $\mathcal{V}^{\sigma_j}(x)$ принимает вещественные значения при $x > b_j$, то по теореме единственности для аналитических функций $\mathcal{V}^{\sigma_j}(\bar{z}) = \overline{\mathcal{V}^{\sigma_j}(z)}$ при $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, b_j]$. Следовательно, на вещественной оси выполняются следующие соотношения при $j = 1, 2$:

$$\mathcal{V}^{\sigma_j}(x) = V^{\sigma_j}(x), \quad x > b_j, \quad (\mathcal{V}_+^{\sigma_j} + \mathcal{V}_-^{\sigma_j})(x) = 2V^{\sigma_j}(x), \quad x \leq b_j,$$

где $\mathcal{V}_+^{\sigma_j}(x), \mathcal{V}_-^{\sigma_j}(x)$ — предельные значения при подходе к x из верхней и нижней полуплоскости соответственно.

Тогда соотношения равновесия (2) принимают такой вид:

$$(\mathcal{V}_+^{\sigma_1} + \mathcal{V}_-^{\sigma_1})(x) + \frac{1}{2}(\mathcal{V}_+^{\sigma_2} + \mathcal{V}_-^{\sigma_2})(x) = \tilde{\omega}_1, \quad x \in \Delta_1, \quad (3a)$$

$$(\mathcal{V}_+^{\sigma_2} + \mathcal{V}_-^{\sigma_2})(x) + \frac{1}{2}(\mathcal{V}_+^{\sigma_1} + \mathcal{V}_-^{\sigma_1})(x) = \tilde{\omega}_2, \quad x \in \Delta_2. \quad (3b)$$

Введем теперь обозначения для преобразований Коши компонент равновесного заряда σ_j :

$$h_j(z) := \int \frac{d\sigma_j(x)}{x-z}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Заметим, что по формуле Сохоцкого–Племеля весовая функция заряда σ_j восстанавливается по скачку функции h_j :

$$d\sigma_j(x) = \frac{1}{2\pi i} (h_j^+ - h_j^-)(x) dx, \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Функция h_j голоморфна в указанной в (4) области и являются производной соответствующего комплексного потенциала:

$$h_j(z) = \frac{d}{dz} \mathcal{V}^{\sigma_j}(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, b_j], \quad j = 1, 2.$$

Если продифференцировать соотношения равновесия (3), то получим *равносильные условия*:

$$(h_1^+ + h_1^-)(x) + \frac{1}{2} (h_2^+ + h_2^-)(x) = 0, \quad x \in \Delta_1, \quad (6a)$$

$$(h_2^+ + h_2^-)(x) + \frac{1}{2} (h_1^+ + h_1^-)(x) = 0, \quad x \in \Delta_2. \quad (6b)$$

Из определения (4) следует, что $h_j^+(x) = h_j^-(x) = h(x)$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \Delta_j$. Кроме того, на общей части отрезков $\Delta_1 \cap \Delta_2$ пара $(h_1^+ + h_1^-, h_2^+ + h_2^-)$ является решением однородной линейной системы с невырожденной матрицей. Поэтому условия (6) *равносильны* следующим:

$$(h_1^+ + h_1^-)(x) + h_2(x) = 0, \quad x \in \Delta_1 \setminus \Delta_2, \quad (7a)$$

$$(h_2^+ + h_2^-)(x) + h_1(x) = 0, \quad x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1, \quad (7b)$$

$$(h_1^+ + h_1^-)(x) = (h_2^+ + h_2^-)(x) = 0, \quad x \in \Delta_1 \cap \Delta_2. \quad (7c)$$

С помощью полученных соотношений (7) можно показать, что функции h_j являются ветвями некоторой шестизначной аналитической функции. Действительно, пусть

$$h_0(z) := -(h_1 + h_2)(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2), \quad (8)$$

тогда соотношения (7) можно переписать так:

$$h_0^\pm(x) = h_1^\mp(x), \quad x \in \Delta_1 \setminus \Delta_2, \quad (9a)$$

$$h_0^\pm(x) = h_2^\mp(x), \quad x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1, \quad (9b)$$

$$h_j^\pm(x) = -h_j^\mp(x), \quad x \in \Delta_1 \cap \Delta_2, \quad j = 0, 1, 2. \quad (9c)$$

Из этих условий следует, что если взять росток функции h_1 в окрестности точки $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ и построить его аналитическое продолжение по замкнутому пути, не проходящему через концы отрезков Δ_1 и Δ_2 , то получим росток одной из шести функций $(h_0, h_1, h_2, -h_0, -h_1, -h_2)$. Например, при обходе по простому замкнутому контуру вокруг точки a_1 данный набор перейдет в $(h_1, h_0, h_2, -h_1, -h_0, -h_2)$, что соответствует перестановке $(0\ 1)(0^- \ 1^-)$. Перестановки, соответствующие обходам вокруг концов Δ_j с условием $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, приведены в таблице 1. Таким образом, данный набор функций определяет однозначную аналитическую функцию h на некоторой шестилистной римановой поверхности. Остановимся подробнее на свойствах этой поверхности.

Таблица 1: Образующие групп монодромий функции h

a_1	a_2	b_1	b_2
$(0\ 1), (0^- \ 1^-)$	$(0\ 2^-), (1\ 1^-), (2\ 0^-)$	$(0\ 1^-), (1\ 0^-), (2\ 2^-)$	$(0\ 2), (0^- \ 2^-)$

Рассмотрим шесть экземпляров расширенной комплексной плоскости с разрезами:

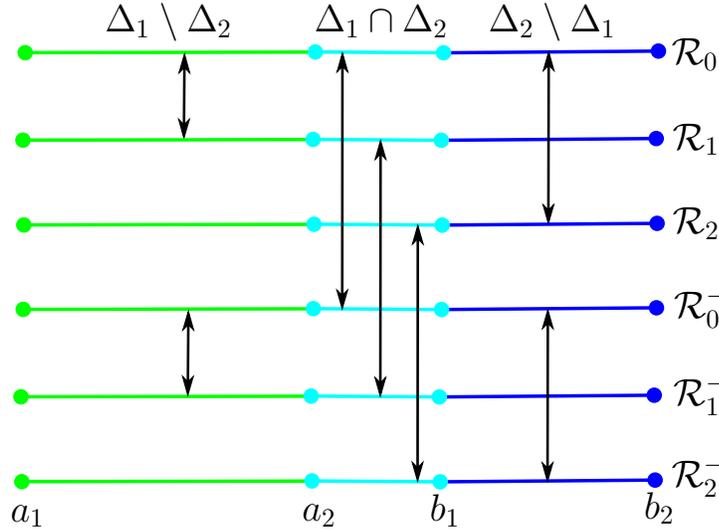
$$\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_0^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2), \quad (10a)$$

$$\mathcal{R}_1 := \mathcal{R}_1^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1, \quad (10b)$$

$$\mathcal{R}_2 := \mathcal{R}_2^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_2. \quad (10c)$$

Заметим, что функции h_j голоморфны на листах \mathcal{R}_j , а функции $-h_j$ голоморфны на \mathcal{R}_j^- , $j = 0, 1, 2$. В соответствии с условиями (9) склеим эти листы, как показано на рис. 1:

- по $\Delta_1 \cap \Delta_2$ склеим лист \mathcal{R}_0 с листом \mathcal{R}_0^- , \mathcal{R}_1 с \mathcal{R}_1^- и \mathcal{R}_2 с \mathcal{R}_2^- ;
- по $\Delta_1 \setminus \Delta_2$ склеим лист \mathcal{R}_0 с листом \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_0^- с \mathcal{R}_1^- ;
- по $\Delta_2 \setminus \Delta_1$ склеим лист \mathcal{R}_0 с листом \mathcal{R}_2 и \mathcal{R}_0^- с \mathcal{R}_2^- .

Рис. 1: Склейка листов поверхности \mathcal{R}

Полученную шестилистную ($m = 6$) риманову поверхность обозначим \mathcal{R} . Из таблицы 1 следует, что эта поверхность имеет 10 точек ветвления второго порядка ($\kappa_l = 2$, $l = 1, \dots, 10$): по две точки ветвления над точками a_1 и b_2 и по три точки ветвления над a_2 и b_1 . Поверхность \mathcal{R} имеет род $g = 0$ по формуле Римана–Гурвица:

$$2 - 2g = 2m - \sum_l (\kappa_l - 1).$$

Обсудим основные свойства функции h . Условия интегрируемости $d\sigma_j$ позволяют иметь весовым функциям (5) только интегрируемые особенности на Δ_j . Отсюда следует, что функция h может иметь особенности только вида простых полюсов и только в точках ветвления. Таким образом, h является рациональной функцией на \mathcal{R} , имеющей не более 10 полюсов. Поведение ветвей функции h в бесконечности следует из определений (4), (8) и того факта, что $\int d\sigma_j(x) = 1$ при $j = 1, 2$:

$$h_0(z) = \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad h_j(z) = \frac{-1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad j = 1, 2, \quad z \rightarrow \infty. \quad (11)$$

То есть h имеет шесть простых нулей на \mathcal{R} с заданными первыми коэффициентами разложения над бесконечно удаленной точкой. Для рациональной функции на сфере количество нулей совпадает с количеством

полюсов, а и их расположение определяет функцию с точностью до нормировки. Таким образом, функция h имеет еще не более четырех нулей на \mathcal{R} . При этом очевидно, что если $h_j(z_0) = 0$, то $-h_j(z_0) = 0$.

Приведенных условий достаточно, чтобы определить h и тем самым доказать существование абсолютно непрерывного равновесного заряда (2). Нас будут интересовать различные свойства h . Для этого будем искать h в явном виде. Можно рассмотреть симметрические функции от $(h_0, h_1, h_2, -h_0, -h_1, -h_2)$ и, используя разложения (11), по теореме Виета показать, что h удовлетворяет алгебраическому уравнению вида:

$$\mathbf{P}_6(h, z) := h^6 - \frac{6\tilde{P}_2(z)}{\Pi_4(z)}h^4 + \frac{9P_4(z)}{\Pi_4^2(z)}h^2 - \frac{4P_2^2(z)}{(z-a_2)(z-b_1)\Pi_4^2(z)} = 0, \quad (12)$$

где $\Pi_4(z) := (z-a_1)(z-a_2)(z-b_1)(z-b_2)$, а \tilde{P}_2, P_2, P_4 — многочлены степени 2, 2, 4 соответственно, с единичными старшими коэффициентами. Восемь комплексных неизвестных параметров, входящих в \tilde{P}_2, P_2, P_4 , определяются из условия о том, что риманова поверхность (12) совпадает с \mathcal{R} . Из того, что поверхность \mathcal{R} имеет ветвления только над точками a_1, a_2, b_1, b_2 , следует, что дискриминант уравнения (12) может иметь нули только четной кратности в точках, отличных от нулей Π_4 . Это условие можно записать в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. Однако поиск и отбор нужного решения представляет значительные трудности. Поэтому будет использован подход, основанный на униформизации алгебраической кривой.

Связь решения задачи 1 с алгебраическими функциями устанавливается похожим образом. Существенным различием является то, что условия равновесия выполняются не на отрезках Δ_j , а на априори неизвестных носителях $S(\lambda_j)$. Условия склейки (9) также выполняются на $S(\lambda_j)$. Риманова поверхность для соответствующей функции \tilde{h} склеивается по $S(\lambda_j)$. При $S(\lambda_j) \neq \Delta_j$ нужно дополнительно проверять неравенство на $\Delta_j \setminus S(\lambda_j)$ в условиях равновесия (1). Если носитель $S(\lambda_j)$ теряет связность, то условие равенства констант равновесия на компонентах связности дает дополнительное интегральное условие на \tilde{h} и концевые точки $S(\lambda_j)$. В этом случае соответствующая риманова поверхность имеет положительный род.

2 Случай непересекающихся отрезков

2.1 Алгебраическая функция h

Рассмотрим случай непересекающихся отрезков: $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, т.е.

$$\Delta_1 = [a_1, b_1], \quad \Delta_2 = [a_2, b_2], \quad a_1 < b_1 < a_2 < b_2. \quad (13)$$

В этом случае условия склейки (9) принимают вид:

$$h_0^\pm(x) = h_j^\mp(x), \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1, 2.$$

Тогда тройка функций (h_0, h_1, h_2) образует рациональную функцию h на римановой поверхности \mathcal{R}^+ , состоящей из трех листов $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, см. (10). Лист \mathcal{R}_0 склеивается с листом \mathcal{R}_j по отрезку Δ_j при $j = 1, 2$. Функция h имеет не более четырех простых полюсов в точках ветвления, три простых нуля над бесконечностью с разложениями (11) и, возможно, еще один нуль, положение которого предстоит определить.

Другими словами, для непересекающихся отрезков шестилистная поверхность \mathcal{R} (см. рис. 1) теряет связность и является объединением двух непересекающихся копий трехлистной поверхности \mathcal{R}^+ (см. рис. 2). Алгебраическое уравнение (12) для функции h приводимо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_6(h, z) &= -\mathbf{P}_3(h, z)\mathbf{P}_3(-h, z), \\ \mathbf{P}_3(h, z) &:= h^3 - \frac{3q_2(z)}{\Pi_4(z)}h + \frac{2q_1(z)}{\Pi_4(z)} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где q_1, q_2 — многочлены степени 1 и 2 соответственно, с единичными старшими коэффициентами. Три неизвестных параметра, входящие в q_1, q_2 , определяются из следующего условия. Дискриминант уравнения (14):

$$D := \frac{q_2^3 - q_1^2 \Pi_4}{\Pi_4^3}$$

может иметь нули только четной кратности, так как нуль дискриминанта нечетной кратности дает дополнительную точку ветвления h . Можно переписать это условие в виде системы алгебраических уравнений и убедиться, что в общем положении она имеет 18 различных решений. Среди этих решений одно соответствует искомой функции h , остальные связаны с другой нумерацией листов, другой римановой поверхностью

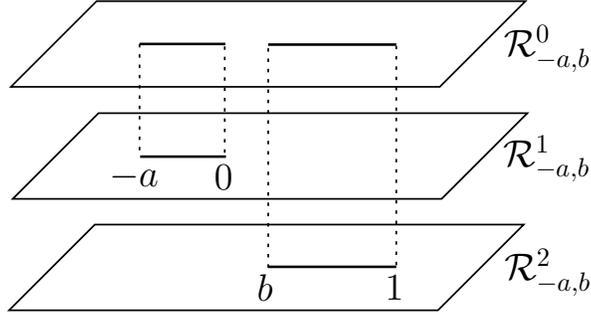


Рис. 2: Риманова поверхность $\mathcal{R}_{-a,b}$ (\mathcal{R}^+ при $\Delta_1 = [-a, 0]$, $\Delta_2 = [b, 1]$)

с ветвлениями над точками a_1, b_1, a_2, b_2 или римановой поверхностью положительного рода с дополнительной кубической точкой ветвления в кратном нуле дискриминанта (совпадающего, кстати, с неопределенным нулем соответствующей функции h в силу $h_0 + h_1 + h_2 \equiv 0$). Нашей целью является явное нахождение h , для этого нам понадобится униформизация римановой поверхности \mathcal{R}^+ .

2.2 Униформизация римановой поверхности

В этом разделе будет в явном виде построено конформное отображение φ римановой поверхности \mathcal{R}^+ при $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ на комплексную сферу $\overline{\mathbb{C}}_w$, см. [9]. Произведем несколько преобразований, упрощающих выкладки.

Во-первых, с точностью до линейного преобразования считаем, что

$$\Delta_1 = [-a, 0], \quad \Delta_2 = [b, 1], \quad a > 0, \quad 0 < b < 1. \quad (15)$$

Риманову поверхность \mathcal{R}^+ , зависящую от двух параметров a и b , будем обозначать $\mathcal{R}_{-a,b}$ (см. рис. 2). На поверхности определена естественная проекция: $\mathcal{R}_{-a,b} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathbb{C}}_z$. Точки на поверхности будем обозначать жирным шрифтом, при необходимости указывая индекс листа:

$$\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{-a,b}, \quad \mathbf{z}_j \in \mathcal{R}_{-a,b}^j, \quad \pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{z}_j) = z, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Во-вторых, рассмотрим конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}_z \xrightarrow{\zeta} \overline{\mathbb{C}}_Z$, переводящее тройку точек $(-a, 0, 1)$ в $(\infty, 0, 1)$, а точку b в B :

$$Z = \zeta(z) := \frac{(1+a)z}{z+a}, \quad B = \frac{(1+a)b}{a+b}, \quad b < B < 1. \quad (16)$$

Дробно-линейное отображение ζ сохраняет порядок точек на окружностях, поэтому

$$\zeta([-a, 0]) = [-\infty, 0], \quad \zeta([b, 1]) = [B, 1]. \quad (17)$$

Это отображение можно поднять с $\overline{\mathbb{C}}_z$ на риманову поверхность $\mathcal{R}_{-a,b}$, тогда получим конформное отображение $\mathcal{R}_{-a,b} \xrightarrow{\zeta} \mathcal{R}_{-\infty,B}$:

$$Z = \zeta(z) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_j = \zeta(\mathbf{z}_j), \quad j = 0, 1, 2.$$

Риманова поверхность $\mathcal{R}_{-\infty,B}$ строится так же, как и $\mathcal{R}_{-a,b}$, с заменой $-a$ на $-\infty$ и b на B .

Вначале построим конформное отображение $\mathcal{R}_{-\infty,B} \xrightarrow{\phi} \overline{\mathbb{C}}_w$. Применяя дробно-линейное отображение к $\overline{\mathbb{C}}_w$, можно фиксировать образы трех точек ветвления и ввести обозначение для образа четвертой точки:

$$\phi(\infty_{01}) = \infty, \quad \phi(\mathbf{0}_{01}) = 0, \quad \phi(\mathbf{1}_{02}) = 1, \quad \text{пусть} \quad \phi(\mathbf{B}_{02}) =: w_b. \quad (18)$$

Риманова поверхность $\mathcal{R}_{-\infty,B}$ осуществляет трехлистное накрытие сферы $\overline{\mathbb{C}}_Z$. Поэтому отображение $Z = R(w) := \pi \circ \phi^{-1}(w)$ является рациональной функцией третьего порядка со следующими значениями в критических точках $\infty, 0, 1, w_b$:

$$R(\infty) = \infty, \quad R(0) = 0, \quad R(1) = 1, \quad R(w_b) = B. \quad (19)$$

Критические точки $\infty, 0$ и значения в них (19) дают выражение для R :

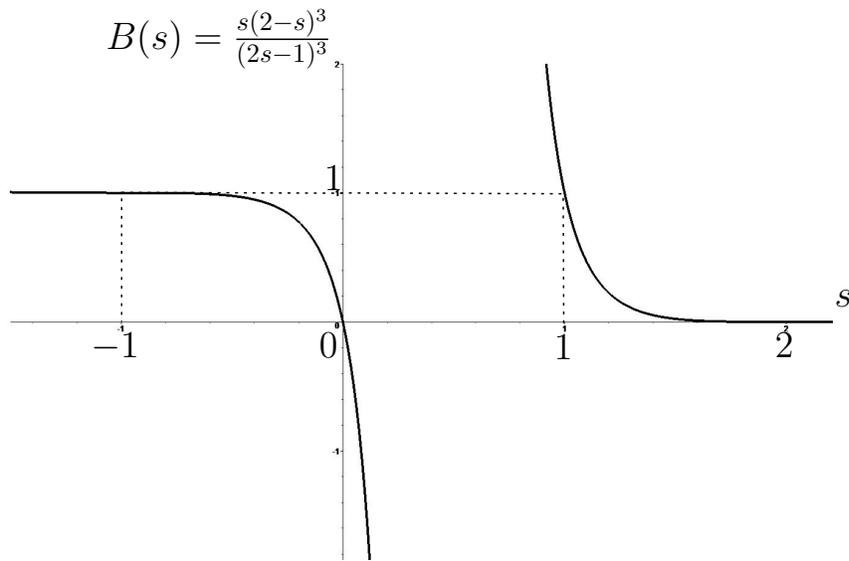
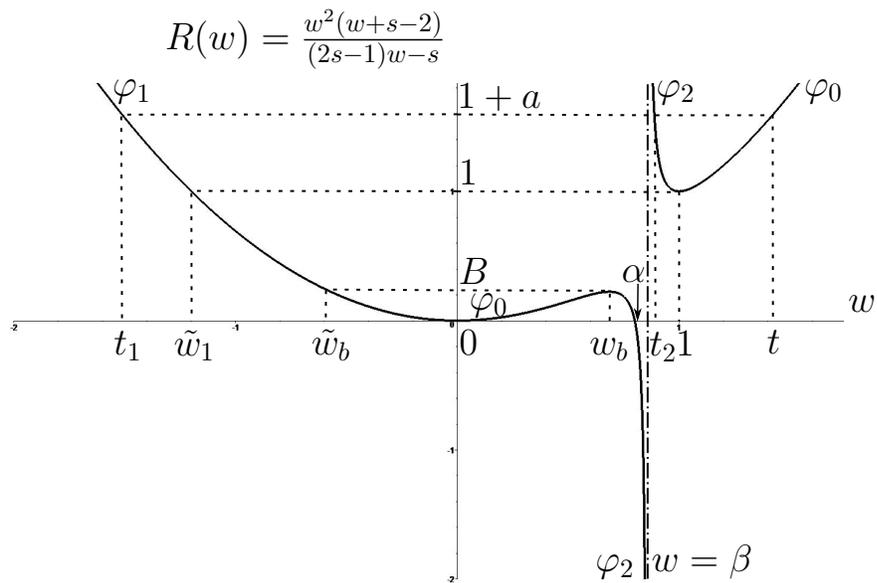
$$R(w) = \gamma w^2 \frac{w - \alpha}{w - \beta}, \quad R'(w) = \gamma w \frac{2w^2 - (\alpha + 3\beta)w + 2\alpha\beta}{(w - \beta)^2}.$$

Условия $R'(1) = R'(w_b) = 0$ по теореме Виета приводят к следующему:

$$w_b = \alpha\beta, \quad 1 + w_b = \frac{\alpha + 3\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad (\alpha\beta + 1) = \frac{\alpha + 3\beta}{2}.$$

Эти соотношения позволяют выразить β и w_b через α . Однако нам удобнее ввести параметр $s = 2 - \alpha$ и выразить все через него:

$$\alpha = 2 - s, \quad \beta = \frac{s}{2s - 1}, \quad w_b = \frac{s(2 - s)}{2s - 1}.$$

Рис. 3: График зависимости $B(s)$ Рис. 4: График зависимости $R(w)$ при $s \in (1, 2)$

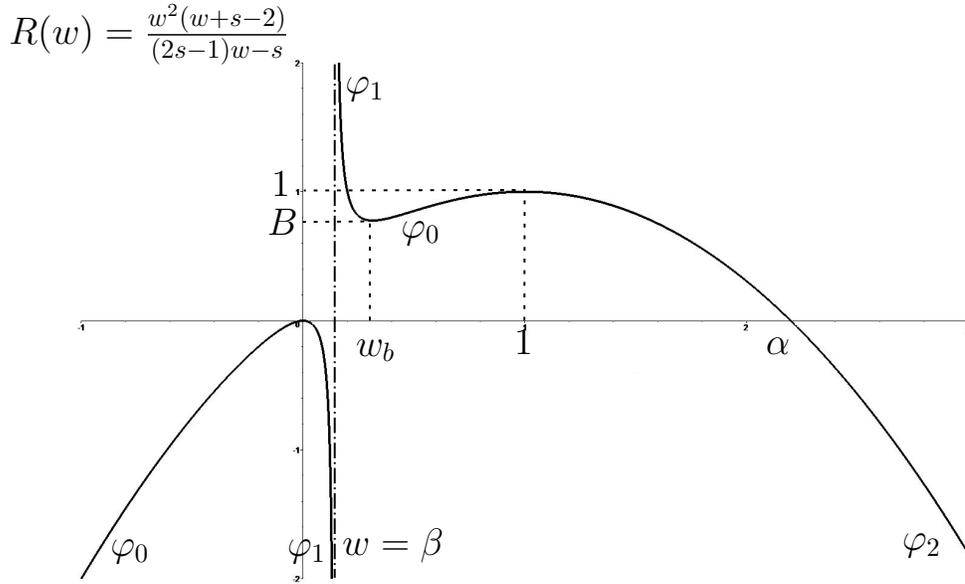


Рис. 5: График зависимости $R(w)$ при $s \in (-1, 0)$

Условия $R(1) = 1$ и $R(w_b) = B$ позволяют найти $\gamma = \frac{1-\beta}{1-\alpha}$ и

$$R(w) = \frac{w^2(w+s-2)}{(2s-1)w-s}, \quad B = R(w_b) = \frac{s(2-s)^3}{(2s-1)^3}. \quad (20)$$

Итак, нам удалось найти выражение для функции R , содержащее параметр s , который связан с параметром поверхности $B \in (b, 1)$ уравнением четвертого порядка:

$$s^4 + (8B - 6)s^3 + (12 - 12B)s^2 + (6B - 8)s - B = 0. \quad (21)$$

Осталось понять, какой из четырех корней этого уравнения соответствует поверхности $\mathcal{R}_{-\infty, B}$. При $B \in (0, 1)$ уравнение (21) имеет (см. рис. 3) два комплексно сопряженных и два вещественных корня: один из интервала $(-1, 0)$, другой — из $(1, 2)$.

Из графика функции R для вещественного аргумента (см. рис. 4) видно, что рассматриваемой поверхности соответствует параметр $s \in (1, 2)$. Остальные корни (21) приводят к другим группам монодромий в точках ветвления. Например, корню (21) из интервала $(-1, 0)$ соответствует поверхность, для которой листы могут быть склеены по $[0, B]$ и $[1, +\infty)$ (см. рис. 5). Заметим, что обратное отображение к (16) имеет вид:

$$z = \zeta^{-1}(Z) = \frac{aZ}{1+a-Z}.$$

Таким образом доказана следующая лемма.

Лемма 1. Композиция $\varphi := \phi \circ \zeta$ осуществляет конформное отображение $\mathcal{R}_{-a,b} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{C}}_w$. Обратное отображение $\mathbf{z}(w)$ имеет вид:

$$z = \pi(\mathbf{z}(w)) = \frac{aR(w)}{1+a-R(w)}, \quad R(w) = \frac{w^2(w+s-2)}{(2s-1)w-s}, \quad (22)$$

где параметр s определяется по a, b из условий:

$$\frac{s(2-s)^3}{(2s-1)^3} = \frac{(1+a)b}{a+b} = B, \quad s \in (1, 2).$$

Обозначения для образов характерных точек при отображении φ приведены в таблицах 2 и 3. В частности, использованы следующие обозначения для образов точек ∞_j :

$$t := \varphi(\infty_0), \quad t_j := \varphi(\infty_j), \quad R(t) = R(t_j) = 1+a, \quad j = 1, 2.$$

По теореме Виета выполняются соотношения:

$$t_1 + t_2 = -(s+t-2), \quad t_1 t_2 = -\frac{st(s+t-2)}{2st-s-t}. \quad (23)$$

Таблица 2: Образы характерных точек при отображении $\mathcal{R}_{-a,b} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{C}}_w$ (упорядочены по возрастанию $w \in \mathbb{R}$, начало)

$\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{-a,b}$	∞_1	$\mathbf{1}_1$	\mathbf{b}_1	$\mathbf{0}_{01}$	\mathbf{b}_{02}
$z = \pi(\mathbf{z})$	∞	1	b	0	b
$\mathbf{Z} = \zeta(\mathbf{z})$	$(\mathbf{1} + \mathbf{a})_1$	$\mathbf{1}_1$	\mathbf{B}_1	$\mathbf{0}_{01}$	\mathbf{B}_{02}
$w = \varphi(\mathbf{z})$	t_1	$\tilde{w}_1 = -s$	$\tilde{w}_b = \frac{s-2}{2s-1}$	0	$w_b = \frac{s(2-s)}{2s-1}$

Нетрудно видеть (см. рис. 4), что $t > 1$. Вместо $(a, b) \in (0, +\infty) \times (0, 1)$ будем использовать параметры $(s, t) \in (1, 2) \times (1, +\infty)$. Эти пары связаны друг с другом взаимно однозначным соответствием:

$$\begin{aligned} a(s, t) &= \frac{(s+t-2)t^2}{2st-s-t} - 1 = R(t) - 1, \\ b(s, t) &= \frac{a(s,t)B(s)}{1+a(s,t)-B(s)}, \quad B(s) = \frac{s(2-s)^3}{(2s-1)^3}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таблица 3: Образы характерных точек при отображении $\mathcal{R}_{-a,b} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{C}}_w$ (упорядочены по возрастанию $w \in \mathbb{R}$, окончание)

$\mathbf{z} \in \mathcal{R}_{-a,b}$	$\mathbf{0}_2$	$-\mathbf{a}_2$	∞_2	$\mathbf{1}_{02}$	∞_0	$-\mathbf{a}_{01}$
$z = \pi(\mathbf{z})$	0	$-a$	∞	1	∞	$-a$
$\mathbf{Z} = \zeta(\mathbf{z})$	$\mathbf{0}_2$	∞_2	$(\mathbf{1} + \mathbf{a})_2$	$\mathbf{1}_{02}$	$(\mathbf{1} + \mathbf{a})_0$	∞_{01}
$w = \varphi(\mathbf{z})$	$\alpha = 2 - s$	$\beta = \frac{s}{2s-1}$	t_2	1	t	∞

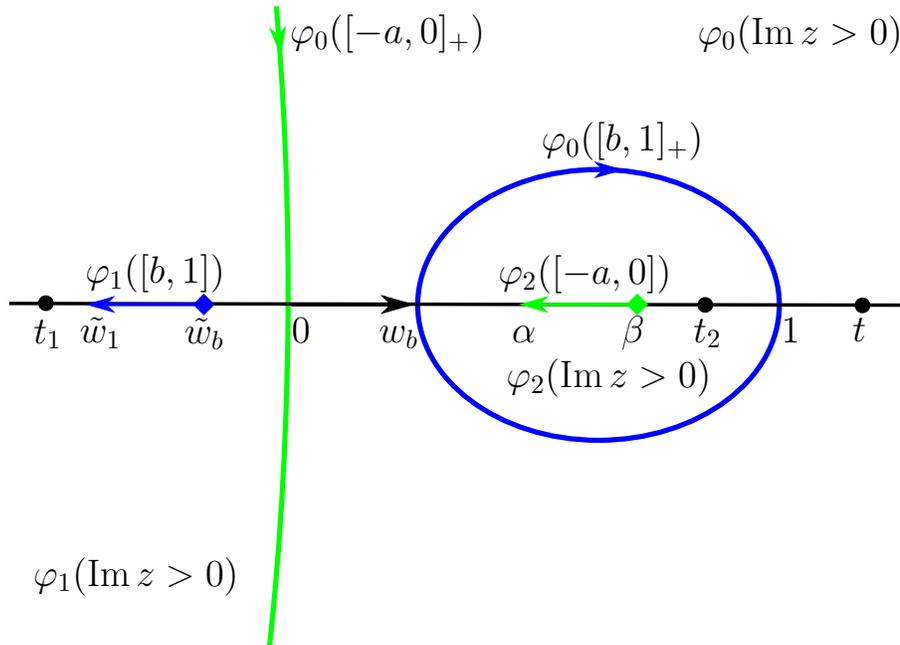


Рис. 6: Образы листов поверхности $\mathcal{R}_{-a,b}$ при отображении φ

Образы трех листов $\mathcal{R}_{-a,b}^j$ при отображении φ изображены на рис. 6, где сужения φ на листы $\mathcal{R}_{-a,b}^j$ обозначены $\varphi_j := \varphi|_{\mathcal{R}_{-a,b}^j}$, $j = 0, 1, 2$. Из графика функции R на рис. 4 видно, что при $Z \in (-\infty, 0) \cup (B, 1)$ уравнение $Z = R(w)$ имеет ровно один вещественный корень и два комплексно сопряженных. Отсюда и из (17) следует, что тем же свойством обладает при $z \in (-a, 0) \cup (b, 1)$ уравнение (см. (22)): $z = \zeta^{-1}(R(w))$. То есть образы разрезов римановой поверхности $\mathcal{R}_{-a,b}$ при отображении φ пересекают вещественную прямую \mathbb{R}_w только в образах точек ветвления, как и изображено на рис. 6.

2.3 Решение задачи равновесия в зарядах

Найдем функцию h на $\mathcal{R}_{-a,b}$. Функция h имеет простые полюсы в точках $-\mathbf{a}_{01}$, $\mathbf{0}_{01}$, \mathbf{b}_{02} , $\mathbf{1}_{02}$ и простые нули в точках ∞_0 , ∞_1 , ∞_2 , с заданным в (11) разложениями. На сфере $\overline{\mathbb{C}}_w$ рациональная функция $h(\mathbf{z}(w))$ имеет четыре простых полюса в точках ∞ , 0 , w_b , 1 и три нуля в t , t_1 , t_2 :

$$h = C_1 \frac{(w-t)(w-t_1)(w-t_2)(w-\delta)}{w(w-w_b)(w-1)}. \quad (25)$$

Положение нуля δ и константу C_1 находим из условий (11):

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zh_j(z) = \lim_{w \rightarrow t_j} \pi(\mathbf{z}(w))h(\mathbf{z}(w)) = -1. \quad (26)$$

При этом третье условие в (11)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zh_0(z) = \lim_{w \rightarrow t} \pi(\mathbf{z}(w))h(\mathbf{z}(w)) = 2$$

является следствием (26), поскольку дифференциальная форма $h(\mathbf{z})dz$ на $\mathcal{R}_{-a,b}$ имеет полюса только над ∞ , а сумма вычетов равна нулю.

Технически проще найти функцию $1 + zh$. Эта функция на $\mathcal{R}_{-a,b}$ имеет три полюса в точках $-\mathbf{a}_{01}$, \mathbf{b}_{02} , $\mathbf{1}_{02}$ и два нуля в ∞_1 , ∞_2 . В точках $\mathbf{0}_{01}$, $\mathbf{0}_2$ функция $1 + zh$ принимает значение 1. В координатах w имеем:

$$1 + zh = \frac{(w-t_1)(w-t_2)}{(w-1)(w-w_b)} (\gamma_1 w + \gamma_0(w-\alpha)),$$

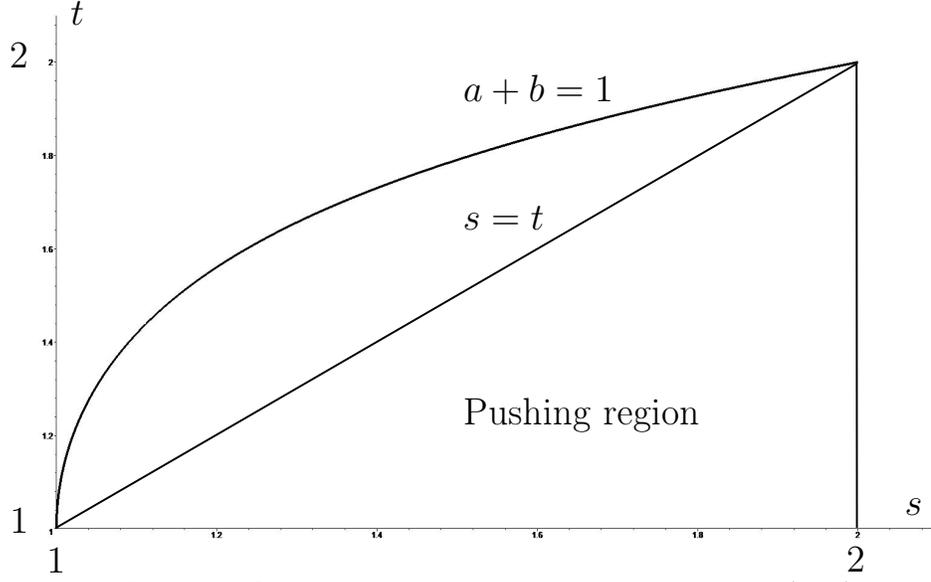
где константы γ_0 , γ_1 подбираются так, чтобы в правой части этого выражения первое слагаемое принимало значение 1 при $w = \alpha$, а второе — при $w = 0$. После некоторых преобразований получим предложение.

Предложение 1. Для непересекающихся отрезков (15) рациональная функция h на поверхности $\mathcal{R}_{-a,b}$ в координатах w (22) имеет вид (25),

$$\delta = \frac{(-2st + 3s + t)(s + t - 2)t}{(2st - s - t)(s + 3t - 2)}, \quad (27)$$

$$C_1 = \frac{-(2st - s - t)^2(s + 3t - 2)}{2(s + t - 2)(s + t)(2s - 1)(t - 1)^2 t^2} < 0, \quad (28)$$

параметры (s, t) связаны с (a, b) соотношениями (24), а симметрические функции от t_1, t_2 выражены через (s, t) в (23).

Рис. 7: Область изменения параметров (s, t)

В дальнейшем будет использоваться предположение о том, что длина отрезка Δ_1 не превосходит длины Δ_2 , т.е. $a + b \leq 1$. Кривая, соответствующая случаю равных отрезков, когда $a + b = 1$, в координатах (s, t) (см. рис. 7) может быть задана параметрически:

$$a + b = 1, \quad b \in (0, 1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s(p) = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right), \\ t(p) = \frac{1}{2} \frac{p^2 - 1}{\sqrt{p(p^2 - p + 1)}}, \end{cases} \quad p \in (1, 2 + \sqrt{3}).$$

Нетрудно показать, что из $a + b \leq 1$ следует $t < 2 < \frac{3s}{2s-1}$.

Найдем положение δ на $\overline{\mathbb{C}_w}$. Равенство (27) является кубическим уравнением относительно t . Можно проверить, что

$$\begin{aligned} \delta = 0 & \quad \Leftrightarrow \quad t = 0, \quad t = \frac{3s}{2s-1} > 2, \quad t = \alpha < 1, \\ \delta = w_b & \quad \Leftrightarrow \quad t = s, \quad t = \tilde{w}_b < 0, \quad t = w_b < 1, \\ \delta = 1 & \quad \Leftrightarrow \quad t = 1, \quad t = -\tilde{w}_b < 1, \quad t = -s < -1. \end{aligned} \quad (29)$$

В рассматриваемой области изменения параметров (s, t) знаменатель правой части (27) положителен, т.е. зависимость $\delta(s, t)$ непрерывна. Из (29) следует, что δ не принимает значения 0 и 1, $\delta(s, s) = w_b \in (0, 1)$. Таким образом, выполнены условия:

$$\begin{aligned} s < t & \quad \Rightarrow \quad \delta \in (0, w_b), \quad \mathbf{z}(\delta) \in \mathcal{R}_{-a,b}^0, \quad \pi(\mathbf{z}(\delta)) \in (0, b), \\ s = t & \quad \Rightarrow \quad \delta = w_b, \quad \mathbf{z}(\delta) = \mathbf{b}_{02}, \quad \pi(\mathbf{z}(\delta)) = b, \\ s > t & \quad \Rightarrow \quad \delta \in (w_b, 1), \quad \mathbf{z}(\delta) \in \mathcal{R}_{-a,b}^2, \quad \pi(\mathbf{z}(\delta)) \in \mathbb{R} \setminus [b, 1]. \end{aligned}$$

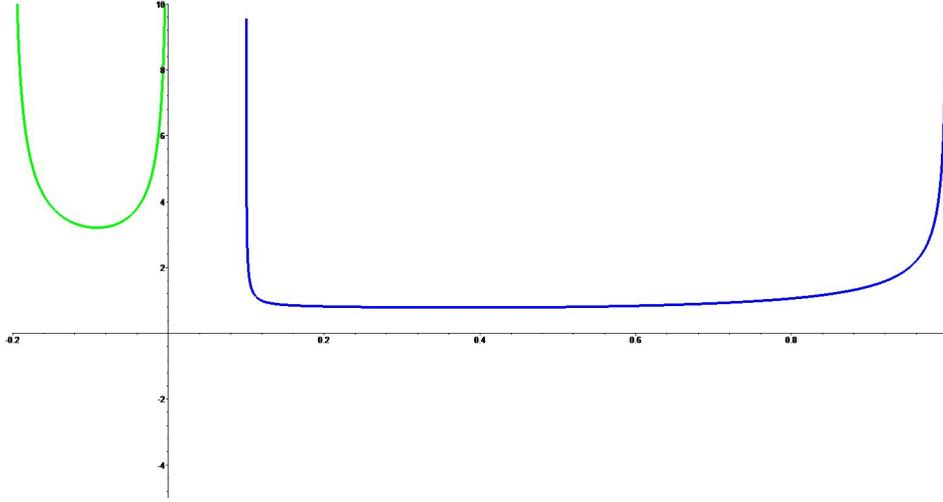


Рис. 8: Плотности равновесных зарядов (мер) для непересекающихся отрезков (15) при $s < t$ ($1 - a \geq b > b^*(a)$)

Из которых следует, что при смене знака $s - t$ нуль функции h на $\mathcal{R}_{-a,b}$ переходит с листа $\mathcal{R}_{-a,b}^0$ на лист $\mathcal{R}_{-a,b}^2$ через точку ветвления \mathbf{b}_{02} .

Покажем, что при условии $s \leq t$ равновесные заряды (5) являются положительными мерами (см. рис. 8), т.е. решения задач 1 и 2 совпадают.

Если $s \leq t$, то $0 < \delta \leq w_b$, т.е. нули и полюсы функции $h(\mathbf{z}(w))$ чередуются на вещественной прямой. При $s = t$ происходит сокращение нуля и полюса в точке w_b , но чередование сохраняется. Отсюда следует, что, во-первых, производная $h(\mathbf{z}(w))$ не меняет знак на \mathbb{R} :

$$s \leq t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dw} h(\mathbf{z}(w)) < 0, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Во-вторых, функция $h(\mathbf{z}(w))$ принимает вещественные значения только при вещественных w :

$$s \leq t, \quad \operatorname{Im} w > 0 \quad (< 0) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} h(\mathbf{z}(w)) < 0 \quad (> 0). \quad (30)$$

Плотности равновесных зарядов σ_j непрерывны и равны:

$$\frac{d\sigma_j}{dx}(x) = \frac{1}{2\pi i}(h_j^+ - h_j^-)(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} h_j^+(x), \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1, 2.$$

Докажем, что при $s \leq t$ эти плотности не обращаются в нуль внутри соответствующих отрезков. Приведем рассуждение от противного для индекса $j = 2$. Предположим, что $h_2^+(y) \in \mathbb{R}$ при некотором y внутри

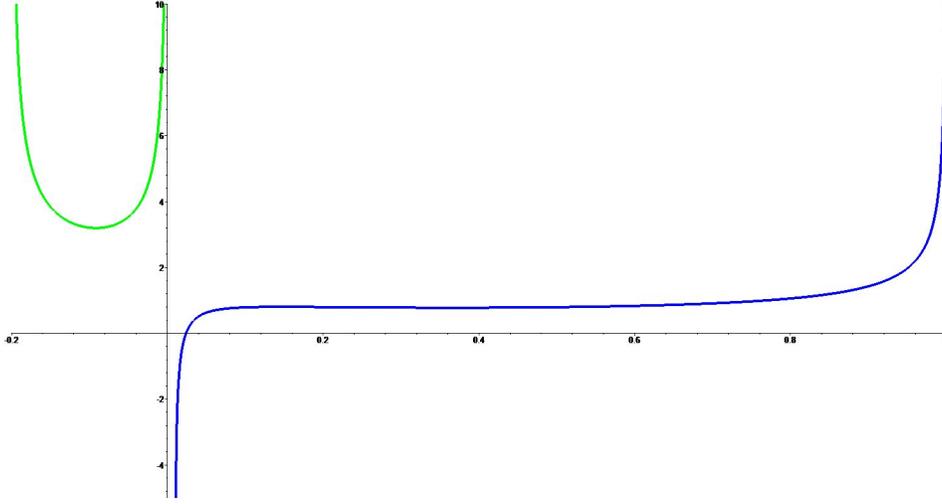


Рис. 9: Плотности равновесных зарядов для непересекающихся отрезков (15) при $s > t$ ($\Leftrightarrow b < b^*(a)$)

Δ_2 . Точка y соответствует предельному значению y^+ на верхнем берегу разреза Δ_2 , которое в свою очередь соответствует точке \mathbf{y}_2^+ на втором листе римановой поверхности:

$$h_2^+(y) := h_2(y^+) = h(\mathbf{y}_2^+), \quad \mathbf{y}_2^+ \in \mathcal{R}_{-a,b}^2, \quad \pi(\mathbf{y}_2^+) = y^+.$$

Точка \mathbf{y}_2^+ лежит на разрезе римановой поверхности $\mathcal{R}_{-a,b}$, поэтому $w_y := \varphi(\mathbf{y}_2^+) \notin \mathbb{R}$ (см. рис. 6). Тогда, в силу (30), $h(\mathbf{z}(w_y)) = h(\mathbf{y}_2^+) \notin \mathbb{R}$, что противоречит предположению.

Таким образом, в силу непрерывности веса равновесных зарядов σ_j знакопостоянны. Их положительность следует из построения:

$$\int d\sigma_j(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_j} (h_j^+ - h_j^-)(x) dx = \text{Res}_\infty h_j = 1.$$

Критическому значению $s = t$, в силу (24), соответствует следующая зависимость между a и b , которая была ранее найдена в [5], [10]:

$$s = t \Leftrightarrow a = s - 1, \quad b = b^*(a) := \frac{(1-a)^3}{9(a^2 + a + 1)}, \quad \frac{b^*}{1-b^*} = \left(\frac{1-a}{2+a}\right)^3. \quad (31)$$

Решения задач 1 и 2 совпадают при $b \geq b^*(a)$, т.е. если отрезок Δ_2 не намного длиннее отрезка Δ_1 .

При $s > t$ ($\Leftrightarrow b < b^*(a)$) плотность равновесного заряда σ_2 меняет знак (см. рис. 9) и решения задач 1 и 2 различны.

2.4 Решение задачи равновесия в мерах

Решение этой задачи получено в [5]. В предыдущем пункте было доказано, что выражения (25), (27), (28) определяют алгебраическую функцию \hbar на $\mathcal{R}_{-a,b}$, решающую задачу равновесия 1 при $b \geq b^*(a)$ ($\Leftrightarrow s \leq t$):

$$b \geq b^*(a) \quad \Rightarrow \quad \hbar = h.$$

В критическом случае, когда $b = b^*(a)$, выполняются соотношения: $a = s - 1$ и $s = t$. Все величины, входящие в (25), выражаются через s :

$$s = t \quad \Rightarrow \quad t_1 t_2 = -s, \quad t_1 + t_2 = -2(s - 1), \quad \delta = w_b. \quad (32)$$

Функция \hbar на \mathcal{R}_{-a,b^*} в координатах w имеет вид:

$$b = b^*(a) \quad \Rightarrow \quad \hbar = h^* := \frac{(w - a - 1)(w^2 + 2aw - a - 1)}{-a(a + 1)w(w - 1)}. \quad (33)$$

Вес компоненты равновесной меры λ_2 обнуляется в конечной точке $b^*(a)$.

Покажем, что равновесная мера при $b < b^*(a)$ совпадает с равновесной мерой при $b = b^*(a)$, т.е. носители компонент равновесной меры имеют вид: $S(\lambda_1) = \Delta_1$, $S(\lambda_2) = [b^*, 1]$, а соответствующая алгебраическая функция \hbar на \mathcal{R}_{-a,b^*} совпадает с (33):

$$b \leq b^*(a) \quad \Rightarrow \quad \hbar = h^*.$$

Таким образом, вторая компонента равновесной меры сталкивается с левым концом отрезка Δ_2 .

Условия равновесия на носителях $S(\lambda_j)$ выполнены по построению, и осталось проверить, что справедливо неравенство

$$(2V^{\lambda_2} + V^{\lambda_1})(x) - \omega_2 \geq 0, \quad x \in \Delta_2 \setminus S(\lambda_2) = [b, b^*]. \quad (34)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (2V^{\lambda_2} + V^{\lambda_1})(z) - \omega_2 &= \operatorname{Re} (2\mathcal{V}^{\lambda_2} + \mathcal{V}^{\lambda_1})_{\pm}(z) - \omega_2 = \\ &= \operatorname{Re} \int_{b^*}^z (2h_2^* + h_1^*)(\xi) d\xi = \operatorname{Re} \int_{b^*}^z (h_2^* - h_0^*)(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы проверить (34), достаточно показать, что

$$h_0^*(x) > h_2^*(x), \quad x \in (0, b^*).$$

В координатах w это неравенство принимает вид:

$$h^*(\mathbf{z}(w_0)) > h^*(\mathbf{z}(w_2)), \quad w_0 := \varphi_0(x) \in (0, w_b), \quad w_2 := \varphi_2(x) \in (w_b, \alpha),$$

которое справедливо в силу монотонного убывания $h^*(\mathbf{z}(w))$ на $(0, 1)$.

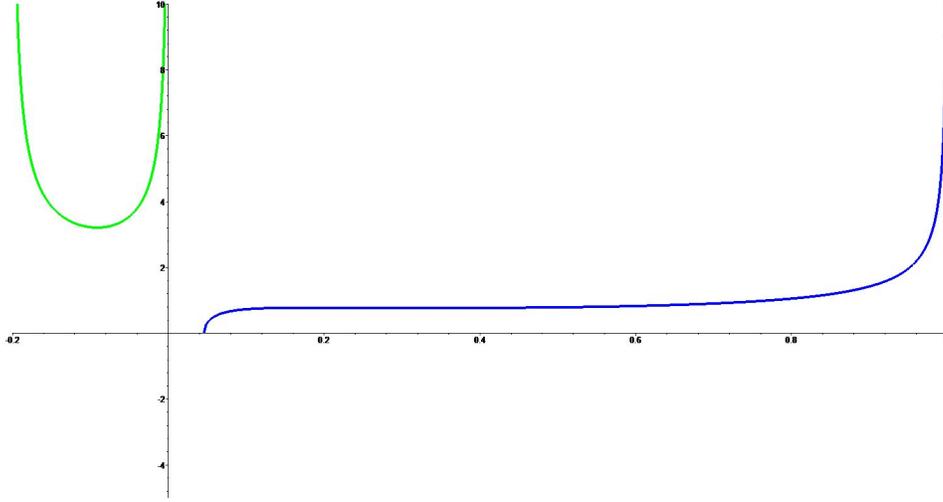


Рис. 10: Плотности равновесных мер для непересекающихся отрезков (15) при $b \leq b^*(a)$

2.5 Алгебраическая функция Φ

На римановой поверхности $\mathcal{R}_{-a,b}$ рассмотрим рациональную функцию Φ (см. [6]) со следующим дивизором: $\infty_1 + \infty_2 - 2\infty_0$, т.е. сужения Φ на листы $\mathcal{R}_{-a,b}^j$ имеют следующие разложения в ∞ :

$$\Phi_0(z) = c_0 z^2 + O(z), \quad \Phi_j(z) = \frac{c_j}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad j = 1, 2, \quad z \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Логарифмическая производная $\frac{\Phi'}{\Phi}$ является рациональной функцией на $\mathcal{R}_{-a,b}$. Она может иметь полюса только в точках ветвления, причем простые. Поведение $\frac{\Phi'}{\Phi}$ и h в бесконечности совпадают (см. (11)). Имеем:

$$\frac{d}{dz} \log \Phi(\mathbf{z}) = \frac{\Phi'}{\Phi}(\mathbf{z}) = h(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathcal{R}_{-a,b}.$$

Нетрудно убедиться, что симметрическая функция $\Phi_0\Phi_1\Phi_2$ является целой. Из поведения в бесконечности (35) следует ее ограниченность, так как $(\Phi_0\Phi_1\Phi_2)(\infty) = c_0c_1c_2$. По теореме Лиувилля имеем:

$$(\Phi_0\Phi_1\Phi_2)(z) = c_0c_1c_2, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (36)$$

В координатах w дивизор Φ имеет вид: $t_1 + t_2 - 2t$. Таким образом, фиксируя мультипликативную константу, имеем:

$$\Phi(\mathbf{z}(w)) = \frac{(w - t_1)(w - t_2)}{(w - t)^2}.$$

Выразим $c_0c_1c_2$ через параметры s, t . После некоторых преобразований получим:

$$c_0c_1c_2 = \frac{\left(t_1 - \frac{s}{2s-1}\right) \left(t_2 - \frac{s}{2s-1}\right)}{\left(t - \frac{s}{2s-1}\right)^2},$$

где t_1t_2 и $t_1 + t_2$ выражены через s, t в (23).

Далее будем обсуждать расположение отрезков (15), при котором происходит столкновение, т.е. $b \leq b^*(a)$ и Φ — рациональная функция на \mathcal{R}_{-a, b^*} , $\frac{\Phi'}{\Phi} = h^*$. В этом случае, в силу (32), имеем $s = a + 1$ и

$$\Phi(\mathbf{z}(w)) = \frac{w^2 + 2(s-1)w - s}{(w-s)^2}, \quad c_0c_1c_2 = \frac{-1}{4s(s-1)}. \quad (37)$$

Напомним, что в предыдущем пункте проверялось неравенство (34):

$$(2V^{\lambda_2} + V^{\lambda_1})(z) - \omega_2 = \operatorname{Re} \int_{b^*}^z (h_2^* - h_0^*)(\xi) d\xi = \log \left| \frac{\Phi_2}{\Phi_0} \right|(z) \geq 0. \quad (38)$$

Мы показали, что $\left| \frac{\Phi_2}{\Phi_0} \right|$ убывает на $(0, b^*)$ и поэтому выполнено вложение:

$$[0, b^*) \subset \Gamma := \{x \in \mathbb{R} : |\Phi_2(x)| > |\Phi_0(x)|\}.$$

Определение Γ корректно, так как из условий склейки и условий равновесия следуют равенства на разрезах поверхности \mathcal{R}_{-a, b^*} :

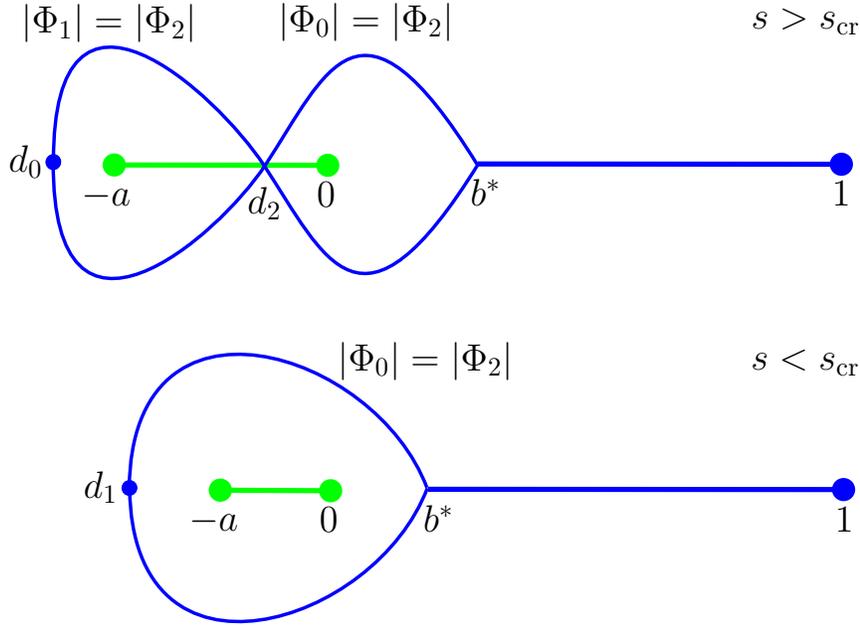
$$\begin{aligned} \Phi_0^\pm(x) &= \Phi_1^\mp(x), & |\Phi_0^\pm|(x) &= |\Phi_1^\pm|(x), & x &\in [-a, 0], \\ \Phi_0^\pm(x) &= \Phi_2^\mp(x), & |\Phi_0^\pm|(x) &= |\Phi_2^\pm|(x), & x &\in [b^*, 1]. \end{aligned}$$

Найдем множество Γ . Построим кривые равенства модулей ветвей функции Φ , см. рис. 6. Не будем останавливаться на доказательстве того, что глобальная структура этих кривых имеет вид, изображенный на рисунке. Это можно сделать, используя факты, полученные ниже. В зависимости от значения параметра s множество Γ имеет вид:

$$\begin{aligned} s < s_{\text{cr}} &\Rightarrow \Gamma = (d_1, b^*), \\ s = s_{\text{cr}} &\Rightarrow \Gamma = (-a, b^*), \\ s > s_{\text{cr}} &\Rightarrow \Gamma = (d_2, b^*). \end{aligned} \quad (39)$$

В точке d_1 ветви Φ_0, Φ_2 вещественны и равны по модулю. Нетрудно проверить, что они принимают значения разных знаков, то есть уравнение на d_1 имеет вид:

$$s < s_{\text{cr}}, \quad (\Phi_0 + \Phi_2)(d_1) = 0. \quad (40)$$

Рис. 11: Линии равных модулей ветвей функции Φ

Аналогично получаем уравнение на d_0 :

$$s > s_{\text{cr}}, \quad (\Phi_1 + \Phi_2)(d_0) = 0.$$

Пусть $(j_0 j_1 j_2)$ — перестановка (012) , тогда уравнение $\Phi_{j_1} + \Phi_{j_2} = 0$ эквивалентно алгебраическому уравнению относительно $w \in \varphi(\mathcal{R}_{-a, b^*}^{j_0})$:

$$(4s^2 - 4s - 1)w^3 + (4s^3 - 12s^2 + 3s + 4)w^2 + (-4s^3 - 3s^2 + 12s - 4)w + s^3 + 4s^2 - 4s = 0. \quad (41)$$

Кубическое уравнение (41) при любых $s \in (1, 2)$ имеет по одному корню на каждом из интервалов (α, β) и $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_b)$, которые дают решения $\text{Re } \Phi_j = 0$ на соответствующем разрезе, $j = 1, 2$. Третий корень (41) обозначим w_d . Этот корень конечен при $s \neq s_{\text{cr}}$, где

$$s_{\text{cr}} := \frac{1 + \sqrt{2}}{2}. \quad (42)$$

В зависимости от знака $s - s_{\text{cr}}$ корень w_d соответствует искомым точкам d_0 или d_1 :

$$\begin{aligned} s < s_{\text{cr}} &\Rightarrow w_d = \varphi_1(d_1) \in (-\infty, t_1(s)), \\ s > s_{\text{cr}} &\Rightarrow w_d = \varphi_0(d_0) \in (s, +\infty). \end{aligned}$$

В точке d_2 равны по модулю все три ветви Φ . При этом $\Phi_2(d_2) \in \mathbb{R}$, а $\Phi_0^+(d_2)$ и $\Phi_1^+(d_2)$ комплексно сопряжены. Поэтому, с учетом (36) и (37), получаем уравнение на d_2 :

$$s > s_{\text{cr}}, \quad \Phi_2(d_2) = \frac{-1}{\sqrt[3]{4s(s-1)}}. \quad (43)$$

Можно показать, что в переменной w это квадратное уравнение (см. (36)) имеет при $s > s_{\text{cr}}$ один корень на интервале (α, β) . Этот корень и определяет положение точки d_2 .

В данном пункте найдены уравнения на концевые точки множества Γ . На вещественной оси следующие условия равносильны:

$$x \in \Gamma \Leftrightarrow (2V^{\lambda_2} + V^{\lambda_1})(x) > \omega_2. \quad (44)$$

Поэтому полученные результаты могут быть использованы при решении задачи 1 для пересекающихся отрезков.

2.6 Замечание о касающихся отрезках

Кратко обсудим случай, когда отрезки (15) имеют одну общую точку:

$$\Delta_1 = [-a, 0], \quad \Delta_2 = [0, 1], \quad 0 < a \leq 1.$$

Решения задач равновесия 1 и 2, явные формулы для алгебраических функций h и \tilde{h} , униформизация римановой поверхности, условия столкновения получаются из рассмотренного выше предельным переходом:

$$b \rightarrow +0 \Rightarrow B \rightarrow +0 \Rightarrow s \rightarrow 2 - 0.$$

Функция h , отвечающая за решение задачи 2 (в зарядах), строится на римановой поверхности $\mathcal{R}_{-a,0}$ с кубической точкой ветвления в 0. Решения задач 1 и 2 совпадают только для случая равных отрезков, т.е. при $a = 1$. Асимптотика многочленов Анжелеско для равных касающихся отрезков изучалась в [17]. Заметим, что этот случай соответствует двойному пределу с произвольным соотношением между s и t :

$$b \rightarrow +0, \quad a \rightarrow 1 - 0 \Rightarrow s \rightarrow 2 - 0, \quad t \rightarrow 2 - 0.$$

При $a \in (0, 1)$ функция \tilde{h} , соответствующая решению задачи 1 (в мерах), строится, как и ранее, при $s > t$ на римановой поверхности \mathcal{R}_{-a,b^*} , где $b^* = b^*(a) > 0$ определена в (31). Таким образом, в случае касающихся отрезков разной длины всегда происходит столкновение равновесной меры с большего отрезка.

3 Случай перекрывающихся отрезков

3.1 Решение задачи равновесия в зарядах

Рассмотрим случай перекрывающихся отрезков. С точностью до линейного преобразования будем считать, что

$$\Delta_1 = [-a, b], \quad \Delta_2 = [0, 1], \quad a > 0, \quad 0 < b < 1, \quad a + b \leq 1. \quad (45)$$

Требуется найти рациональную функцию h на шестилистной поверхности \mathcal{R} (рис. 1), имеющую простые полюсы в 10 точках ветвления \mathcal{R} и шесть простых нулей над бесконечностью с заданными первыми коэффициентами разложения (11).

Согласно (9) при переходе через разрез $[0, b]$ ветви этой функции меняют знак. Рассмотрим ветвь $\sqrt{z(z-b)}$, голоморфную в $\mathbb{C} \setminus [0, b]$, с условием $\sqrt{z(z-b)} = z + O(1)$, $z \rightarrow \infty$. Рассмотрим функции

$$\tilde{h}_j(z) := \sqrt{z(z-b)} h_j(z), \quad z \in \mathcal{R}_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Тогда тройка функций $(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ определяет рациональную функцию \tilde{h} на рассмотренной выше трехлистной поверхности $\mathcal{R}_{-a,b}$. Простые полюса функции h в точках ветвления над $0, b$ сокращаются с нулями радикала. Поэтому \tilde{h} может иметь особенности в виде простых полюсов только в точках ветвления над $-a, 1$. Нули функции h над бесконечностью сокращаются с полюсами радикала:

$$\tilde{h}(\infty_0) = 2, \quad \tilde{h}(\infty_j) = -1, \quad j = 1, 2.$$

Эти условия позволяют восстановить два нуля \tilde{h} на $\mathcal{R}_{-a,b}$ и нормировочный множитель. В координатах w функция $(1 + \tilde{h})$ задается выражением

$$(1 + \tilde{h}) = \gamma_2 \frac{(w - t_1)(w - t_2)}{w - 1},$$

где постоянная γ_2 находится из условия $(1 + \tilde{h})(t) = 3$. Преобразуя эти выражения, получим следующее предложение.

Предложение 2. *Для перекрывающихся отрезков (45) рациональная функция h на поверхности \mathcal{R} определяется через рациональную функцию $\tilde{h} = h\sqrt{z(z-b)}$ на $\mathcal{R}_{-a,b}$, которая в координатах w (22) равна:*

$$\tilde{h} = C_2 \frac{(w - \delta_1)(w - \delta_2)}{w - 1}, \quad C_2 = \frac{3(2st - s - t)}{2(s^2 + 2st - 2s - t)} > 0,$$

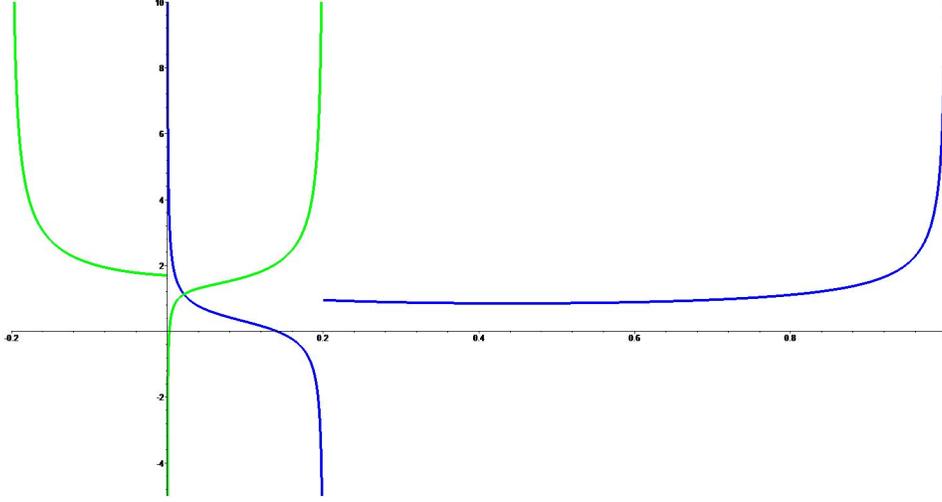


Рис. 12: Плотности равновесных зарядов для перекрывающихся отрезков (45) при $s < t$ ($\Leftrightarrow b > b^*(a)$)

где (s, t) связаны с (a, b) соотношениями (24), а нули δ_1, δ_2 — корни квадратного трехчлена:

$$P_2(w) := 3(2st - s - t)w^2 + (4s^2t + 2st^2 - 3s^2 - 14st - t^2 + 6s + 6t)w + (s - t)(2 - s)t.$$

Таблица 4: Значения многочлена P_2 в некоторых характерных точках

w	$P_2(w)$	$\text{sgn}P_2(w)$
$\tilde{w}_b = \frac{s-2}{2s-1}$	$2(2-s)(t-w_b)(\frac{3s}{2s-1}-t)$	1
0	$(2-s)(s-t)t$	$\text{sgn}(s-t)$
$w_b = \frac{s(2-s)}{2s-1}$	$-(2-s)(s-1)(t-w_b)(\frac{3s}{2s-1}-t)$	-1
$\alpha = 2-s$	$(2-s)(s-1)(t-s)t$	$\text{sgn}(t-s)$
1	$3(s-1)(s+t)(t-1)$	1

В таблице 4 приведены значения многочлена P_2 в характерных точках. Учитывая переменны знака P_2 , получим, что корни δ_1, δ_2 вещественны. Кроме того, в зависимости от знака $s - t$, имеем:

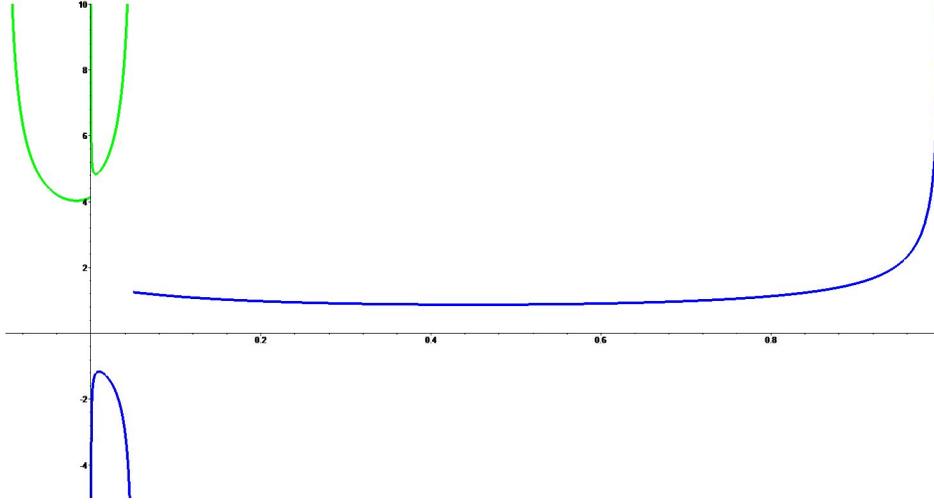


Рис. 13: Плотности равновесных зарядов для перекрывающихся отрезков (45) при $s > t$ ($\Leftrightarrow b < b^*(a)$)

$$\begin{aligned}
 s < t &\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 \in (\tilde{w}_b, 0), & \mathbf{z}(\delta_1) \in \mathcal{R}_{-a,b}^1, & \pi(\mathbf{z}(\delta_1)) \in (0, b), \\ \delta_2 \in (w_b, \alpha), & \mathbf{z}(\delta_2) \in \mathcal{R}_{-a,b}^2, & \pi(\mathbf{z}(\delta_2)) \in (0, b), \end{cases} \\
 s = t &\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0, & \mathbf{z}(\delta_1) = \mathbf{0}_{01}, & \pi(\mathbf{z}(\delta_1)) = 0, \\ \delta_2 = \alpha, & \mathbf{z}(\delta_2) = \mathbf{0}_2, & \pi(\mathbf{z}(\delta_2)) = 0, \end{cases} \\
 s > t &\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 \in (0, w_b), & \mathbf{z}(\delta_1) \in \mathcal{R}_{-a,b}^0, & \pi(\mathbf{z}(\delta_1)) \in (0, b), \\ \delta_2 \in (\alpha, 1), & \mathbf{z}(\delta_2) \in \mathcal{R}_{-a,b}^2, & \pi(\mathbf{z}(\delta_2)) \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [0, 1]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

При $s < t$ функция \tilde{h}_j ($j = 1, 2$) имеет нуль на $(0, b)$. Плотности компонент равновесного заряда меняют знак на общей части (рис. 12), поскольку удовлетворяют равенству на $(0, b)$:

$$\sigma'_j(x) = \frac{1}{2\pi i} (h_j^+ - h_j^-)(x) \stackrel{(0,b)}{=} \frac{1}{\pi} \sqrt{x(b-x)} \tilde{h}_j(x), \quad j = 1, 2.$$

При $s > t$ плотности равновесного заряда нулей не имеют, но положительными не являются (рис. 13). Это вытекает из леммы 2 ниже. При $s = t$ графики плотностей равновесного заряда изображены на рис. 14.

Лемма 2. Пусть заряды ν_1, ν_2 с конечными $|\nu_j^\pm|$ удовлетворяют условию равновесия в окрестности жесткого конца ν_2 в нуле:

$$(V^{\nu_1} + V^{\nu_2})(x) = \omega, \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \lim_{x \rightarrow +0} \nu_2'(x) = +\infty.$$

Тогда в окрестности точки 0 заряды ν_1, ν_2 имеют разные знаки:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \nu_1'(x) = -\infty.$$

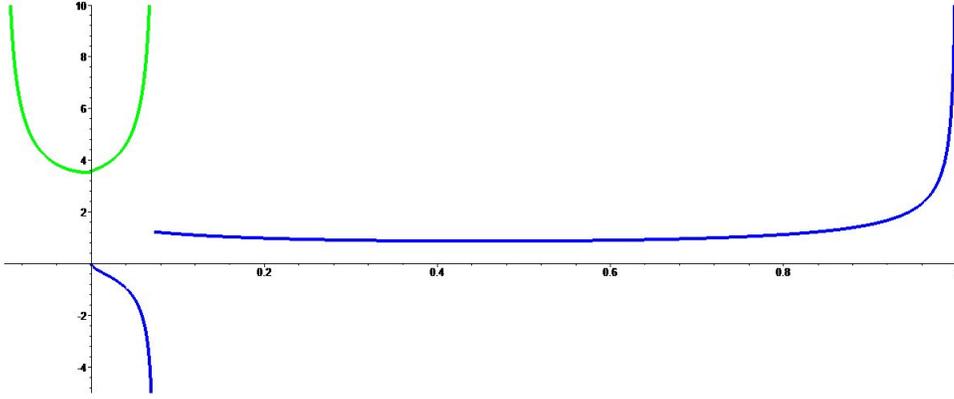


Рис. 14: Плотности равновесных зарядов для перекрывающихся отрезков (45) при $s = t$ ($\Leftrightarrow b = b^*(a)$)

Доказательство. Пусть $\widehat{\nu}_j$ — классическое выметание части заряда ν_j из области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ на ее границу при $j = 1, 2$, а λ — вероятностная равновесная мера отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$, тогда для $C = |\nu_1^+| - |\nu_1^-| + |\nu_2^+| - |\nu_2^-|$ весовые функции удовлетворяют условию:

$$(\nu_1 + \widehat{\nu}_1 + \nu_2 + \widehat{\nu}_2)'(x) = C\lambda'(x), \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Отсюда следует, что величина $(\nu_1 + \nu_2)'$ конечна в окрестности 0, что доказывает требуемое.

3.2 Решение задачи равновесия в мерах при некоторых условиях на отрезки

Из леммы 2 следует, что для перекрывающихся отрезков решения задач 1 и 2 различны. Однако в некоторых случаях решение задачи в мерах совпадает с критическим решением h^* , найденным в (33).

С точностью до линейного преобразования можно считать, что

$$\Delta_1 = [-a, 0], \quad \Delta_2 = [-b, 1], \quad 0 < b \leq a \leq 1 + b.$$

Мы рассмотрим более жесткое ограничение, когда $a < 1$. По параметру a определим $b^* = b^*(a)$ и s (см. (31)). Решим задачу равновесия в мерах для непересекающихся отрезков Δ_1 и $[b^*, 1]$. Тогда в силу (44) та же векторная мера будет решать задачу и для пары отрезков Δ_1 и $[-b, 1]$, при условии, что $-b$ принадлежит замыканию Γ . С учетом (39) и (42) получаем, что при $a \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ все $b \leq a$ подходят; при $a \in \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, 1\right)$ подходят все $b \leq -d_2(s)$, см. (43).

4 Случай вложенных отрезков

4.1 Решение задачи равновесия в зарядах

Рассмотрим случай вложенных отрезков $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то есть

$$\Delta_1 = [a_1, b_1], \quad \Delta_2 = [a_2, b_2], \quad a_2 \leq a_1 < b_1 \leq b_2.$$

Нетрудно видеть, что при $\Delta_1 \setminus \Delta_2 = \emptyset$ поверхность \mathcal{R} (рис. 1) распадается на двулистную и четырехлистную связные компоненты. Многочлен \mathbb{P}_6 (12) приводим. Можно было бы найти явные выражения для соответствующих алгебраических функций h . Однако оказывается, что для вложенных отрезков решение задачи равновесия в зарядах записывается в виде линейной комбинации чебышёвских распределений. Пусть

$$d\lambda_{\Delta}(x) := \frac{dx}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x \in \Delta = [a, b],$$

тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Для вложенных отрезков $\Delta_1 \subset \Delta_2$ решение задачи равновесия в зарядах имеет вид:*

$$\sigma_1(x) = \lambda_{\Delta_1}(x), \quad \sigma_2(x) = \frac{3}{2} \lambda_{\Delta_2}(x) - \frac{1}{2} \lambda_{\Delta_1}(x).$$

Доказательство сразу следует из условий равновесия для $V^{\lambda_{\Delta_j}}$ на Δ_j .

4.2 Решение задачи равновесия в мерах при некоторых условиях на отрезки

Найденный в предложении 3 равновесный заряд является мерой только при $\Delta_1 = \Delta_2$. Укажем другие условия на расположение отрезков, когда нетрудно указать решение задачи равновесия в мерах. Без ограничения общности можно считать, что

$$\Delta_1 = [-a, 0], \quad \Delta_2 = [-b, 1], \quad 0 < a \leq b.$$

Будем дополнительно предполагать, что $a \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. По параметру a определим $b^* = b^*(a)$ и s (см. (31)). Тогда решение задачи равновесия в мерах для непересекающихся отрезков Δ_1 и $[b^*, 1]$ будет решать и задачу для Δ_1 и $[-b, 1]$ при условии $-b \geq d_1(s)$, где d_1 определено в (40).

Список литературы

- [1] A. Angelesco, Sur deux extensions des fractions continues algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **168** (1919), 262–265.
- [2] Е. М. Никишин, О совместных аппроксимациях Паде, *Матем. сб.*, **113(155):4(12)** (1980), 499–519.
- [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа, *Тр. МИАН СССР*, **157** (1981), 31–48.
- [4] J. Nuttall, Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials, *J. Approx. Theory*, **42:4** (1984), 299–386.
- [5] А. И. Аптекарев, В. А. Калягин, Асимптотическое поведение корня n -ой степени многочленов совместной ортогональности и алгебраические функции, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1986, №60.
- [6] А. И. Аптекарев, Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско, *Матем. сб.*, **136(178):1(5)** (1988), 56–84.
- [7] M. Yattselev, Strong asymptotics of Hermite–Padé approximants for Angelesco systems with complex weights, *Canad. J. Math.*, **68(5)** (2016), 1159–1200.
- [8] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов, *УМН*, **66:6(402)** (2011), 123–190.
- [9] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, Трехлистные римановы поверхности рода 0 с фиксированными проекциями точек ветвления, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2007, №13, 21 с.
- [10] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, V. G. Lysov, D. N. Toulyakov, Equilibrium of vector potentials and uniformization of the algebraic curves of genus 0, *J. Comput. Appl. Math.*, **233:3** (2009), 602–616.
- [11] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0), *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, Art. ID rpm007.

- [12] В. Н. Сорокин, О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера, *Матем. сб.*, **201**:10 (2010), 137–160.
- [13] N. R. Ikononov, R. K. Kovacheva, S. P. Suetin, Some numerical results on the behavior of zeros of the Hermite–Padé polynomials, 2015 , 95 pp., arXiv: 1501.07090.
- [14] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, M. Yattselev, Hermite–Padé approximants for a pair of Cauchy transforms with overlapping symmetric supports, *accepted in Comm. Pure Appl. Math*, arXiv: 1505.03993.
- [15] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, Рациональные аппроксимации и ортогональность, Наука, М., 1988.
- [16] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78.
- [17] В. А. Калягин, Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности, *Матем. сб.*, **110(152)**:4(12) (1979), 609–627.

Оглавление

1	Постановка задачи	3
1.1	Введение	3
1.2	Векторные задачи равновесия	6
1.3	Связь с алгебраическими функциями	8
2	Случай непересекающихся отрезков	13
2.1	Алгебраическая функция h	13
2.2	Униформизация римановой поверхности	14
2.3	Решение задачи равновесия в зарядах	20
2.4	Решение задачи равновесия в мерах	24
2.5	Алгебраическая функция Φ	25
2.6	Замечание о касающихся отрезках	28
3	Случай перекрывающихся отрезков	29
3.1	Решение задачи равновесия в зарядах	29
3.2	Решение задачи равновесия в мерах при некоторых условиях на отрезки	32
4	Случай вложенных отрезков	33
4.1	Решение задачи равновесия в зарядах	33
4.2	Решение задачи равновесия в мерах при некоторых условиях на отрезки	33