[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru/) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru/)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints/) • [Препринт № 8 за 2016 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-8)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Троицкая А.В., Сазонов В.В.

О периодических движениях спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Троицкая А.В., Сазонов В.В. О периодических движениях спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 8. 19 с. doi:**10.20948/prepr-2016-8**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-8**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

А.В. Троицкая, В.В. Сазонов

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА С БОЛЬШИМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Москва – 2016

Аннотация

Рассматривается вращательное движение осесимметричного спутника-гиростата под действием гравитационного момента на круговой орбите. Изучаются периодические движения оси симметрии спутника относительно орбитальной системы координат. Такие движения описываются автономной системой дифференциальных уравнений 4-го порядка. Гиростатический момент считается большим, что позволяет ввести в уравнения движения большой параметр. Порождающими решениями служат решения, которые в орбитальной системе координат выглядят как регулярная прецессия, а в абсолютном пространстве представляют собой покой. Ось симметрии в порождающем решении составляет с плоскостью орбиты ненулевой угол. Ранее был изучен предельный случай таких периодических движений, когда в порождающем решении ось симметрии спутника совпадала с плоскостью орбиты. В предельном случае период решений равен половине орбитального периода, в новых движениях период зависит от указанного угла. Доказательство существования новых движений состоит в сведении краевой задачи, определяющей периодические решения, к системе интегральных уравнений и решении последних методом последовательных приближений.

A.V. Troitskaya, V.V. Sazonov. On periodic motions of a satellite-gyrostat with a large inner angular momentum. We consider an axially symmetric satellite with a large inner angular momentum (i.e. the satellite is a gyrostat) directed along the symmetry axis. The satellite center of mass moves along a circular orbit around an attractive center, the satellite attitude motion being affected by the gravitational torque. We investigate periodic motions of the satellite symmetry axis relative to the orbital coordinate system. Such motions are described by the autonomous system of differential equations of the fourth order that contains a large parameter. The generating solutions appear as a regular precession in the orbital coordinate system and as a rest in absolute space, the symmetry axis being formed a nonzero angle with the orbital plane. Earlier we investigated the limiting case of such periodic motions, when the symmetry axis lied in the orbital plane in generating solutions. Earlier we investigated the limiting case of such periodic motions, when the symmetry axis lied in the orbital plane in generating solutions. The period of the limiting solution is equal to a half of orbital one. The periods of new solutions depend on the angle mentioned above. To prove the existence of the new periodic solution, we reduce the boundary value problem that specifies them to the system of integral equations. The later is solved by the method of successive approximations.

1. Уравнения движения и их свойства. Рассмотрим спутник, представляющий собой осесимметричный гиростат, центр масс которого движется по неизменной круговой орбите вокруг неподвижного притягивающего центра. Гиростатический момент спутника – постоянный и направлен вдоль его оси материальной симметрии. Для записи уравнений вращательного движения спутника введем три правых декартовых системы координат.

Система $x_1x_2x_3$ образована осями Резаля [1] спутника, ось x_1 направлена по оси его материальной симметрии. Система $Z_1Z_2Z_3$ – инерциальная, ось Z_2 перпендикулярна плоскости орбиты спутника и направлена по вектору кинетического момента его орбитального движения. Система $Y_1Y_2Y_3$ – орбитальная, ось Y_3 направлена по радиус-вектору центра масс спутника относительно притягивающего центра, ось Y_2 параллельна оси Z_2. Поскольку орбита спутника круговая, угол между осями Y_3 и Z_3 линейно зависит от времени t. Будем считать, что этот угол равен $\omega_0 t$, где ω_0 – среднее движение спутника.

Положение системы $x_1x_2x_3$ относительно системы $Y_1Y_2Y_3$ будем задавать углами α и β. Система $Y_1Y_2Y_3$ переводится в систему $x_1x_2x_3$ двумя поворотами (здесь полагаем, что эти системы имеют общее начало координат): 1) на угол $\alpha+\pi/2$ вокруг оси Y_2, 2) на угол β вокруг оси Y_3, получившейся после первого поворота. Геометрический смысл этих углов: β – угол между осью x_1 и плоскостью орбиты Y_1Y_3, $\beta>0$, если эта ось лежит в полупространстве $Y_2>0$; α – угол между осью $(-Y_3)$ и проекцией оси x_1 на плоскость Y_1Y_3, направление отсчета этого угла согласовано с направлением оси Y_2. Углы $\delta=\alpha+\omega_0 t$ и β задают положение системы $x_1x_2x_3$ относительно системы $Z_1Z_2Z_3$ подобно тому, как углы α и β задают положение системы $x_1x_2x_3$ относительно системы $Y_1Y_2Y_3$.

Из внешних моментов, приложенных к спутнику, будем учитывать только гравитационный. В этом случае теорема об изменении кинетического момента вращательного движения спутника записывается следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=3\omega_0^2(I_1-I_2)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_3)(\mathbf{E}_3\times\mathbf{n}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{K}$ – кинетический момент спутника в его движении относительно центра масс, I_1 и I_2 – полярный и экваториальный главные центральные моменты инерции спутника, $\mathbf{n}$ – орт оси x_1, $\mathbf{E}_3$ – орт оси Y_3.

В случае $|\mathbf{K}|\approx\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}=K_1$ можно принять $\mathbf{K}=K_1\mathbf{n}$. Подставив это соотношение в (1), получим

$$K_1\frac{d\mathbf{n}}{dt}+\mathbf{n}\frac{dK_1}{dt}=3\omega_0^2(I_1-I_2)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_3)(\mathbf{E}_3\times\mathbf{n}).$$

Скалярное умножение последнего уравнения на $\mathbf{n}$ дает $dK_1/dt=0$. Следовательно, K_1 можно считать параметром. Уравнение

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{3\omega_0^2(I_1 - I_2)}{K_1}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_3)(\mathbf{E}_3\times\mathbf{n}) \qquad (2)$$

запишем в орбитальной системе координат $Y_1Y_2Y_3$. В этом случае

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{n}}{dt} + \omega_0\mathbf{E}_2\times\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (-\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta, -\cos\alpha\cos\beta),$$

$$\mathbf{E}_2 = (0,1,0), \quad \mathbf{E}_3 = (0,0,1).$$

Здесь символ $\tilde{d}/dt$ означает локальную производную вектора в орбитальной системе, $\mathbf{E}_2$ – орт оси Y_2. Подставив выписанные соотношения в (2), получим три уравнения относительно производных $d\alpha/dt$ и $d\beta/dt$. Эти уравнения совместны, так как уравнение (2) допускает интегральное соотношение $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$. Имеем

$$\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0 = -\frac{3\omega_0^2(I_1 - I_2)}{K_1}\cos^2\alpha\sin\beta, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{3\omega_0^2(I_1 - I_2)}{K_1}\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta. \quad (3)$$

Уравнения (3) совпадают с так называемыми эволюционными уравнениями, полученными и исследованными В.В. Белецким [2] (в [2] вместо угла β использован угол $\pi/2-\beta$). Точнее, они являются их частным случаем, соответствующим быстрому вращению осесимметричного спутника вокруг его оси симметрии. Белецкий рассмотрел более общую задачу, когда быстрое движение такого спутника близко к регулярной прецессии Эйлера. Однако переход к этому более общему случаю непринципиально изменяет только вид постоянного множителя $3\omega_0^2(I_1 - I_2)/K_1$ в (3).

Введя обозначение

$$G(\alpha,\beta) = \omega_0\sin\beta - \frac{3\omega_0^2(I_1 - I_2)}{2K_1}\cos^2\alpha\cos^2\beta,$$

уравнения (3) можно записать в виде

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\cos\beta}\frac{\partial G(\alpha,\beta)}{\partial\beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\cos\beta}\frac{\partial G(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}.$$

Эти уравнения допускают первый интеграл $G(\alpha,\beta)$ и могут быть проинтегрированы. Белецкий нашел точное общее решение уравнений (3) в эллиптических функциях Якоби, а также, применив метод усреднения, получил приближенные формулы решения при $K_1 >> 3\omega_0\,|I_1 - I_2|$. В этом случае α – быстрая, β – медленная переменные; усреднение уравнений (3) по α дает

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\,\omega_0 - \frac{3\omega_0^2(I_1 - I_2)}{2K_1}\sin\beta, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

В общем решении усредненных уравнений $\beta = \mathrm{const}$, α – линейная функция времени. При $K_1 >> 3\omega_0\,|I_1 - I_2|$ точные решения уравнений (3), лежащие вне малых окрестностей полюсов $\beta=\pm\pi/2$ сферы $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$, являются периодическими. Для каждого решения существует такое число $T>0$ (период), что в этом решении $\alpha(t+T)\equiv\alpha(t)-\pi$, $\beta(t+T)\equiv\beta(t)$. Условие периодичности для α записано с учетом того обстоятельства, что эта переменная входит в уравнения (3) периодически с периодом π. Период движения оси x_1 относительно орбитальной системы координат, описываемого таким решением, равен $2T$.

Ниже предполагается, что $|\mathbf{K}|\approx K_1>>3\omega_0|I_1-I_2|$, и доказывается существование решений уравнения (1), периодических относительно орбитальной системы координат и близких решениям уравнений (3). Для более детального описания задачи соотношение (1) запишем в системе $x_1x_2x_3$. В этом случае

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K},\quad \mathbf{K}=(K_1,I_2\omega_2,I_2\omega_3),$$

$$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\quad \mathbf{n}=(1,0,0),\quad \mathbf{E}_3=(-\cos\alpha\cos\beta,\cos\alpha\sin\beta,-\sin\alpha),$$

$$\omega_1=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\omega_0\right)\sin\beta,\quad \omega_2=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\omega_0\right)\cos\beta,\quad \omega_3=\frac{d\beta}{dt}.$$

Здесь символ $\tilde{d}/dt$ означает локальную производную вектора в системе $x_1x_2x_3$, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость этой системы. Подставив выписанные выражения в (1) и приняв во внимание соотношение $\omega_1=\omega_2\tan\beta$, получим уравнения

$$\frac{dK_1}{dt}=0,$$

$$I_2\frac{d\omega_2}{dt}+(K_1-I_2\omega_2\tan\beta)\omega_3=3\omega_0^2(I_1-I_2)\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta,\tag{4}$$

$$I_2\frac{d\omega_3}{dt}-(K_1-I_2\omega_2\tan\beta)\omega_2=3\omega_0^2(I_1-I_2)\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta.$$

В силу первого уравнения $K_1=\mathrm{const}$, эту величину считаем параметром уравнений. В выписанных соотношениях перейдем к безразмерным переменным и параметрам

$$\Omega_2=\frac{\omega_2}{\omega_0},\quad \Omega_3=\frac{\omega_3}{\omega_0},\quad h=\frac{K_1}{I_2\omega_0},\quad \mu=\frac{3(I_2-I_1)}{I_2},$$

а также к безразмерному времени $\omega_0 t$, которое ниже будем обозначать t. В результате получим систему

$$\dot{\alpha}=\frac{\Omega_2}{\cos\beta}-1,\quad \dot{\beta}=\Omega_3,$$

$$\dot{\Omega}_2=-(h-\Omega_2\tan\beta)\Omega_3-\mu\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta,\tag{5}$$

$$\dot{\Omega}_3=(h-\Omega_2\tan\beta)\Omega_2-\mu\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta.$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по новому времени t, первые два уравнения следуют из выписанных выше выражений для ω_2 и ω_3, остальные уравнения – безразмерная форма последних двух уравнений (4).

Замена переменных $\delta = \alpha + t$ переводит уравнения (5) в уравнения

$$\dot\delta = \frac{\Omega_2}{\cos\beta}, \quad \dot\beta = \Omega_3,$$
$$\dot\Omega_2 = -(h - \Omega_2 \tan\beta)\Omega_3 - \mu\cos(\delta - t)\sin(\delta - t)\cos\beta, \tag{6}$$
$$\dot\Omega_3 = (h - \Omega_2 \tan\beta)\Omega_2 - \mu\cos^2(\delta - t)\sin\beta\cos\beta.$$

Уравнения (5) служат для описания движения спутника относительно орбитальной системы координат. Их периодические решения – основной объект исследования в данной работе. Уравнения (6) удобны для описания движения спутника относительно инерциальной системы $Z_1Z_2Z_3$. Они используются для анализа предельного периодического решения уравнений (5).

Укажем некоторые свойства выписанных уравнений, которые будут использованы ниже. Правые части уравнений (5) периодически зависят от угла α с периодом π. Эти уравнения автономны и инвариантны относительно преобразования

$$t \to -t, \quad \alpha \to -\alpha, \quad \Omega_3 \to -\Omega_3. \tag{7}$$

Уравнения (6) инвариантны относительно преобразования

$$t \to -t, \quad \delta \to -\delta, \quad \Omega_3 \to -\Omega_3.$$

Правые части этих уравнений периодически зависят от δ и времени с периодом π. Обе системы уравнений инвариантны относительно преобразования

$$h \to -h, \quad \beta \to -\beta, \quad \Omega_3 \to -\Omega_3. \tag{8}$$

2. Постановка задачи. Будем искать периодические решения системы (5), определенные при достаточно больших значениях $|h|$ и удовлетворяющие условиям

$$|\beta| < \beta_{\max} < \frac{\pi}{2}, \quad \Omega_2 = O(h^{-1}), \quad \Omega_3 = O(h^{-1}).$$

В решениях уравнений (5), удовлетворяющих этим условиям,

$$\Omega_2 \approx \frac{\mu}{h}\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta, \quad \Omega_3 \approx -\frac{\mu}{h}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta. \tag{9}$$

Подставив эти соотношения в первые два уравнения (5), получим

$$\dot\alpha = -1 + \frac{\mu}{h}\cos^2\alpha\sin\beta, \quad \dot\beta = -\frac{\mu}{h}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta. \tag{10}$$

Это безразмерная форма уравнений (3). Сказанное относительно этих уравнений в п. 1 позволяет определить периодические решения системы (5) следующим образом. Периодическим решением этой системы будем называть решение, в котором при некотором $T > 0$ переменная α удовлетворяет соотношению $\alpha(t+T)\equiv\alpha(t)-\pi$, а остальные переменные – T-периодические функции t. Период T зависит от начальных условий решения и заранее неизвестен, но известна его оценка $T=\pi+O(h^{-1})$. Такое решение описывает периодическое движение оси симметрии спутника относительно орбитальной системы координат. Его реальный период равен $2T$, поскольку $\alpha(t+2T)\equiv\alpha(t)-2\pi$. Однако принятое определение периода целесообразно с формальной точки зрения.

Исследуя решения системы (10), без ограничения общности можно принять $\alpha(0)=0$. Поскольку эта система инвариантна относительно замены переменных $t\to-t$, $\alpha\to-\alpha$, ее решение с таким начальным условием удовлетворяет соотношениям

$$\alpha(-t)\equiv-\alpha(t),\quad \beta(-t)\equiv\beta(t). \tag{11}$$

Пусть T – период этого решения, т.е. $\alpha(t+T)\equiv\alpha(t)-\pi$, $\beta(t+T)\equiv\beta(t)$. Тогда

$$\alpha\left(-t+\frac{T}{2}\right)\equiv-\alpha\left(t-\frac{T}{2}\right)\equiv-\pi-\alpha\left(t+\frac{T}{2}\right),\quad \beta\left(-t+\frac{T}{2}\right)\equiv\beta\left(t-\frac{T}{2}\right)\equiv\beta\left(t+\frac{T}{2}\right).$$

Положив $t=0$ в последних соотношениях для α, получим $\alpha(T/2)=-\pi/2$.

Рассмотрим для системы (10) краевую задачу

$$\alpha(0)=\alpha\left(\frac{T}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=0. \tag{12}$$

Используя указанную выше инвариантность системы (10), можно установить соотношения (11) и

$$\alpha\left(-t+\frac{T}{2}\right)\equiv-\pi-\alpha\left(t+\frac{T}{2}\right),\quad \beta\left(-t+\frac{T}{2}\right)\equiv\beta\left(t+\frac{T}{2}\right). \tag{13}$$

В силу этих соотношений

$$\alpha(t+T)\equiv\alpha\left(t+\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)=-\pi-\alpha\left(-t-\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)=-\pi-\alpha(-t)\equiv\alpha(t)-\pi,$$

$$\beta(t+T)\equiv\beta\left(t+\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)\equiv\beta\left(-t-\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)\equiv\beta(-t)\equiv\beta(t).$$

Таким образом, исследование общего решения системы (10) при достаточно большом $|h|$ можно свести к исследованию для нее краевой задачи (12).

Решение краевой задачи (10), (12), дополненное соотношениями (9), может служить приближением для периодического решения системы (5). В этом случае

$$\Omega_2(-t)\equiv\Omega_2(t),\quad \Omega_2\left(-t+\frac{T}{2}\right)\equiv\Omega_2\left(t+\frac{T}{2}\right), \tag{14}$$

$$\Omega_3(-t)\equiv-\Omega_3(t),\quad \Omega_3\left(-t+\frac{T}{2}\right)\equiv-\Omega_3\left(t+\frac{T}{2}\right),$$

т.е. $\Omega_2(t)$ – четная, $\Omega_3(t)$ – нечетная T-периодические функции. Весь набор функций удовлетворяет соотношениям

$$\alpha(0)=\Omega_3(0)=\alpha\left(\frac{T}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\Omega_3\left(\frac{T}{2}\right)=0. \tag{15}$$

Эти соотношения задают краевую задачу для системы (5). Используя инвариантность задачи (5), (15) относительно преобразования (7), можно доказать, что всякое ее решение удовлетворяет соотношениям (11), (13), (14) и, следовательно, является T-периодическим.

Уравнения (10), усредненные по α, имеют вид

$$\dot{\alpha}=-1+\frac{\mu}{2h}\sin\beta, \quad \dot{\beta}=0.$$

Общее решение этих уравнений

$$\alpha=\alpha_0-\left(1-\frac{\mu}{2h}\sin\beta_0\right)t, \quad \beta=\beta_0 \quad (\alpha_0, \beta_0-\text{const}).$$

Оно позволяет получить оценки искомого периодического решения системы (10) со средним за период значением $\beta(t)$, равным β_0:

$$\beta(t)-\beta_0=O(h^{-1}), \quad T=\pi\left(1-\frac{\mu}{2h}\sin\beta_0\right)^{-1}. \tag{16}$$

При $\beta_0=0$ имеем $T=\pi+O(h^{-2})$. В этом случае применяемая ниже схема доказательства не подходит. В окрестности точки $\beta_0=0$ рассматривается система (6) и разыскиваются ее решения с периодом π. Такие решения описывают периодические движения оси симметрии спутника не только относительно орбитальной системы координат, но и относительно абсолютного пространства. Причем в последнем случае имеют место ограниченные колебания, в которых $\delta=O(h^{-1})$, $\beta=O(h^{-1})$.

Переходя от системы (5) к системе (6) и учитывая инвариантность последней относительно преобразования (6), рассмотрим для нее краевую задачу

$$\delta(0)=\Omega_3(0)=\delta\left(\frac{\pi}{2}\right)=\Omega_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{17}$$

Можно доказать, что всякое решение задачи (6), (17) удовлетворяет соотношениям

$$\delta(-t)\equiv-\delta(t), \quad \beta(-t)\equiv\beta(t), \quad \Omega_2(-t)\equiv\Omega_2(t), \quad \Omega_3(-t)\equiv-\Omega_3(t),$$

$$\delta\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\equiv-\delta\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \quad \beta\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\equiv\beta\left(t+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Omega_2\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\equiv\Omega_2\left(t+\frac{\pi}{2}\right),\quad \Omega_3\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\equiv-\Omega_3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

и, следовательно, является π-периодическим.

Доказательство существования решения задачи (6), (17), определенного при $|h|>>1$ и удовлетворяющего условию $\delta=O(h^{-1})$, $\beta=O(h^{-1})$, приведено в [3, 4]. Ниже доказывается существование решения краевой задачи (5), (15). Доказательство выполняется по схеме, полученной упрощением схемы [5].

Краевые задачи (5), (15) и (6), (17) инвариантны относительно преобразования (9), поэтому ниже ограничимся случаем $h>0$.

Твердое тело – частный случай рассматриваемого гиростата. Для него $K_1=I_1\omega_1$. Но с технической точки зрения гиростат интереснее, поскольку в рассматриваемых движениях угловая скорость несущего тела может быть малой – порядка $O(h^{-1})$.

3. Вспомогательные преобразования и формулировка теоремы. В системе (5) сделаем замену переменных $t\mapsto\tau$, $\alpha\mapsto\xi$: $t=\tau(1+a)$, $\alpha=\xi-\tau$. Постоянную величину a будем искать из условия, что преобразованная система

$$\frac{1}{1+a}\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{\Omega_2}{\cos\beta}-\frac{a}{1+a},\quad \frac{1}{1+a}\frac{d\beta}{d\tau}=\Omega_3,$$

$$\frac{1}{1+a}\frac{d\Omega_2}{d\tau}=-(h-\Omega_2\tan\beta)\Omega_3-\mu\cos(\xi-\tau)\sin(\xi-\tau)\cos\beta, \tag{18}$$

$$\frac{1}{1+a}\frac{d\Omega_3}{d\tau}=(h-\Omega_2\tan\beta)\Omega_2-\mu\cos^2(\xi-\tau)\sin\beta\cos\beta$$

имеет π-периодическое решение, определяемое краевыми условиями

$$\xi(0)=\Omega_3(0)=\xi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\Omega_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{19}$$

Пусть $\beta_0\in[\beta_1,\beta_2]$, где $0<\beta_1<\beta_2<\pi/2$ или $-\pi/2<\beta_1<\beta_2<0$. Положим $\beta=\beta_0+\eta$ и представим уравнения (5) в виде

$$\frac{1}{1+a}\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{\Omega_2}{\cos\beta_0}+O(|\Omega_2\eta|)-\frac{a}{1+a},\quad \frac{1}{1+a}\frac{d\eta}{d\tau}=\Omega_3,$$

$$\frac{1}{1+a}\frac{d\Omega_2}{d\tau}=-h\Omega_3+\frac{\mu}{2}\cos\beta_0\sin2\tau-\mu\xi\cos\beta_0\cos2\tau-\frac{\mu\eta}{2}\sin\beta_0\sin2\tau+$$
$$+O(\xi^2+\eta^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2),$$

$$\frac{1}{1+a}\frac{d\Omega_3}{d\tau}=h\Omega_2-\frac{\mu}{4}\sin2\beta_0(1+\cos2\tau)-\frac{\mu\xi}{2}\sin2\beta_0\sin2\tau-$$
$$-\frac{\mu\eta}{2}\cos2\beta_0(1+\cos2\tau)+O(\xi^2+\eta^2+\Omega_2^2).$$

В полученной системе сделаем замену переменных $(\Omega_2,\Omega_3)\mapsto(z_1,z_2)$:

$$\Omega_2 = z_1 + \frac{\mu\xi}{2h}\sin 2\beta_0 \sin 2\tau + \frac{\mu\eta}{2h}\cos 2\beta_0 (1+\cos 2\tau),$$
$$\Omega_3 = z_2 - \frac{\mu\xi}{h}\cos\beta_0 \cos 2\tau - \frac{\mu\eta}{2h}\sin\beta_0 \sin 2\tau .$$

В результате эта система перейдет в систему

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (1+a)F_1(\tau,\xi,\eta,z_1,h,\beta_0) - a,$$
$$\frac{d\eta}{d\tau} = (1+a)F_2(\tau,\xi,\eta,z_2,h,\beta_0),$$
$$\frac{dz_1}{d\tau} = -h(1+a)z_2 + (1+a)f_1(\tau,\xi,\eta,z_1,z_2,h,\beta_0),$$
$$\frac{dz_2}{d\tau} = (1+a)hz_1 + (1+a)f_2(\tau,\xi,\eta,z_1,z_2,h,\beta_0),$$

где

$$F_j(\tau,\xi,\eta,z_j,a,h,\beta_0) = O\left(|z_j| + \frac{|\xi|+|\eta|}{h}\right),$$
$$f_j(\tau,\xi,\eta,z_1,z_2,a,h,\beta_0) - f_j^\circ(\tau,a,h,\beta_0) = O\left(\frac{\zeta_1}{h} + \zeta_2\right),$$
$$f_j^\circ(\tau,a,h,\beta_0) = f_j(\tau,0,0,0,0,a,h,\beta_0) \quad (j=1,2),$$
$$\zeta_1 = |\xi| + |\eta| + |z_1| + |z_2|, \quad \zeta_2 = \xi^2 + \eta^2 + z_1^2 + z_2^2 .$$

Для краткости записи не будем указывать зависимость от β_0, введем новый большой параметр $\rho = h(1+a)$ и векторно-матричные обозначения

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученную систему уравнений запишем в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = F(\tau,x,y,a,\rho) - ae_1, \quad \frac{dy}{d\tau} = \rho Jy + f(\tau,x,y,a,\rho). \tag{20}$$

Для входящих в правые части уравнений (20) функций F и f в окрестности точки $x = y = 0$, $\rho^{-1} = 0$ справедливы оценки

$$F(\tau,x,y,a,\rho) = O\left(\|y\| + \frac{\|x\|}{\rho}\right), \quad f^\circ(\tau,a,\rho) \equiv f(\tau,0,0,a,\rho) = O(1),$$
$$f(\tau,x,y,a,\rho) - f^\circ(\tau,a,\rho) = O\left(\frac{\|x\|+\|y\|}{\rho} + \|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма. В силу гладкости этих функций и приведенных оценок существуют такие положительные числа Δ, K и R_1, что при всех $\tau \in (-\infty,\infty)$, $\beta_0 \in [\beta_1,\beta_2]$ и $x, x', y, y', a, a', \rho$, удовлетворяющих неравенствам $\max(\|x\|, \|x'\|, \|y\|, \|y'\|, |a|, |a'|) \le \Delta$, $\rho \ge R_1$, имеют место соотношения

$$\| F(\tau,x,y,a,\rho) \| \le K\left(\| y\| + \frac{\|x\|}{\rho} \right), \tag{21}$$

$$\| f^\circ(\tau,a,\rho) \| \le K, \quad \left\| \frac{df^\circ(\tau,a,\rho)}{d\tau} \right\| \le K, \tag{22}$$

$$\| f(\tau,x,y,a,\rho) - f^\circ(\tau,a,\rho) \| = K\left(\frac{\|x\| + \|y\|}{\rho} + \|x\|^2 + \|y\|^2 \right), \tag{23}$$

$$\| F(\tau,x',y',a',\rho) - F(\tau,x,y,a,\rho) \| \le K\big[\| y'-y\| + \zeta(\|x'-x\| + |a'-a|)\big], \tag{24}$$
$$\zeta = \|x\| + \|x'\| + \|y\| + \|y'\| + |a| + |a'| + \frac{1}{\rho},$$

$$\| f^\circ(\tau,a',\rho) - f^\circ(\tau,a,\rho) \| \le K|a-a'|, \tag{25}$$

$$\| f(\tau,x',y',a',\rho) - f(\tau,x,y,a,\rho) - f^\circ(\tau,a',\rho) + f^\circ(\tau,a,\rho) \| \le$$
$$\le K\zeta(\|x'-x\| + \|y'-y\| + |a'-a|). \tag{26}$$

Краевые условия (19) в результате сделанных преобразований переходят в краевые условия

$$\xi(0) = z_2(0) = \xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = z_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{27}$$

Независимая переменная τ входит в систему (20) периодически с периодом π, и эта система инвариантна относительно замены переменных $\tau \to -\tau$, $\xi \to -\xi$, $z_2 \to -z_2$. В силу указанных свойств любое решение краевой задачи (20), (27) можно продолжить на всю действительную ось. Сначала оно продолжается на отрезок $-\pi/2 \le \tau \le 0$ с помощью соотношений

$$\xi(-\tau) = -\xi(\tau), \quad \eta(-\tau) = \eta(\tau), \quad z_1(-\tau) = z_1(\tau), \quad z_2(-\tau) = -z_2(\tau)$$

а затем π-периодически на всю ось.

Введем множество $I(\varepsilon) = \{\rho\colon\ \rho > 0, |\sin(\pi\rho/2)| \ge \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и вектор $e_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$.

Теорема. Существуют такие положительные числа C_1, C_2, C_3 и R, зависящие от ε, что при $\beta_0 \in [\beta_1,\beta_2]$, $\rho \ge R$, $\rho \in I(\varepsilon)$ краевая задача (20), (27) имеет единственное решение $x_*(\tau,\rho)$, $y_*(\tau,\rho)$, $a_*(\rho)$, удовлетворяющее условиям

$$\| x_*(\tau,\rho) \| \le \frac{C_1}{\rho}, \quad \| y_*(\tau,\rho) \| \le \frac{C_2}{\rho} \quad \left(0 \le \tau \le \frac{\pi}{2}\right), \tag{28}$$

$$| a_*(\rho) | \le \frac{C_3}{\rho}, \qquad \int_0^{\pi/2} e_2^{\mathrm{T}} x_*(\tau,\rho)\, d\tau = 0.$$

Решениям задачи (20), (27), о которых говорится в этой теореме, отвечают решения задачи (18), (19) с амплитудами $O(h^{-1})$ (см. п. 1). Последнее условие (28) фиксирует способ введения зависимости решения задачи (20), (27) от не указанного явно параметра β_0. Условие $\rho \in I(\varepsilon)$ служит для исключения из проводимого анализа резонансных значений ρ.

Доказательство теоремы сводится решению системы специальных интегральных уравнений. Метод доказательства был предложен Хёльдером [6] и развит впоследствии другими авторами ([7, 8] и др.). Этот метод был применен [3 – 5, 9] к гироскопическим системам с большим параметром.

4. Система интегральных уравнений. Сведение краевой задачи (20), (27) к системе интегральных уравнений выполним, используя функции Грина двух линейных краевых задач

$$\frac{dx}{d\tau} = F(t), \quad \xi(0) = \xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{29}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \rho J y + Q(t), \quad z_2(0) = z_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{30}$$

заданных на отрезке $0 \le \tau \le \pi/2$. Функция Грина задачи (30) имеет вид

$$G(\tau,s,\rho) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi\rho}{2}} \begin{bmatrix} G_{11}(\tau,s,\rho) & G_{12}(\tau,s,\rho) \\ G_{21}(\tau,s,\rho) & G_{22}(\tau,s,h) \end{bmatrix},$$

$$G_{11}(\tau,s,\rho) = \sin\rho\left(\tau + s - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\rho\left(\tau - s \mp \frac{\pi}{2}\right),$$

$$G_{12}(\tau,s,\rho) = -\cos\rho\left(\tau + s - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\rho\left(\tau - s \mp \frac{\pi}{2}\right),$$

$$G_{21}(\tau,s,\rho) = -\cos\rho\left(\tau + s - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\rho\left(\tau - s \mp \frac{\pi}{2}\right),$$

$$G_{22}(\tau,s,\rho) = -\sin\rho\left(\tau + s - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\rho\left(\tau - s \mp \frac{\pi}{2}\right).$$

В выписанных формулах верхний знак берется при $s < \tau$, нижний – при $s > \tau$. При $\sin(\pi\rho/2) \ne 0$ решение задачи (30) существует для любой непрерывной функции $Q(t)$ и выражается формулой

$$y(\tau)=\int\limits_0^{\pi/2} G(\tau,s,\rho)Q(s)ds. \qquad (31)$$

Норму произвольной непрерывной векторной функции $y(\tau)$, $0\le\tau\le\pi/2$ определим формулой

$$\nu(y)=\max_{0\le\tau\le\pi/2}\|\,y(\tau)\,\|.$$

Для нормы решения (31) справедлива оценка

$$\nu(y)\le\frac{\pi\nu(Q)}{2\left|\sin\dfrac{\pi\rho}{2}\right|}. \qquad (32)$$

Если функция $Q(\tau)=[Q_1(\tau),Q_2(\tau)]^{\mathrm{T}}$ в (30) непрерывно дифференцируема и удовлетворяет соотношениям $Q_1(0)=Q_1(\pi/2)=0$, как, например, функция $Q(\tau)=f^{\circ}(\tau,a,\rho)$, то, сделав в (30) замену переменной $y=w+\rho^{-1}JQ(\tau)$ и воспользовавшись формулой (31), получим

$$y(\tau)=\frac{1}{\rho}JQ(\tau)-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\pi/2} G(\tau,s,\rho)J\,\frac{dQ(s)}{ds}ds.$$

Отсюда следует оценка

$$\nu(y)\le\frac{\nu(Q)}{\rho}+\frac{\pi\nu(dQ/d\tau)}{2\rho\left|\sin\dfrac{\pi\rho}{2}\right|}.$$

Фиксируем $\varepsilon\in(0,1)$ и положим $N_1=\pi/(2\varepsilon)$. Тогда в силу неравенства (32) и последнего неравенства будем иметь при $\rho\in I(\varepsilon)$

$$\nu(y)\le N_1\nu(Q),\quad \nu(y)\le\frac{\nu(Q)+N_1\nu(dQ/d\tau)}{\rho}. \qquad (33)$$

В следующем пункте предполагается, что $\rho\in I(\varepsilon)$ и $\rho\ge R_1$; неравенства (33) используются без дополнительных оговорок относительно выбора ρ.

Рассмотрим краевую задачу (29). Она разрешима не при всех непрерывных $F(\tau)$, поскольку при $F(\tau)\equiv 0$ имеет нетривиальное решение $x=e_2$. Это решение единственно (с точностью до постоянного множителя). Следовательно, сопряженная краевая задача

$$\frac{d\psi}{d\tau}=0,\quad \psi=(\psi_1,\psi_2),\quad \psi_2(0)=\psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

также имеет единственное решение, и его можно взять в виде $\psi=e_1^{\mathrm{T}}$. Как известно [10], задача (29) разрешима в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\int_0^{\pi/2} e_1^{\mathrm{T}} F(\tau)\,d\tau = 0\,.$$

Если это условие выполнено, то решение задачи (29) определено с точностью до слагаемого $\mathrm{const}\cdot e_2$.

Решение задачи (29) удобно выразить с помощью с обобщенной функции Грина [7, 11]. Эта функция, обозначим ее $G_0(\tau,s)$ $(\tau,s\in[0,\pi/2])$, является квадратной матрицей второго порядка и единственным образом определяется следующими условиями: соотношениями (29) для каждого столбца, условием скачка $G_0(s+0,s)-G_0(s-0,s)=\mathrm{diag}(1,1)$ и соотношениями

$$\frac{\partial G_0(\tau,s)}{\partial\tau} = -\frac{2}{\pi}e_1 e_1^{\mathrm{T}}, \qquad \int_0^{\pi/2} e_2^{\mathrm{T}} G_0(\tau,s)\,d\tau = 0\,.$$

Явный вид обобщенной функции Грина

$$G_0(\tau,s) = \mathrm{diag}\left(\frac{1\pm 1}{2}-\frac{2\tau}{\pi}, -\frac{1\mp 1}{2}+\frac{2s}{\pi}\right),$$

где верхний знак берется при $s<\tau$, нижний – при $s>\tau$. Выражение

$$x(\tau) = \int_0^{\pi/2} G_0(\tau,s)F(s)\,ds \tag{34}$$

удовлетворяет краевым условиям (29) и соотношениям

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = F(\tau) - pe_1, \quad p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} e_1^{\mathrm{T}} F(\tau)d\tau = 0, \quad \int_0^{\pi/2} e_2^{\mathrm{T}} x(\tau)d\tau = 0\,.$$

При $p=0$ формула (34) дает частное решение краевой задачи (29). Для нормы функции $x(\tau)$ в (34) имеет место оценка

$$\nu(x) \le \frac{\pi}{2}\nu(F)\,. \tag{35}$$

Используя введенные функции Грина и учитывая соотношение

$$\int_0^{\pi/2} G_0(\tau,s)e_1 ds = 0,$$

для краевой задачи (20), (27) можно записать систему интегральных уравнений

$$x(\tau) = \int_0^{\pi/2} G_0(\tau,s)F[s,x(s),y(s),a,\rho]ds \equiv L_x(x,y,a)\,, \tag{36}$$

$$y(\tau)=\int\limits_{0}^{\pi/2}G(\tau,s,\rho)\,f[s,x(s),y(s),a,\rho]ds\equiv L_y(x,y,a).$$

Здесь $x(\tau)$, $y(\tau)$ – неизвестные функции, a – параметр. Значение этого параметра находится из уравнения

$$a=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}e_1^{\mathrm{T}}F[s,x(s),y(s),a,\rho]ds\equiv L_a(x,y,a). \tag{37}$$

Пусть $x(\tau,a,\rho)$, $y(\tau,a,\rho)$ – решение уравнений (36). Оно непрерывно дифференцируемо по τ, удовлетворяет краевым условиям (27), второму уравнению (20) и соотношениям

$$\frac{dx(\tau,a,\rho)}{d\tau}=F[\tau,x(\tau,a,\rho),y(\tau,a,\rho),a,\rho]-[p(a,\rho)+a]e_1,$$

$$p(a,\rho)+a=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}e_1^{\mathrm{T}}F[\tau,x(\tau,a,\rho),y(\tau,a,\rho),a,\rho]d\tau.$$

Если $a=a(\rho)$ – корень уравнения (37), то $p[a(\rho),\rho]\equiv 0$ и удовлетворяется первое уравнение (20). Наоборот, если $x(\tau,\rho)$, $y(\tau,\rho)$ – решение задачи (20), (27), то в силу свойств введенных функций Грина оно удовлетворяет уравнениям (36), (37). Таким образом, первоначальная задача свелась к решению системы (36), (37).

5. Доказательство теоремы. Систему (36), (37) будем решать методом последовательных приближений при $\rho\in I(\varepsilon)$, $\rho\geq R_1$. Напомним, что в этой системе есть еще параметр $\beta_0\in[\beta_1,\beta_2]$, который для краткости не указывается. По этой же причине будем по возможности опускать и указание на зависимость рассматриваемых функций от ρ.

Построим последовательности функций $x_n(\tau)$, $y_n(\tau)$ $(0\leq\tau\leq\pi/2)$ и числовую последовательность a_n, положив

$$x_0(\tau)\equiv y_0(\tau)\equiv 0,\quad a_0=0,\quad x_{n+1}=L_x(x_n,y_n,a_n), \tag{38}$$

$$y_{n+1}=L_y(x_n,y_n,a_n),\quad a_{n+1}=L_a(x_n,y_n,a_n)\quad (n=0,1,2,\dots).$$

Докажем, что при достаточно большом ρ эти последовательности сходятся к решению системы (36), (37). Сначала докажем, что при достаточно большом ρ выполнены неравенства

$$\nu(x_n)\leq\frac{C_1}{\rho}\leq\Delta,\quad \nu(y_n)\leq\frac{C_2}{\rho}\leq\Delta,\quad |a_n|\leq\frac{C_3}{\rho}\leq\Delta, \tag{39}$$

где C_1, C_2 и C_3 – положительные числа. Из формул (38) для x_{n+1}, a_{n+1} и неравенств (21), (35) получаем

$$\nu(x_{n+1}) \le K_1\left[\nu(y_n)+\frac{\nu(x_n)}{\rho}\right], \quad |a_{n+1}| \le K\left[\nu(y_n)+\frac{\nu(x_n)}{\rho}\right], \tag{40}$$

где $K_1 = \pi K/2$. Формулу (38) для y_{n+1} представим в виде

$$y_{n+1}(\tau) = \varphi(\tau, a_n) + \int_0^{\pi/2} G(\tau,s)\{f[s,x(s),y(s),a] - f^\circ(s,a)\}ds,$$

где

$$\varphi(\tau,a) = \int_0^{\pi/2} G(\tau,s) f^\circ(s,a)\,ds.$$

Как было указано в предыдущем пункте, функция $f^\circ(\tau,a)$ удовлетворяет неравенствам (33) (при $Q = f^\circ$). В силу этих неравенств и неравенств (22) при $\max(|a|,|a'|) \le \Delta$ имеют место соотношения

$$\nu(\varphi) \le \frac{N_2}{\rho}, \quad \nu[\varphi(\cdot,a') - \varphi(\cdot,a)] \le \frac{N_2|a'-a|}{\rho}, \quad N_2 = \frac{K_1}{\varepsilon} + K. \tag{41}$$

С учетом первого неравенства (41) и неравенств (23), (32) получаем

$$\nu(y_{n+1}) \le \frac{N_2}{\rho} + \frac{K_1}{\varepsilon}\left[\nu^2(x_n) + \nu^2(y_n) + \frac{\nu(x_n)+\nu(y_n)}{\rho}\right]. \tag{42}$$

Выберем числа C_1, C_2 и C_3 из условий $C_2 > N_2$, $C_1 > K_1 C_2$, $C_3 > K C_2$ и возьмем

$$\rho \ge R_2 = \max\left[R_1, \frac{C_1}{\Delta}, \frac{C_2}{\Delta}, \frac{C_3}{\Delta}, \frac{K_1(C_1+C_2+C_1^2+C_2^2)}{\varepsilon(C_2-N_2)}, \frac{K_1C_1}{C_1-K_1C_2}, \frac{KC_1}{C_3-KC_2}\right].$$

Тогда, если для некоторого n неравенства (39) выполнены, то в силу (40), (42) будем иметь

$$\nu(x_{n+1}) \le K_1\left(\frac{C_2}{\rho}+\frac{C_1}{\rho^2}\right) \le \frac{C_1}{\rho} - \frac{1}{\rho}\left(C_1 - K_1C_2 - \frac{K_1C_1}{\rho}\right) \le \frac{C_1}{\rho},$$

$$\nu(y_{n+1}) \le \frac{N_2}{\rho} + \frac{K_1(C_1^2+C_2^2+C_1+C_2)}{\varepsilon\rho^2} \le \frac{C_2}{\rho} -$$

$$-\frac{1}{\rho}\left[C_2 - N_2 - \frac{K_1(C_1^2+C_2^2+C_1+C_2)}{\varepsilon\rho}\right] \le \frac{C_2}{\rho},$$

$$|a_{n+1}| \le K\left(\frac{C_2}{\rho}+\frac{C_1}{\rho^2}\right) \le \frac{C_3}{\rho} - \frac{1}{\rho}\left(C_3 - KC_2 - \frac{KC_1}{\rho}\right) \le \frac{C_3}{\rho}.$$

При $n=1$ неравенства (39) справедливы: $x_1(\tau) \equiv 0$, $a_1 = 0$, для $y_1(\tau) = \varphi(\tau,0)$ имеем первое неравенство (41). Отсюда следует справедливость неравенств (39) при всех n.

Докажем сходимость последовательных приближений (38). Введем обозначения

$$b_n = \nu(x_n - x_{n-1}), \quad c_n = \nu(y_n - y_{n-1}), \quad d_n = |a_n - a_{n-1}|,$$
$$q_n = \nu(x_n) + \nu(x_{n-1}) + \nu(y_n) + \nu(y_{n-1}) + |a_n| + |a_{n-1}| + \rho^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу неравенств (24) – (26) и (32), (35) имеем

$$b_{n+1} \le K_1[c_n + q_n(b_n + d_n)], \quad d_{n+1} \le K[c_n + q_n(b_n + d_n)]$$
$$c_{n+1} \le \frac{K_1 q_n}{\varepsilon}(b_n + c_n + d_n).$$

Из неравенств (39) следует

$$q_n \le \frac{Q}{\rho}, \quad Q = 2(C_1 + C_2 + C_3) + 1.$$

Комбинируя это неравенство с предыдущими, находим

$$b_{n+1} + d_{n+1} \le (K + K_1)\left[\frac{Q(b_n + d_n)}{\rho} + c_n\right], \quad c_{n+1} \le \frac{K_1 Q}{\varepsilon\rho}[(b_n + d_n) + c_n].$$

Рассмотрим последовательность

$$r_n = c_n + \frac{b_n + d_n}{\sqrt{\rho}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последние неравенства позволяют оценить ее убывание при $n \to \infty$. Имеем

$$r_{n+1} \le \frac{K_1 Q}{\varepsilon\rho}[(b_n + d_n) + c_n] + \frac{K + K_1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{Q(b_n + d_n)}{\rho} + c_n\right] =$$
$$= \left(\frac{K_1 Q}{\varepsilon\rho} + \frac{K + K_1}{\sqrt{\rho}}\right)c_n + \left[\frac{K_1 Q}{\varepsilon\sqrt{\rho}} + \frac{Q(K + K_1)}{\rho}\right]\frac{b_n + d_n}{\sqrt{\rho}}.$$

Возьмем $\rho \ge \max(1, R_2)$. Поскольку $Q > 1$, справедливы неравенства

$$\frac{K_1 Q}{\varepsilon\rho} + \frac{K + K_1}{\sqrt{\rho}} \le \frac{Q}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{K_1}{\varepsilon} + K + K_1\right), \quad \frac{K_1 Q}{\varepsilon\sqrt{\rho}} + \frac{Q(K + K_1)}{\rho} \le \frac{Q}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{K_1}{\varepsilon} + K + K_1\right).$$

Отсюда получаем

$$r_{n+1} \le \frac{Q}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{K_1}{\varepsilon} + K + K_1\right)r_n. \tag{43}$$

Выберем $R \ge \max(1, R_2)$ и таким, чтобы при $\rho \ge R$ множитель при r_n в правой части неравенства (43) был меньше 1. Тогда $r_n \to 0$. Используя этот факт, можно доказать, что последовательности $x_n(\tau)$ и $y_n(\tau)$ сходятся равномерно на множестве

$$\{(\tau, \beta_0, \rho) : 0 \le \tau \le \pi/2, \beta_1 \le \beta_0 \le \beta_2, \rho \ge R, \rho \in I(\varepsilon)\},$$

последовательность a_n сходится равномерно на множестве

$$\{(\beta_0,\rho): \beta_1 \le \beta_0 \le \beta_2,\ \rho \ge R,\ \rho \in I(\varepsilon)\}$$

к непрерывным функциям $x_*(\tau,\beta_0,\rho)$, $y_*(\tau,\beta_0,\rho)$, $a_*(\beta_0,\rho)$, удовлетворяющим условиям (28). Переходя в соотношениях (38) к пределу при $n \to \infty$, находим, что указанные функции – решение системы (36), (37). Стандартным образом доказывается единственность найденного решения.

Как уже было отмечено выше, $a_1 = 0$. Непосредственный подсчет дает $a_2 = \mu\rho^{-1}\sin\beta_0 / 2$. Таким образом,

$$T = \pi\left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\sin\beta_0\right).$$

Последняя формула согласуется со второй формулой (16). Первая формула (16) следует из первой и последней формул (28).

6. Исследование устойчивости найденного периодического решения. Это решение неустойчиво по Ляпунову, поскольку его период зависит от β_0. Имеет смысл проверить выполнение необходимых условий его орбитальной устойчивости – исследовать орбитальную устойчивость в первом приближении. Исследование сводится к анализу мультипликаторов этого решения – собственных чисел матрицы монодромии соответствующей системы уравнений в вариациях. Используя инвариантность системы (5) и исследуемого решения относительно преобразования (7) (или возможность приведения системы (5) к гамильтоновой форме), можно доказать, что мультипликаторы – корни возвратного полинома четвертой степени. Поскольку система (5) автономна, два или все мультипликаторы равны 1. Можно доказать, что при $\rho \in I(\varepsilon)$ два мультипликатора равны 1 и им отвечает жорданова клетка второго порядка матрицы монодромии. Два других мультипликатора близки к $\exp(\pm\pi\rho\sqrt{-1})$ и имеют модули 1. Следовательно, найденное периодическое решение в первом приближении орбитально устойчиво. Ляпуновская неустойчивость этого решения – слабая, не экспоненциальная. Она не влияет на его практические свойства.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

1. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. М.: ГИТТЛ, 1955.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
3. Троицкая А.В., Сазонов В.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. №12. 17с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-12

4. Сазонов В.В., Троицкая А.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 5. С. 595-607.
5. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата с большим собственным кинетическим моментом // Известия академии наук СССР. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 3-12.
6. Holder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik // Mathematische Zeitschrift. 1929. B. 31. S. 197-257.
7. Lewis D.C. On the Role of First Integrals in the Perturbation of Periodic Solutions // Annals of Mathematics. 1956. Vol. 63. P. 535-548.
8. Hale J.K. Ordinary Differential Equations. New-York: Wiley-Interscience, 1969.
9. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические движения гироскопических систем // Прикладная математика и механика. 1988, Т. 52. № 5. С. 719-729.
10. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
11. Reid W.T. Generalized Green's matrices for compatible system of differential equations // American Journal of Mathematics. 1931. V. 53. No.2. P. 443-459.