ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 97 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Афендиков А.Л., Давыдов А.А., Меньшов И.С., Меркулов К.Д., Пленкин А.В.

Алгоритм многоуровневой адаптации сеток по критериям на основе вейвлет-анализа для задач газовой динамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алгоритм многоуровневой адаптации сеток по критериям на основе вейвлет-анализа для задач газовой динамики / А.Л.Афендиков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 97. 22 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-97

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

А. Л. Афендиков, А. А. Давыдов, И. С. Меньшов,
К. Д. Меркулов, А. В. Пленкин

Алгоритм многоуровневой адаптации сеток по критериям на основе вейвлет-анализа для задач газовой динамики

Москва — 2015

Афендиков А. Л, Давыдов А. А., Меньшов И. С., Меркулов К. Д., Пленкин А. В.

Алгоритм многоуровневой адаптация сеток по критериям на основе вейвлет-анализа для задач газовой динамики

Предложены алгоритмы многоуровневой адаптации двумерных и трехмерных декартовых сеток. Для оценки гладкости сеточной функции применяется метод скользящего окна с локальными шаблонами типа «крест» и «квадрат», на которых вычисляется вейвлет-разложение решения. Метод апробирован на двумерных (задача Л. И. Седова о сильном взрыве, тесты Лиски о распадах разрывов) и трехмерных (течение в трехмерной каверне, обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком газа) задачах.

Ключевые слова: идеальный газ, адаптация сеток, задача Л. И. Седова, тесты Лиски, вейвлет

Andrei Afendikov, Alexander Davydov, Igor Menshov, Kirill Merkulov, Andrei Plenkin

Algorithm for Multilevel Mesh Adaptation with Waveled-Based Criteria for Gas Dynamic Problems.

Algorithm for multilevel 2D-3D mesh refinement is suggested. For solution smoothness evaluation we use sliding window method with the patterns of cross and shape. To capture areas with high gradients of grid functions we use wavelet decomposition on this local patterns. Results about Sedov, Liska tests (2D) and supersonic flows about cavity and blunted body (3D) are presented.

Key words: gas, Sedov problem, Liska tests, wavelet, refinement meshes

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда,
проект 14-11-00872.

Введение

В работе представлены алгоритмы многоуровневой адаптации неконформных двумерных и трехмерных декартовых сеток с вложенной древовидной структурой по бинарному критерию в двумерном случае и Face-based структурой — в трехмерном.

Для локальной оценки гладкости сеточного решения применяется критерий на основе вейвлетных разложений на локальных шаблонах. Для решения уравнений Эйлера применяется метод конечного объема с потоками, вычисленными по С. К. Годунову или В. В. Русанову, переписанный для сеток вышеназванной структуры.

Продуктивность подхода продемонстрирована на задаче Л. И. Седова о сильном взрыве [1, 2] и тестах Лиски-Вендрофа по двумерным распадам разрывов [3]. Трехмерный алгоритм протестирован на задаче о течении в трехмерной каверне и обтекании затупленного тела.

1 Математическая модель сплошной среды на локально-адаптивной сетке

1.1 Формат представления адаптивных декартовых сеток

Определение оптимального и удобного формата представления данных — одна из ключевых задач при использовании сеток с локальной адаптацией. Для адаптации изначально структурированных декартовых сеток, где разбиение производится по какому-то заранее выбранному закону, удобно использовать различные древовидные структуры. Кроме того, для них хорошо известны быстрые рекурсивные алгоритмы обхода и перестроения.

Для описания двумерной сетки с возможностью локальной адаптации предлагается следующий формат. Ячейка может разбиваться только на четыре равных делением пополам по каждому из направлений. В этом случае удобно говорить о наличии четырех *потомков* данной ячейки. Берется первоначальная прямоугольная сетка (допустима и неравномерная) размера $M \times N$ с ячейками, которым приписан нулевой уровень.

Каждая ячейка адаптивной сетки описывается своим уровнем (т.е. сколько разбиений начиная с нулевого уровня было проведено для ее получения) и виртуальным положением на этом уровне — парой индексов, таких, какими они были бы в случае полного заполнения данного уровня. Каждый узел дерева хранит флаг наличия подразбиения. Если он равен единице, ячейка обязательно имеет 4 потомка и хранит указатели на них, для листовых ячеек дерева эти указатели нулевые, но устанавливаются ненулевые указатели на координаты и вектор физических параметров.

Такой тип данных позволяет описывать адаптивные сетки различных конфигураций без использования лишней памяти. Этот формат будем называть *четверичным деревом* по числу потомков родительской ячейки (см. рис. 1).

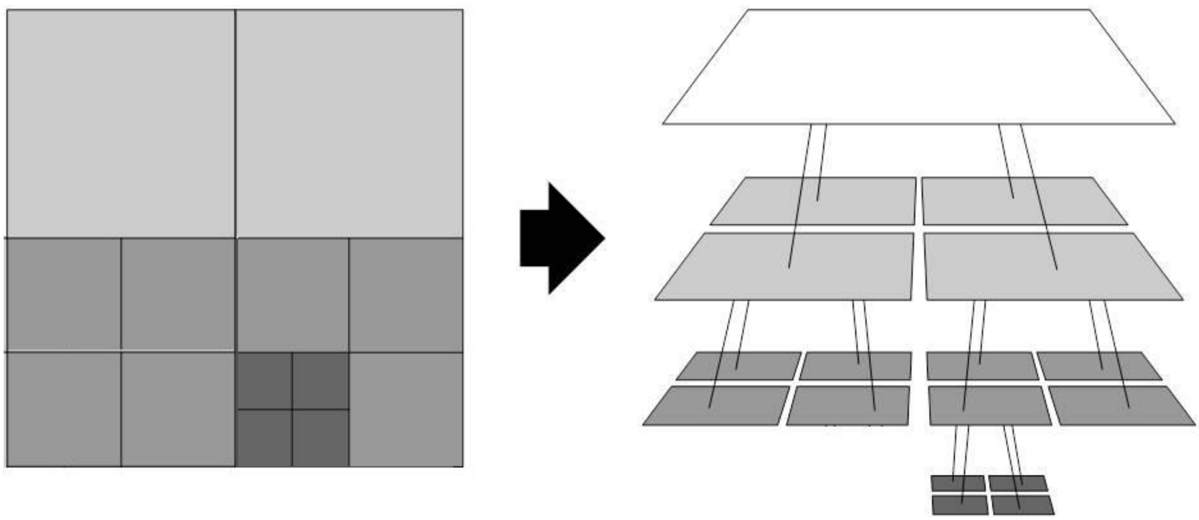

Рис. 1. Четверичное дерево как формат представления двумерной декартовой сетки с измельчением.

Обход квадратного массива (матрицы) деревьев, описанных выше, осуществляется простой процедурой: в двойном цикле обходятся все элементы базовой сетки, в случае если текущая ячейка является конечной (листовой), то применяем целевую функцию к ней, в противном случае вызываем процедуру для всех четырех потомков данной ячейки.

Для поиска соседей удобно использовать еще одну особенность сеток описанного формата [1,4]: ячейка 1-го уровня с индексами (i, j) обязательно имеет своим родителем ячейку с индексами $([i/2],[j/2])$, где / — операция целочисленного деления, а нумерация обоих индексов начинается с нуля, $i=\overline{1,M-1}$; $j=\overline{0,N-1}$. Тогда для случая двух уровней соседей текущей ячейки по каждой из осей можно получить простым оптимизированным перебором на основе половинного деления и умножения индексов.

1.2 Уравнения движения газа

В настоящей работе предлагается вариант адаптации сеток для решения задачи о движении идеального газа, пригодный для массивного распараллеливания. Математическая постановка задачи сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{U}) = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho\mathbf{U})}{\partial t} + div(\rho\mathbf{U}\mathbf{U}) + grad(p) = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho E)}{\partial t} + div(\rho\mathbf{U}H) = 0, \end{cases}$$

в области $V(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной некоторой заданной замкнутой кривой $\Gamma = \Gamma(x, y)$. Здесь введены стандартные обозначения: $\mathbf{U}$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, $H = E + p/\rho$ — полная удельная энтальпия, $E = e + 0.5\mathbf{U}^2$ — полная удельная энергия, e — удельная внутренняя энергия.

Уравнения системы соответствуют законам сохранения массы, импульса и энергии. Для замыкания подобных систем служат уравнения состояния. Газ предполагается идеальным, т.е. $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Для уравнений Эйлера ставится стандартная начально-краевая задача в области $V(\Gamma)$.

1.3 Численный метод

Запишем в векторном виде систему определяющих уравнений в консервативных переменных

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial\mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{F}_y}{\partial y}\right] = 0,$$

где $\mathbf{Q} = \left(\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E\right)^T$ — вектор консервативных переменных, а

$$\mathbf{F}_k = \left(\rho U_k, \rho U_k U_x + p\delta_k, \rho U_k U_y + p\delta_k, \rho U_k H\right)^T$$

$k = x, y$ — векторы потоков по направлениям.

Эта система численно решается на временном шаге Δt на неподвижной декартовой сетке. Для этого используется метод конечного объема с приближенным решением задачи о распаде произвольного разрыва по В. В. Русанову [5] или С. К. Годунову [6].

Устойчивость оператора в правой части (1.5) обеспечивается переменным шагом по времени, который вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta t = K_{safe} \cdot \left(\Delta t\right)_{CFL},\ 0 < K_{safe} < 1,$$

где K_{safe} — коэффициент запаса, $(\Delta t)_{CFL}$ — максимальный курантовский шаг. $(\Delta t)_{CFL}$ пересчитывается по формуле:

$$(\Delta t)_{CFL} = \min_{\Omega}(\tau_x, \tau_y),$$

$$\tau_i = \min_{\Omega}\left(\frac{\Delta i}{c_0 + |U_i|}\right),$$

$$i = x, y,$$

где Δi — пространственный шаг по i-му направлению в конкретной ячейке, c_0 — скорость звука в ячейке, минимум берется по всей расчетной области.

Если расчетная стека состоит одновременно из ячеек разных уровней (например, нулевого и первого), она становится неконформной и насчитывать суммарные потоки через ячейку приходится по более сложной формуле:

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{V_{lvl,i,j}}\left[\sum_{\sigma x} s_\sigma \mathbf{F}_\sigma + \sum_{\sigma y} s_\sigma \mathbf{F}_\sigma\right],$$

где $Q_{lvl,i,j}^{n}$ — значение вектора консервативных переменных в ячейке уровня lvl с виртуальными индексами (i, j) на этом уровне на временном шаге с номером n. Потоки по каждому из направлений суммируются вдоль всей границы ячейки, умноженные на соответствующие площади части границы.

2 Многоуровневая адаптация декартовых сеток

2.1 Алгоритм многоуровневой адаптации сетки

Анализатор рассматривается как черный ящик, выдающий 1, если ячейку надо измельчить, и 0, если не нужно. Для любой ячейки черный ящик работает для некоторого локального окна (креста с центром в ней из m ячеек одного уровня с исследуемой и сторонами вдоль осей или квадрата со стороной m ячеек и центром в заданной). Перед анализом данные сносятся на текущий уровень, и, если элемент этого уровня является частью большей ячейки, берется значение из нее, а если состоит из ячеек следующего, то проводим осреднение по четырем ячейкам. В данном случае применять консервативное осреднение и специфическую подсеточную реконструкцию нецелесообразно, так как для анализа решения высокая точность значений не нужна, поскольку в дальнейшем счете это проектирование не используется и на результатах итогового расчета это проектирование не сказывается.

Алгоритм, формирующий конфигурацию сетки, адекватно соответствующую текущему сеточному полю некоторой физической величины, основан на следующем порядке действий:

1. Сначала проводится процедура огрубления сетки: те ячейки, которые можно сделать более крупными, согласно вейвлетному анализатору объединяем в одну ячейку без нарушения имеющейся структуры дерева. В цикле на уровнях, начиная с первого (т.е. с предпоследнего перед нулевым, базовым) ищем виртуальные ячейки, которые могут быть огрублены (имеют четырех физических потомков) и удовлетворяют критерию огрубления (черный ящик для ячейки-родителя выдает ноль).

2. Следом осуществляется процедура измельчения сетки. Проходим по уровням с нулевого до предпоследнего, ищем на них физические ячейки, для которых выполняется критерий измельчения (черный ящик выдает единицу) и делим ее на 4 части.

3. Далее проводится процедура сглаживания сетки: удаляются все несоответствия введенному ограничению, что соседние ячейки должны отличаться не более, чем на один уровень. В цикле, на уровнях, начиная с предшествующего второму, ищем ячейки, у которых соседи крупнее более чем в 2 раза, и мельчим их до нужного уровня.

2.2 Бинарный критерий адаптации на основе вейвлетного анализа

При работе с многоуровневыми расчетными сетками возникает потребность в индикаторах, сигнализирующих о необходимости перестроения сетки. Используемые для данной задачи алгоритмы должны быть хорошо локализованы (на вход анализатора подаются только данные из самой исследуемой ячейке и нескольких ее соседях), что связанно как с многоуровневостью, так и с необходимостью параллелизации. В работе предлагаются два индикатора гладкости (на крестовом и квадратном шаблонах), основанных на использование B-вейвлетов.

2.3 Построение вейвлет-фильтров

Параметрами при анализе являются величины *(k,p)*, где k — порядок В-сплайнов, которые используются в анализе, а p — число нулевых моментов вейвлета.

Низкочастотный фильтр $\{\beta_i\}$ задается обычным образом (см. [1])

$$\beta_i = 2^{-k-1}\binom{k+1}{i},\ 0 \le i \le k+1.$$

Определим семейство В-сплайнов порядка *k*, заданных на множестве целых точек:

$$B_j^k = B^k(j, j+1, \ldots, j+k, j+k+1),\ 0 \le j < p,$$

и определим В-сплайн по полуцелым точкам:

$$\tilde{B}^k = B^k\left(\left(p+\left[\frac{k}{2}\right]\right)\Big/2, \left(p+\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)\Big/2, \ldots, \left(p+\left[\frac{k}{2}\right]+k+1\right)\Big/2\right).$$

Высокочастотный фильтр $\{\alpha_i\}$, $0 \le i < p$ определяется из условия, что функция $W^k = \tilde{B}^k - \sum_{j=0}^{p-1}\alpha_j B_j^k$ имеет p нулевых моментов.

2.4 Квазиодномерный анализ

В этом случае на вход анализатора подается дискретный набор данных $\{a_{i,j} = f(x_i, y_j)\}$, $i, j = 0, 1, \ldots, 2p+k-1$. При этом в исследуемой ячейке задано значение $f(x_\nu, y_\nu)$, где индекс $\nu := \left[\frac{2p+k}{2}\right]$. Этими данными могут быть, например, значения плотности или давления, заданные в центрах ячеек одного уровня. Кроме того, задается порог чувствительности $\theta > 0$. Для получения массива ячеек одного уровня производится осреднение или снос значений функции f с ячеек других уровней. Анализируемая ячейка является центром креста. Крест передается в анализатор как два массива, соответствующие вертикальной $\{a_{\nu,i}\}$ и горизонтальной $\{a_{i,\nu}\}$ частям креста.

Далее вычисляется свертка с низкочастотным фильтром:

$$H_m = \sum_{j=0}^{k+1}\beta_j a_{\nu,2m+j},\ 0 \le m < p,$$

а затем определяется величина

$$r_{hor} = a_{\nu,\nu} - \sum_{j=0}^{p-1}\alpha_j H_j,$$

аналогично вычисляется r_{ver}. Если $\left(|r_{ver}|>\theta\right) или \left(|r_{hor}|>\theta\right)$, то считается, что точность решения в окрестности исследуемой ячейки недостаточна и счет надо вести на более мелкой сетке, т.е. эту ячейку следует разбить.

В случае анализа трехмерных данных у крестового шаблона появляется дополнительное измерение, и анализируются 3 массива.

2.5 Анализ на квадратном шаблоне

На вход анализатора подаются данные, заданные в ячейках одного уровня и порог чувствительности θ. Центром квадрата является анализируемая ячейка. Квадрат передается в анализатор в виде матрицы $\{a_{i,j}\}$, $0 \le i < 2p+k$, $0 \le j < 2p+k$. Размер этой матрицы определяется выбранным при построении фильтров порядком гладкости k и числом p нулевых моментов вейвлета: При этом исследуемой ячейке соответствует индекс (v,v), где $v = \left[\frac{2p+k}{2}\right]$.

Вычисляем свертку с низкочастотным фильтром:

$$H_{i,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j a_{i,2m+j}\,,\ 0 \le m < p,\ 0 \le i < 2p+k\,.$$

Затем находим:

$$r_{i,p} = a_{i,v} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j H_{i,j}\,.$$

Затем аналогичные вычисления производятся по столбцам:

$$r_{q,m} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j H_{2q+j,m}\,,\ 0 \le q < p,\ 0 \le m \le p\,.$$

$$r_{p,p} = H_{v,p} - \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j r_{j,p}\,.$$

Если выполнено хотя бы одно из условий $\left(|r_{p,p}|>\theta\right),\left(|r_{v,p}|>\theta\right),\left(|r_{p,v}|>\theta\right)$, то считается, что точность решения в окрестности исследуемой ячейки недостаточна и счет надо вести на более мелкой сетке, т.е. эту ячейку следует разбить.

3 Результаты расчетов двумерных течений

3.1 Задача Л. И. Седова о сильном взрыве

Результаты работы описанного алгоритма для m=5 продемонстрированы на примере расчета задачи Л. И. Седова [2, 8] с четырьмя и шестью (рис. 2) уровнями адаптации в виде итогового поля плотности и конфигурации сетки, показанной величиной уровня. В таблице 1 представлена статистика, демонстрирующая эффективность использования адаптивных сеток. Задача Л. И. Седова описывает сильный точечный взрыв внутри сравнительно большой области. В центральной точке области вводится заряд. Можно подобрать его энергию так, что ударная волна будет достигать радиуса 1 в момент времени 1. Данная задача имеет аналитическое решение: при сравнительно малой начальной плотности по области плотность среды на ударной волне будет стремиться к 6.

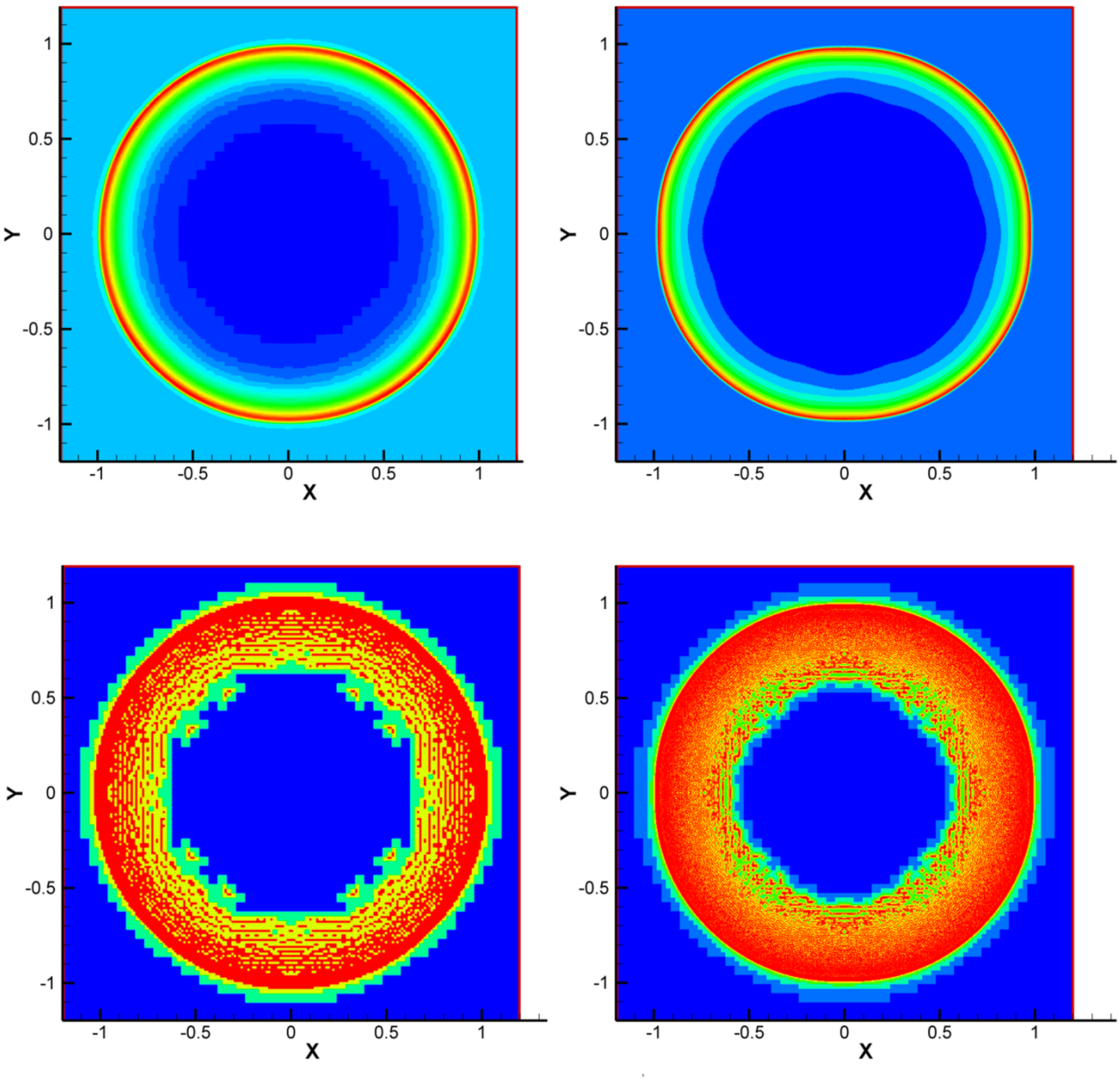

Рис. 2. Результаты расчетов задачи Л. И. Седова (верхний ряд — поля плотности, плотность показана цветом от синего к красному) на многоуровневой адаптивной сетке и соответствующие им конфигурации расчетных сеток на конец расчета (от синего к красному показан уровень физической ячейки). Левый столбец — 4 уровня, правый — 6 уровней, базовая сетка 50x50.

Таблица 1.

Статистика по расчетам задачи Л. И. Седова на многоуровневой сетке с локальной адаптацией

Уровни	4	6
Базовая	50 x 50	50 x 50
Подробная	800 x 800	3200 x 3200
Итоговая	40552 (6,34 %)	589708 (5,76 %)
Пик плотности	4.316	5.287
Время счета	72.9 с	5270 с

С увеличением числа уровней адаптации значительно увеличивается точность расчетов (плотность на ударной волне приближается к величине, полученной аналитически), уменьшается процент ячеек от максимально возможного при заданном числе уровней, что говорит о лучшей локализации особенностей решения. Все расчеты проводились с потоками, вычисленными по В. В. Русанову, во избежание проявления эффекта карбункула (см. [7]).

3.2 Газодинамические тесты Лиски-Вендрофа

Для демонстрации большего количества возможностей и особенностей представленного алгоритма, а также валидации программного кода были проведены расчеты газодинамических тестов Лиски-Вендрофа [3].

Схема всех тестов одинакова и предельно проста: рассматривается квадратная область [0; 1]×[0; 1], которая разбивается на 4 равных квадрата серединными перпендикулярами к сторонам. Образуются 4 подобласти, помечаемые индексами UL, UR, LL, LR по английским аббревиатурам для верхней левой, верхней правой, нижней левой и нижней правой частей соответственно. В каждой части устанавливаются свои значения начальных данных. Перебрав различные сочетания соотношений газодинамических компонент в подобластях, можно получить разнообразные конфигурации решений и численные эффекты, поэтому данные тесты активно используются при валидации и оценке качества двумерных вычислительных кодов.

Наиболее интересными с точки зрения конфигурации итогового решения и ввиду большого количества особенностей, которые сложно достигаются при численном моделировании, выглядят тесты №6 и №16. Их формулировка выглядит так:

Тест № 6:

Начальные условия для $V = (p, \rho, U_x, U_y)$ по квадрантам такие:

Vul = (1, 2, 0.75, 0.5), Vur = (1, 1, 0.75, -0.5),

Vll = (1, 1, -0.75, 0.5), Vlr = (1, 3, -0.75, 0.5).

Рассматривается решение на момент времени *t = 0.3*. Для данной задачи характерно образование вихрей вдоль центральных осей квадрата.

Тест № 16:

Аналогичные данные для этого теста таковы:

Vul = (1, 1.0222, -0.6179, 0.1), Vur = (0.4, 0.5313, 0.1, 0.1),

Vll = (1, 0.8, 0.1, 0.1), Vlr = (1, 1, 0.1, 0.8276),

t = 0.2.

Этот тест отличается особой зоной низкой плотности в окрестности точки *(0,5; 0,6)*, которая ясно локализуется в расчете далеко не всеми газодинамическими кодами.

Моделирование данных тестов было проведено с использованием различного числа уровней адаптации по методам С. К. Годунова и В. В. Русанова. Увеличение числа уровней адаптации при использовании метода С. К. Годунова позволяет даже при первом порядке пространственной аппроксимации выявить эффекты неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для теста №6 (см. рис. 3) вдоль координатных осей и зону разрежения для теста №16 (см. рис 4). Расчеты с применением русановских потоков даже при большом числе уровней адаптации (максимальный, представленный здесь, равен 7) не показывают эти особенности.

Таблицы 2 и 3 демонстрируют показатели эффективности предложенного алгоритма. Для обоих тестов процент счетных ячеек уменьшается, а значит, повышается локализация наиболее интересных участков. При этом время увеличивается далеко не так сильно, как было бы при использовании равномерной сетки повышенного разрешения.

Таблица 2

**Статистика по расчетам теста Лиски-Вендрофа №6
на многоуровневой сетке с локальной адаптацией**

Число уровней адаптации	Время счета, с	Число ячеек	Процент числа ячеек от максимально возможного
7 уровней	36783	1881120	18,4%
5 уровней	1140	157048	24,5%
3 уровня	25	13507	33,8%
Русанов, 7 уровней	5491	1793462	17,5%

Таблица 3

**Статистика по расчетам теста Лиски-Вендрофа №16
на многоуровневой сетке с локальной адаптацией**

Число уровней адаптации	Время счета, с	Число ячеек	Процент числа ячеек от максимально возможного
6 уровней	1364	131355	5,1%
3 уровня	10	5011	12,5%

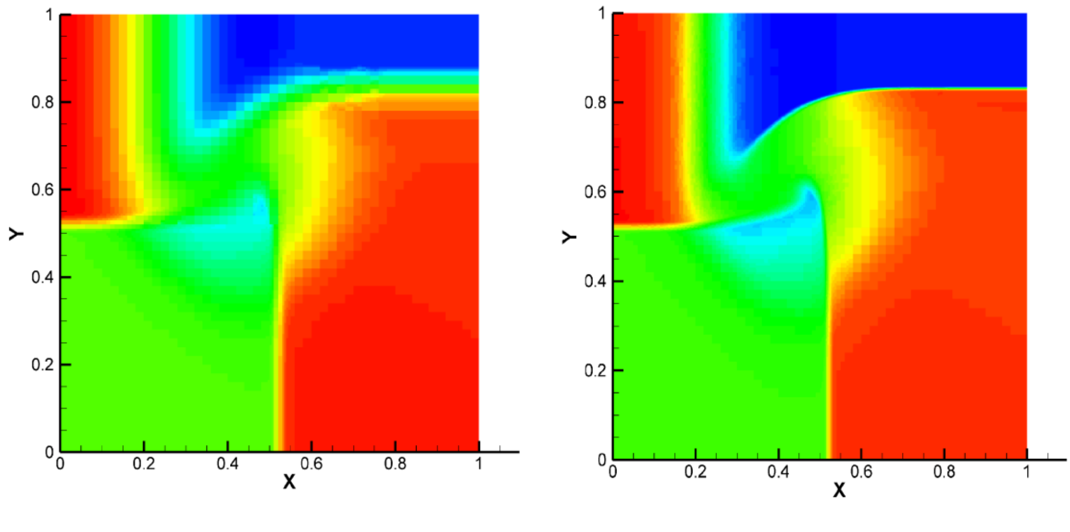

Рис. 4. Расчетные поля плотности для теста Лиски-Вендрофа №16 при использовании метода С. К. Годунова с 3 уровнями адаптации (слева) и 6 уровнями адаптации (справа) при базовой сетке 50x50 ячеек.

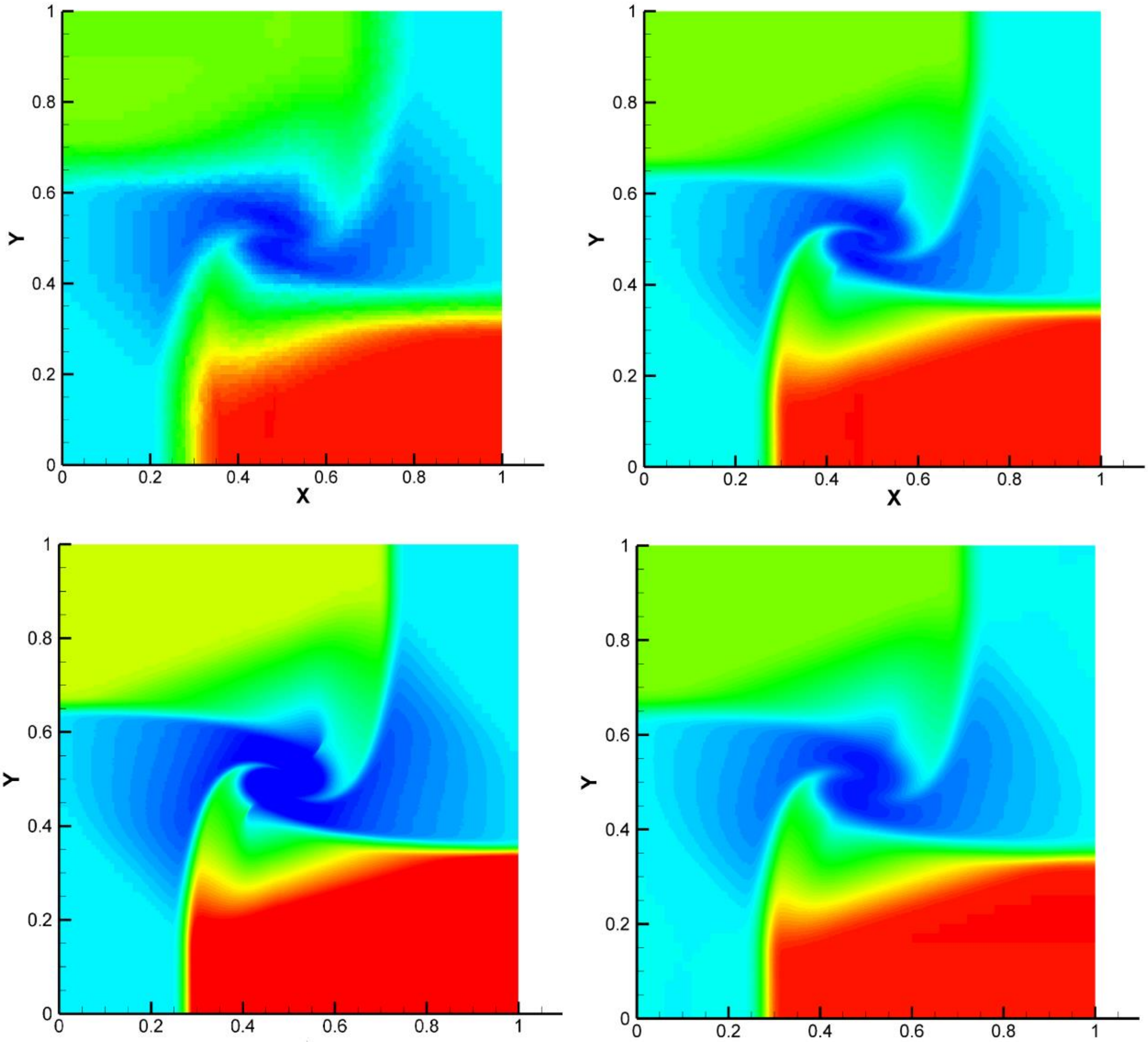

Рис. 3. Расчетные поля плотности для теста Лиски-Вендрофа №6 при использовании метода С. К. Годунова с 3 уровнями адаптации (слева вверху), 5 уровнями адаптации (справа вверху), 7 уровнями адаптации (слева внизу) и метода В. В. Русанова с 7 уровнями адаптации при базовой сетке 50x50 ячеек.

4 Трехмерные адаптивные декартовы сетки и способ их хранения

В трехмерном, как и в двумерном алгоритме, будем ограничиваться случаем, когда исходная кубическая ячейка делится ровно на 8 меньших ячеек. То есть в два раза по каждому направлению. Две соседние ячейки граничат друг с другом через общую грань. Как и в двумерном случае, условимся, что соседствующие ячейки могут отличаться по линейному размеру не более чем в два раза. Таким образом, каждая ячейка может граничить с одной или четырьмя ячейками в каждом направлении. А общее число соседей может быть от 6 до 24 (предполагается, что ячейки, не граничащие ни по какому из направлений с другими ячейками сетки, тем не менее граничат с некоторой фиктивной ячейкой).

В отличие от двумерного варианта, где сетка представляется в виде древовидной структуры, в трехмерном варианте, в качестве эксперимента, используется иной способ хранения сетки, основанный на так называемом Face-Based подходе. А именно, каждая ячейка сетки имеет ссылки на грани, ее ограничивающие. Таких граней, как уже говорилось, может быть от 6 до 24. В свою очередь, каждая грань имеет ссылки на ячейки, которым она принадлежит — правую и левую.

Предлагается хранить сетку в четырех ассоциативных массивах языка C++ ($<\mathrm{map}>$). А именно, в первом массиве хранить ячейки, а в трех других — грани, разделяя их по соответствующим направления ($X = const$, $Y = const$, $Z = const$). Сеточные данные и газодинамические потоки через грани предлагается хранить в отдельных структурах с соответствующими ссылками на них из ячеек и граней.

В качестве ключей ассоциативных массивов используются координаты корневых точек или центров ячеек и граней, «вытянутые» в одномерный массив. В настоящей реализации используются корневые точки.

Такой выбор системы хранения данных обусловлен, во-первых, быстрым поиском соседей; во-вторых, простотой реализации (переноса) уже имеющихся вычислительных алгоритмов; в-третьих, определенными надеждами на простоту последующей параллельной реализации.

4.1 Выбор шаблона для локального вейвлет-анализа в трехмерном случае

Для анализа гладкости локального решения (в окрестности ячейки) необходимо использовать некоторый шаблон. Для равномерной сетки выбор такого шаблона не представляет особенной сложности. Например, можно взять локально одномерный шаблон по пять ячеек в каждом направлении с центром в исследуемой ячейке. В случае адаптивных многоуровневых сеток выбор шаблона существенно усложняется. В двумерном случае, как показано выше, выбирался аналогичный равномерному пятиточечный шаблон с усреднением данных из более мелких ячеек. В трехмерном случае подобное усреднение кажется нецелесообразным и приводит к существенному возрастанию операций чтения из памяти. Для трехмерного алгоритма адаптации было решено остановиться на несколько урезанном шаблоне. На рисунке 5 приведены варианты выбора шаблона для различных вариантов взаимного расположения ячеек. В тех направлениях, где наблюдается сгущение ячеек (левое и верхнее на рис. 5), шаблон перестает быть равномерным. В настоящей реализации мы не обращаем на это внимания и пользуемся анализатором, предназначенным для равномерного шаблона.

Алгоритм вейвлет-анализа на неравномерном наборе данных позволит повысить точность выявления особенностей решения на существенно неравномерных шаблонах.

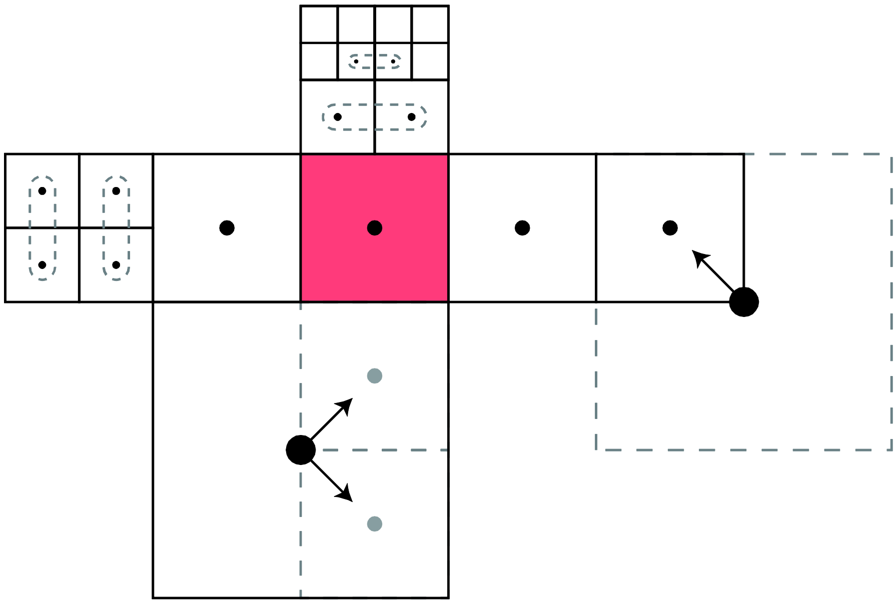

Рис. 5. Варианты шаблона для локального вейвлет-анализа.

Основной предпосылкой для использования методов с локальной адаптацией к решению является желание повысить точность расчетов с сохранением разумной вычислительной емкости.

Адаптацию сетки к решению можно разделить на два противоположных этапа. Первый — сгущение сетки в областях высоких градиентов параметров. И второй — разрежение сетки в областях с достаточно гладким решением. При этом следует понимать, что сгущение сетки хоть и ведет к увеличению вычислительной емкости, но не сказывается отрицательным образом на точности решения. Напротив, укрупнение сетки всегда приводит к определенным потерям точности. Другими словами, если в алгоритм сгущения сетки будет излишне чувствительным к изменению решения, это приведет лишь к увеличению времени расчета, но не к потере точности. В то время как неточности в алгоритме разрежения сетки приведут к потере точности и, может быть, изменению всего характера течения.

Будем использовать отличный от изложенного в разделе 2 алгоритм адаптации. А именно, следующий:

1. проводится анализ сеточного решения. На основе вейвлет-анализа на описанном выше шаблоне определяется степень гладкости сеточной функции. По результатам анализа расставляются флаги 1, 0, -1 в зависимости от того, надо делить ячейку, оставить ее как есть или же эту ячейку можно объединить в более крупную (при условии что другие ячейки, вошедшие в объединение, также имеют флаг -1);
2. разбиение ячеек с флагом 1;
3. объединение ячеек с флагом -1, если эти ячейки ранее составляли одну ячейку.

Пороги расстановки флагов подбираются исходя из предполагаемого характера исследуемого течения.

Результаты работы алгоритма продемонстрированы в следующем разделе.

5 Результаты расчетов трехмерных течений на локально адаптивных сетках

В качестве иллюстрации работы трехмерного алгоритма приведем примеры обтекания блока квадратного сечения сверхзвуковым течением газа и течения в трехмерной каверне. Расчеты проводились в рамках системы уравнений Эйлера методом С. К. Годунова.

В первой задаче исследовалось обтекание блока сверхзвуковым потоком газа с числом Маха набегающего потока $M = 2.535$. Расчеты проводились на сетках с 3, 5 и 6 уровнями адаптации. Начальная сетка состояла из 13x16x16 ячеек.

В таблице 3 приведено отношение давления торможения на торце блока к давлению набегающего потока.

Таблица 3

Давление торможения на торце блока в зависимости от числа уровней адаптации

	L3	L5	L6	Теория
Давление торможения	7.4	8.22	8.745	8.744

Рисунок 6 иллюстрирует адаптивные сетки для 3 и 5 уровней адаптации.

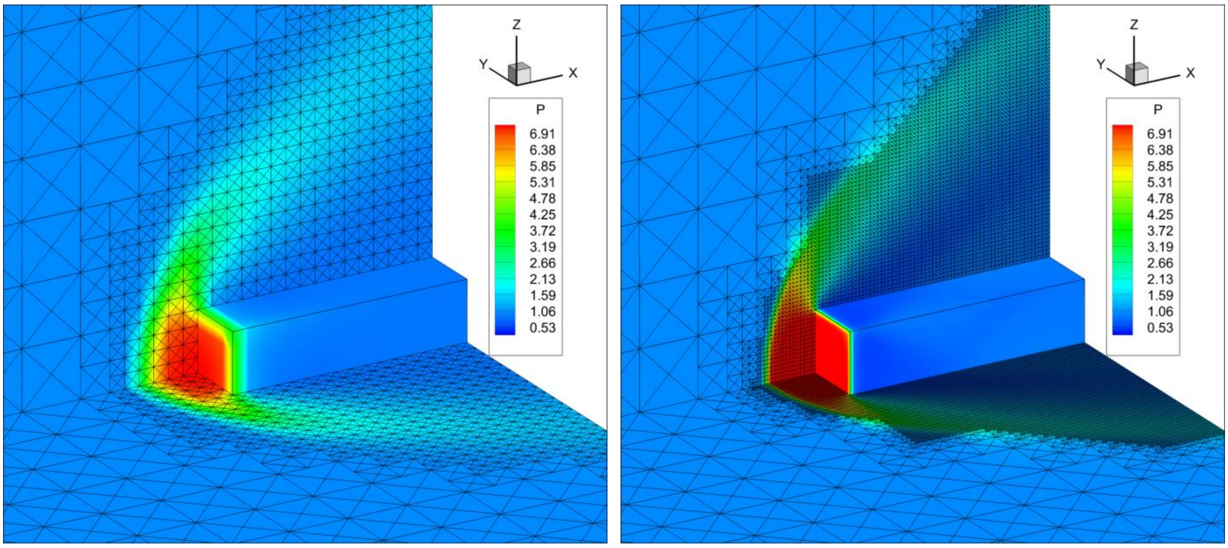

Рис. 6. Обтекание блока с различным числом уровней адаптации.

На рисунке 6 справа видна некоторая ступенчатая структура сетки. Это, по всей видимости, связано с несовершенством выбора критерия разрежения сетки в данном расчете.

Задача о течении в трехмерной каверне (рис. 7) была выбрана с целью проверки работоспособности алгоритма при очень грубой начальной сетке. Так, каверна в начальной сетке задавалась шестью ячейками (1 в глубину, 2 в ширину и 3 в длину).

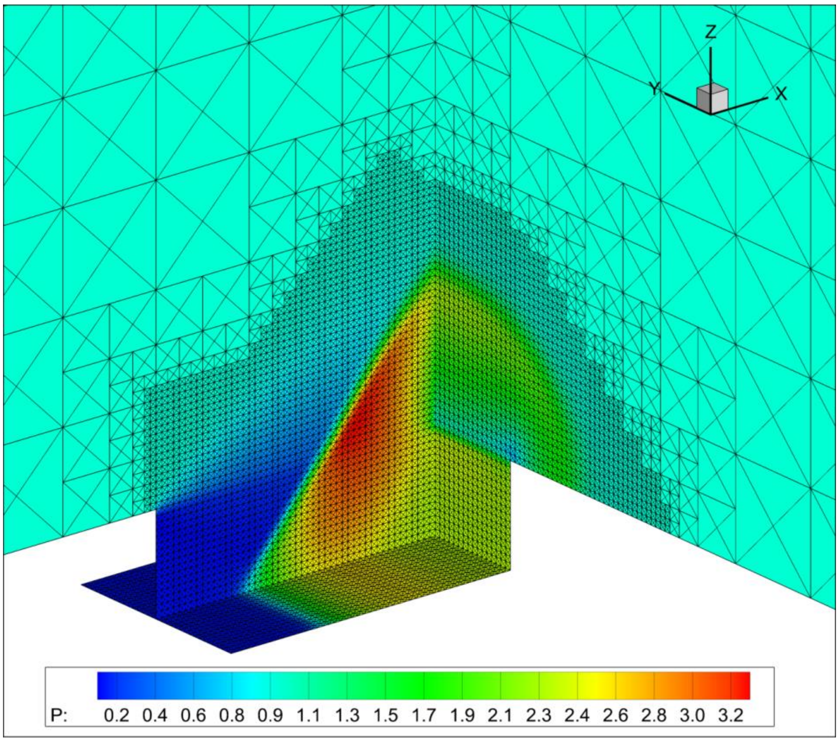

Рис. 7. Адаптивная сетка в каверне. (5 уровней)

5.1 Вычислительная сложность

Как уже говорилось, основная цель предлагаемого подхода — повысить точность расчета при сохранении вычислительной ёмкости. Или, что то же самое, сохранение точности при снижении вычислительной емкости алгоритмов.

Процесс вычислений на локально адаптивных сетках можно разбить на несколько основных этапов:

- Анализ гладкости решения, полученного на предыдущем шаге. Расстановка флагов деления, объединения.
- Деление ячеек, подлежащих делению.
- Объединение ячеек (бывших некогда одной ячейкой) в одну целую.
- Вычисление газодинамических параметров на новом временном слое.

Оценим вычислительную емкость каждого из этих этапов.

Кроме того, оценим среднее время расчета одной ячейки сетки в зависимости от общего числа ячеек, этот параметр поможет понять, насколько усложнение структуры данных в процессе измельчения/огрубления сетки влияет на время расчета.

Таблица 4

Характерные времена выполнения операций на одном временном шаге

Количество ячеек	Вейвлет-анализ	Деление ячеек, сек.	Объединение ячеек, сек.	Расчет газодинамики	Общее время	Расчет одной ячейки
$5.4\cdot10^4$	0.08	0.02	0.0	0.11	0.21	$3.8\cdot10^{-6}$
$1.2\cdot10^6$	2.33	0.19	0.09	2.54	5.15	$4.3\cdot10^{-6}$
$3.5\cdot10^6$	7.57	0.54	0.3	7.71	16.18	$4.6\cdot10^{-6}$

Из таблицы 4 видно, что время анализа и адаптации сетки сравнимо со временем решения уравнений. Усложнение шаблона вейвлет-анализа привело бы к доминированию операции адаптации над непосредственно вычислительными операциями, что нежелательно. Среднее время расчета одной ячейки в диапазоне числа ячеек $10^5 - 4\cdot10^6$ меняется не существенно, что говорит о том, что выбранная структура хранения данных вполне применима.

Заключение

Предложенные алгоритмы многоуровневой адаптации апробированы на ряде двумерных и трехмерных газодинамических задачах. Увеличение числа уровней при фиксированной базовой сетке повышает точность итогового решения, локализация особенностей решения повышается. Для задач со сложной конфигурацией и без значительных перепадов газодинамических величин целесообразно применение только годуновского потока, однако при сильных перепадах величин консервативных переменных применение метода С. К. Годунова приводит к эффекту карбункула.

Список литературы

1. Афендиков А. Л., Меркулов К. Д., Пленкин А. В. Динамическая локальная адаптация сеток на основе вейвлет-анализа в задачах газовой динамики //Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2014. № 99. 26 с.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. — С. 243-274.
3. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations //SIAM Journal on Scientific Computing. — 2003. — Т. 25. — №. 3. — С. 995-1017.
4. Сухинов А. А. Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению //Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22. — №. 1. — С. 86-98.
5. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями //Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1961. — Т. 1. — №. 2. — С. 267-279.
6. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — 1976.
7. Афендиков А.Л., Меркулов К.Д., Пленкин А.В. Сравнительный анализ подходов к численному моделированию газодинамических течений на двухуровневых адаптивных расчетных сетках // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 95. 24 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-95

Содержание