ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 96 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Сурначёв М.Д.

О единственности решений задачи о стационарной диффузии в несжимаемом турбулентном потоке

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сурначёв М.Д. О единственности решений задачи о стационарной диффузии в несжимаемом турбулентном потоке // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 96. 32 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-96

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

М. Д. Сурначёв

О единственности решений задачи о стационарной диффузии в несжимаемом турбулентном потоке

Москва — 2015

Сурначёв М. Д.

О единственности решений задачи о стационарной диффузии в несжимаемом турбулентном потоке

Устанавливается единственность решений дивергентных эллиптических уравнений второго порядка с несимметрической матрицей коэффициентов, кососимметрическая часть которой имеет экспоненциально суммируемые коэффициенты. Обсуждается ряд других вопросов, связанных с единственностью решений.

Ключевые слова: единственность, задача Дирихле, несимметрическая матрица, BMO, младшие члены, турбулентная диффузия

Mikhail Dmitriyevich Surnachev

On uniqueness of solutions to the problem of stationary diffusion in an incompressible turbulent flow

We establish uniqueness of solutions to divergent second-order elliptic equations with a non-symmetric coefficient matrix whose skew-symmetric part has exponentially summable coefficients. We discuss other questions related to uniqueness of solutions.

Key words: uniqueness, Dirichlet problem, non-symmetric matrix, BMO, low-order terms, turbulent diffusion

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-31341 (разделы 1,2,3). Разделы 4,5,6 выполнены при поддержке гранта РНФ 14-11-00398 во Владимирском государственном университете им А.Г. и Н.Г. Столетовых.

1. Введение. Вопросы существования. Аппроксимационные решения

Рассматривается вопрос о существовании и единственности решений эллиптических задач вида

$$Tu = -\operatorname{div}(\nabla u + A\nabla u) = f \in H^{-1}(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{1.1}$$

Ω — ограниченная липшицевая область в $\mathbb{R}^n$, матрица A кососимметрична: $A_{ij} = -A_{ji}$.

Будем рассматривать также связанную с задачей (1.1) задачу

$$\mathcal{T}u = -\operatorname{div}(\nabla u + au) = f \in H^{-1}(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{1.2}$$

с соленоидальным векторным полем a. Соленоидальность здесь понимается в смысле распределений, то есть

$$\int_\Omega a\nabla\varphi \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Данная работа является развитием и уточнением идей работы В.В. Жикова [1].

Решением задачи (1.1) будем называть $u \in H_0^1(\Omega)$, такую, что интегральное тождество

$$\int_\Omega (\nabla u + A\nabla u) \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = (f, \varphi) \tag{1.3}$$

выполнено для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Аналогично, решением задачи (1.2) будем называть $u \in H_0^1(\Omega)$, такую, что интегральное тождество

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla\varphi + au\nabla\varphi) \, \mathrm{d}x = (f, \varphi) \tag{1.4}$$

выполнено для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Вначале отметим, что необходимым условием для того, чтобы решение (1.1) в смысле тождества (1.3) было определено, является

$$A \in L^2(\Omega). \tag{1.5}$$

Для уравнения (1.2), в силу теоремы вложения Соболева (для $n \geq 3$) и Юдовича-Похожаева (для $n = 2$), достаточно требовать

$$a \in L^{2n/(n+2)}(\Omega) \quad \text{если} \quad n > 2, \text{ и} \quad a \in L\log^{1/2} L(\Omega) \quad \text{для} \quad n = 2. \tag{1.6}$$

В дальнейшем будем считать, что условия (1.5) и (1.6) выполнены.

Оказывается, что при этих минимальных условиях задачи (1.1), (1.2) разрешимы, то есть имеют хотя бы одно решение. Так как для этих случаев рассуждения совершенно идентичны, приведём их лишь для первого уравнения.

Пусть матрицы A_N кососимметричны, $A_N \in L^\infty(\Omega)$, $A_N \to A$ в $L^2(\Omega)$. Для уравнения (1.1) с матрицей A_N вместо A,

$$T_N u_N := -\operatorname{div}\left((I + A_N)\nabla u_N\right) = f,$$

существует (единственное) решение $u_N \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\nabla u_N + A_N \nabla u_N) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.7}$$

и выполнено энергетическое тождество

$$\int_\Omega \nabla u_N \cdot \nabla u_N \, \mathrm{d}x = (f, u_N). \tag{1.8}$$

Таким образом, последовательность решений u_N ограничена в $H_0^1(\Omega)$, предельный переход в (1.7) даёт интегральное тождество (1.3) вместе с энергетическим *неравенством*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x \le (f, u). \tag{1.9}$$

Таким образом построенные решения называются *аппроксимационными решениями*.

Запишем (1.3) в виде

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \ \mathrm{d}x + [u, \varphi] = (f, \varphi). \tag{1.10}$$

Вторая скобка здесь понимается как

$$[u, \varphi] = \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Для всех решений уравнений (1.1) в рассматриваемом нами смысле

$$\begin{aligned} |[u, \varphi]| &= \left| (f, \varphi) - \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \right| \\ &\le (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Таким образом, для решения функционал $[u, \varphi]$, изначально определённый на $C_0^\infty(\Omega)$, можно продолжить по непрерывности до ограниченного линейного функционала на $H_0^1(\Omega)$. Получаем

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \ \mathrm{d}x + [u, u] = (f, u). \tag{1.12}$$

Сравнивая это выражение с (1.9), получаем, что для всех аппроксимационных решений выполнено
$$[u, u] \geq 0. \tag{1.13}$$
При этом для произвольного решения этот факт, вообще говоря, не имеет места — существуют контрпримеры, построенные в работе В.В. Жикова [1].

С другой стороны, очевидно, что любая функция $u \in H_0^1(\Omega)$, для которой выполняется

$$[u, \varphi] \leq C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

является решением некоторой задачи (1.1), так как продолженное по непрерывности на $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ выражение

$$(f, \varphi) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + [u, \varphi]$$

задаёт ограниченный функционал $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Аналогичные рассуждения верны и для задачи (1.2). Берётся последовательность ограниченных соленоидальных полей a_N, сходящаяся к a в пространстве $L^{2n/(n+2)}(\Omega)$ (считаем, что $n \geq 3$, для $n = 2$ рассуждения аналогичны). Для допредельных задач с a_N вместо a выполнено энергетическое тождество (1.8). Здесь надо пояснить, что

$$\int_\Omega a_N u \nabla u \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega a_N T_k(u) \nabla u \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega a_N \nabla\Phi_k(u) \, \mathrm{d}x = 0,$$
$$T_k(u) = \min(|u|, k) \operatorname{sign} u, \quad \Phi_k(u) = \int_0^u T_k(s)\, ds.$$

Соответственно, переходя к пределу в интегральном тождестве

$$\int_\Omega (\nabla u_N \nabla\varphi + a_N u_N \nabla\varphi) \, \mathrm{d}x = (f, \varphi),$$

получим (1.4). Так же, как и ранее, можно определить форму

$$[u, \varphi] = \int_\Omega a u \nabla\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тогда интегральное тождество (1.4) примет вид (1.10), множество решений (1.2) для всевозможных правых частей будет характеризоваться оценкой (1.11), а аппроксимационные решения будут характиризоваться неравенством (1.13).

С другой стороны, единственность при данных минимальных предположениях не гарантирована. Более того, в работе [1] были построены примеры неаппроксимационных решений, то есть таких решений, которые не могут быть получены предельным переходом из последовательности решений приближенных задач. Такие решения характеризуются соотношением

$$[u,u] < 0. \tag{1.14}$$

Для решений, удовлетворяющих (1.14), стандартная энергетическая оценка (1.9) заведомо не выполняется.

Соответственно, встаёт вопрос — какие условия достаточно наложить на матрицу A в задаче (1.1) и на векторное поле a в задаче (1.2), чтобы гарантировать единственность решения. Можно ставить и другой вопрос — какие условия гарантируют единственность *аппроксимационных* решений.

Введём множество

$$D = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int A\nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x \le C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}. \tag{1.15}$$

Выше было показано, что множество D в точности состоит из решений задач (1.1), соответствующих различным $f \in H^{-1}(\Omega)$. Множество D не пусто, в частности, оно содержит все липшицевы функции, обращающиеся в ноль на границе области.

Приведём вначале некоторые простые (тавтологические) наблюдения.

Лемма 1. *1. Если*

$$[u,u] = 0 \quad \textit{для всех} \quad u \in D, \tag{1.16}$$

то решение (1.1) *единственно при любом* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *и выполнено энергетическое тождество.*

2. Если решение задачи (1.1) *единственно при любом* $f \in H^{-1}(\Omega)$*, то*

$$[u,u] \ge 0 \quad \textit{для всех} \quad u \in D.$$

3. Если для задач (1.1) *с матрицами* $+A$ *и* $-A$ *имеет место единственность решения при любой правой части* $f \in H^{-1}(\Omega)$*, то*

$$[u,u] = 0 \quad \textit{для всех} \quad u \in D.$$

Первое утверждение следует из (1.12). Второе утверждение следует из того, что если найдётся $u \in D$, такое, что $[u,u] < 0$, то $Tu = -\operatorname{div}(\nabla u + A\nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$ и можно построить аппроксимационное решение v задачи (1.1) с правой частью Tu, для которого $[v,v] \ge 0$. Третье утверждение есть следствие второго.

Все утверждения леммы 1, естественно, верны и для задачи (1.2). Множество решений D здесь определяется как

$$D = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int au\nabla\varphi \, \mathrm{d}x \le C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}. \tag{1.17}$$

2. Уравнения с косой матрицей из BMO

Хорошо известным достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1.1), которое также гарантирует справедливость энергетического тождества

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla u \, \mathrm{d}x = (f, u),$$

является принадлежность коэффициентов косой матрицы A пространству BMO:

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad A_{ij} \in BMO(\mathbb{R}^n), \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Напомним, что “норма” функции f в пространстве BMO определяется как

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \, \mathrm{d}x, \quad f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f \, \mathrm{d}x.$$

При условии (2.1) оператор

$$Tu = -\operatorname{div}(\nabla u + A\nabla u) \tag{2.2}$$

в задаче (1.1) является ограниченным оператором из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$. Точнее, для $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при условии (2.1) верна оценка

$$\left| \int_\Omega A\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x \right| \le C\|A\|_{BMO} \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.3}$$

Поэтому оператор T, заданный изначально на $C_0^\infty(\Omega)$, можно продолжить по непрерывности до ограниченного и коэрцитивного оператора из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$:

$$\begin{gathered} (Tu, v) \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{для} \quad u, v \in H_0^1(\Omega), \\ (Tu, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x, \quad \text{для} \quad u \in H_0^1(\Omega). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Из (2.4) моментально получается существование и единственность решения по лемме Лакса-Мильграма. Следует отметить, что в классическом смысле интеграл в оценке (2.3) для $u, v \in H_0^1(\Omega)$ может и не быть определённым.

Оценку (2.3) можно доказывать разными способами. Ключевую роль тут играет пространство Харди $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Начнём со следующего определения:

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \; R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), \; j = 1, \dots, n\}. \tag{2.5}$$

Норму в этом пространстве можно определить как

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь R_j — это система операторов Рисса

$$R_j\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j - x_j}{|x-y|^{n+1}} \varphi(y)\, dy.$$

Интеграл можно определить изначально, например, на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в смысле главного значения по Коши, и затем распространить на $L^p(\mathbb{R}^n)$ по непрерывности. В терминах образов Фурье оператору R_j соответствует символ $i\xi_j/|\xi|$:

$$\mathcal{F}(R_j\varphi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}[\varphi], \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Операторы Рисса являются классическими сингулярными интегральными операторами типа Кальдерона-Зигмунда и действуют ограниченным образом из $L^p(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Образом $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ является BMO. На другом конце шкалы операторы Рисса действуют ограниченным образом в $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. В случае пространства размерности 1 оператор Рисса есть классическое преобразование Гильберта

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{y-x} dy,$$

которому соотвествует мультипликатор $i\,\mathrm{sign}\xi$.

Оценка (2.3) есть простое следствие результата [2] о коммутаторах преобразований Рисса. Фактически, вопрос сводится к следующему. Рассматривается форма

$$\int_\Omega A_{ij} u_{x_i} v_{x_j}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Omega A_{ij}\left(u_{x_i}v_{x_j} - u_{x_j}v_{x_i}\right)\, \mathrm{d}x, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Так как BMO является двойственным к пространству Харди $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ пространством и коэффициенты A_{ij} принадлежат BMO, то достаточно показать, что

$$u_{x_i}v_{x_j} - u_{x_j}v_{x_i} \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n), \quad \text{если} \quad u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Для этого представим градиент ∇u как преобразование Рисса некоторого потенциала из $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$u_{x_i} = R_i\varphi, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Сделать это можно следующим образом. Запишем

$$-\triangle u = -\operatorname{div}(\nabla u),$$

откуда получаем представление

$$u = (-\triangle)^{-1}\,\partial_{x_j}u_{x_j},$$

что даёт

$$u_{x_i} = R_iR_ju_{x_j}, \quad R_i = \partial_{x_i}(-\triangle)^{-1/2}.$$

Так как операторы Рисса действуют ограниченным образом из L^2 в L^2, то это и есть искомое представление. Аналогично запишем представление

$$v_{x_i} = R_i\psi, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Запишем

$$\begin{aligned} u_{x_i}v_{x_j} - u_{x_j}v_{x_i} &= R_i\varphi R_j\psi - R_j\varphi R_i\psi \\ &= (R_i\varphi R_j\psi + \varphi R_iR_j\psi) - (R_j\varphi R_i\psi + \varphi R_iR_j\psi). \end{aligned}$$

По теореме о коммутаторах, обе скобки во второй строке последнего выражения принадлежат пространству Харди $\mathcal{H}^1$. Напомним этот результат: если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, а T есть оператор типа Кальдерона-Зигмунда (см. [3]), то $fTg - gT^*f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Имеется и более простое доказательство (2.6), данное в [4] (см. также [5], [6], [7]). Оно основано на следующем определениии $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Пусть Φ — гладкая функция с компактным носителем, $\int \Phi\,\mathrm{d}x = 1$. Для $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим

$$M_\Phi f(x) = \sup_{t>0}|\Phi_t * f|(x), \quad \Phi_t(x) = t^{-n}\Phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

Тогда

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^1(\mathbb{R}^n) :\, M_\Phi f \in L^1(\mathbb{R}^n)\right\}. \tag{2.7}$$

Определения (2.5) и (2.7) эквивалентны. Эти вопросы подробно освещены в монографии [3].

Напомним приведённое в [4] элегантное доказательство (2.6). Будем считать, что $\Phi(x) = 0$ для $|x| \geq 1$. Рассмотрим свёртку в определении (2.7) пространства Харди:

$$\begin{aligned}\left[\Phi_t * \left(u_{x_i}v_{x_j} - u_{x_j}v_{x_i}\right)\right](x) &= \left[\Phi_t * \left((uv_{x_j})_{x_i} - (uv_{x_i})_{x_j}\right)\right](x) \\ &= -\int_{|x-y|<t} u(y)v_{x_j}(y)t^{-n-1}\Phi_{x_i}\left(\frac{x-y}{t}\right)dy \\ &\quad + \int_{|x-y|<t} u(y)v_{x_i}(y)t^{-n-1}\Phi_{x_j}\left(\frac{x-y}{t}\right)dy \\ &= -\int_{|x-y|<t} \frac{u(y)-\bar{u}}{t}v_{x_j}(y)t^{-n}\Phi_{x_i}\left(\frac{x-y}{t}\right)dy \\ &\quad + \int_{|x-y|<t} \frac{u(y)-\bar{u}}{t}v_{x_i}(y)t^{-n}\Phi_{x_j}\left(\frac{x-y}{t}\right)dy,\end{aligned}$$

где

$$\bar{u} = \frac{1}{|B_t^x|}\int_{|x-y|<t} u(y)\,dy.$$

Здесь достаточно заметить, что исходное выражение содержит лишь производные и не изменяется, если добавить к функции u или v какую угодно константу. Будем оценивать получившиеся два интеграла по отдельности:

$$\begin{aligned}I_t(x) &:= t^{-n}\left|\int_{|x-y|<t} \frac{u(y)-\bar{u}}{t}v_{x_j}(y)\Phi_{x_i}\left(\frac{x-y}{t}\right)dy\right| \\ &\leq C\left(t^{-n}\int_{|x-y|<t}\left|\frac{u(y)-\bar{u}}{t}\right|^{\alpha}dy\right)^{1/\alpha}\left(t^{-n}\int_{|x-y|<t}|v_{x_j}(y)|^{\beta}\,dy\right)^{1/\beta} \\ &\leq C\left(t^{-n}\int_{|x-y|<t}|\nabla u(y)|^{\alpha(1-1/n)}\,dy\right)^{\frac{n}{(n-1)\alpha}}\left(t^{-n}\int_{|x-y|<t}|v_{x_j}(y)|^{\beta}\,dy\right)^{1/\beta} \\ &\leq C\left(M[|\nabla u|^{\alpha(1-1/n)}](x)\right)^{\frac{n}{(n-1)\alpha}} \cdot \left(M[|\nabla v|^{\beta}](x)\right)^{1/\beta}.\end{aligned}$$

Здесь

$$1 < \beta < 2, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \alpha < \frac{2n}{n-1}.$$

Из классической теоремы о максимальной функции Харди-Литтльвуда получаем

$$F_1 = \left(M[|\nabla u|^{\alpha(1-1/n)}](x)\right)^{\frac{n}{(n-1)\alpha}} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \|F_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

$$F_2 = \left(M[|\nabla v|^{\beta}](x)\right)^{1/\beta} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \|F_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Соответственно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |I_t(x)|\,\mathrm{d}x \le \|F_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|F_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Аналогично оценивается и второй интеграл, что даёт

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_\Phi(u_{x_i}v_{x_j} - u_{x_j}v_{x_i})\,\mathrm{d}x \le C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Интересно, что согласно результату В.Г. Мазьи и И.Е. Вербицкого [8] (этот результат сформулирован для общих линейных эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами и коэффициентами из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) ограниченность операторов (2.2) из $H^1_0(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ приводит к тому, что действие оператора на $H^1_0(\mathbb{R}^n)$ совпадает с действием аналогичного оператора, косая часть матрицы которого имеет коэффициенты из BMO. Более точно, пусть дан оператор

$$Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u)\ :\ L^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to L^{-1,2}(\mathbb{R}^n),$$

где под $L^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ понимается замыкание гладких финитных функций по норме $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, а $L^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$ — сопряжённое к нему. Оператор L является ограниченным тогда и только тогда, когда

$$A^s = \frac{A + A^T}{2} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n\times n},$$
$$\operatorname{div} A^c \in BMO^{-1}(\mathbb{R}^n)^n, \quad A^c = \frac{A - A^T}{2}.$$

Под $BMO^{-1}(\mathbb{R}^n)^n$ здесь понимаются такие распределения, которые могут быть представлены как дивергенция векторного поля из BMO. В смысле теории распределений

$$\langle Lu, v\rangle = \langle A^s\nabla u, \nabla v\rangle + \langle \operatorname{div} A^c\nabla u, v\rangle, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому, если $\operatorname{div} A^c = \operatorname{div}\Phi$, $\Phi \in BMO(\mathbb{R}^n)^{n\times n}$, то

$$\langle Lu, v\rangle = \langle A^s\nabla u, \nabla v\rangle + \langle \operatorname{div}\Phi\nabla u, v\rangle = -\langle \operatorname{div}\left((A^s + \Phi)\nabla u\right), v\rangle.$$

Это и означает, что при действии на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ оператор может быть представлен как аналогичный оператор с коэффициентами косой части матрицы из BMO. На всё пространство $L^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ он распространяется по непрерывности.

Более того, в [8] дано и представление косой части этого эквивалентного оператора

$$\operatorname{div} A^c = \operatorname{div}\Phi, \quad \Phi = \triangle^{-1}\operatorname{curl}\operatorname{div} A^c, \quad \Phi \in BMO(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Оператор дивергенции матрицы понимается в построчном смысле $\operatorname{div} a_{ij} = \partial_{x_j} a_{ij}$. Оператор curl действует на векторное поле f_i по правилу $\operatorname{curl}_{ij} \vec{f} = \partial_{x_j} f_i - \partial_{x_i} f_j$. Проверим, что формально для Φ, определённого (2.8), действительно $\operatorname{div} \Phi = \operatorname{div} A^c$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\Phi_{ij} &= \triangle^{-1}\left[\partial_{x_j} A^c_{ik,x_k} - \partial_{x_i} A^c_{jk,x_k}\right],\\ (\operatorname{div}\Phi)_i &= \partial^2_{x_j} \triangle^{-1} A^c_{ik,x_k} - \partial_{x_i}\partial_{x_j}\triangle^{-1} A^c_{jk,x_k}\\ &= (\operatorname{div} A^c)_i - \partial_{x_i}\triangle^{-1} A^c_{jk,x_j x_k} = (\operatorname{div} A^c)_i\,.\end{aligned}$$

Второй член в предпоследней строчке исчезает в силу кососимметричности матрицы A^c.

Отметим, что для уравнений с матрицами, имеющими коэффициенты из BMO, имеется ряд результатов, касающихся регулярности решений. Некоторые ссылки, а также примеры уравнений, где такие коэффициенты возникают естественным образом, можно найти в [9].

3. Достаточное условие единственности решения для задачи со сносом

Вначале отметим, что для $a \in L^n(\Omega)$ ($a \in L^2 \log L(\Omega)$ в случае $n = 2$) существование и единственность решений задачи (1.2) доказываются элементарно. Здесь даже не используется условие соленоидальности поля. В самом деле, для $n \geq 3$ в силу неравенства Гёльдера и теоремы вложения Соболева,

$$\left|\int_\Omega a u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\right| \leq C\|a\|_{L^n(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Поэтому оператор $\mathcal{T}u = -\operatorname{div}(\nabla u + au)$ действует ограниченным образом из $H^1_0(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$, а форма $[u,\varphi]$ непрерывна в $H^1_0(\Omega)$ относительно обоих своих аргументов. Отсюда следует, что $[u,u] = 0$. Таким образом, оператор $\mathcal{T} : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является ограниченным, коэрцитивным, и осталось воспользоваться леммой Лакса-Мильграма. В случае $n = 2$ надо воспользоваться теоремой Юдовича-Похожаева(-Мозера-Трудингера) вместо теоремы вложения Соболева.

Отметим также, что при условии $a \in L^n(\Omega)$ решения $-\operatorname{div}(\nabla u + au) = 0$ являются локально ограниченными функциями, непрерывными по Гёльдеру, удовлетворяющими неравенству Харнака [10]. Для $a \in L^q(\Omega)$, $q < n$ это уже не так [11] — решения могут быть неограниченными, а ограниченные решения могут быть разрывными.

Для задачи со сносом (1.2) имеется достаточно простое условие единственности решений. В отличие от достаточного для задачи (1.1) условия $A \in BMO$, оно доказывается элементарными методами [1] (см. также более раннюю работу [12]).

Теорема 2. *Для задачи* (1.2) *с соленоидальным полем* $a \in L^2(\Omega)$ *единственность решения имеет место для любой правой части* $f \in H^{-1}(\Omega)$. *При этом для решения выполнено энергетическое равенство.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$[u, u] = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap D, \tag{3.1}$$

множество D определено в (1.17). Напомним, что

$$[u, \varphi] = \int_\Omega au\nabla\varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{для} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

Этот функционал является ограниченным для $u \in D$ и продолжается по непрерывности на $H_0^1(\Omega)$. Отметим, что в силу принадлежности $a \in L^2(\Omega)$ и соленоидальности, выражение в (3.2) можно переписать в виде

$$[u, \varphi] = -\int_\Omega a\varphi\nabla u \,\mathrm{d}x, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ это ясно, так как в силу соленоидальности векторного поля

$$\int_\Omega au\nabla\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega a\nabla(u\varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega a\varphi\nabla u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega a\varphi\nabla u \,\mathrm{d}x.$$

Для $u \in H_0^1(\Omega)$ результат получается аппроксимацией.

Пусть

$$u^{(k)} = \min(|u|, k)\operatorname{sign} u, \quad k > 0.$$

Для $u \in H_0^1(\Omega)$ имеем

$$u^{(k)} \in H_0^1(\Omega), \quad u^{(k)} \to u \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом,

$$[u, u] = \lim_{k\to\infty}[u, u^{(k)}], \quad u \in D. \tag{3.3}$$

Пусть φ_ε — последовательность $C_0^\infty(\Omega)$ функций, сходящихся к $u^{(k)}$ в $H_0^1(\Omega)$, почти всюду в Ω, и удовлетворяющих $|\varphi_\varepsilon| \le 2k$. Переходя к пределу и пользуясь соленоидальностью вектора a, получаем

$$[u, u^{(k)}] = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega a\varphi_\varepsilon\nabla u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega au^{(k)}\nabla u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega a\nabla U^{(k)}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{3.4}$$

где
$$U^{(k)} = \int_0^{|u|} \min(|s|, k) ds \in H_0^1(\Omega).$$
Теперь (3.1) следует из (3.4) и (3.3). Выполнение энергетического равенства следует из (3.1) и (1.12). □

Можно было бы рассуждать и более прямым образом. Возьмём в (1.4) те же пробные функции φ_ε, что и выше. Используя соленоидальность поля a, получим в пределе
$$\int_\Omega |\nabla u^{(k)}|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega a u^{(k)} \nabla u = (f, u^{(k)}).$$
Второй интеграл в левой части равен нулю в силу соленоидальности поля a. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем тождество
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = (f, u),$$
которое гарантирует единственность.

В работе В.В. Жикова [1] был построен пример неединственности для решения задачи (1.2). Было построено соленоидальное векторное поле $a \in L^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ и решение $v \in H_0^1(\Omega) \cap D$ задачи (1.2), такое, что $[v, v] = -1$. Соответственно, решение v является неапрроксимационным.

В работе Н. Филонова [11] единственность решений задачи (1.2) с соленоидальным векторным полем $a \in L^2(\Omega)$ была доказана для случая $n = 2$ с применением результатов [4]. Продолжим векторное поле a на всё пространство с сохранением соленоидальности так, чтобы $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|a\|_{L^2(\Omega)}$. Из результатов [4] следует, что $a\nabla u$ принадлежит пространству Харди $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ и
$$\|a\nabla u\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)} \leq C\|a\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$
С другой стороны, $H_0^1(\Omega) \subset BMO(\mathbb{R}^2)$: для шара $B \in \mathbb{R}^2$ и $u \in H^1(B)$ выполняется неравенство Пуанкаре
$$\frac{1}{|B|} \int_B |u - \bar{u}|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_B |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$
Так как сопряжённым к $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ является $BMO(\mathbb{R}^2)$, получаем оценку
$$\left| \int_\Omega a\varphi \nabla u \,\mathrm{d}x \right| \leq \|a\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}$$
для $u \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому оператор
$$-\operatorname{div}(\nabla u + au) = -\triangle u - a\nabla u$$

в этом случае является ограниченным образом из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$, лемма Лакса-Мильграма даёт существование и единственность решения. Однако на пространства большей размерности такой метод не распространяется.

4. Вопросы единственности для аппроксимационных решений

Как было указано выше, единственность решений имеет смысл обсуждать отдельно для аппроксимационных решений и для решений вообще.

Кроме энергетической оценки (1.9), для аппроксимационных решений уравнения (1.1) имеет место ещё одна оценка

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C|\Omega|^{2/n}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{4.1}$$

которая получается предельным переходом из соответствующей оценки для u_N. Оценка для u_N проблемы не представляет. Доказательство можно провести методом Мозера или ДиДжорджи. Мы приведём его в конце этого раздела работы. Оценка (4.1) верна и для аппроксимационных решений задачи (1.2).

Сформулируем следующий результат из работы [1].

Лемма 3. *Если однородное уравнение не имеет ненулевых ограниченных решений, то аппроксимационное решение единственно для любого $f \in H^{-1}(\Omega)$.*

Доказательство. Для $f \in L^\infty(\Omega)$ рассмотрим последовательность $u_N = T_N^{-1} f$. В силу энергетической оценки, $\|u_N\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$, так что из последовательности u_N можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим два слабых предела последовательности u_N. Их разность является ограниченным решением однородного уравнения, поэтому по условию леммы равна нулю. Поэтому слабый предел последовательности u_N единственен и вся последовательность u_N сходится к этому пределу. Так как $L^\infty(\Omega)$ плотно в $H^{-1}(\Omega)$ и семейство операторов $T_N^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ равномерно ограничено, то предел $T_N^{-1} f$ существует для любого $f \in H^{-1}(\Omega)$ и не зависит от способа аппроксимации. Чтобы показать это, запишем

$$f = \sum_{j=1}^\infty g_j, \quad g_j \in L^\infty(\Omega), \quad \|g_j\|_{H^{-1}(\Omega)} \le 2^{2-j}\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Тогда,

$$T_N^{-1} f = \sum_{j=1}^\infty T_N^{-1} g_j, \quad \|T_N^{-1} g_j\|_{H_0^1(\Omega)} \le 2^{2-j}\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Легко видеть, что последняя сумма ряда слабо сходится при $N \to \infty$. $\square$

Лемма 4. *Если*

$$[u,u]=0 \quad \forall u\in D\cap L^\infty(\Omega), \tag{4.2}$$

то аппроксимационное решение единственно при любом $f\in H^{-1}(\Omega)$, и для него выполнено энергетическое равенство.

Доказательство. Доказательство первого утверждения леммы очевидно — условие (4.2), в силу оценки (4.1), даёт единственность решений задачи (1.1) с ограниченной правой частью. Осталось воспользоваться результатом предыдущей леммы. Поясним выполнение энергетического тождества. Пусть $f_m\in L^\infty(\Omega)$, $f_m\to f$ в $H^{-1}(\Omega)$, u_m — аппроксимационное решение (1.1) с правой частью f_m. В силу (4.2) имеем

$$\int_\Omega \nabla u_m\nabla u_m\,\mathrm{d}x=(f_m,u_m).$$

Последовательность решений u_m сильно сходится в $H_0^1(\Omega)$ к u — решению задачи (1.1). Переходя к пределу, получаем

$$\int_\Omega \nabla u\nabla u\,\mathrm{d}x=(f,u).$$

Осталось показать, что полученное решение u является аппроксимационным. В самом деле,

$$\lim_{N\to\infty}T_N^{-1}f=\lim_{N\to\infty}\lim_{m\to\infty}T_N^{-1}f_m=\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}T_N^{-1}f_m=\lim_{m\to\infty}u_m.$$

Пределы можно переставить в силу равномерной ограниченности семейства операторов T_N^{-1}. □

Доказательство оценки (4.1)**.** Приведём это доказательство, следуя [13].

Можно считать, что $\|f\|_\infty\le 1$ и матрица A ограничена. Используем в качестве пробной функции в определении решения $\varphi=(u-k)_+$. В силу кососимметричности матрицы A и $\nabla(u-k)_+=\chi_{\{u>k\}}\nabla u$ получаем

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla(u-k)_+\,\mathrm{d}x=0,$$

соответственно, интегральное тождество в определении решения даёт

$$\int_\Omega |\nabla(u-k)_+|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega (u-k)_+\,\mathrm{d}x.$$

Используя неравенство Соболева (полагаем здесь $n\ge 3$), получим

$$\int_\Omega (u-k)_+^{\frac{2n}{n-2}}\,\mathrm{d}x\le C\left(\int_\Omega (u-k)_+\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-2}}. \tag{4.3}$$

Соответственно, для $\delta > 0$ получим

$$\int_\Omega (u-k-\delta)_+ \le C\delta^{1-\frac{2n}{n-2}} \left(\int_\Omega (u-k)_+ \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Обозначим

$$h(t) = \int_\Omega (u-t)_+ \,\mathrm{d}x.$$

Применим лемму Г.Стампаккья [13].

Лемма 5. *Пусть неотрицательная функция $h(t)$, заданная на $[t_0,\infty]$, такова, что*

$$h(t+\sigma) \le C\sigma^{-\alpha} h(t)^\beta$$

для всех $t \ge t_0$, $\sigma > 0$, где C, α, β положительны и $\beta > 1$. Тогда

$$h(t_0+\sigma_0) = 0, \quad \text{где} \quad \sigma_0^\alpha = C[h(t_0)]^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}.$$

Выбирая $t_0 = 0$, получаем

$$\int_\Omega (u-\sigma_0)_+ \,\mathrm{d}x = 0, \quad \sigma_0^{\frac{n+2}{n-2}} = C\left(\int_\Omega u_+ \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{n-2}} 2^{\frac{n+2}{n-2}\cdot\frac{n}{2}}.$$

Из (4.3) с помощью неравенства Гёльдера получаем оценку

$$\int_\Omega u_+ \le C|\Omega|^{(n+2)/n}, \quad \text{откуда} \quad \sigma_0 \le C(n)|\Omega|^{2/n}.$$

Получение оценки типа (4.1) для произвольного решения сталкивается с очевидной проблемой — заранее неясно, как будет себя вести выражение $[u,(u-k)_\pm]$ и другие выражения такого типа.

5. О связи задачи с косой матрицей и задачи со сносом

Дадим некоторые пояснения относительно связи задач в форме (1.1) и (1.2). В этом разделе будем считать для простоты, что граница области принадлежит классу C^2. Задача в форме (1.2) описывает установившуюся диффузию в несжимаемом потоке. Если матрица A в задаче (1.1) дифференцируема, то эта задача может быть записана в форме (1.1) с векторным полем $a = \operatorname{div} A$. В самом деле, пусть $u, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда в силу кососимметричности матрицы A имеем

$$\begin{aligned}\langle -\operatorname{div}(A\nabla u), \varphi\rangle &= \int_\Omega A_{ij} u_{x_i}\varphi_{x_j}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega A_{ij,x_j} u\varphi_{x_j}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega uA_{ij}\varphi_{x_i x_j}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega A_{ij,x_j} u\varphi_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (u\operatorname{div} A)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = \langle -\operatorname{div}(u\operatorname{div} A), \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Из кососимметричности матрицы следует, что

$$\operatorname{div}\operatorname{div} A = \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

С другой стороны, задача, записанная в форме (1.2), может быть записана при некоторых предположениях и в форме (1.1). Для этого достаточно построить такую матрицу A, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} A_{ij} = a_i. \tag{5.1}$$

В пространстве размерности 2 кососимметрическая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому задача сводится к нахождению такой скалярной функции $A = A(x, y)$, что

$$\frac{\partial A}{\partial y} = a_1, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = -a_2.$$

Так как поле $a = (a_1, a_2)$ соленоидально, то поле $V = (-a_2, a_1)$ потенциально. Таким образом, задача сводится к построению функции с заданным градиентом, $\nabla A = V$. Соответственно, если $V \in L^q(\Omega)$, получаем $A \in W^{1,q}(\Omega)$. В частности, если $a \in L^2(\Omega)$, то $A \in W^{1,2}(\Omega)$. Продолжим A до $A \in H_0^1(B)$, где B — достаточно большой шар, содержащий Ω. В силу неравенства Пуанкаре $A \in BMO(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, на плоскости задача (1.2) с соленоидальным векторным полем $a \in L^2(\Omega)$ может быть приведена к виду (1.1) с кососимметрической матрицей $A \in BMO$. Таким образом, получаем другое доказательство того факта, что при $n = 2$ условие $a \in L^2(\Omega)$ гарантирует существование и единственность решения вместе с выполнением энергетического равенства.

В пространстве размерности три действие кососимметрической матрицы A может быть представлено как векторное произведение на вектор w,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записывая для этого представления систему (5.1), получим

$$\operatorname{rot} w = -a. \tag{5.2}$$

Это достаточно хорошо изученная задача классического векторного анализа. Напомним, что в звёздной области решение задачи (5.2) даётся простой формулой (частный случай леммы Пуанаре о замкнутых формах, см. например [14])

$$w(x) = -\int_0^1 a(tx) \times (tx)\, dt. \tag{5.3}$$

Обычно уравнение (5.2) дополняют естественными условиями нормировки

$$\operatorname{div} w = 0, \quad w \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.4}$$

Здесь $\vec{n}$ обозначает единичную внешнюю нормаль к границе области. Получившуюся задачу (5.2)-(5.4) можно решать различными способами.

Ключевым моментом является представление решения (5.2) в виде $w = \operatorname{rot} u$, что даст на векторное поле u уравнение

$$\nabla \operatorname{div} u - \triangle u = -a. \tag{5.5}$$

Если предположить, что векторное поле a имеет нулевую нормальную компоненту на границе области Ω, то решение последнего уравнения даётся ньютоновым потенциалом

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{a(y)\,dy}{|x-y|}. \tag{5.6}$$

Можно проверить, что заданное таким образом векторное поле соленоидально, является решением $\triangle u = a$ и, следовательно, удовлетворяет (5.5). Соответственно, решение исходного уравнения (5.2) даётся при этом формулой

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}_x \int_\Omega \frac{a(y)\,dy}{|x-y|}.$$

Решая вспомогательную задачу, можно добиться того, что $v = 0$ на $\partial\Omega$. Если же нормальная компонента поля a на границе области не нулевая, то поле, заданное ньютоновым потенциалом (5.6), уже не будет соленоидальным. В таком случае можно применять приём с продолжением, описанный ниже ([15]).

В частности, если $a \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, то для решения (5.2) - (5.4) выполняется $w \in W^{1,q}(\Omega)$. Соответственно, для векторного поля $a \in L^{2n/(n+2)}(\Omega)$ (условие существования решения задачи (1.2) выше), в силу соболевской теоремы вложения получаем $A \in L^2(\Omega)$. Надо отметить, что, в отличие от хорошо изученного случая $q = 2$ (см., например, работы [15], [16]), результаты для $q \neq 2$ найти сложнее. В целом результаты для уравнения (5.2) менее распространены, чем аналогичные результаты для $\operatorname{div} w = f$.

Отметим, что Ю.А. Дубинский использует вместо метода потенциалов доказательство существования методом галёркинских приближений. В многограннике рассматривается уравнение $\operatorname{rot}^2 u = a$, дополненное граничными условиями $u \times \vec{n} = 0$ на границе области Ω. Решение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_\Omega \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega av\,\mathrm{d}x,$$

где $u, v \in W^{1,2}_{norm}(\Omega)$ — подмножество $W^{1,2}(\Omega)$ с нулевой касательной компонентой на границе. Многогранник можно заменить, например, на выпуклую область. Для $u \in W^{1,2}_{norm}(\Omega)$ при таких условиях выполняется

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \left(|\mathrm{rot}\,u|^2 + |\,\mathrm{div}\,u|^2\right)\,\mathrm{d}x, \quad \int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x \le C\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x,$$

что даёт при условии $\mathrm{div}\,u = 0$ априорную оценку $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le C\|a\|_{L^2(\Omega)}$ и аналогичные оценки для галёркинских приближений.

В монографии [17] существование решения (5.2) с правой частью из $L^2(\Omega)$ доказывается методами функционального анализа. При этом существенно используется гильбертова структура.

Перейдём к пространствам произвольной размерности. Во-первых, для гладкой правой части существование следует из той же леммы Пуанкаре для дифференциальных форм — соленоидальный вектор представляется как $(n-1)$-форма ω, такая, что $d\omega = 0$, по нему восстанавливается $(n-2)$-форма α, такая, что $d\alpha = \omega$. Коэффициенты этой формы (их $n(n-1)/2$) и дадут коэффициенты кососимметричной матрицы A. В случае негладкой правой части можно было бы прибегнуть к приёму С.Л. Соболева, дополнительно проинтегрировав формулу типа (5.3) по пространственной переменной. Получившееся представление и свойства его регулярности можно изучать используя теоремы С.Л. Соболева и Кальдерона-Зигмунда. По такому пути шла R. Griesinger в работе [18] (см. также [19]). Имеются также общие результаты по разрешимости систем вида $d\omega = f$, $\delta\omega = g$, снабжённых краевыми условиями. О таких результатах в пространствах Гёльдера см., например, работу [20], работу [21], содержащую современную интерпретацию результатов [20], и ссылки там.

Однако результаты [18], как и результаты, приведённые в работе [21], ограничены соленоидальными полями с нулевой нормальной компонентой на границе. Ниже мы приведём приём продолжения, который позволяет обойти это условие.

Дадим простое решение задачи о построении матрицы тока, в духе работы [15]. Вначале построим решение задач, пока не уточняя граничные условия

$$\triangle V_i = a_i. \tag{5.7}$$

Затем составим кососимметрическую матрицу A_{ij} по правилу

$$A_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}.$$

Вычислим дивергенцию полученной матрицы,

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = \triangle V_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\,\mathrm{div}\,V.$$

Таким образом, надо наложить на поле V такие граничные условия, чтобы обеспечить $\operatorname{div} V = \text{const}$. В силу соленоидальности исходного векторного поля $\operatorname{div} V$ является гармонической функцией. Если мы имеем дело с периодической задачей, то отсюда сразу следует $\operatorname{div} V = \text{const}$. То же будет верно и если решать задачу во всём пространстве в классе достаточно быстро убывающих на бесконечности функций, например, $a \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < \infty$.

Продолжим поле $a \in L^q(\Omega)$ соленоидальным образом на всё пространство. Сделаем это следующим образом. Возьмём достаточно большой шар, содержащий область Ω. В области $B \setminus \Omega$ решим задачу

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div}\left(|\nabla\psi|^{q'-2}\nabla\psi\right) = 0, \quad q' = \frac{q}{q-1} \\
|\nabla\psi|^{q'-2}\nabla\psi \cdot \vec{n}\Big|_{\partial\Omega} = -a_n, \quad |\nabla\psi|^{q'-2}\nabla\psi \cdot \vec{n}\Big|_{\partial B} = 0.
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

где a_n — нормальная компонента вектора a на границе Ω, $\vec{n}$ — единичная внешнияя нормаль к границе. Задача (5.8) понимается в следующем смысле:

$$
\int_{B\setminus\Omega} |\nabla\psi|^{q'-2}\nabla\psi\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega} a\nabla\varphi\,\mathrm{d}x
$$

для любой $\varphi \in W^{1,q'}(B\setminus\Omega)$, где на область Ω функция ψ продолжается с использованием теоремы о следе. Напомним, что след функций из $W^{1,p}(\Omega)$ состоит из функций, которые имеют конечную норму

$$
\|u\|_{1-1/p,p,\partial\Omega} = \|u\|_{L^p(\partial\Omega)} + \left(\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}} d\sigma_x d\sigma_y\right)^{1/p}.
$$

Решив задачу (5.8), получим

$$
\alpha = |\nabla\psi|^{q'-2}\nabla\psi \in L^q(B \setminus \Omega).
$$

Продолжим a в $B \setminus \Omega$ векторным полем α, и нулём — в $\mathbb{R}^n \setminus B$. Получившееся поле соленоидально в смысле распределений во всём пространстве, и $\|a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|a\|_{L^q(\Omega)}$. Тогда решение уравнения Пуассона (5.7) существует и даётся Ньютоновым потенциалом

$$
V_i = c_n \int_B \frac{a_i(y)}{|x-y|^{2-n}}\,dy, \quad c_n = \frac{1}{n(2-n)\omega_n},
$$

ω_n — объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$. При этом $D^2 V_i \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Нетрудно показать, что $\operatorname{div} V = 0$. Соответственно, построенная матрица $A \in W^{1,q}(\Omega)$. Если $a \in L^n(\Omega)$, то получаем таким образом $A \in W^{1,n}(\Omega)$. Продолжая матрицу A до $A \in W_0^{1,n}(B)$, получаем в силу неравенства Пуанкаре $A \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, задача (1.1) представляет собой обобщение задачи (1.2). Можно сказать, что (1.1) описывает диффузию в потоке, скорость которого задана только в смысле распределений. Поэтому задачу (1.1) называют задачей о диффузии в несжимаемом турбулентном потоке. Работа [1] была посвящена вопросам обоснования некоторых моментов из работы [22], посвящённой задачам усреднения турбулентой диффузии.

6. Достаточное условие единственности решения, обобщающее BMO

В этом разделе содержатся основные результаты настоящей работы.

Итак, если матрица A_{ij} имеет коэффициенты из BMO, то

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \le C(n)\|A\|_{BMO}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)},\ \ u\in H_0^1(\Omega),\ \ \varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Следовательно, множество D, введённое выше (1.15), совпадает со всем $H_0^1(\Omega)$, оператор $Tu = -\operatorname{div}((I+A)\nabla u)$ (его расширение по непрерывности с $C_0^\infty(\Omega)$) является ограниченным и коэрцитивным оператором из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$. Используя лемму Лакса-Мильграма, сразу получаем существование и единственность решения задачи (1.1).

Оказывается, что единственность решения может быть получена при более общих и более просто проверяемых условиях, чем принадлежность коэффициентов матрицы пространству BMO.

В работе В.В. Жикова [1] был доказан следующий результат: единственность решения задачи (1.1) имеет место, если

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\|A\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{6.1}$$

Напомним, что для функций из BMO имеет место известная оценка Джона-Ниренберга

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|^p\,\mathrm{d}x \le (Cp\|f\|_{BMO})^p, \quad C = C(n), \tag{6.2}$$

для любого куба $Q\subset\mathbb{R}^n$. При этом свойство (6.1) для функций из BMO, вообще говоря, не имеет места.

Кроме того, в той же работе доказывалось, что если коэффициенты матрицы A принадлежат BMO, то аппроксимационное решение единственно и для него выполнено энергетическое равенство. Это утверждение было основано на доказательстве повышенной суммируемости градиента решения (1.1) с правой

частью из $L^\infty(\Omega)$:
$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_0}\,\mathrm{d}x \le c_0\|f\|_\infty^{p_0}, \quad p_0>2,$$
где показатель p_0 и константа c_0 зависят только от размерности пространства, области Ω и $\|A\|_{BMO}$. Таким образом, если $f\in L^\infty(\Omega)$, то все аппроксимационные решения принадлежат соболевскому пространству $W_0^{1,p_0}(\Omega)$. Используя принадлежность матрицы A любому пространству $L^p(\Omega)$, $p>1$, легко проверить равенство
$$[u,u]=0 \quad \forall u\in D\cap W_0^{1,p_0}(\Omega).$$
Таким образом, аппроксимационное решение задачи (1.1) с ограниченной правой частью единственно. Отсюда следует единственность аппроксимационного решения для любой правой части из $H^{-1}(\Omega)$.

Таким образом, в результатах работы [1] оставался зазор — единственность произвольных решений задачи (1.1) при условии $A\in BMO$ из этих результов не получалась.

На самом деле, эти результаты могут быть улучшены. Сформулируем основную теорему настоящй работы.

Теорема 6. *Если выполнено условие*
$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\|A\|_{L^p(\Omega)}<\infty, \tag{6.3}$$
то решение задачи (1.1) *с любой* $f\in H^{-1}(\Omega)$ *единственно и для него выполнено энергетическое равенство*
$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=(f,u).$$

Отметим, что здесь идёт речь о решениях вообще, а не только об аппроксимационных решениях. В силу свойства (6.2), матрица A с элементами из BMO удовлетворяет условиям этой теоремы.

С другой стороны, легко построить пример функции, которая удовлетворяет условию (6.3), но при этом не принадлежит BMO. Используем простое свойство элементов BMO:
$$|f_{Q_2}-f_{Q_1}|\le 2^{n+1}\|f\|_{BMO}, \tag{6.4}$$
где Q_1 и Q_2 — соприкасающиеся кубы равного размера. В самом деле, пусть Q_3 — куб с ребром, в два раза большим, чем ребро Q_1, содержащий Q_1 и Q_2. Тогда
$$|f_{Q_1}-f_{Q_3}|=\left|\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}(f-f_{Q_3})\,\mathrm{d}x\right|\le 2^n\frac{1}{|Q_3|}\int_{Q_3}|f-f_{Q_3}|\,\mathrm{d}x\le 2^n\|f\|_{BMO}.$$

Из аналогичной оценки для Q_2 и неравенства треугольника получаем (6.4).

Пусть $\Omega = \{|x| < 1/e\}$. Зададим $f = f(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \log \frac{1}{|x|}, & x_1 x_2 > 0, \\ 0, & x_1 x_2 < 0. \end{cases}$$

Очевидно, для функции f, заданной таким образом, свойство (6.4) не будет выполнено, тогда как свойство (6.3) выполнено —

$$0 \leq f(x) \leq \log \frac{1}{|x|}, \quad x \in \Omega, \quad \log \frac{1}{|x|} \in BMO.$$

С другой стороны, нетрудно показать, что всякая функция, удовлетворяющая (6.3), может быть мажорирована функцией из BMO. Напомним следующий факт [23]: для любой $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (или даже меры) максимальная функция Харди-Литтльвуда Mf принадлежит BMO, причём $\|Mf\|_{BMO} \leq C(n)$.

Покажем, что если функция удовлетворяет (6.3), то она экспоненциально суммируема — $\exp(\gamma|f|) \in L^1(\Omega)$, $\gamma > 0$. В самом деле,

$$\int_\Omega e^{\gamma|f|}\, \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\gamma^p}{p!} \int_\Omega |f|^p\, \mathrm{d}x. \tag{6.5}$$

Используя формулу Стирлинга и (6.3), получаем

$$\frac{1}{p!} \int_\Omega |f|^p\, \mathrm{d}x \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \left(Le\gamma\right)^p, \quad L = \lim_{p \to \infty} p^{-1} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Таким образом, ряд в правой части (6.5) сходится, если $\gamma < 1/(Le)$, и

$$\exp(\gamma|f|) \in L^1(\Omega), \quad \forall \gamma < \frac{1}{Le}.$$

Продолжим $\exp(\gamma|f|)$ нулём вне Ω. Очевидно, что

$$|f| \leq \frac{1}{\gamma} \log M \exp(\gamma|f|).$$

Правая часть последнего неравенства принадлежит пространству BMO.

Таким образом, класс функций, заданный условием (6.3), совпадает с классом функций, у которых есть мажоранта из BMO. Отметим, что подобный класс экспоненциально суммируемых функций возникал и ранее. Например, в работе [24] при условии такого типа исследовалась повышенная (в $L^2 \log^\alpha L$) суммируемость градиентов решений неравномерно эллиптических уравнений.

Отметим ещё один интересный момент, связанный с интерпретацией условия (6.3). Добавление к матрице A любой косой матрицы с нулевой (по строчкам или столбцам) дивергенцией на самом деле не меняет уравнение. В самом деле, для такой матрицы C и $u \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div} C\nabla u,\, \varphi\rangle &= \int_\Omega C\nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega C_{ij} u_{x_j}\varphi_{x_i}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega C_{ij}(u\varphi)_{x_j}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega uC_{ij}\varphi_{x_i x_j}\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Первый из интегралов во второй строке обращается в ноль в силу условия нулевой дивергенции, а второй — в силу того, что матрица C косая, а матрица $D^2\varphi$ симметричная.

В случае размерности пространства $n = 2$ это не вносит особых сложностей, так как в таком случае кососимметрическая матрица с нулевой дивергенцией имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \text{const}.$$

Легко видеть, что добавление к матрице постоянного добавка не меняет предел в (6.3).

В пространстве размерности $n = 3$ ситуация уже интереснее. Запишем кососимметрическую матрицу как

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A\xi = a\times\xi, \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Если наложить условие нулевой дивергенции, то получим в точности $\nabla\times\vec{a} = 0$, то есть $\vec{a} = \nabla\varphi$. Действительно, по крайней мере формально,

$$\operatorname{div}(\nabla\varphi\times\nabla u) = \nabla u\cdot(\nabla\times(\nabla\varphi)) - \nabla\varphi\cdot(\nabla\times(\nabla u)) = 0.$$

Таким образом, к данной косой матрице можно добавить любую матрицу вида

$$C(\varphi) := \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_{x_3} & \varphi_{x_2} \\ \varphi_{x_3} & 0 & -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} & \varphi_{x_1} & 0 \end{pmatrix},$$

при этом уравнение по сути не изменяется. Таким образом, возникает следующий интересный эффект. Рассмотрим задачу

$$-\operatorname{div}((I + C(\varphi))\nabla u) = f, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

По сути, уравнение совпадает с уравнением Пуассона $-\triangle u = f$, при этом условие (6.3) может и не выполняться. Таким образом, условие (6.3) является достаточным, на далеко от необходимого.

Доказательство теоремы 6. Сделаем вначале следующее замечание. Так как для матриц A и λA, $\lambda \neq 0$, множества D, введённые в (1.15), совпадают и $[u, u]_{\lambda A} = \lambda [u, u]_A$, то единственность решения с любой правой частью $f \in H^{-1}(\Omega)$ для матрицы A даёт единственность решения для всех матриц λA, $\lambda > 0$. Напомним, что если найдётся такой элемент $u \in D$, что $[u, u] < 0$, то решение не единственно (есть по крайней мере одно аппроксимационное и одно неаппроксимационное). С другой стороны, условие $[u, u] \geq 0$ для всех $u \in D$ гарантирует единственность решения, так как для разности w двух решений u_1 и u_2 выполняется

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x + [w, w] = 0.$$

Соответственно, однозначная разрешимость уравнений с матрицами A и $-A$ эквивалентна $[u, u] = 0$ для всех $u \in D$. Так как условие (6.3) имеет одинаковый вид для A и $-A$, то оно гарантирует не только однозначную разрешимость, но и выполнение энергетического тождества.

Таким образом, достаточно доказать единственность решения однородной задачи в условии малости предела (6.3).

Возьмём липшицеву срезку решения, u_λ — липшицева функция с константой липшицевости $C\lambda$, которая совпадает с u на множестве $\{g \leq \lambda\}$, $g = M[|\nabla u|]$, M — максимальная функция Харди-Литтльвуда, $u_\lambda = 0$ вне Ω. Напомним кратко, что для функции $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ (продолженной нулём за Ω) для почти всех x, y справедливы оценки

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)|x - y|[g(x) + g(y)], \quad |u(x)| \leq C \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) g(x).$$

Таким образом, на множестве $\{g \leq \lambda\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ функция u является липшицевой с константой липшицевости $C\lambda$. Используя лемму Макшейна (она же лемма Уитни), можно продолжить функцию u с множества $\{g \leq \lambda\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ на всё пространство с констатой липшицевости $C\lambda$. Получившееся продолжение и называется липшицевой срезкой. Используя липшицеву срезку решения в качестве пробной функции в определении решения, получим, учитывая кососимметричность матрицы A,

$$\int_{\{g \leq \lambda\}} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = -\int_{\{g > \lambda\}} (A + I) \nabla u \nabla u_\lambda \, \mathrm{d}x \leq C\lambda \int_{\{g > \lambda\}} (|A| + 1)|\nabla u| \, \mathrm{d}x.$$

Умножим получивщееся неравенство на $\varepsilon \lambda^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ и проинтегрируем по λ

от единицы до бесконечности, используя теорему Фубини. Получим

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 (\max(1,g))^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}x \le \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_\Omega (|A|+1)|\nabla u|(g^{1-\varepsilon}-1)_+\,\mathrm{d}x.$$

Используя неравенство Гёльдера и классическую теорему об оценке максимальной функции, получим

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u|^2 (\max(1,g))^{-\varepsilon}\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega g^2\,\mathrm{d}x\right)^{(1-\varepsilon)/2}\left(\int_\Omega (|A|+1)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\varepsilon/2}\\ &\le CL\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1-\varepsilon/2},\end{aligned}$$

где через L обозначен предел в (6.3). Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \le CL\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x, \quad C = C(n).$$

Таким образом, $\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = 0$, если величина L достаточно мала. □

Дадим ещё комментарий, который, возможно, поможет понять условие (6.3). Легко видеть, что прибавление к кососимметрической матрице A любой ограниченной кососимметрической матрицы не меняет ни множества D, ни значения $[u,u]$ для $u \in D$. Таким образом, в каком-то смысле, информация о единственности содержится в области бесконечных значений матрицы, что и отражено в (6.3).

Аналогичным образом можно доказать следующий результат о единственности аппроксимационных решений. Рассмотрим более общее уравнение

$$-\operatorname{div}(\nabla u + A\nabla u + au) = f \in H^{-1}(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{6.6}$$

где матрица A кососимметрична, а векторное поле a соленоидально.

Теорема 7. *Пусть кососимметрическая матрица A удовлетворяет условию* (6.3)*, а соленоидальное векторное поле a удовлетворяет условию*

$$l := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \|a\|_{2-\varepsilon} < \infty. \tag{6.7}$$

Пусть, дополнительно, сумма $L + l$ пределов в (6.3) *и* (6.7) *достаточно мала,*

$$L + l < \gamma(n).$$

Тогда аппроксимационные решения (6.6) *единственны.*

Доказательство. Напомним, что для единственности аппроксимационных решений достаточно показать единственность ограниченных решений. Будем пользоваться теми же обозначениями, что и при доказательстве предыдущей теоремы. Итак, пусть $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ есть уравнения (6.6) с нулевой правой частью, то есть

$$\int_\Omega (A+I)\nabla u \nabla\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega au\nabla\varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Используя $\varphi = u_\lambda$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\{g\le\lambda\}} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\{g>\lambda\}} (A+I)\nabla u\nabla u_\lambda \, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega au\nabla u_\lambda \, \mathrm{d}x \\ = -\int_\Omega a(u-u_\lambda)\nabla u_\lambda \, \mathrm{d}x &= -\int_{\{g>\lambda\}} a(u-u_\lambda)\nabla u_\lambda. \end{aligned}$$

Можно считать, что $|u| \le 1$, соответственно, $|u_\lambda| \le 1$. Поэтому получаем оценку

$$\int_{\{g\le\lambda\}} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \le C\lambda \int_{\{g>\lambda\}} (|A|+1)|\nabla u| \, \mathrm{d}x + C\lambda \int_{\{g>\lambda\}} |a| \, \mathrm{d}x.$$

Умножая обе части на $\varepsilon\lambda^{-1-\varepsilon}$ и интегрируя по λ от единицы до бесконечности, придём к неравенству

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 (\max(1,g))^{-\varepsilon} \, \mathrm{d}x \le \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_\Omega (|A|+1)|\nabla u| g^{1-\varepsilon} \, \mathrm{d}x + \frac{C\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_\Omega |a| g^{1-\varepsilon} \, \mathrm{d}x$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u|^2 (\max(1,g))^{-\varepsilon} \, \mathrm{d}x \\ &\le C\varepsilon \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega g^2 \, \mathrm{d}x \right)^{(1-\varepsilon)/2} \left(\int_\Omega (|A|+1)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\varepsilon/2} \\ &+ C\varepsilon \left(\int_\Omega |a|^{2/(1+\varepsilon)} \, \mathrm{d}x \right)^{(1+\varepsilon)/2} \left(\int_\Omega g^2 \, \mathrm{d}x \right)^{(1-\varepsilon)/2} \\ &\le C(L+l) \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1-\varepsilon/2}, \end{aligned}$$

где через l обозначен предел в (6.7). Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = 0$, если сумма $L + l$ достаточно мала. $\square$

В отличие от общей теоремы о единственности, избавиться от условия малости пределов в (6.3) и (6.7) пока не получается.

Открытые вопросы

1. Привести примеры неединственности решений задачи (1.1) при условии $A \in L^q(\Omega)$, $q < \infty$. Пример, построенный в работе [1], записанный в виде (1.1) даст, по теореме вложения Соболева, $A \in L^{3-\varepsilon}\ \forall \varepsilon > 0$.

2. В примере, построенном В.В. Жиковым в [1], является ли аппроксимационное решение единственным? Теоремой 7 тут воспользоваться не получится.

3. Можно ли в теореме 7 отказаться от условия малости?

4. Вопрос о единственности решения в ситуации, когда в (6.6) матрица A удовлетворяет условию (6.3), а поле $a \in L^2(\Omega)$.

Список литературы

1. *Жиков В.В.* Замечания о единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами // Функциональный анализ и его приложения. 2004. Т. 38. Вып. 3. С. 15–28.

2. *Coifman R., Rochberg R., Weiss G.* Factorization theorems for Hardy spaces in several variables // Ann. Math. 1976. Vol. 103. P. 611–635.

3. *Stein E.M.* Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, 1993. – 695p.

4. *Coifman R., Lions P. L., Meyer Y., Semmes S.* Compensated compactness and Hardy spaces // J. Math. Pures et Appl. 1993. Vol. 72. P. 247–286.

5. *Coifman R., Lions P. L., Meyer Y., Semmes S.* Compacité par compensation et espaces de Hardy // Exposé no. XIV in Séminaire Équations aux dérivées partielles (dit “Goulaouic-Schwartz”) (1989-1990), Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1990, P. 1–8.

6. *Coifman R., Lions P. L., Meyer Y., Semmes S.* Compacité par compensation et espaces de Hardy (Compensated compactness and Hardy spaces) // C. R. Acad. Sci., Paris. 1989. Vol. 309. No. 18. P. 945–949.

7. *Lions P.L.* Jacobians and Hardy Spaces // Research Report No. 91-NA-001, May 1991, Center for Nonlinear Analysis, Department of Mathematics, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213–3890.

8. *Mazya V.G., Verbitskiy I.E.* Form boundedness of the general second-order differential operator // Comm. Pure Appl. Math. 2006. Vol. 59. No. 9. P. 1286–1329.

9. *Friedlander S., Rusin W., Vicol V.* The magnetogeostrophic equations: a survey // Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XV. Advances in mathematical analysis of partial differential equations. (2014) D. Apushkinskaya and A.I. Nazarov, eds. pp. 53–78.

10. *Назаров А.И., Уральцева Н.Н.* Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами // Алгебра и Анализ. 2011. Т. 23. Вып. 1. С. 136–168.

11. *Filonov N.* On the regularity of solutions to the equation $-\triangle u + b\nabla u = 0$ // Записки научных семинаров ПОМИ. 2013. Т. 410. С. 168–186.

12. *Жиков В.В.* Диффузия в несжимаемом случайном потоке // Функц. анализ и его прил. 1997. Т. 31. Вып. 3. С. 10–22.

13. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. Пер. с англ. М.:Мир, 1983. 256 с.

14. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. Пер. с англ. М.: Мир, 1968. 164 с.

15. *Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Тр. МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.

16. *Дубинский Ю.А.* О некоторых краевых задачах и векторных потенциалах соленоидальных полей // Проблемы Математического Анализа. 2013. Т. 74. С. 75–84. English translation: *Dubinskii Yu. A.* On Some Boundary Value Problems and Vector Potentials of Solenoidal Fields // Journal of Mathematical Sciences. January 2014. Vol. 196. Issue 4. P. 524–534.

17. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. – 408 с.

18. *Griesinger R.* The Boundary Value Problem rot $u = f$, u Vanishing at the Boundary and the Related Decompositions of L^q and $H_0^{1,q}$: Existence // Annali dell'Universit? di Ferrara. 1990. Vol. 36. No. 1. P. 15–43.

19. *Griesinger R.* Decompositions of L^q and $H_0^{1,q}$ with respect to the operator rot // Math. Ann. 1990. Vol. 288, P. 245–262.

20. *Kress R.* Potentialtheoretische Randwertprobleme bei Tensorfeldern beliebiger Dimension und beliebigen Ranges // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. Vol. 47. P. 59–80.

21. *Дакоронья Б.* Существование и единственность решений $d\omega = f$ с граничными условиями Дирихле. В кн. “Международная математическая серия. Том 1”. Издательство Тамары Рожковской. Новосибирск 2002. С. 63–76. English version: *Dacorogna B.* Existence and regularity of solutions of $d\omega = f$ with Dirichlet boundary conditions. Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, I, 67–82, Int. Math. Ser. (N. Y.), 1, Kluwer/Plenum, New York, 2002.

22. *Fannjiang A., Papanicolaou G.* Diffusion in Turbulence. // Probab. Theory Related Fields. 1996. Vol. 105. P. 279–334.

23. *Coifman R., Rochberg R.* Another characterization of BMO // Proceedings of the AMS. 1980. Vol. 79. No. 2. P. 249–254.

24. *Iwaniec T., Sbordone C.* Quasiharmonic fields // Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire. 2001. Vol. 18. No. 5. P. 519–572.

Оглавление