ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 83 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лапик М.А.

Экстремальный функционал для векторных задач равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле с матрицей взаимодействия Анжелеско

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лапик М.А. Экстремальный функционал для векторных задач равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле с матрицей взаимодействия Анжелеско // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 83. 23 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-83**

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.А. Лапик

Экстремальный функционал для векторных задач равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле с матрицей взаимодействия Анжелеско

Москва, 2015

М.А. Лапик Email: mashalapik@gmail.com
Экстремальный функционал для векторных задач равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле с матрицей взаимодействия Анжелеско[1]

Аннотация. Представлен новый функционал, определенный на векторных компактах и имеющий особую точку на носителе равновесной меры для задачи равновесия логарифмического потенциала во внешнем поле с матрицей взаимодействия Анжелеско и массами параметризованными независимыми параметрами. Мы продемонстрируем использование этого функционала на примере задачи для двух отрезков с общим концом.

Стр. 22, библ. назв. 8

Ключевые слова:векторный логарифмический потенциал, внешнее поле, система Анжелеско.

M. A. Lapik Email: mashalapik@gmail.com
The Extremal functional for vector extremal logarithmic potential problem with external field and Angelesko matrix of interaction

Abstract. The aim of the paper is to introduce the new functional, which is defined on vector compact sets. The functional has the extremal point on the support of the equilibrium measure for vector extremal logarithmic potential problem with an external field Angelesko matrix of interaction and any positive total masses of components. We will show how to use the functional by extremal problem for two intervals with common endpoint.

Pages 22, Bibl. 8

Key words: vector logarithmic potential, external field, Angelesko System.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 14-21-00025)

1 Введение

В настоящей работе получено обобщение функционала Маскара-Саффа для векторной задачи равновесия с внешнем полем и матрицей взаимодействия Анжелеско.

Напомним основные аспекты скалярной теории логарифмического потенциала, более подробно см. [1], [2], [3].

Пусть $\mathcal{M}^1(\Gamma)$ множество вероятностных борелевских мер μ с компактными носителями на Γ: $S_\mu \Subset \Gamma \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. *Логарифмическим потенциалом* меры $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ называют функцию

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y),$$

а *энергией меры во внешнем поле* Q называют величину

$$I^Q(\mu) = \iint \Big(\log \frac{1}{|z-y|} + Q(y) + Q(z)\Big)\, d\mu(y)\, d\mu(z) = \int \Big(U^\mu + 2Q\Big)\, d\mu, \tag{1}$$

где Q – непрерывная функция $Q : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (не равная тождественно бесконечности).

Равновесной или *экстремальной* мерой в поле Q называют меру λ_Q с минимальной энергией (1) в классе $\mathcal{M}^1(\Gamma)$

$$I^Q(\lambda_Q) = \mathcal{I}_Q = \inf_{\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)} I^Q(\mu). \tag{2}$$

В случае когда Γ – неограниченное замкнутое множество в $\overline{\mathbb{R}}$, для обеспечения компактности носителя равновесной меры S_{λ_Q} от поля Q дополнительно требуют, чтобы оно росло быстрее логарифма

$$\lim_{|x|\to+\infty,\, x\in\Gamma} \frac{Q(x)}{\log|x|} = +\infty. \tag{3}$$

Это обеспечивает компактность носителя равновесной меры.

Известно, что существует единственная экстремальная мера λ_Q, которая характеризуется с помощью соотношений равновесия: существует единственная константа F_Q, такая, что

$$U^{\lambda_Q} + Q \begin{cases} = F_Q & \text{на} \quad S_{\lambda_Q}, \\ \geq F_Q & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{4}$$

где константа F_Q называется константой равновесия.

Решающую роль в определении равновесной меры λ_Q играет нахождение носителя S_{λ_Q}. Кроме того, процедура нахождения S_{λ_Q} имеет непосредственные приложения к некоторым задачам математической физики. Для расширения класса приложений задач равновесия логарифмического потенциала рассматривают различные обобщения задачи (2), (4). Например, в связи с рациональными аппроксимациями Эрмита-Паде Гончаром и Рахмановым был предложен векторный аналог задачи (2) (см. [4], [1]). В части 2.1 настоящей работы мы приводим все необходимые определения и результаты векторной теории логарифмического потенциала.

Часто оказывается, что в решении задачи нахождения носителя S_{λ_Q} помогает рассмотрение функционала $F_Q(K)$ на регулярных компактах $K \subseteq \Gamma$, введенного Маскаром и Саффом в [5]. Пусть ω_K мера Робена компакта K и через $cap(K)$ обозначена логарифмическая емкость компакта K. По определению

$$F_Q(K) := -\log cap(K) + \int Q(y)\, d\omega_K(y). \tag{5}$$

Оказывается (см. [5], [2]), что носитель равновесной меры S_{λ_Q} минимизирует этот функционал, и для любого регулярного компакта K справедливо

$$F_Q(K) \geq F_Q. \tag{6}$$

В [6] получено обобщение этого функционала для n-мерных задач теории логарифмического потенциала с матрицами взаимодействия специального вида, точнее, с неположительными членами вне главной диагонали и положительной построчной суммой коэффициентов (при условии, что мы рассматриваем меры с вероятностными компонентами). Одним из результатов настоящей работы является получение обобщения функционала (5) и доказательство его экстремальных свойств для задач равновесия с матрицей взаимодействия Анжелеско $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Векторная экстремальная задача

2.1 Основные определения

Введем необходимые понятия для формулировки основного результата.

Пусть $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^2$ – непересекающиеся регулярные компакты в $\mathbb{C}$ с пустой внутренностью $\Gamma_i^0 = \emptyset$. Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathbf{\Gamma}}^A$, $\mathcal{M}_{\mathbf{\Gamma}}^N$ множества векторных борелевских мер $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$:

$$\mathcal{M}^A = \mathcal{M}^A_{\mathbf{\Gamma}} = \{\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2),\ S_{\mu_i} \subset \Gamma_i,\ i = 1, 2;\ \mu_1(\Gamma_1) = 1,\ \mu_2(\Gamma_2) = 1\},$$

$$\mathcal{M}^N = \mathcal{M}^N_{\mathbf{\Gamma}} = \{\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2),\ S_{\mu_i} \subset \Gamma_i,\ i = 1, 2;\ \mu_1(\Gamma_1) = 2,\ \mu_2(\Gamma_2) = 1\}.$$

Внешним полем будем называть непрерывную вектор-функцию:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2), \qquad Q_i : \Gamma_i \longrightarrow \mathbb{R},, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Вектор-функции $\mathbf{W}^{\overline{\mu}}{}_A = (W^{\overline{\mu}}_{A,1}, W^{\overline{\mu}}_{A,2})$, $\mathbf{W}^{\overline{\mu}}{}_N = (W^{\overline{\mu}}_{N,1}, W^{\overline{\mu}}_{N,2})$, такие, что

$$\left(W^{\overline{\mu}}_{A,1},\ \ W^{\overline{\mu}}_{A,2}\right) = \left(U^{\mu_1},\ \ U^{\mu_2}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \left(Q_1 \ \ Q_2\right),$$

$$\left(W^{\overline{\mu}}_{N,1},\ \ W^{\overline{\mu}}_{N,2}\right) = \left(U^{\mu_1},\ \ U^{\mu_2}\right) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \left(Q_1 \ \ Q_2\right),$$

называют *векторным логарифмическим потенциалом* меры $\overline{\mu}$ во *внешнем поле* $\mathbf{Q}$ с *матрицей взаимодействия* Анжелеско $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и Никишина $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Энергия во внешнем поле* для векторных мер из $\mathcal{M}^A_{\mathbf{\Gamma}}$, $\mathcal{M}^N_{\mathbf{\Gamma}}$ соответственно задается функционалами

$$\begin{aligned} I^A(\overline{\mu}) &= I^A_1(\overline{\mu}) + I^A_2(\overline{\mu}), \quad I^A_i(\overline{\mu}) = \int \Big(W^{\overline{\mu}}_{A,i}(z) + Q_i(z)\Big) d\mu_i(z), \\ I^N(\overline{\mu}) &= I^N_1(\overline{\mu}) + I^N_2(\overline{\mu}), \quad I^N_i(\overline{\mu}) = \int \Big(W^{\overline{\mu}}_{N,i}(z) + Q_i(z)\Big) d\mu_i(z). \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогично скалярному случаю ставится *векторная экстремальная задача во внешнем поле*: найти меры $\overline{\lambda}^A \in \mathcal{M}^A$, $\overline{\lambda}^N \in \mathcal{M}^N$ с минимальной энергией (8) в соответствующем классе:

$$I^A(\overline{\lambda}^A) = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}^A} I^A(\overline{\mu}), \tag{9}$$

$$I^N(\overline{\lambda}^N) = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}^N} I^N(\overline{\mu}). \tag{10}$$

Существует единственное решение $\overline{\lambda}^A \in \mathcal{M}^A$, $\overline{\lambda}^N \in \mathcal{M}^N$ задач (9), (10), см. [4], [1]. Там же были приведены условия равновесия для векторной задачи во внешнем поле, однозначно характеризующие экстремальные меры. Точнее, существуют и единственны такие константы F^A_i, F^N_i,

$i = 1, 2$, что

$$\begin{cases} 2U^{\lambda_1^N}(z) - U^{\lambda_2^N}(z) + Q_1(z) & \begin{cases} = F_1^N & \text{на} \quad S_{\lambda_1^N}, \\ \geq F_1^N & \text{на} \quad \Gamma_1, \end{cases} \\ \\ -U^{\lambda_1^N}(z) + 2U^{\lambda_2^N}(z) + Q_2(z) & \begin{cases} = F_2^N & \text{на} \quad S_{\lambda_2^N}, \\ \geq F_2^N & \text{на} \quad \Gamma_2. \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} 2U^{\lambda_1^A}(z) + U^{\lambda_2^A}(z) + Q_1(z) & \begin{cases} = F_1^A & \text{на} \quad S_{\lambda_1^A}, \\ \geq F_1^A & \text{на} \quad \Gamma_1, \end{cases} \\ \\ U^{\lambda_1^A}(z) + 2U^{\lambda_2^A}(z) + Q_2(z) & \begin{cases} = F_2^A & \text{на} \quad S_{\lambda_2^A}, \\ \geq F_2^A & \text{на} \quad \Gamma_2. \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

Множества, на которых в (11), (12) достигается равенство, называют *множествами равновесия*, а экстремальные меры еще называют равновесными мерами. Мы будем обозначать множество равновесия $\mathbf{S}^{\overline{\lambda}^{A,N}} = (S_1^{\overline{\lambda}^{A,N}}, S_2^{\overline{\lambda}^{A,N}})$. Очевидно, что справедливо включение $\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^{A,N}} \subset \mathbf{S}^{\overline{\lambda}^{A,N}}$, при этом множество равновесия и носитель могут существенно отличаться.

2.2 Функционалы Маскара-Саффа для векторных задач

Векторный функционал Маскара-Саффа для задачи с матрицей взаимодействия Никишина N и внешним полем Q определен на компактах $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ и имеет вид

$$F_{\mathbf{Q}}^N(\mathbf{K}) := 2\gamma_1 + \gamma_2 + \int Q_1\, d\omega_{\mathbf{K},1} + \int Q_2\, d\omega_{\mathbf{K},2}, \tag{13}$$

где $\overline{\omega}_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}^N$ есть равновесная мера для векторной задачи на компакте $\mathbf{K}$ без поля с матрицей взаимодействия N , γ_1 и γ_2 суть константы равновесия для $\overline{\omega}_{\mathbf{K}}$:

$$\overline{\omega}_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{K}}^N : \begin{cases} 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} \begin{cases} \leq \gamma_1 & \text{на} & S_{\omega_{\mathbf{K},1}} \\ \geq \gamma_1 & \text{q.e. на} & K_1, \end{cases} \\ 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} \begin{cases} \leq \gamma_2 & \text{на} & S_{\omega_{\mathbf{K},2}} \\ \geq \gamma_2 & \text{q.e. на} & K_2. \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

С помощью принципа максимума для логарифмического потенциала [2] можно доказать, что условия равновесия для меры $\overline{\omega}_{\mathbf{K}}$ можно записать как

$$\begin{cases} 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} \begin{cases} = \gamma_1 & \text{q.e. на} & S_{\omega_{\mathbf{K},1}} \\ < \gamma_1 & \text{на} & \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},1}}, \end{cases} \\ 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} \begin{cases} = \gamma_2 & \text{q.e. на} & S_{\omega_{\mathbf{K},2}} \\ < \gamma_2 & \text{на} & \overline{\mathbb{C}} \setminus S_{\omega_{\mathbf{K},2}}. \end{cases} \end{cases} \tag{15}$$

При этом на регулярных компактах равенство в (15) верно всюду, а не квази-всюду. Из этих неравенств следует, что $cap\,(\mathbf{K} \setminus \mathbf{S}_{\omega_{\mathbf{K}}}) = 0$.

Теорема 1. *(см. [6]) Функционал (13) обладает экстремальным свойством: для любого регулярного компакта $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ верно*

$$F^N_{\mathbf{Q}}(\mathbf{K}) \geq 2F^N_1 + F^N_2, \tag{16}$$

причем только для $S_{\overline{\lambda}^N} \subset \mathbf{K} \subset S^{\overline{\lambda}^N}$ достигается равенство.

Определим на векторных компактах $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ функционал

$$F^A_{\mathbf{Q}}(\mathbf{K}) := \gamma_1 - \gamma_2 + \int Q_1\, d\omega_{\mathbf{K},1} - \int Q_2\, d\omega_{\mathbf{K},2}, \tag{17}$$

где $\overline{\omega}_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}^N(\mathbf{K})$ – равновесная мера для векторной задачи на компакте $\mathbf{K}$ без поля с матрицей взаимодействия N, γ_1 и γ_2 – константы равновесия для $\overline{\omega}_{\mathbf{K}}$, см. (15).

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Для любого регулярного компакта $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$ верно*

$$F^A_{\mathbf{Q}}(K_1, S_{\lambda^A_2}) \geq F^A_{\mathbf{Q}}(S_{\overline{\lambda}^A}) = F^A_{\mathbf{Q}}(S^{\overline{\lambda}^A}) \geq F^A_{\mathbf{Q}}(S_{\lambda^A_1}, K_2), \tag{18}$$

причем только для $S_{\overline{\lambda}^A} \subset \mathbf{K} \subset S^{\overline{\lambda}^A}$ достигается равенство.

Доказательство. Рассмотрим произвольный компакт $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Gamma}$. Продифференцируем первую и вторую строку в условиях равновесия (12) по $\omega_{\mathbf{K},1}$ и $\omega_{\mathbf{K},2}$ соответственно и применим теорему Фубини:

$$2F^A_1 \leq \int 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}}\, d\lambda^A_1 + \int U^{\omega_{\mathbf{K},1}}\, d\lambda^A_2 + \int Q_1\, d\omega_{\mathbf{K},1},$$

$$F^A_2 \leq \int 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}}\, d\lambda^A_2 + \int U^{\omega_{\mathbf{K},2}}\, d\lambda^A_1 + \int Q_2\, d\omega_{\mathbf{K},2}.$$

Фиксируем $S^{\lambda_2^A} \supseteq K_2 \supset S_{\lambda_2^A}$. Вычитая из первого второе равенство, и используя условия равновесия (12), (15) получим

$$2F_1^A - F_2^A \leq$$
$$\leq \int 2U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - \gamma_1 \, d\lambda_1^A + \gamma_1 - \gamma_2 + \int Q_1 \, d\omega_{\mathbf{K},1} - \int Q_2 \, d\omega_{\mathbf{K},2}$$
$$\leq F_{\mathbf{Q}}^A(\mathbf{K}).$$

Оба равенства достигаются только при $S^{\lambda_1^A} \supset K_1 \supset S_{\lambda_1^A}$.

Аналогично, фиксируем $S^{\lambda_1^A} \supset K_1 \supset S_{\lambda_1^A}$. Вычитая из первого второе равенство, и используя условия равновесия (12), (15) получим

$$2F_1^A - F_2^A \geq$$
$$\geq -\int 2U^{\omega_{\mathbf{K},2}} - U^{\omega_{\mathbf{K},1}} - \gamma_2 \, d\lambda_1^A + \gamma_1 - \gamma_2 + \int Q_1 \, d\omega_{\mathbf{K},1} - \int Q_2 \, d\omega_{\mathbf{K},2}$$
$$\geq F_{\mathbf{Q}}^A(\mathbf{K}).$$

Оба равенства достигаются только при $S^{\lambda_2^A} \supset K_2 \supset S_{\lambda_2^A}$. $\square$

Эта теорема показывает, что носитель равновесной меры является в некотором смысле седловой точкой экстремального функционала.

2.3 Векторные экстремальные задачи с независимыми массами компонент

Для приложений часто полезно рассматривать задачи с независимыми массами компонент. Мы переформулируем утверждения пунктов 2.1 и 2.2 для таких задач.

Для таких задач сохраняются все определения и утверждения пункта 2.1 кроме определения множеств $\mathcal{M}^A$, $\mathcal{M}^N$. Рассмотрим множества борелевских мер $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ с произвольными весами компонент $x > 0$, $y > 0$. Пусть

$$\mathcal{M}_{xy}^A = \{\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2),\ S_{\mu_i} \subset \Gamma_i,\ i = 1, 2;\ \mu_1(\Gamma_1) = x,\ \mu_2(\Gamma_2) = y\},$$

$$\mathcal{M}_{xy}^N = \{\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2),\ S_{\mu_i} \subset \Gamma_i,\ i = 1, 2;\ \mu_1(\Gamma_1) = x,\ \mu_2(\Gamma_2) = y\}.$$

Аналогично ставится *векторная экстремальная задача во внешнем поле*: найти меры $\overline{\lambda}^A \in \mathcal{M}_{xy}^A$, $\overline{\lambda}^N \in \mathcal{M}_{xy}^N$ с минимальной энергией (8) в соответствующем классе:

$$I^A(\overline{\lambda}^A) = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}_{xy}^A} I^A(\overline{\mu}), \tag{19}$$

$$I^N(\overline{\lambda}^N) = \inf_{\overline{\mu}\in\mathcal{M}^N_{xy}} I^N(\overline{\mu}). \tag{20}$$

Экстремальные меры $\overline{\lambda}^A \in \mathcal{M}^A_{xy}$, $\overline{\lambda}^N \in \mathcal{M}^N_{xy}$ удовлетворяют условиям равновесия (12), (11) соответственно, см. [4].

Функционал (17) для задач с переменными массами определяется формулой

$$F^A_{\mathbf{Q}}(\mathbf{K}) := x\gamma_1 - y\gamma_2 + \int Q_1\, d\omega_{\mathbf{K},1} - \int Q_2\, d\omega_{\mathbf{K},2}, \tag{21}$$

где $\overline{\omega}_{\mathbf{K}} \in \mathcal{M}^N(\mathbf{K})$ – равновесная мера для векторной задачи на компакте $\mathbf{K}$ без поля с матрицей взаимодействия N, γ_1 и γ_2 – константы равновесия для $\overline{\omega}_{\mathbf{K}}$.

Для этого функционала справедлива теорема 2, доказательство этого факта аналогично.

3 Пример

Продемонстрируем свойства экстремального функционала на примере системы Анжелеско с общим концом. Эта задача является частным случаем задачи, рассмотренной в [7].

3.1 Постановка задачи

Пусть

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 = (-\infty, 0] & Q_1(x) = x^2, \\ \Gamma_2 = [0, +\infty) & Q_2(x) = x^2. \end{array} \tag{22}$$

Носитель в этой задаче компактен, так как поле растет быстрее логарифма и, формально, мы можем рассматривать задачу на достаточно больших компактах. Ниже мы покажем, что логарифмические потенциалы мер $\overline{\omega}_{\mathbf{K}}$, $\mathbf{K} = ([a,0],[0,b])$ и $\overline{\lambda}^A$ удовлетворяют условиям равновесия (15), (12) соответственно, поэтому мы можем рассматривать задачу с общим концом.

Рассмотрим вопрос о нахождении носителя равновесной меры $S_{\overline{\lambda}^A}$ для экстремальной задачи во внешнем поле $\mathbf{Q}$ с матрицей взаимодействия Анжелеско. Мы покажем, что для задачи (9) носитель равновесной меры суть два интервала, т.е.

$$S_{\lambda^A_1} = \left[-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right], \quad S_{\lambda^A_2} = \left[0, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

Наша цель – продемонстрировать на этом примере применение теоремы 2, т.е. найти зависимость $F^A_{\mathbf{Q}}\left([a,0], \left[0, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right]\right)$ и $F^A_{\mathbf{Q}}\left(\left[-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right], [0,b]\right)$ от a и b соответственно. Мы покажем, что эти функции достигают минимума по a и максимума по b в точках $-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, см. рис. 1, 2. Другими словами, задача поиска носителя равновесной меры $\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^A}$ сводится к задаче поиска седловой точки функции $F(a,b) = F^A_{\mathbf{Q}}([a,0], [0,b])$.

Сначала с помощью некоторой алгебраической функции мы непосредственно предъявим равновесную меру задачи (11) без поля для любого фиксированного компакта $\mathbf{K} = ([a,0],[0,b])$. Это позволит численно вычислить функционал (17).

С другой стороны, мы рассмотрим общий вид алгебраической функции, дающей решение задачи (12) с полем. Анализ дискриминанта этой алгебраической функции позволяет доказать, что

$$\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^A} = \left(\left[-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right], \left[0, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right]\right).$$

3.2 Равновесные меры и алгебраические функции

3.2.1 Равновесные меры для задач без поля

В этом пункте мы докажем что равновесные меры для задачи с матрицей Никишина на отрезках $[a,0]$ и $[0,b]$ без поля можно представить как скачок некоторой алгебраической функции, которую мы найдем явно.

$$\Gamma_1 = [a,0], \quad \Gamma_1 = [0,b]; \quad Q_1 = Q_2 \equiv 0. \tag{23}$$

Рассмотрим трехлистную риманову поверхность $\Re$ с одной точкой ветвления третьего порядка в 0 и двумя двойными точками ветвления в точках $a < 0$ и $b > 0$:

$$\Re = \overline{\Re^0 \bigcup \Re^1 \bigcup \Re^2} \tag{24}$$

где $\Re^0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a,0]$, $\Re^1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \left([a,0] \bigcup [0,b]\right)$ и $\Re^2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0,b]$.

Матрицы монодромии поверхности $\Re$ суть

$$\begin{aligned} &M_{a^0} = M_{a^1} = \mathcal{E}_{01}, \\ &M_{0^0} = M_{0^1} = M_{0^2} = \mathcal{E}_{12} * \mathcal{E}_{01}, \\ &M_{b^1} = M_{b^2} = \mathcal{E}_{12}, \end{aligned}$$

где матрица $\mathcal{E}_{ij}$ переставляет i-ю и j-ю координаты вектора $(i \neq j)$. То есть поверхность $\Re$ состоит из "склеенных"последовательно листов $\Re^0$,

$\mathfrak{R}^1$ и $\mathfrak{R}^2$ с отождествлением правого и левого "берегов"разрезов у соседних листов (см. [8], стр. 10). Легко видеть, что поверхность $\mathfrak{R}$ есть сфера (проверить это можно при помощи формулы Римана-Гурвица).

Определим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ рациональную функцию h как функцию, имеющую два полюса первого порядка в точках ветвления второго порядка a и b, один полюс второго порядка в точке ветвления третьего порядка 0 и нули первого порядка в точках $\infty^0 \in \mathfrak{R}^0$, $\infty^1 \in \mathfrak{R}^1$, $\infty^2 \in \mathfrak{R}^2$ и некоторой точке $c^1 \in \mathfrak{R}^1$. То есть

$$\begin{array}{rcl} h^0(z) & \in & H(\mathfrak{R}^0), \\ h^1(z) & \in & H(\mathfrak{R}^1), \\ h^2(z) & \in & H(\mathfrak{R}^2). \end{array} \tag{25}$$

с дивизором

$$\frac{\infty^0 * \infty^1 * \infty^2 * c^1}{a^{01} * 0^{012} * 0^{012} * b^{12}}, \tag{26}$$

где c – некоторое действительное число, большее b. Фиксируем у h вычеты в бесконечностях

$$\begin{array}{rcl} h^0(z) & = & -\frac{2}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \;\; z \to \infty, \;\; z \in \mathfrak{R}^0; \\ \\ h^1(z) & = & \;\;\frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \;\; z \to \infty, \;\; z \in \mathfrak{R}^1; \\ \\ h^2(z) & = & \;\;\frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \;\;\; z \to \infty \;\; z \in \mathfrak{R}^2. \end{array} \tag{27}$$

Определенная таким образом функция h существует и единственна как мероморфная функция с заданным дивизором, поскольку мы, вместо того чтобы зафиксировать ноль в точке c, зафиксировали один из вычетов в бесконечности.

Заметим, что наша функция симметрична относительно действительной оси, иначе функция $\overline{h}(\overline{z})$ тоже была бы решением, что противоречит единственности. Следовательно, функция h на $\overline{\mathbb{R}}$ вне разрезов принимает только действительные значения. Из простого соображения, что при "проходе"через полюс в точке ветвления второго порядка функция должна поменять знак, можно заключить что ноль c больше b, а из принципа аргумента следует, что он находится на первом листе.

Так как h – алгебраическая функция на римановой поверхности, то существуют рациональные функции $R_0(z)$, $R_1(z)$ и $R_2(z)$, такие, что

$$h^3 + R_2(z)h^2 + R_1(z)h + R_0(z) = 0.$$

Сейчас мы явно найдем это уравнение.

Утверждение 1. *Алгебраическая функция h (см. (25)-(27)) удовлетворяет уравнению*

$$h^3 - \frac{3(z-d)}{(z-a)z(z-b)}h + \frac{2(z-c)}{(z-a)z^2(z-b)} = 0\,, \tag{28}$$

где

$$c = \frac{3}{8}(b-a)^{2/3}[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2/3} + (\sqrt{b}-\sqrt{a})^{2/3}] + \frac{a+b}{4}\,,$$

$$d = \frac{a+b+2c}{3}\,,$$

ветви корней фиксируем как ветви с наименьшим положительным значением аргумента.

Доказательство. По теореме Виета и теореме Лиувилля имеем $R_2(z) = (h^0 + h^1 + h^2) \equiv 0$. Легко видеть по теореме Виета и по поведению h вблизи $z = 0$, что

$$|R_1(z)| = \left| -\frac{3(z-d)(z-v)}{(z-a)z^2(z-1)} \right| = |(h^0h^1 + h^1h^2 + h^0h^2)(z)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^{\frac{4}{3}}}\right),$$

откуда $v = 0$. Выражение для $R_0(z)$ очевидно. Нам осталось только найти явный вид неизвестных коэффициентов c, d из (28).

Дискриминант уравнения (28) есть

$$D = \frac{108\left(z(z-d)^3 - (z-a)(z-b)(z-c)^2\right)}{z^4(z-b)^3(z-a)^3}.$$

Поскольку у нас нет точек ветвления, кроме тех, в которых имеются полюса, мы можем сделать вывод, что у дискриминанта уравнения (28) все нули четного порядка, следовательно, в числителе стоит полный квадрат: $const(z-l)^2$. Корень дискриминанта l больше b, поскольку ветви h^1 и h^2 принимают на $(b, +\infty)$ все действительные значения, а ветвь h^0 ограничена на этом интервале и на нем неизбежно есть точка совпадения ветвей. Это дает нам простое уравнение на коэффициент d в (28)

$$d = \frac{a+b+2c}{3}$$

и кубическое уравнение на ноль c:

$$c^3 - \frac{3(b+a)}{4}\,c^2 - \frac{(5a-b)(a-5b)}{64}\,c - \frac{(a+b)^3}{64} = 0.$$

Это кубическое уравнение имеет всегда три действительных решения:

$$c_1 = \frac{3}{8}(b-a)^{2/3}[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2/3} + (\sqrt{b}-\sqrt{a})^{2/3}] + \frac{a+b}{4},$$

$$\begin{aligned} c_2 = -\frac{\sqrt{3}(b-a)^{2/3}}{2}\Big[\frac{\sqrt{3}}{8}[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2/3} + (\sqrt{b}-\sqrt{a})^{2/3}]+ \\ +i[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2/3} - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^{2/3}]\Big] + \frac{a+b}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 = -\frac{\sqrt{3}(b-a)^{2/3}}{2}\Big[\frac{\sqrt{3}}{8}[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2/3} + (\sqrt{b}-\sqrt{a})^{2/3}]- \\ -i[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2/3} - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^{2/3}]\Big] + \frac{a+b}{4}. \end{aligned}$$

Мы выбираем корень c из условия, что двойной корень дискриминанта l и ноль c должны быть больше b, где

$$l^2 = \frac{-3abc^2}{a^2+b^2+c^2-2ac-2bc-ab}.$$

Если ветви корней зафиксированы как ветви с наименьшим положительным значением аргумента, тогда этому условию удовлетворяет только корень c_1.

Корень $c_3 < a$ соответствует случаю, когда в бесконечности

$$h^2 \approx \frac{-2}{z}, \quad \text{а} \quad h^0,\, h^1 \approx \frac{1}{z}.$$

Корень c_2 соответствует случаю, когда в бесконечности

$$h^1 \approx \frac{-2}{z} \quad \text{и} \quad h^0,\, h^2 \approx \frac{1}{z},$$

но в этом случае ноль дискриминанта l лежит на отрезке $[a,0]$ или $[0,b]$.
□

Эта функция определяет равновесную меру для задачи (23) в отсутствие внешнего поля:

Утверждение 2. *Плотность равновесной меры* $\overline{\omega}_{\mathbf{K}} = (\omega_1,\omega_2)$ *для задачи с матрицей Никишина без поля на компакте* $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$, *где* $K_1 = [a,0]$ *и* $K_2 = [0,b]$, *равна скачку алгебраической функции* $h(z)$ *(25)-(27) на* $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{h^0_+ - h^1_+}{2\pi i}dx, \\ d\omega_2 &= \frac{h^1_+ - h^2_+}{2\pi i}dx, \end{aligned} \tag{29}$$

Доказательство. Достаточно показать, что если положить меру $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ на отрезках $K_1 = [a, 0]$ и $K_2 = [0, b]$ равной скачку функции $h(z)$ на этих отрезках

$$
\begin{aligned}
d\mu_1 &:= \frac{h_+^0 - h_+^1}{2\pi i} dx, \\
d\mu_2 &:= \frac{h_+^1 - h_+^2}{2\pi i} dx.
\end{aligned} \tag{30}
$$

тогда мера $\overline{\mu}$ будет равновесной мерой задачи (23) , т.е. $\overline{\mu} = \overline{\omega}_{\mathbf{K}}$. По теореме Коши мы имеем, что определенная таким образом мера имеет нужные массы

$$
\mu_1(K_1) = \int_a^0 \frac{h_+^0 - h_+^1}{2\pi i} dx = \int_a^0 \frac{h_+^0 - h_-^0}{2\pi i} dx = \frac{1}{2\pi i} \oint h^0 \, dz = res_\infty h^0 = 2,
$$

$$
\mu_2(K_2) = \int_0^b \frac{h_+^1 - h_+^2}{2\pi i} dx = \int_0^b \frac{h_-^2 - h_+^2}{2\pi i} dx = \frac{-1}{2\pi i} \oint h^2 \, dz = -res_\infty h^2 = 1.
$$

Положительность μ_1' следует из того, что мнимая часть комплексно сопряженных h^0 и h^1 не обращается в 0 на отрезке $K_1 = [a, 0]$, иначе функции совпадали бы и там был бы ноль дискриминанта уравнения для алгебраической функции h. Аналогично получаем положительность μ_2'. Следовательно, это действительно некоторая положительная мера. Комплексные логарифмические потенциалы W^{μ_1} и W^{μ_2} являются первообразными функций h^0 и $-h^2$ соответственно:

$$
\Big(W^{\mu_1}(z)\Big)_z' = \Big(\oint \frac{h^0(t)}{2\pi i} \log \frac{1}{z - t} \, dt\Big)_z' = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h^0(t)}{z - t} \, dt = h^0(z), \quad z \in \mathbb{C} \backslash K_1, \tag{31}
$$

аналогично

$$
\Big(W^{\mu_2}(z)\Big)_z' = -h^2(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus K_2. \tag{32}
$$

Легко видеть, что подынтегральные выражения суть голоморфные на множестве интегрирования функции, это позволяет менять порядок интегрирования и дифференцирования.

Покажем, что эта мера равновесная, рассмотрим абелев интеграл

$$
G(z) := \int_0^z h(\psi) \, d\psi. \tag{33}
$$

Интеграл (33) имеет чисто мнимые периоды, следовательно, мы можем корректно определить $\mathrm{Re}\,(G)$ на поверхности $\Re$, причем

$$\mathrm{Re}\,\Big(G(z)\Big) = \begin{cases} -2\log|z| + g^0 + \cdots\,, & z \to \infty^0, \ \ z \in \Re^0, \\[2ex] +\log|z| + g^1 + \cdots\,, & z \to \infty^1, \ \ z \in \Re^1, \\[2ex] +\log|z| + g^2 + \cdots\,, & z \to \infty^2, \ \ z \in \Re^2. \end{cases} \tag{34}$$

Из (31), (32) заключаем, что

$$\begin{aligned} V^{\mu_1}(z) &= \mathrm{Re}\,\Big(G^0(z) - g^0\Big), \\ V^{\mu_2}(z) &= \mathrm{Re}\,\Big(-G^2(z) + g^2\Big). \end{aligned} \tag{35}$$

Запишем для потенциалов (35) условия равновесия (11) на $[a, 0]$ и $[0, b]$

$$\begin{aligned} 2V^{\mu_1}(z) - V^{\mu_2}(z) + (2g^0 + g^2) &= \mathrm{Re}\,(2G^0 + G^2) = \mathrm{Re}\,(G^0 - G^1) = 0, \\ 2V^{\mu_2}(z) - V^{\mu_1}(z) - (2g^2 + g^0) &= \mathrm{Re}\,(-2G^2 - G^0) = \mathrm{Re}\,(G^1 - G^2) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Следовательно, $\overline{\mu}$ – это равновесная мера на $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ и $\overline{\mu} = \omega_{\mathbf{K}}$. $\square$

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\gamma_1 - \gamma_2 = -3(g^0 + g^2), \tag{37}$$

$$g^0 = \int_0^{+\infty} \Big(h^0(y) + \frac{2}{y+1}\Big)\,dy, \tag{38}$$

$$g^2 = \int_0^{-\infty} \Big(h^2(y) - \frac{1}{y-1}\Big)\,dy, \tag{39}$$

где γ_1 и γ_2 – константы равновесия из (15) для задачи (23).

Доказательство. Константы равновесия γ_1 и γ_2 для задачи (23) зависят от констант g^0, g^1 g^2 в бесконечностях абелева интеграла (33) следующим образом (36)

$$\begin{aligned} +(2g^0 + g^2) &= -\gamma_1, \\ -(2g^2 + g^0) &= -\gamma_2. \end{aligned} \tag{40}$$

Константу g^0 абелева интеграла (33) в бесконечности легко найти вычитая у функции h особенность на ∞

$$G^0(z) = \int_0^z \Big(h^0(y)+\frac{2}{y+1}-\frac{2}{y+1}\Big)\,dy = \int_0^z \Big(h^0(y)+\frac{2}{y+1}\Big)\,dy-2\log(z+1).$$

Учитывая симметричность h относительно $\mathbb{R}$ и (34), заключаем, что

$$G^0(x) = -2\log|x+1| + \int_0^{+\infty}\Big(h^0(y)+\frac{2}{y+1}\Big)\,dy + o(1) =$$
$$= -2\log|x+1| + g^0 + o(1), \quad x\to+\infty.$$

Аналогично

$$G^2(x) = \log|x-1| + \int_0^{-\infty}\Big(h^2(y)-\frac{1}{y-1}\Big)\,dy + o(1) =$$
$$= \log|x-1| + g^2 + o(1), \quad x\to-\infty.$$

Следовательно, учитывая (40), получаем (37). $\square$

3.2.2 Равновесные меры для задачи с полем и аналитические функции

В ([7]) была приведена функция на римановой поверхности, скачок которой равен равновесной мере для экстремальной задачи с матрицей взаимодействия Анжелеско в полиномиальном поле. В этом пункте мы предъявим аналогичную функцию и с помощью нее вычислим носитель $\mathbf{S}_{\overline{\lambda}^A}$.

Определим рациональную функцию h_Q на римановой поверхности $\Re$, где точки ветвления a и b неизвестные параметры. Эта алгебраическая функция будет соответствовать задаче с полем (22).

Выделим три голоморфные ветви функции h_Q

$$\begin{array}{lcl} h_Q^0(z) & \in & H(\Re^0), \\ h_Q^1(z) & \in & H(\Re^1), \\ h_Q^2(z) & \in & H(\Re^2). \end{array} \tag{41}$$

Дивизор h_Q есть

$$\frac{\infty^0 * \infty^2}{0^{012} * \infty^1}. \tag{42}$$

Фиксируем у h_Q вычеты на бесконечностях

$$\begin{aligned} h_Q^0(z) &= \frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \to \infty, \ \ z \in \Re^0, \\ h_Q^1(z) &= 2z - \frac{2}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \to \infty, \ \ z \in \Re^1, \\ h_Q^2(z) &= \frac{1}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \to \infty, \ \ z \in \Re^2. \end{aligned} \tag{43}$$

Утверждение 3. *Алгебраическая функция h_Q (см. (41)-(43)) удовлетворяет уравнению*

$$h_Q^3 - 2zh_Q^2 + 4h_Q - \frac{2}{z} = 0. \tag{44}$$

Точки ветвления в

$$a = -\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Доказательство. Аналогично тому как это было сделано в Утверждении 2 мы получаем $R_2(z) = (h_Q^0 + h_Q^1 + h_Q^2) = -2z$, $R_0(z) = -\frac{2}{z}$. Легко видеть по теореме Виета и по поведению h вблизи $z = 0$ и ∞, что

$$|R_1(z)| = |(h_Q^0 h_Q^1 + h_Q^1 h_Q^2 + h_Q^0 h_Q^2)(z)| = \left|4 + \frac{c}{z}\right|.$$

Исследуем этого уравнение. Дискриминант алгебраического уравнения (44) равен

$$D = 32cz + 4c^2 + 32 - \frac{120c}{z} + ...,$$

из поведения дискриминанта на бесконечности следует, что $c = 0$. Следовательно,

$$D = -4\frac{27 - 8z^2}{z^2}.$$

Точки ветвления a, b регулярны, и, следовательно, в них простые нули дискриминанта, то есть

$$a = -\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \approx -1.8371, \quad b = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \approx 1.8371.$$

$\square$

Утверждение 4. *Плотность равновесной меры $\overline{\lambda}^A$ для задачи с матрицей Анжелеско и полем x^2 (22) равна скачку аналитической функции $h_Q^A(z)$ ((41)-(43)):*

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &:= \frac{h^0_{Q+} - h^1_{Q+}}{2\pi i} dx, \\ d\lambda_2 &= \frac{h^2_{Q+} - h^1_{Q+}}{2\pi i} dx. \end{aligned} \tag{45}$$

Доказательство. Как и в доказательстве Утверждения 2 проверяем, что мера $\mu = (\mu_1, \mu_2)$:

$$\begin{aligned} d\mu_1 &:= \frac{h^0_{Q+} - h^1_{Q+}}{2\pi i} dx, \\ d\mu_2 &:= \frac{h^2_{Q+} - h^1_{Q+}}{2\pi i} dx, \end{aligned} \tag{46}$$

действительно является мерой веса (1, 1). Комплексные логарифмические потенциалы W^{μ_1} и W^{μ_2} являются первообразными функций $-h_Q^0$ и $-h_Q^2$ соответственно:

$$\Big(W^{\mu_1}(z)\Big)'_z = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{h_Q^0(t)}{z-t}\, dt = -h_Q^0(z), \quad z \notin [a, 0] \tag{47}$$

и аналогично

$$\Big(W^{\mu_2}(z)\Big)'_z = -h_Q^2(z), \quad z \notin [0, b]. \tag{48}$$

Покажем что мера $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ дает равновесие для нашей задачи. Рассмотрим абелев интеграл

$$G(z) := \int_0^z h_Q(\psi)\, d\psi = \begin{cases} +\log|z| + g^0 + \cdots, & z \to \infty, \ z \in \Re^0, \\ z^2 - 2\log|z| + g^1 + \cdots, & z \to \infty, \ z \in \Re^1, \\ +\log|z| + g^2 + \cdots, & z \to \infty, \ z \in \Re^2. \end{cases} \tag{49}$$

Тогда

$$\begin{aligned} V^{\mu_1}(z) &= \mathrm{Re}\Big(- G^0(z) + g^0 \Big), \\ V^{\mu_2}(z) &= \mathrm{Re}\Big(- G^2(z) + g^2 \Big). \end{aligned} \tag{50}$$

Проверим для потенциалов (50) условия равновесия (11)

$$
\begin{aligned}
&2V^{\mu_1}(z)+V^{\mu_2}(z)-(2g^0+g^2)=\mathrm{Re}\,(-2G^0-G^2)= \\
&=\mathrm{Re}\,(G^1-G^0-z^2)=-x^2 \qquad\qquad \text{на} \quad [a,0], \\
&2V^{\mu_2}(z)+V^{\mu_1}(z)-(2g^2+g^0)=\mathrm{Re}\,(-2G^2-G^0)= \\
&=\mathrm{Re}\,(G^1-G^2-z^2)=-x^2 \qquad\qquad \text{на} \quad [0,b].
\end{aligned} \tag{51}
$$

Следовательно, $\overline{\mu}$ – это равновесные меры на $([a,0],[0,b])$ и $\overline{\mu}=\overline{\lambda}$. $\square$

3.2.3 Численное решение с помощью экстремального функционала

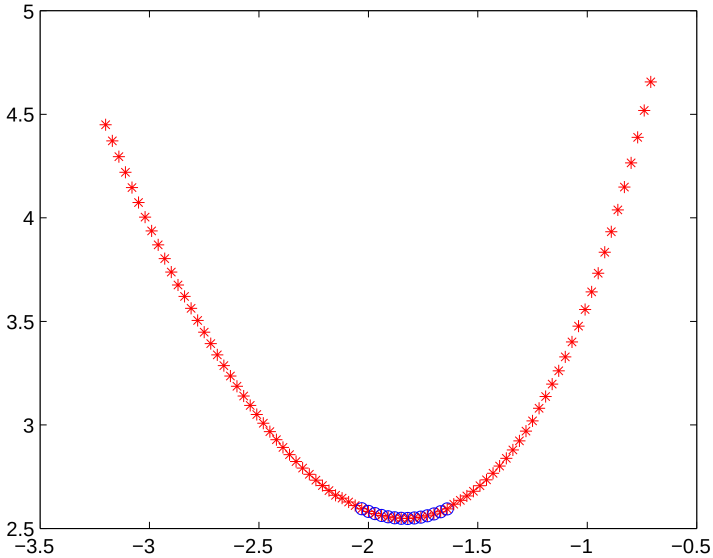

Рис. 1: Функционал Маскара-Саффа: $b=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, a изменяется по оси абсцисс.

Учитывая все вышеизложенное, $F^A_{\mathbf{Q}}\left([a,0]\,,[0,b]\right)=F(a,b)$, где

$$
\begin{gathered}
F(a,b)=-3\int_0^{+\infty}\left(h^0(y)+\frac{2}{y+1}\right)dy-3\int_0^{-\infty}\left(h^2(y)-\frac{1}{y-1}\right)dy+ \\
+\int_a^0 y^2\frac{h^0_+(y)-h^1_+(y)}{2\pi i}\,dy-\int_0^b y^2\frac{h^1_+(y)-h^2_+(y)}{2\pi i}\,dy,
\end{gathered},
$$

значения h определяются из уравнения (28) по формулам Кардано. Осталось только правильно выбрать корень.

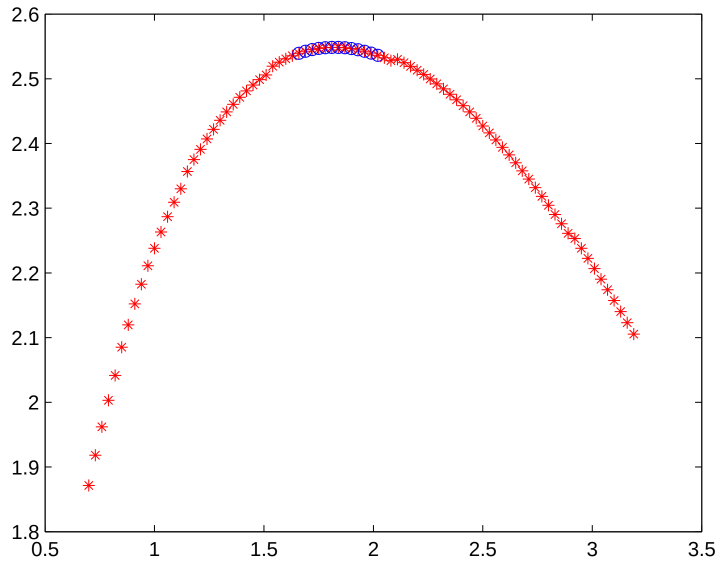

Рис. 2: Функционал Маскара-Саффа: $a = -\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, b изменяется по оси абсцисс.

- В интеграле $\int_0^{+\infty} \left(h^0(y) + \dfrac{2}{y+1}\right) dy$ в качестве $h^0(y)$ выбираем действительную ветвь на $(0, b)$ (две другие – комплексно сопряженные). На интервале $(b, l]$, где $l-$ корень дискриминанта, в котором $h^0(l) = h^1(l)$, выбираем максимальный отрицательный корень, т.е.
$$h^1(y) \leq h^0(y) < 0 < h^2(y), \quad y \in (b, l].$$
На $(l, c]$ минимальный корень, т.е. $h^0(y) < h^1(y) < 0 < h^2(y) \quad y \in (l, c]$ и отрицательную действительную ветвь на $(c, +\infty)$ (две другие положительны).

- В интеграле $\int_0^{-\infty} \left(h^2(y) - \dfrac{1}{y-1}\right) dy$ в качестве $h^2(y)$ выбираем действительную ветвь на $(a, 0)$ (две другие – комплексно сопряженные). На $(-\infty, a)$, учитывая что на этом интервале нет нулей дискриминанта, мы выбираем максимальный отрицательный корень:
$$h^1(y) < h^2(y) < 0 < h^0(y) \quad y \in (-\infty, a).$$

- В последних интегралах мы учитываем, что значения двух ветвей комплексно сопряжены, а третье – действительное. Мы можем брать модуль ненулевой мнимой части одного из корней:
$$\int_a^0 y^2 \frac{h_+^0(y) - h_+^1(y)}{2\pi i}\, dy = \int_a^0 y^2 \frac{\left|Im\left(h_+^0(y)\right)\right|}{\pi}\, dy,$$

$$\int_0^b y^2 \frac{h_+^1(y) - h_+^2(y)}{2\pi i}\, dy = \int_0^b y^2 \frac{\left| Im\left(h_+^2(y)\right)\right|}{\pi}\, dy.$$

На рис. 1, 2 показаны зависимость $F_{\mathbf{Q}}^A\left([a,0], \left[0, \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]\right)$ от a и зависимость $F_{\mathbf{Q}}^A\left(\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 0\right], [0,b]\right)$ от b. Видим, что функционал достигает минимума и максимума в точках $-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ соответственно. Носитель равновесной меры является седловой точкой $F(a,b)$.

4 Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность А.И. Аптекареву и Д.Н. Тулякову за полезные обсуждения в процессе работы над этой задачей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект N 14-21-00025).

Список литературы

[1] *Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин*, Рациональные аппроксимации и ортогональность //М.: Наука, 1988.

[2] *E. B. Saff, V. Totik*, Logarithmic Potentials with External Fields //Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin, 1997.

[3] *Н.С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала //М.: Наука, 1966.

[4] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов*, О задаче равновесия для векторных потенциалов //УМН, том 40, выпуск 4(244), (1985), 155-156.

[5] *H.N. Mhaskar, E. B. Saff*, Where does the sup norm of a weighted polynomial live? // Constr. Approx,1, (1985), 71-91.

[6] *М.А. Лапик*, О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия //Матем. сб., 197:8 (2006). 101-118.

[7] *А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков*, Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником //ТМФ, 159:1 (2009), 34-57.

[8] *А.И. Аптекарев*, Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина //Мат. сб., N6 190(1999), 11-22.

Содержание