



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 78 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Иванов Д.С., Меус С.В.,  
Овчинников А.В.,  
Овчинников М.Ю., Шестаков С.А.,  
Якимов Е.Н.**

Методы идентификации  
динамических параметров и  
оценки колебаний  
космических аппаратов с  
нежесткими элементами  
конструкции

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Методы идентификации динамических параметров и оценки колебаний космических аппаратов с нежесткими элементами конструкции / Д.С.Иванов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 78. 32 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-78>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Д.С. Иванов, С.В. Меус, А.В. Овчинников,  
М.Ю. Овчинников, С.А. Шестаков, Е.Н. Якимов**

**Методы идентификации динамических параметров  
и оценки колебаний космических аппаратов  
с нежесткими элементами конструкции**

**Москва — 2015**

**Иванов Д.С., Меус С.В., Овчинников А.В., Овчинников М.Ю., Шестаков С.А., Якимов Е.Н.**

Методы идентификации динамических параметров и оценки колебаний космических аппаратов с нежесткими элементами конструкции

Представлен обзор известных методов идентификации динамических параметров и оценки колебательных движений крупногабаритных аппаратов с гибкими элементами конструкции. Рассматриваются алгоритмы определения динамических характеристик космических аппаратов, таких как масса и тензор инерции. Проведен обзор измерительных средств, датчиков, на основе измерений которых производится оценка движения крупногабаритных нежестких элементов конструкции.

**Ключевые слова:** определение динамических характеристик, колебательные движения

**Ivanov D.S., Meus S.V., Ovchinnikov A.V., Ovchinnikov M.Yu, Shestakov S.A., Yakimov E.N.**

System Identification and Vibration Estimation Methods for Flexible Satellite

An overview of system identification and vibration estimation methods for flexible satellite is presented. Algorithms for satellite dynamical characteristics determination are considered. Sensors use for satellite vibration estimation is discussed.

**Key words:** dynamical characteristics determination, satellite vibration

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 14-11-00621.

## Введение

При создании сложных космических систем часто предполагается, что космический аппарат (КА) представляет собой твердое тело, и законы управления движением таких аппаратов строятся соответствующим этому предположению образом. Однако тенденция увеличения точности стабилизации космических аппаратов, обусловленная возрастающими требованиями со стороны полезной нагрузки (например, камеры для дистанционного зондирования Земли высокого разрешения или ретранслятора для спутника связи), приводит к необходимости рассмотрения более сложных моделей КА. В частности, на динамику углового движения оказывают воздействие гибкие элементы его конструкции, такие как солнечные панели, манипуляторы или большие телекоммуникационные антенны. Для учета этого воздействия при управлении необходимо определять не только угловое движение КА, но и движение гибких элементов конструкции, которое представляет собой сумму затухающих с разной скоростью мод колебаний. Наибольшее воздействие на угловое движение КА оказывают низкочастотные колебания, характеризующиеся относительно большой амплитудой и низкой скоростью затухания. Такие колебания, иногда возникающие, например, во время коррекции траектории КА или разгрузки маховиков, необходимо определять с помощью доступных средств измерения и демпфировать с помощью системы управления ориентацией или специальных актюаторов.

Для определения частоты, амплитуды и фазы колебаний гибких элементов конструкции могут использоваться как бортовые датчики определения углового движения КА, так и специальные измерительные средства. По косвенным измерениям колебательных движений корпуса КА при использовании сложных моделей, учитывающих гибкие элементы конструкции, возможно грубо оценить текущие параметры колебаний. Для более точного определения движения используются оптические измерения, например, лазерными дальномерами или специально установленной видеокамерой. Несмотря на обилие подходов для решения задачи определения движения гибких элементов конструкции, остается открытым вопрос построения алгоритмов оценки движения по зашумленным измерениям тех или иных измерительных средств. Возникают сложные задачи нахождения таких параметров алгоритмов, которые бы обеспечивали максимальную точность определения.

Настоящая работа разделена на три части. В первой части представлен обзор известных методов идентификации динамических параметров и оценки колебательных движений крупногабаритных аппаратов с гибкими элементами конструкции. Вторая часть посвящена алгоритмам определения динамических характеристик КА, таких как масса и тензор инерции, без знания которых невозможно прецизионное определение его движения. В третьей части рассматриваются различные средства – датчики, на основе измерений которых производится оценка движения крупногабаритных нежестких элементов кон-

струкции (КНЭК), а также проводится анализ требований для их работы. Каждая часть сопровождается анализом мирового опыта обеспечения точности наведения КА с КНЭК.

## 1. Методы идентификации динамических параметров и оценки колебаний КА с КНЭК

Рассмотрим задачу определения колебаний гибких элементов конструкции. Пусть колебания задаются следующим уравнением

$$\tilde{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{K}\mathbf{q}(t) = \Phi\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}(t)$  –  $n$ -мерный вектор отклонений от положения равновесия во время колебаний,  $\tilde{M}$  – массовая матрица (матрица с инерционными коэффициентами),  $\tilde{C}$  – матрица демпфирования,  $\tilde{K}$  – матрица жесткости,  $\Phi$  – матрица влияния управления ( $n \times m$ ),  $\mathbf{u}(t)$  – вектор управления. Рассмотрим вектор состояния, составленный из векторов отклонения  $\mathbf{q}(t)$  и скорости  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}.$$

В дискретном виде уравнение (1) представляется в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k. \quad (2)$$

Матрица  $A$  характеризует динамику системы. Пусть в системе есть измерения, которые определяются выражением

$$\mathbf{z}_k = C\mathbf{x}_k, \quad (3)$$

где  $\mathbf{z}_k$  – вектор измерений,  $C$  – матрица связи измерений и вектора состояния. Задача нахождения параметров системы заключается в следующем. По измерениям  $\mathbf{z}_k$  необходимо построить постоянные матрицы  $[A, B, C]$ , которые бы воспроизводили по уравнениям (2) и (3) значения полученных измерений  $\mathbf{z}_k$ . Матрицы  $[A, B, C]$  не являются единственным вариантом реализации системы. Если рассмотреть любую невырожденную квадратную матрицу  $T$ , то тройка матриц  $[TAT^{-1}, TB, CT^{-1}]$  также будет воспроизводить измерения  $\mathbf{z}_k$ . Однако собственные числа матрицы  $A$  при этом будут сохраняться при любой реализации системы.

### Алгоритм нахождения собственных векторов системы

Для нахождения постоянных матриц  $[A, B, C]$  уравнений движения (2) и модели измерения (3) в работе [1] предложен алгоритм нахождения собственных векторов системы (Eigensystem realization algorithm – ERA).

Связь между измерениями  $\mathbf{z}$  в момент времени  $t = t_i$  и входными воздействиями  $\mathbf{u}$  может быть получена из уравнений (2) и (3) с начальными условиями  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  и имеет следующий вид:

$$\mathbf{z}_i = CA^i \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=0}^{i-1} CA^{i-\tau-1} B \mathbf{u}_\tau. \quad (4)$$

Алгоритм ERA построен на использовании функции (параметров) Маркова из выражения (4), которая имеет вид

$$Y_k = CA^{k-1} B. \quad (5)$$

В матрице  $Y_k$   $i$ -ый столбец соответствует измеренному отклику системы на импульсное воздействие по  $i$ -ой входной координате. Алгоритм ERA использует разложение по сингулярным числам матрицы Хенкеля

$$H(0) = U \Sigma V^T, \quad (6)$$

где матрица  $H(0)$  состоит из сдвинутых по времени матриц  $Y_k$ ,  $\Sigma$  – диагональные матрицы с положительными диагональными элементами,  $U, V$  – ортогональные матрицы. При рассмотрении  $n$ -мерного вектора состояния  $\mathbf{x}$  из уравнения (2) матрицы  $[A, B, C]$  рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma_n^{1/2} U_n^T H(1) V_n \Sigma_n^{-1/2}, \\ B &= \Sigma_n^{1/2} V_n^T(:, p), \\ C &= U_n(q, :) \Sigma_n^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $H(1)$  – это матрица таких же размеров, как и  $H(0)$ , но в которой измеренные данные сдвинуты по времени на один шаг. В матрице  $V_n(:, p)$  взяты первые  $p$  столбцов, а в  $U_n(q, :)$  – первые  $q$  строк, где  $p$  и  $q$  – размерность вектора управления  $\mathbf{u}$  и вектора измерений  $\mathbf{z}$  соответственно (см. (2) и (3)).

Используя матрицу  $\Psi$ , составленную из собственных векторов матрицы перехода  $A$ , можно перейти к координатам в главных колебаниях, в которых будут верны соотношения

$$A' = \Psi^{-1} A \Psi = \Lambda,$$

$$B' = \Psi^{-1} B,$$

$$C' = C \Psi,$$

где  $\Lambda$  – диагональная матрица с собственными числами  $\lambda$  по диагонали. Собственные частоты колебаний  $\omega_i$  и скорость демпфирования  $\sigma_i$  для каждого  $i$ -го главного колебания исходной непрерывной системы (1) определяются из выражения

$$s_i = \sigma_i \pm j \omega_i = \ln(\lambda_i) / \Delta t,$$

где  $j$  – мнимая единица,  $\Delta t$  – шаг по времени между измерениями.

На практике некоторые модальные параметры, полученные с помощью алгоритма ERA, могут быть неточными вследствие высокой модальной плотности и нелинейности исходных уравнений. Подробно причины возникновения обла-

стей с высокой модальной плотностью разобраны в [2]. В [3] рассмотрено влияние использования дискретной модели системы, неточности измерений и т.п. на ошибки определения модальных характеристик. В работах [4; 5] предложена методология расчета и контроля точности полученных параметров колебаний на основе расчета индикатора, показывающего уровень корреляции амплитуд колебаний на соседних частотах. Чем больше значение рассчитанного индикатора, тем меньше точность определения модальных параметров для этих частот. Эффективность такого подхода продемонстрирована на примере определения частот колебаний крупногабаритной конструкции в NASA Langley Research Center. Измерения производились с помощью 213 акселерометров, установленных на конструкции, а возбуждающие импульсы производились восемью двигателями на сжатом газе. В результате были выявлены частоты, на которых модальные параметры определяются с низкой точностью вследствие нелинейных эффектов.

Рассмотренный выше алгоритм применим для конструкций в предположении, что матрицы  $[A, B, C]$  являются постоянными. В работе [6] предложена модификация алгоритма ERA, в которой рассматривается система с переменными свойствами вида

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{z}_k &= C_k \mathbf{x}_k,\end{aligned}$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в уравнениях (2) и (3). Этот алгоритм позволяет оценивать изменяющиеся во времени матрицы  $[A_k, B_k, C_k]$ , а следовательно, и модальные характеристики системы.

При использовании алгоритма ERA для разложения матрицы Хенкеля (6), построенной на большом объеме измерений, требуются достаточно большие вычислительные ресурсы. Для уменьшения объема вычислений был разработан подход на основе вычисления корреляционной матрицы [7]. Алгоритм ERA с вычислением корреляции в измерениях определяет набор матриц системы  $[A, B, C]$  на основе связи между откликом системы на импульсное воздействие и параметрами матрицы корреляции. Развитие этого подхода представлено в работе [8], где строится так называемая информационная матрица вида

$$R = \begin{bmatrix} R_{zz} & R_{zu} \\ R_{zu}^T & R_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_k^p \\ U_k^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Z_k^p)^T & (U_k^p)^T \end{bmatrix},$$

где  $R_{zz}, R_{zu}, R_{uu}$  – корреляционные матрицы сдвинутых по времени входных воздействий и измерений,

$$Z_k^p = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k & \mathbf{z}_{k+1} & \cdots & \mathbf{z}_{k+N-1} \\ \mathbf{z}_{k+1} & \mathbf{z}_{k+2} & \cdots & \mathbf{z}_{k+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{z}_{k+p-1} & \mathbf{z}_{k+p} & \cdots & \mathbf{z}_{k+p+N-2} \end{bmatrix}, U_k^p = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_{k+1} & \cdots & \mathbf{u}_{k+N-1} \\ \mathbf{u}_{k+1} & \mathbf{u}_{k+2} & \cdots & \mathbf{u}_{k+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{k+p-1} & \mathbf{u}_{k+p} & \cdots & \mathbf{u}_{k+p+N-2} \end{bmatrix},$$

$N$  – достаточно большое число измерений, число  $p$  определяет временной сдвиг измерений  $\mathbf{z}$  и управляющих воздействий  $\mathbf{u}$ . С помощью матрицы информации  $R$  определяются все матрицы системы  $[A, B, C]$  по методике, описанной в работе [8]. Для нестационарной системы также можно определить модальные характеристики с помощью вычисления корреляционной матрицы [9].

Характеристики гибких конструкций могут значительно меняться вследствие, например, разворота антенны, температурного градиента при частичном затенении, могут отличаться на освещенной и теневой стороне орбиты. Поэтому для управляемых гибких конструкций важно определять параметры в режиме реального времени. Однако алгоритм ERA и его описанные выше модификации плохо подходят для бортовой реализации, так как требуют большого объема вычислений, а также потому, что они разработаны для постоянных матриц  $[A, B, C]$ . В работе [10] представлена рекурсивная форма алгоритма ERA. Рекурсия возникает при ортогонализации матрицы Хенкеля (6) методом Грамма-Шмидта, на каждом шаге обновляются матрицы  $[A, B, C]$ . В сравнении с алгоритмом ERA предложенный алгоритм является простым и легко реализуемым на бортовом компьютере, так как для его работы необходимо на каждом шаге совершить всего несколько перемножений матриц, вычисление обратной матрицы, как в (7), не требуется.

Алгоритм ERA позволяет определить матрицы  $[A, B, C]$  системы (2), но иногда требуется найти массовую матрицу  $\tilde{M}$ , матрицу демпфирования  $\tilde{C}$  и матрицу жесткости  $\tilde{K}$  из исходного уравнения (1) для построения управления. В работе [11] предложен метод нахождения этих матриц минимального размера для исходной системы по найденным модальным характеристикам. Проблема нахождения массовой матрицы и матрицы жесткости заключается в том, что они определяются не однозначно, а с точностью до некоторой константы, которая не влияет на модальные характеристики системы. Эта проблема обсуждается в [12–14]. В литературе широко представлены способы определения этих матриц. Например, в [15] используется разложение массовой матрицы на множители, которые потом находятся с помощью фильтра Калмана или метода наименьших квадратов. В [16; 17] предложен метод нахождения однозначных массовой матрицы и матрицы жесткости, основанный на минимизации некоторого функционала, зависящего от элементов массовой матрицы.

### Определение параметров Маркова

Для работы алгоритма ERA необходимо знать параметры Маркова (5) из измерений и входных воздействий. На практике, если даны измерения на достаточно разнообразные входные воздействия, отклики на импульсное воздействие, из которых составлена матрица (5), вычисляются с помощью быстрого Фурье-преобразования [18]. Однако быстрое Фурье-преобразование может привести к большим ошибкам в случае, если входные воздействия  $\mathbf{u}$  не

удовлетворяют необходимым условиям, что сказывается на точности определения модальных параметров.

Другой подход определения параметров Маркова предложен в работе [19]. Так как исходная система может быть слабо демпфирована, вычисление её параметров может быть математически затруднено вследствие вырождения. Предложенный подход заключается в опосредованном нахождении параметров сначала для некоторой асимптотически устойчивой системы, связанной с исходной. Параметры исходной системы при этом однозначно определяются из параметров Маркова асимптотически устойчивой системы.

Рассмотрим следующую связь измерений  $\mathbf{z}$  и входных воздействий  $\mathbf{u}$ , полученную из (4) с начальными условиями  $\mathbf{x}_0 = 0$  для удобства записи:

$$\mathbf{z}_i = \sum_{\tau=0}^{i-1} Y_{\tau} \mathbf{u}_{i-\tau-1}. \quad (8)$$

Для асимптотически устойчивой системы параметры Маркова с индексом, начиная с некоторого  $p$ , могут быть опущены вследствие малости

$$\mathbf{z}_i \approx \sum_{\tau=0}^{p-1} Y_{\tau} \mathbf{u}_{i-\tau-1}.$$

Тогда система имеет ограниченное число независимых параметров Маркова. Однако для слабо затухающих систем, таких как КА с гибкими элементами конструкции, требуется слишком большое число параметров Маркова, что делает вычисление модальных характеристик практически невозможным. В этом случае можно рассмотреть следующую систему, добавив и отняв в правой части уравнения (2) величину  $M\mathbf{z}_i$ :

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k + M\mathbf{z}_k - M\mathbf{z}_k = (A + MC)\mathbf{x}_k + (B + MD)\mathbf{u}_k - M\mathbf{z}_k.$$

Определив  $\bar{A} = A + MC$ ,  $\bar{B} = [B + MD, -M]$ ,  $\mathbf{v}_k = [\mathbf{u}_k^T, \mathbf{z}_k^T]^T$ , получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \bar{A}\mathbf{x}_k + \bar{B}\mathbf{v}_k, \\ \mathbf{z}_k &= C\mathbf{x}_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Выбором матрицы  $M$  обеспечивается асимптотическая устойчивость системы (9). В работе [19] показано, что существует связь между параметрами Маркова исходной системы  $Y_k$  и системы (9)  $\bar{Y}_k$ . Параметры Маркова  $\bar{Y}_k$  вычисляются с использованием авторегрессивной последовательности. При известных  $Y_k$  модальные параметры вычисляются по алгоритму ERA.

В работе [20] предложен метод определения параметров Маркова для случая нестационарной системы, когда матрицы  $[A, B, C]$  из системы (2) и (3) изменяются со временем.

### Фазовый резонансный метод

Если к системе (1) приложить синусоидальное воздействие вида  $\mathbf{u} = \mathbf{F}e^{j\omega t}$ , то частное решение системы можно искать в виде  $\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}e^{j(\omega t + \varphi)}$ , где  $\varphi$  – это

сдвиг фаз между возбуждающим воздействием и откликом системы. Отсюда получим уравнение

$$(-\omega^2 \tilde{M} + j\tilde{C} + \tilde{K}) \tilde{\mathbf{q}} e^{j\varphi} = \Phi \mathbf{F}.$$

При разделении системы на вещественную и мнимую части получаются уравнения

$$(-\omega^2 \tilde{M} \cos(\varphi) - \tilde{C} \sin(\varphi) + \tilde{K} \cos(\varphi)) \tilde{\mathbf{q}} = \Phi \mathbf{F},$$

$$(-\omega^2 \tilde{M} \sin(\varphi) + \tilde{C} \cos(\varphi) + \tilde{K} \sin(\varphi)) \tilde{\mathbf{q}} = 0.$$

Если сдвиг фаз между возбуждающим воздействием и откликом  $\varphi = 90^\circ$ , то можно получить условия фазового резонанса

$$\begin{aligned} -\tilde{C} \tilde{\mathbf{q}} &= \Phi \mathbf{F}, \\ (-\omega^2 \tilde{M} + \tilde{K}) \tilde{\mathbf{q}} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения (10) могут быть использованы для определения массовой матрицы  $\tilde{M}$ , матрицы демпфирования  $\tilde{C}$  и матрицы жесткости  $\tilde{K}$  при известных входных воздействиях и отклике системы  $\tilde{\mathbf{q}}$  [21].

Фазовый резонансный метод требует приложения синусоидальной вынуждающей силы заданной частоты, таким образом, все моды колебаний возбуждаются индивидуально с помощью специальных актюаторов. Однако применение этого метода для определения мод колебаний крупногабаритных космических систем сопряжено с необходимостью специальной установки таких актюаторов для создания соответствующего возбуждения, что делает фазовый резонансный метод менее практическим, чем, например, описанный выше метод ERA.

### Метод наименьших квадратов

Для идентификации параметров системы возможен другой подход на основе метода наименьших квадратов. Введем функцию ошибки измерений вида

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k,$$

где  $\mathbf{z}_k$  – вектор реальных измерений в момент времени  $t = t_k$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_k$  – вектор прогноза измерений, который определяется из уравнения (8)

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \sum_{\tau=0}^{k-1} Y_\tau \mathbf{u}_{i-\tau-1}.$$

Определим вектор искоемых параметров как набор параметров Маркова  $\boldsymbol{\theta} = [Y_0 \ Y_1 \ \dots \ Y_{l-1}]$ , где  $l$  – число векторов измерений. Рассмотрим квадратичный критерий вида

$$J_l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{l-1} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i.$$

Таким образом, задача нахождения параметров системы сводится к задаче минимизации функционала  $J_l(\boldsymbol{\theta})$  по вектору  $\boldsymbol{\theta}$ .

В работе [22] рассмотрен ряд алгоритмов идентификации системы на основе критерия квадратов разности ошибки. Для нахождения минимума требуется решить уравнение Риккати относительно матрицы ошибок оценки. Алгоритмы на основе метода наименьших квадратов для одномодальных систем, которыми могут быть описаны реальные гибкие конструкции с одной самой значительной модой колебаний, описаны аналитически в [23].

Применение метода наименьших квадратов сопряжено с обработкой больших массивов измерений и возможно, как правило, только на Земле с использованием больших вычислительных ресурсов. Таким образом, с помощью метода наименьших квадратов удобно проводить постполетную обработку накопленных за некоторый период измерений для определения колебательных параметров космического аппарата.

### Решеточные фильтры

Для адаптивной идентификации свойств КА с КНЭК эффективно используется так называемый решеточный фильтр (lattice filter) на основе метода наименьших квадратов [24; 25]. Рекурсивный метод наименьших квадратов также часто используется для определения параметров гибких конструкций, однако имеет серьезное ограничение – необходимо фиксировать число определяемых колебательных мод. Гибкие конструкции имеют очень много (с теоретической точки зрения – бесконечно много) колебательных мод, при этом различные моды могут быть возбуждены в различное время. Таким образом, наряду с определением параметров необходимо определять и количество эффективных мод колебаний, что и позволяют делать решеточные рекурсивные фильтры, обрабатывая переменное количество измерений. Решеточные фильтры больше подходят для крупногабаритных КА и являются устойчивыми.

Для построения решеточного фильтра используется авторегрессивная связь между измерениями  $\mathbf{z}$  и входными воздействиями  $\mathbf{u}$ . Эта связь имеет вид

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{z}(t - t_i) + \sum_{i=1}^M b_i \mathbf{u}(t - t_i),$$

где  $N$  – размерность вектора состояния системы (2),  $M$  – размерность вектора воздействий,  $a_i, b_i$  – некоторые коэффициенты,  $t$  – время текущего измерения,  $t_i$  – время получения предыдущих измерений. Задача решеточного фильтра заключается в определении коэффициентов  $a_i, b_i$  с помощью метода наименьших квадратов. Собственные числа и собственные вектора матрицы динамики  $A$  системы (2) определяются из этих коэффициентов, и таким образом определяются её модальные характеристики. В некоторых случаях, когда параметры системы периодически изменяются, обычные решеточные фильтры не всегда позволяют их определить. Для преодоления такого рода проблем в работе [26] предложен периодический решеточный фильтр.

## Фильтр Калмана

Для рекурсивной оценки модальных параметров, а также текущего вектора состояния может быть использован алгоритм на основе фильтра Калмана. Предполагается, что модель движения (2) известна не точно, а измерения (3) имеют некоторую ошибку [27]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + B(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= C(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{w}_k$  и  $\mathbf{v}_k$  – нормально распределенные векторы ошибок модели движения и модели измерений с ковариационными матрицами  $M(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) = Q_k$ ,  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = R_k$  соответственно. Вектор  $\boldsymbol{\theta}$  состоит из скоростей демпфирования  $\sigma$ , собственных частот  $\omega$  и собственных векторов  $\boldsymbol{\psi}$  системы:

$$\boldsymbol{\theta} = [\sigma_1, \dots, \sigma_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \boldsymbol{\psi}_1^T, \dots, \boldsymbol{\psi}_n^T]^T.$$

Предполагается, что вектор модальных параметров  $\boldsymbol{\theta}$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k.$$

Здесь  $\Delta\boldsymbol{\theta}_k$  – нормально распределенная ошибка вектора  $\boldsymbol{\theta}$  с ковариационной матрицей  $M(\Delta\boldsymbol{\theta}_k \Delta\boldsymbol{\theta}_k^T) = \Theta_k$ .

Теперь рассмотрим расширенный вектор состояния вида

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T,$$

для оценки этого вектора можно построить фильтр Калмана.

Дискретный фильтр Калмана работает по системе прогноз-коррекция (рис. 1) [28]. Пусть на шаге с номером  $k-1$  известна оценка  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  и ковариационная матрица ошибки  $P_{k-1}^+$ . Требуется найти оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Для этого на этапе прогноза путем интегрирования модели движения вычисляется априорная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ , а на этапе коррекции с помощью обработки вектора измерений  $\mathbf{z}_k$  вычисляется апостериорная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Ковариационная матрица ошибок вектора состояния  $P_k^-$  прогнозируется с помощью дискретного уравнения Риккати, и после получения измерения вычисляется апостериорная матрица  $P_k^+$ .

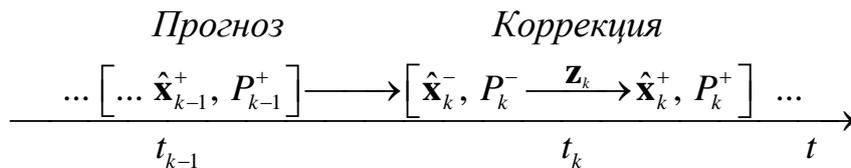


Рис. 1. Принцип работы фильтра Калмана

Фильтр Калмана находит наилучшую по среднеквадратическому критерию оценку для линейных систем, но может быть построен и в случае, если уравне-

ние движения и уравнение измерений являются нелинейными функциями от времени и вектора состояния,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(t), \quad (12)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t). \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{w}(t)$  – нормально распределенная ошибка модели движения с ковариационной матрицей  $Q$ ,  $\mathbf{v}(t)$  – нормально распределенная ошибка модели измерений с ковариационной матрицей  $R$ . Для построения фильтра функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  разлагаются в ряд Тейлора в окрестности оценки текущего вектора состояния. После этого удерживаются только линейные члены разложения. Матрица динамики системы и матрица модели измерений вычисляются следующим образом:

$$H_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}, \quad F_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}.$$

Для расширенного фильтра Калмана при дискретно поступающих измерениях вектор состояния на этапе прогноза вычисляется путём интегрирования нелинейных уравнений движения (12), на этапе коррекции используется нелинейная модель измерений (13) [29]:

*Этап прогноза :*

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, t) dt, \quad (14)$$

$$P_k^- = \Phi_k P_{k-1}^+ \Phi_k^T + Q_k.$$

*Этап коррекции :*

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}, \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t_k)],$$

$$P_k^+ = [E - K_k H_k] P_k^-.$$

Здесь  $\Phi_k$  – матрица перехода из состояния  $k-1$  в состояние  $k$ ,  $E$  – единичная матрица,  $K$  – весовая матрица.

В случае рассмотрения стохастической системы вида (11) в число определяемых параметров системы наряду с матрицами  $A, B, C$  могут также входить ковариационные матрицы ошибок модели  $Q$  и ошибок измерений  $R$ . В работе [30] предложен сложный алгоритм идентификации системы (11), куда входит алгоритм ERA для определения модальных характеристик, фильтр Калмана для определения текущего движения системы и адаптивный фильтр для определения матриц  $Q, R$  по измерениям.

### Определение параметров нелинейных систем

Иногда движение КА с гибкими элементами конструкции не может быть представлено в виде линейного приближения вида (1). Определение параметров

такой системы может являться большой проблемой для исследователя, а методы могут сильно зависеть от вида нелинейности. Например, в работе [31] рассматриваются квадратично связанные осцилляторы, в которых может возникать внутренний резонанс. Такого рода нелинейности могут возникать для сложных конструкций. В обзорной работе [32] представлены основные методы определения параметров нелинейных систем. Рассмотрим основные источники нелинейностей.

- Нелинейности, возникающие при больших отклонениях от положения равновесия, называются геометрическими. Самый простой пример – нелинейность в математическом маятнике  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$  при большом отклонении от положения равновесия. В работе [33] представлены методы идентификации для систем с геометрическими нелинейностями.

- Нелинейности при рассмотрении движения в неинерциальной системе отсчета, например, связанной с КА. В частности, к нелинейным уравнениям приводит учет силы Кориолиса.

- Нелинейные эффекты, возникающие при нагревании/охлаждении материалов, из которых состоит конструкция. В работе [34] рассмотрен метод определения такого рода нелинейностей.

- Демпфирование может быть значительно нелинейным для системы. Оно плохо описывается линейной моделью, которая может не удовлетворять реальному движению в некоторых случаях. Эффекты сухого трения и гистерезисное демпфирование можно привести в качестве примера нелинейного демпфирования [35; 36].

- Нелинейность может возникать в случае действия на систему внешних нелинейных сил, например, электромагнитных. Это возможно в случае, когда аппарат с гибкими и магнитными элементами конструкции движется на низкой орбите в магнитном поле Земли.

### **Эвристический подход**

Как правило, модель гибкой конструкции априорно известна с некоторой точностью, она рассчитана с помощью компьютерного моделирования по конечно-разностной модели либо получена в результате наземных лабораторных испытаний. Таким образом, есть априорная информация о модальных характеристиках системы, которую разумно использовать для идентификации системы по измерениям уже в полете КА.

В работе [37] предложен эвристический подход, позволяющий определять характеристики гибкой конструкции по априорной информации. При предположениях о возможной структуре системы, ее конфигурации и возможном изменении свойств элементов конструкции за счет изменения температуры, действия возмущающих факторов и т. п. с помощью компьютерного моделирования создается пространство возможных наборов параметров системы –

собственных мод колебаний для каждой возможной конфигурации космического аппарата. Далее по получаемым измерениям с помощью одного из алгоритмов, описанных выше, определяются модальные характеристики системы. За счет ошибок измерений и нелинейностей экспериментально определенные характеристики содержат некоторую ошибку. По этим модальным характеристикам производится поиск в пространстве априорно предполагаемых моделей гибкой структуры. Поиск производится по среднеквадратическому критерию – выбирается такая модель, сумма квадратов разностей модальных характеристик которой будет минимальной.

### **Примеры реализации алгоритмов**

Несмотря на обилие разработанных алгоритмов определения параметров и движения КА с КНЭК, во время конкретной реализации возникают некоторые аспекты, которые требуют модифицировать используемые методы и учесть множество особенностей.

Большое количество работ посвящено определению модальных параметров орбитальной станции МИР (ОС МИР) и Международной космической станции (МКС) [38–40]. В работе [41] представлен обзор экспериментов и лабораторных стендов для идентификации и управления структурами с гибкими элементами, реализованных до 1992 года. Во время обработки данных возникает множество особенностей, в частности, необходимость учитывать колебания широкого спектра частот, наличие ошибок и задержек в измерениях, ограниченные возможности для воздействия на структуру, нелинейности в колебаниях конструкции, неизвестные возмущения, действующие на аппарат и т.п. В работе [38] подробно рассматривается эксперимент на ОС МИР для определения модальных характеристик. Суть эксперимента заключалась в воздействии на МИР заданными возбуждениями, измерении отклика с помощью датчиков и обработке полученных данных на Земле. Время проведения эксперимента было ограничено 45 минутами, что было недостаточно для определения частотных откликов с помощью Фурье-преобразования для колебаний интересующей частоты 0.1-2.0 Гц и привело к ошибкам. Далее функции откликов обрабатывались на Земле с помощью алгоритма ERA. Также в статье подробно рассмотрено влияние нелинейности и задержки в измерениях на точность определения модальных характеристик в полетных условиях.

В [39] проведено сравнение модальных характеристик одного из первых модулей МКС, полученных экспериментально во время наземных испытаний и рассчитанных на основе конечно-элементной модели. Экспериментальные данные обрабатывались алгоритмом ERA, и полученные характеристики с высокой степенью совпали с характеристиками, полученными на основе компьютерной модели. Однако на частотах от 35 до 50 Гц был обнаружен ряд новых, не предсказанных мод колебаний.

Характеристики, полученные во время наземных лабораторных испытаний гибких элементов конструкции КА, могут значительно отличаться от полетных, так как на Земле на конструкцию действует сила тяжести, которая нагружает структуру, вследствие чего изменяются свойства материала, появляются нелинейности. В работе [42] приводятся результаты экспериментальной работы по сравнению полетных и наземных характеристик структуры и выявлению влияния гравитации на структурную динамику конструкции, которая представляет собой некоторую ферму, способную изменять форму. Рассматриваются следующие основные типы влияния гравитации на структуру: эффект возникновения нелинейностей нагруженной системы; изменение жесткости элементов конструкции под действием гравитации; гравитационная деформация структуры, которая приводит к смещению положения равновесия; влияние на инерциальные датчики и актюаторы. Показано, что степень влияния того или иного фактора на характеристики системы зависит от методики проведения эксперимента, конкретных возникающих нелинейностей и конфигурации структуры.

В работе [43] описана методика идентификации для миссии топографического измерения поверхности Земли с космического транспортного корабля Shuttle с использованием двух антенн, одна из которых была размещена на ферме длиной 60 метров. Относительное положение и ориентация антенны в системе координат, связанной с Shuttle, определялись в режиме реального времени по измерениям лазерного дальномера и обработке видеоизображения с помощью расширенного фильтра Калмана, который использовал линейную модель колебаний (1) с параметрами, полученными во время наземных испытаний. Однако в работе показано, что в системе возник ряд нелинейностей, а именно: частоты колебаний зависели от амплитуды, демпфирование характеризовалось линейным уменьшением амплитуды, а не экспоненциальным. Таким образом, оценки фильтра Калмана, основанные на линейной модели, были смещенными. Эта проблема была решена увеличением ковариационной матрицы ошибок модели, что устранило смещение оценки, но привело к ухудшению среднеквадратической ошибки. Далее были предложены три нелинейные модели колебаний – модель, в которой жесткость зависит от амплитуды и скорости, модель с зависимостью жесткости только от скорости и модель с полиномиальной зависимостью жесткости и демпфирующего коэффициента от скорости и амплитуды. С помощью метода наименьших квадратов были найдены все параметры в моделях. Далее по величине остаточных невязок была выбрана наиболее подходящая модель, которой оказалась модель, в которой жесткость зависит от скорости и амплитуды.

Для идентификационных методов, описанных в настоящем обзоре, требуется знание не только отклика системы, но и величины воздействия. Однако во время летных экспериментов точное значение воздействия может быть либо известно с некоторой ошибкой, либо неизвестно при действии возмущений. Интересный подход для решения этой проблемы предложен в [44]. В элементы конструкции встраиваются пьезоэлектрические элементы, способные изменять

свою жесткость. При изменении жесткости элемента модальные характеристики структуры изменяются на некоторую величину, которая может быть определена по измерениям, как описано в [44]. Таким образом можно определить модальные характеристики исходной системы, не используя данных о величине воздействия.

Большие космические структуры больше подвержены опасности столкновения с мелкими обломками космического мусора или метеоритами. Иногда для оценки ущерба от столкновения требуется точно узнать, куда именно на поверхности структуры попал обломок. Кроме того, модальные характеристики структуры могут измениться после удара. В работе [45] предложен метод идентификации точки столкновения с конструкцией на основе решения обратной задачи – при известных модальных характеристиках системы и измерениях датчиков определить точку приложения силы. Метод был апробирован на лабораторном оборудовании и показал хорошую работоспособность.

## 2. Методы определения массы, тензора инерции и положения центра масс КА

Динамические параметры крупногабаритных КА, такие как масса и тензор инерции, могут меняться во время полета за счет расхода топлива и изменения конфигурации системы. Знание актуальных параметров необходимо для задач управления движением центра масс аппарата и движением относительно центра масс. Несмотря на то, что динамические параметры КА рассчитываются на Земле по проектным характеристикам, остается возможность неточного знания распределения массы в теле аппарата за счет неточного раскрытия антенн, перемещения жидкого топлива в баке и т.п. Возникает задача определения динамических параметров КА в условиях орбитального полета с использованием доступных измерительных средств. В настоящем разделе рассматриваются методы для их определения и примеры их использования. Движение относительно центра масс описывается уравнением

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i + \mathbf{M}_d, \quad (16)$$

где  $J$  – тензор инерции КА,  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости в связанной с аппаратом системе координат (ССК),  $\mathbf{M}$  – действующие на аппарат управляющие моменты,  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор приложения  $i$ -й силы со стороны двигателя в ССК,  $\mathbf{F}_i$  – приложенная к аппарату сила,  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор положения центра масс КА в ССК,  $\mathbf{M}_d$  – неизвестный возмущающий момент. Пусть на аппарате есть датчик угловой скорости, по измерениям которого можно определить вектор  $\boldsymbol{\omega}$ ; действующие на аппарат управляющие моменты  $\mathbf{M}$ , а также положение реактивных двигателей  $\mathbf{r}_i$  и величина приложенной силы известны.

## Метод наименьших квадратов

В работе [46] предложен метод нахождения динамических параметров с помощью метода наименьших квадратов с использованием регрессивной модели.

Введем вектор определяемых параметров  $\mathbf{x} = [\hat{\mathbf{J}}^T \mathbf{R}^T]^T$ , где  $\hat{\mathbf{J}}$  – вектор, элементами которого являются элементы тензора инерции. В [46] показано, что можно построить линейную модель вида

$$\mathbf{Z} = H\mathbf{x}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2^T \dots \mathbf{z}_n^T]^T$  – вектор, составленный из векторов

$$\mathbf{z}_k = \int_{t_0}^{t_k} \boldsymbol{\omega}^T \left( \mathbf{M} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \right) dt,$$

$$H = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_m], \text{ где } \mathbf{h}_k = [\Omega_{\hat{\mathbf{J}}}^T(t_k) \Omega_F^T(t_k)]^T,$$

$$\Omega_{\hat{\mathbf{J}}}^T(t_k) = \left[ \omega_x^2 \quad \omega_y^2 \quad \omega_z^2 \quad 2\omega_x\omega_y \quad 2\omega_x\omega_z \quad 2\omega_y\omega_z \right] \Big|_{t=t_k},$$

$$\Omega_F^T(t_k, t_0) = \sum_i \int_{t_0}^{t_k} (\mathbf{F}_i \times \boldsymbol{\omega})^T dt.$$

Вследствие неточности измерений и ошибок знания управляющих воздействий  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{F}_i$  из уравнения (17) нельзя получить точное значение вектора  $\mathbf{x}$ . Предлагается найти такую оценку  $\hat{\mathbf{x}}$ , которая бы доставляла минимум функционалу

$$\Phi = \sum_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k^T \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k^T \hat{\mathbf{x}}).$$

Так как исходная система (17) линейная, то решение задачи минимизации функционала имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}} = (\Xi^T \Xi)^{-1} H^T \mathbf{Z},$$

где  $\Xi$  – верхняя треугольная матрица сингулярного разложения матрицы  $H$ .

Работа метода наименьших квадратов была продемонстрирована на примере определения динамических характеристик системы для передвижения космонавта в открытом космосе. При совершении космонавтом маневров с помощью двигателей на сжатом воздухе производились измерения угловой скорости и ускорения. Было показано, что использование измерений, полученных при одноосных маневрах вращения, позволяет определить динамические характеристики с худшей точностью по сравнению с измерениями во время трехосного вращения.

В работе [47] предложен алгоритм на основе метода наименьших квадратов для определения массы МКС по измерениям микроускорений. Используется следующее уравнение для кажущегося ускорения  $a(t)$ :

$$ma(t) = F_0 q(t) + F_1(t).$$

Здесь  $m$  – масса станции,  $F_0$  – проекция на ось  $x$  тяги одного двигателя,  $q(t)$  – число работающих двигателей,  $F_1$  – компонента вдоль оси  $x$  главного вектора негравитационных внешних сил, действующих на станцию. Двигатели считаются одинаковыми. Если пренебречь силой  $F_1$ , то отношение  $\alpha = F_0 / m$  можно найти методом наименьших квадратов из условия минимума выражения

$$\Phi(\alpha) = \sum_i (a_i - \alpha q_i)^2,$$

$a_i$  – измерения акселерометров. Задача нахождения массы может быть решена только при известной тяге  $F_0$ , которая вычисляется с помощью предварительной тарировки двигателей.

Уточнение тензора инерции проводилось для ОС МИР в работах [48–50]. Применялись два способа. Первый состоял в определении неуправляемого вращательного движения станции по данным измерений бортовых датчиков или по телеметрической информации об ее ориентации. Определение движения сводилось к построению функций, аппроксимирующих данные измерений или телеметрическую информацию и рассчитываемых вдоль решений полной системы уравнений вращательного движения станции. В результате обработки уточнялись начальные условия движения и некоторые параметры математической модели, в том числе пять параметров, характеризующих тензор инерции станции: три угла, задающих направления главных центральных осей инерции в строительной системе координат, и две безразмерных комбинации главных центральных моментов инерции. Приемлемые по точности оценки получались только в результате обработки показаний оптического звездного датчика и значений кватерниона, задающего ориентацию станции [48].

Во втором способе использовались данные измерений суммарного кинетического момента гироскопов, полученные при поддержании неизменной ориентации станции в абсолютном пространстве. Как оказалось, при обработке измерений, выполненных на интервале поддержания одной ориентации, можно оценить только четыре специально выбранные линейные комбинации шести компонент тензора инерции. В частности, если кинетический момент гироскопов измеряется в системе главных центральных осей инерции станции, то можно оценить разности ее главных моментов инерции. При совместной обработке измерений, выполненных на нескольких временных интервалах при разных ориентациях станции, можно оценить недиагональные компоненты тензора инерции и разности его диагональных компонент. Оценки, найденные при совместной обработке двух и трех интервалов, достаточно точно совпадали с результатами проектных расчетов [49; 50].

### **Фильтр Калмана**

Другой метод для определения динамических параметров, основанный на среднеквадратическом критерии оценки, был предложен в [51; 52]. Вводится

вектор состояния, составленный из обратных элементов тензора инерции и вектора положения центра масс в ССК,

$$\mathbf{x} = \left[ J_{xx}^{-1} \quad J_{yy}^{-1} \quad J_{zz}^{-1} \quad J_{xy}^{-1} \quad J_{xz}^{-1} \quad J_{yz}^{-1} \quad R_x \quad R_y \quad R_z \right]^T.$$

Рассматривается нелинейная модель измерений вектора угловой скорости вида

$$\mathbf{z}_k = \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (18)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  – нормально распределенная ошибка модели измерений с ковариационной матрицей  $R$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$  – нелинейная зависимость угловой скорости от вектора  $\mathbf{x}$ , которая может быть получена путем интегрирования уравнений (16).

Вектор параметров  $\mathbf{x}$  предполагается постоянным, но подверженным нормальному распределенному шуму

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k. \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{w}(t)$  – нормально распределенная ошибка модели изменения параметров с ковариационной матрицей  $Q$ .

Используя модели измерения (18) и изменения параметров (19), можно построить фильтр Калмана для итерационной оценки вектора  $\mathbf{x}$ . Основные формулы фильтра Калмана представлены выражениями (14) и (15). В работе [51] показано, что ошибка определения динамических параметров с помощью фильтра Калмана составляет порядка 1%.

Определение массы крупногабаритного аппарата также может быть произведено с помощью фильтра Калмана. В [51] построен фильтр на основе измерений акселерометра с известным распределением ошибок. Для определения массы на аппарат импульсно воздействуют с помощью двигателей с известными характеристиками. Модель измерений ускорения  $\mathbf{a}_j$  некоторой  $j$ -й точки аппарата с помощью акселерометра выглядит следующим образом:

$$\mathbf{a}_j = m^{-1} \sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^d) + \Delta \mathbf{a}_j + m^{-1} \mathbf{W}_j, \quad (20)$$

Здесь  $m$  – масса аппарата,  $\mathbf{F}_i$  – тяга двигателя,  $\mathbf{F}_i^d$  – возмущающая сила,  $\mathbf{W}_j$  – переносное ускорение, измеряемое акселерометром,  $\Delta \mathbf{a}_j$  – нормально распределенная ошибка измерений. Если в качестве оцениваемого параметра взять величину, обратную массе  $x = m^{-1}$ , то используя модель изменения  $x$  вида (19) и модель измерений (20), можно построить фильтр Калмана, который будет производить оценку массы аппарата в режиме реального времени.

В работе [53] представлен пример применения фильтров Калмана для оценки тензора инерции, положения центра масс и массы МКС с использованием воздействия на угловое движение только с помощью гироскопов и маховиков.

### 3. Обзор измерительных средств для определения колебаний КА

Для идентификации динамических параметров системы и оценки колебаний необходимы измерения, которые связаны с отклонениями гибких конструкций в общем случае нелинейно. Нелинейную модель измерений можно записать в виде

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k, \quad (21)$$

где  $\mathbf{z}_k$  – вектор измерений, полученный в момент времени  $t_k$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k)$  – нелинейная функция от вектора состояния и времени,  $\mathbf{v}_k$  – вектор ошибок измерений. Для каждого измерительного средства модель измерений (21) имеет различный вид. В настоящем разделе проведен обзор основных датчиков, по измерениям которых можно определить динамические параметры и оценить колебания гибких элементов конструкции КА. Для каждого измерительного средства проводится анализ преимуществ и недостатков, а также указываются необходимые для работы приборов требования.

#### Фотограмметрия

Для статического и динамического профилирования гибких конструкций КА хорошо зарекомендовала себя фотограмметрия – дисциплина, определяющая форму трехмерных объектов по нескольким фотоизображениям этого объекта [54]. При этом точные фотограмметрические расчеты требуют фотографий высокой четкости с наличием хорошо различимых деталей, а объекты, подлежащие исследованию, часто не позволяют совершать съемку достаточной контрастности. Поэтому для улучшения качества фотоизображения используются дополнительные приемы.

Для фотограмметрии жестких объектов часто применяются светоотражающие либо высококонтрастные мишени, прикрепляемые к конструкции распознаваемого объекта. Они позволяют делать снимки чрезвычайно высокой контрастности ввиду яркости светового пятна от вспышки фотокамеры. Применение подобной технологии к распознаванию мод колебаний гибких элементов КА представлено в работах [55; 56]. Однако эта технология имеет свои недостатки, наиболее явно проявляющиеся при фотограмметрии тонких мембран и сверхлегких конструкций. Добавление мишени на такой объект может существенно изменить геометрию и моды колебаний структуры, а также при большом количестве мишеней переутяжелить конструкцию.

Альтернативным решением является проецирование на распознаваемый объект некоторого заранее известного (обычно это набор точек) шаблона. Особенно хороший результат достигается при проецировании шаблона на рассеивающие поверхности, поскольку в таком случае разброс углов, с которых рассеянный свет может быть увиден фотокамерой, чрезвычайно велик, что позволяет делать множественные снимки распознаваемого объекта.

Применительно к распознаванию движения и колебаний сетчатых конструкций и мембран метод представлен в работе [57]. Этот метод также имеет свои недостатки: вследствие необходимости освещения объекта высококонтрастным шаблоном фотограмметрия прозрачных или светоотражающих объектов затруднена. Другая возможная проблема связана с появлением пятен засветки, получающихся при прямом отражении падающего света от поверхности распознаваемого объекта. Подобные пятна уменьшают контрастность изображения или, в худшем случае, полностью перекрывают шаблон для съемки.

Наиболее типичные плюсы и минусы двух описанных выше фотограмметрических методов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Преимущества и недостатки фотограмметрических методов

Светоотражающая либо высококонтрастная мишень	
плюсы	минусы
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Высокая яркость и контрастность получаемого изображения.</li> <li>• Возможно освещение с дальних расстояний.</li> <li>• Независим от оптических свойств поверхности объекта.</li> <li>• Двигается вместе с объектом, что увеличивает точность при съемке деформаций.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Добавляет массу, весьма значительную для мембранных поверхностей.</li> <li>• Не подходит для измерений колебаний малой амплитуды и «ряби».</li> <li>• Размер распознаваемого пятна невозможно изменить после установки мишени.</li> <li>• Удаление мишени с тонких поверхностей усложнено или невозможно.</li> </ul>
Проекция точечного шаблона	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Не добавляет массы.</li> <li>• Не требует времени на установку дополнительных приспособлений.</li> <li>• Размер и форма проектируемого шаблона легко варьируются.</li> <li>• Не имеет толщины, так что координаты проекции совпадают с координатой точки на поверхности.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Требуется наличие прожектора высокой мощности.</li> <li>• Трудно применим для отражающих или прозрачных поверхностей.</li> <li>• Имеет малый угол обзора.</li> <li>• Может измерять только компоненту движения по направлению к или от проектора.</li> </ul>

Отдельно стоит отметить метод индуцированной флюоресценции, лишенный большинства недостатков, возникающих при добавлении светоотражающей мишени или проецировании шаблона. Метод заключается в следующем: в объект, подлежащий фотограмметрии, тем или иным способом

(твердое тело может быть покрашено или покрыто пленкой, в материал тонкой мембраны изменения могут вноситься при ее изготовлении) добавляется специальный лазерный краситель. При освещении поверхности с красителем лазером определенной длины волны луч лазера поглощается, а внутри материала происходит переизлучение во всех направлениях с увеличением длины волны света. Переизлученный свет может быть зафиксирован фотокамерой, при этом достигается высокая контрастность изображения. Разница в длине волн лазерного и фиксируемого камерами излучений позволяет использовать фильтры, предотвращающие появление засветки и порчу изображения. Применение индуцированной флюоресценции рассмотрено в работах [58; 59], где также показывается возможность распознавания не только статических, но и динамических характеристик объекта.

### **Датчики на основе прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта**

Современные исследования предполагают использование прямого (возникновение электрического напряжения между поверхностями деформируемого тела) и обратного (деформация при приложении электрического поля) пьезоэлектрических эффектов как стандартную технику для определения мод колебаний КА [60]. Пьезокерамические датчики обладают достаточным уровнем надежности, притом не являются чрезвычайно дорогими, тяжелыми в исполнении или громоздкими [61]. Для определения механических деформаций пьезоэлектрический датчик помещается внутрь деформируемого объекта. Подход хорошо работает для больших конструкций, при уменьшении размеров объекта размер датчика должен пропорционально уменьшаться. Кроме того, в случае пьезоэлектрических датчиков важно правильно подобрать места их расположения. В работах [62–66] рассматриваются методы оптимального расположения датчиков для задач определения модальных характеристик спутников с гибкими элементами конструкции.

### **Брэгговские решетки**

В работе [67] рассмотрено использование датчиков на основе волоконных решеток Брэгга для определения мод колебаний. С помощью этих датчиков можно определять отклонения структуры от положения равновесия. Датчики на основе брэгговской решетки обладают рядом преимуществ: они небольшие по размеру, легкие, их легко установить на конструкцию. Кроме того, эти датчики не требуют подведения металлических проводов, как акселерометры или пьезоэлектрические датчики, что уменьшает магнитные возмущения. Сигналы с датчиков передаются с помощью оптического волокна, которое может собирать сигнал сразу с нескольких чувствительных элементов за счет настройки их работы на разные длины волн.

Решетка Брэгга – это частотно-селективное зеркало, падающий на волокно свет проходит сквозь волокно, однако очень узкий диапазон длин волн (вблизи

так называемой Брэгговской длины) отражается. Уравнение для Брэгговской длины имеет вид  $\lambda_B = 2n_e\Lambda$ , где  $\lambda_B$  – Брэгговская длина волны,  $n_e$  – эффективный коэффициент преломления волокна,  $\Lambda$  – период волоконной решетки. На длину отраженной волны оказывает влияние любое изменение физических параметров решетки, к примеру, физическая деформация волокна влечет изменение периода решетки и, следовательно, Брэгговской длины. Изменение температуры влечет изменение  $n_e$  вследствие термооптического эффекта. Влияние внешних факторов на решетку имеет вид

$$\Delta\lambda_B = \lambda_B(1-p)\Delta\varepsilon + \lambda_B(\alpha + \gamma)\Delta T, \quad (22)$$

где  $p, \alpha, \gamma$  – коэффициенты фотоупругости, термического расширения и термооптический коэффициент волокна соответственно,  $\Delta\varepsilon, \Delta T$  – изменения натяжения и температуры,  $\Delta\lambda_B$  – изменение Брэгговской длины волны. Ввиду того, что два члена уравнения независимы, изолированные от растяжений решетки Брэгга можно использовать для измерения температуры, а затем, зная температуру, скомпенсировать термические эффекты и производить измерения растяжений конструкций.

Таким образом, при деформации свет с измененной длиной волны отражается от брэгговской решетки и передается по оптоволоконному кабелю на детектор, по формуле (22) вычисляется натяжение, а по нему и текущее отклонение. Применение датчиков на основе волоконных решеток Брэгга для мод колебаний и деформаций конструкций представлено в работах [68; 69].

### **Использование спутниковых систем глобального позиционирования**

Отдельно стоит отметить подход к определению колебаний гибких конструкций с использованием спутниковых систем глобального позиционирования. На гибкий элемент конструкции КА, подлежащий распознаванию, через определенные промежутки устанавливаются антенны, способные принимать сигнал от спутников глобального позиционирования. Типичный сигнал от спутника GPS имеет вид

$$\Psi = AX(t)D(t)\sin(2\pi ft + \varphi),$$

где  $A$  – амплитуда,  $X(t)$  – код, специфичный для спутника,  $D(t)$  – навигационное сообщение. В случае определения мод колебаний требуется определять разницу фаз  $\varphi$  между точками гибкой конструкции

$$\Delta\varphi = \text{mod}_2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Увеличение количества спутников и время приема сигнала повышает точность определения мод колебаний. Заметим, что теоретически сигнал может приниматься непрерывно, что позволяет без каких-либо дополнительных затрат отслеживать изменения формы объекта в реальном времени. Метод, применительно к распознаванию мод колебаний гибкой панели КА, рассмотрен в работе [70]. Преимуществами представленного алгоритма являются легкая масштаби-

руемость и высокая точность распознавания. Из недостатков метода отдельно стоит упомянуть большую вычислительную сложность алгоритма.

### **Акселерометры**

Для определения частот колебаний больших орбитальных станций применяются специально сконструированные системы измерения микроускорений на основе трехосных акселерометров. Акселерометры могут устанавливаться непосредственно на деформируемую структуру или на жесткий корпус станции. В первом случае по измерениям ускорений можно определять как динамические характеристики системы, так и текущие отклонения. Это очень удобно для наземных лабораторных испытаний как, например, в [4; 5], однако вызывает сложности при расположении таких датчиков в орбитальном полете. Работы [71; 72] посвящены определению колебаний МКС с помощью низкочастотного акселерометра MAMS, установленного на борту станции. Особый интерес вызывают колебания конструкции, возникающие во время стыковок и отстыковок транспортных кораблей. Примеры применения акселерометров для определения колебаний малых спутников приведены в работах [73; 74].

## Заключение

Проведенный анализ литературы показал, что существует целый ряд подходов по идентификации углового движения и колебаний КА с нежесткими элементами, а также определения таких динамических параметров, как масса, положение центра масс и тензор инерции. При этом они могут существенно отличаться математическим аппаратом и, соответственно, программным обеспечением и датчиками.

Как показывает изучение литературы, каждый из подходов требует определенного анализа применимости к конкретному спутнику и без подробного математического и численного моделирования однозначного ответа на вопрос о возможности и эффективности использования того или иного подхода дать не представляется возможным. С другой стороны, большой выбор алгоритмов идентификации дает возможность их комбинировать.

## Список литературы

1. Juang J.-N., Pappa R.S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction // *J. Guid. Control. Dyn.* 1985. T. 8. № 5. С. 620–627.
2. Bendiksen O.O. Mode localization phenomena in large space structures // *AIAA J.* 1987. T. 25. № 9. С. 1241–1248.
3. Baruh H., Bokat J. Issues in Modal Identification of Flexible Structures // *AIAA J.* 1991. T. 30. № 1. С. 214–225.
4. Pappa R.S., Elliott K.B., Schenkj A. Consistent-Mode Indicator for the Eigensystem Realization Algorithm // *J. Guid. Control. Dyn.* 1993. T. 16. № 5. С. 852–858.
5. Juang J., Pappa R.S. Effects of Noise on Modal Parameters Identified by the Eigensystem Realization Algorithm // *J. Guid. Control. Dyn.* 1986. T. 9. № 3. С. 294–303.
6. Majji M., Juang J.-N., Junkins J.L. Time-Varying Eigensystem Realization Algorithm // *J. Guid. Control. Dyn.* 2010. T. 33. № 1. С. 13–28.
7. Juang J.-N., Cooper J.E., Wright J.R. An Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlations (ERA/DC) for Modal Parameter Identification // *Control. Adv. Technol.* 1988. T. 4. № 1. С. 5–14.
8. Juang J.-N. System Realization Using Information Matrix // *J. Guid. Control. Dyn.* 1997. T. 20. № 3. С. 492–500.
9. Chiang D.-Y., Lin C.-S. Identification of Modal Parameters from Nonstationary Ambient Vibration Data Using Correlation Technique // *AIAA J.* 2008. T. 46. № 11. С. 2752–2759.
10. Longman R.W., Juang J.-N. Recursive form of the eigensystem realization algorithm for system identification // *J. Guid. Control. Dyn.* 1989. T. 12. № 5. С. 647–652.
11. Alvin K.F., Peterson L.D., Park K.C. Method for determining minimum-order mass and stiffness matrices from modal test data // *AIAA J.* 1995. T. 33. № 1. С. 128–135.
12. Baruch M. Modal Data are Insufficient for Identification of Both Mass and Stiffness Matrices // *AIAA J.* 1997. T. 35. № 11. С. 1797–1798.

13. Zhang Q., Zerva A., Zhang D.-W. Stiffness Matrix Adjustment Using Incomplete Measured Modes // *AIAA J.* 1997. T. 35. № 5. C. 917–919.
14. Kammer D.C. Optimum approximation for residual stiffness in linear system identification // *AIAA J.* 1988. T. 26. № 1. C. 104–112.
15. Williams T. Identification of large space structures - A factorization approach // *J. Guid. Control. Dyn.* 1987. T. 10. № 5. C. 466–473.
16. Misawa M., Hirano A. Improvements to Obtain a Unique Solution in System Identification // *AIAA J.* 2010. T. 48. № 7. C. 1561–1563.
17. Misawa M. Method to Find Accurate Solutions in System Identification // *AIAA J.* 2011. T. 49. № 9. C. 1833–1840.
18. Juang J.-N. и др. Identification of observer/Kalman filter Markov parameters - Theory and experiments // *J. Guid. Control. Dyn.* 1993. T. 16. № 2. C. 320–329.
19. Phan M. и др. Linear system identification via an asymptotically stable observer // *J. Optim. Theory Appl.* 1993. T. 79. № 1. C. 59–86.
20. Majji M., Juang J.-N., Junkins J.L. Observer/Kalman-Filter Time-Varying System Identification // *J. Guid. Control. Dyn.* 2010. T. 33. № 3. C. 887–900.
21. Pappa R.S., Schenk A., Klusowskit E. Comparison of Two Dissimilar Modal Identification Techniques // *J. Guid. Control. Dyn.* 1992. T. 15. № 4. C. 840–846.
22. Oshman Y., Inmant D.J., Laub A.J. Square-Root State Estimation for Second-Order Large Space Structures Models // *J. Guid. Control. Dyn.* 1988. T. 12. № 5. C. 698–708.
23. Huang J.-K., Chen C.-W., Juang J.-N. Single-mode projection filters for modal parameter identification for flexible structures // *J. Guid. Control. Dyn.* 1989. T. 12. № 4. C. 568–576.
24. Sundararajan N., Montgomery R.C. Identification of Structural Dynamics Systems Using Least-Square Lattice Filters // *J. Guid. Control. Dyn.* 1983. T. 6. № 5. C. 374–381.
25. Jabbari F., Gibson J.S. Adaptive identification of a flexible structure by lattice filters // *J. Guid. Control. Dyn.* 1989. T. 12. № 4. C. 548–554.

26. Lee Y.J., Speyer J.L. Application of a Periodic Lattice Filter for Identifying Flexible Structures // *J. Guid. Control. Dyn.* 1993. Т. 16. № 6. С. 1109–1117.
27. Kasai T., Komatsu K., Sano M. Modal Parameter Identification of Control Structure // *J. Guid. Control. Dyn.* 1997. Т. 20. № 1. С. 184–186.
28. Зотов Л.В. Теория фильтрации и обработка временных рядов. Курс лекций. М.: Физический факультет МГУ, 2010.
29. Wertz J.R. Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht/Boston, London: Acad. press, 1990.
30. Oshman Y., Mendelboimt T. Maximum Likelihood Identification and Realization of Stochastic System // *J. Guid. Control. Dyn.* 1994. Т. 17. № 4. С. 692–700.
31. Balachandran B., Nayfeh A.H. Identification of Nonlinear Interactions in Structures // *J. Guid. Control. Dyn.* 1994. Т. 17. № 2. С. 1–6.
32. Kerschen G. и др. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics // *Mech. Syst. Signal Process.* 2006. Т. 20. № 3. С. 505–592.
33. Amabili M., Païdoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction // *Appl. Mech. Rev.* 2003. Т. 56. № 4. С. 349.
34. Schultze J.F. и др. Application of Non-Linear System Model Updating Using Feature Extraction and Parameter Effects Analysis // *Shock Vib.* 2001. Т. 8. № 6. С. 325–337.
35. Caughey T.K., Vijayaraghavan a. Free and forced oscillations of a dynamic system with “linear hysteretic damping” (non-linear theory) // *Int. J. Non. Linear. Mech.* 1970. Т. 5. № 3. С. 533–555.
36. Tomlinson G.R., Hilbert J.H. Identification of the Dynamics Characteristics of a Structure With Coulomb Friction // *J. Sound Vib.* 1979. Т. 64. № 2. С. 233–242.
37. Glass B.J., Hanagudt S. Identification of Time-Varying Structural Dynamic Systems: An Artificial Intelligence Approach // *AIAA J.* 1992. Т. 30. № 5. С. 1371–1382.
38. Kim H.M., VanHorn D.A., Doiron H.H. Free-Decay Time-Domain Modal Identification for Large Space Structures // *J. Guid. Control. Dyn.* 1994. Т. 17. № 3. С. 513–519.

39. Pappa R.S. Independent Analysis of the Space Station Node Modal Test Data Introduction // *J. Guid. Control. Dyn.* 1999. Т. 22. № 1. С. 22–27.
40. Sáez N. и др. Detecting accelerometric nonlinearities in the international space station // *Acta Astronaut.* 2014. Т. 103. С. 16–25.
41. Sparks J.D.W., Juang J. Survey of Experiments and Experimental Facilities for Control of Flexible Structures // *J. Guid. Control. Dyn.* 1992. Т. 15. № 4. С. 801–816.
42. Crawley E.F. и др. Measurement of the modal parameters of a space structure in zero gravity // *J. Guid. Control. Dyn.* 1995. Т. 18. № 3. С. 385–394.
43. Brugarolas P.B. и др. System Identification of a Nonlinear Mode for the Shuttle Radar Topography Mission // *J. Guid. Control. Dyn.* 2006. Т. 29. № 2. С. 421–426.
44. Senba A., Ohashi K., Furuya H. Modal Identification of Truss Structures by Changing Stiffness Using Piezoelectric Actuator // *AIAA J.* 2008. Т. 46. № 7. С. 1791–1802.
45. Park J., Ha S., Chang F.-K. Monitoring Impact Events Using a System-Identification Method // *AIAA J.* 2009. Т. 47. № 9. С. 2011–2021.
46. Tanygin S., Williams T. Mass Property Estimation Using Coasting Maneuvers // *J. Guid. Control. Dyn.* 1997. Т. 20. № 4. С. 625–632.
47. Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В. Оценка динамических характеристик МКС по измерениям микроускорений // *Космические исследования.* 2009. Т. 47. № 2. С. 193–203.
48. Бабкин Е.В. и др. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции “Мир” // *Космические исследования.* 2001. Т. 39. № 1. С. 27–42.
49. Сазонов В.В., Беляев М.Ю., Зыков С.Г. Исследование задачи оценивания тензора инерции орбитальной станции “Мир” по данным измерений кинетического момента гироскопов // *Космические исследования.* 1994. Т. 32. № 3. С. 3–16.
50. Сарычев В.А. и др. Оценивание тензора инерции орбитальной станции “Мир” по данным измерений кинетического момента гироскопов // *Космические исследования.* 32AD. Т. 4. № 22-42.

51. Bergmann E. V., Walker B.K., Levy D.R. Mass Property Estimation for Control of Asymmetrical Satellites // *J. Guid. Control. Dyn.* 1987. T. 10. № 5. С. 483–491.
52. Richfield R.F., Walker B.K., Bergmann E. V. Input Selection for a Second-Order Mass Property Estimator // *J. Guid. Control. Dyn.* 1988. T. 11. № 3. С. 207–212.
53. Bergmann E., Dzielski J. with Torque-Generating Control // *J. Guid. Control. Dyn.* 1990. T. 13. № 1. С. 99–103.
54. Gruen A. Development of Digital Methodology and Systems // *Close Range Photogrammetry and Machine Vision.* , 2001. С. 400.
55. Sabatini M. и др. Operational modal analysis via image based technique of very flexible space structures // *Acta Astronaut.* 2013. T. 89. С. 139–148.
56. Sabatini M. и др. Image based control of the “PINOCCHIO” experimental free flying platform // *Acta Astronaut.* 2014. T. 94. № 1. С. 480–492.
57. Pappa R.S. и др. Dot-Projection Photogrammetry and Videogrammetry of Gossamer Space Structures // *J. Spacecr. Rockets.* 2003. T. 40. С. 858–867.
58. Dorrington A.A. и др. Laser-Induced-Fluorescence Photogrammetry for Dynamic Characterization of Membrane Structures // *AIAA.* 2004. T. 42. № 10. С. 2124–2129.
59. Jones T.W. и др. NASA report “Laser Induced Fluorescence for Photogrammetric Measurement of Transparent or Reflective Aerospace Structures.” , 2001.
60. Sunar M., Al-Bedoor B.O. Vibration measurement of a cantilever beam using root embedded piezoceramic sensor // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.* 2008. T. 222. № 2. С. 147–161.
61. Ingham M.D., Crawley E.F. Microdynamic Characterization of Modal Parameters for a Deployable Space Structure // *AIAA J.* 2001. T. 39. № 2. С. 331–338.
62. Tasker F. a., Liu C. Variance-based sensor placement for modal identification of structures // *J. Guid. Control. Dyn.* 1995. T. 18. № 3. С. 627–630.
63. Papadopoulos M., Garcia E. Sensor Placement Methodologies for Dynamic Testing // *AIAA J.* 1998. T. 36. № 2. С. 256–263.

64. Yao L., Sethares W.A., Kammerj D.C. Sensor Placement for On-Orbit Modal Identification via a Genetic Algorithm // AIAA J. 1993. T. 31. № 10. С. 1922–1928.
65. Li J., Kapania R.K., Spillman W.B. Placement Optimization of Distributed-Sensing Fiber Optic Sensors Using Genetic Algorithms // AIAA J. 2008. T. 46. № 4. С. 824–836.
66. Kammer D.C. Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures // J. Guid. Control. Dyn. 1991. T. 14. № 2. С. 251–259.
67. Jiang H. и др. Real-Time Estimation of Time-Varying Bending Modes Using Fiber Bragg Grating Sensor Arrays // AIAA J. 2013. T. 51. № 1. С. 178–185.
68. Kang L., Kim D., Han J. Estimation of dynamic structural displacements using fiber bragg grating strains sensors // J. Sound Vib. 2007. T. 305. № 3. С. 534–542.
69. Kim H.-I., Kang L.-H., Han J.-H. Shape estimation with distributed fiber Bragg grating sensors for rotating structures // Smart Mater. Struct. 2011. T. 20. № 3. С. 035011.
70. Palmerini G.B., Gasbarri P., Togliа C. Determination of kinematic state of an orbiting multibody using GNSS signals // Acta Astronaut. 2009. T. 64. № 11-12. С. 1109–1122.
71. Rice J.E. и др. Microgravity Acceleration Measurement System for the International Space Station // IMTC/99. Proceedings of the 16th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (Cat. No.99CH36309). : IEEE, 1999. С. 244–248.
72. Завалишин Д.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В. Определение характерных частот упругих колебаний конструкции // Космические исследования. 2010. Т. 48. № 4. С. 362–370.
73. Vigneron F.R., Singal R.K., Soucyt Y. Experimental Identification of Modal Identity-Related Parameters of a Spacecraft Representative Structure // AIAA J. 1989. T. 28. № 7. С. 1292–1299.
74. Ruggiero E.J., Tarazaga P.A., Inman D.J. Modal Analysis of an Ultra-Flexible, Self-Rigidizing Toroidal Satellite Component // Dynamic Systems and Control, Parts A and B. : ASME, 2004. С. 671–677.

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Методы идентификации динамических параметров и оценки колебаний КА с КНЭК .....</b>	<b>4</b>
Алгоритм нахождения собственных векторов системы .....	4
Определение параметров Маркова.....	7
Фазовый резонансный метод .....	8
Метод наименьших квадратов .....	9
Решеточные фильтры.....	10
Фильтр Калмана .....	11
Определение параметров нелинейных систем.....	12
Эвристический подход.....	13
Примеры реализации алгоритмов.....	14
<b>2. Методы определения массы, тензора инерции и положения центра масс КА.....</b>	<b>16</b>
Метод наименьших квадратов .....	17
Фильтр Калмана .....	18
<b>3. Обзор измерительных средств для определения колебаний КА .....</b>	<b>20</b>
Фотограмметрия.....	20
Датчики на основе прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта.....	22
Брэгговские решетки.....	22
Использование спутниковых систем глобального позиционирования .	23
Акселерометры .....	24
<b>Заключение .....</b>	<b>25</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>26</b>