ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 68 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Балашов В.А., Савенков Е.Б.

Феноменологический вывод квазигидродинамической системы уравнений с учетом объемной вязкости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Балашов В.А., Савенков Е.Б. Феноменологический вывод квазигидродинамической системы уравнений с учетом объемной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 68. 25 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-68

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

В.А. Балашов, Е.Б. Савенков

Феноменологический вывод квазигидродинамической системы уравнений с учетом объемной вязкости

Москва, 2015

В.А. Балашов, Е.Б. Савенков, Феноменологический вывод квазигидродинамической системы уравнений с учетом объемной вязкости

Аннотация

Данная работа посвящена построению квазигидродинамической (КГиД) системы уравнений для описания течений вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости с учетом второй вязкости. Способ получения системы основан на процедуре Колмана-Нолла и обобщает феноменологический вывод КГиД системы, описанный в литературе.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система уравнений.

V.A. Balashov, E.B. Savenkov, Phenomenological derivation of quasihydrodynamic equations with bulk viscosity

Abstract

In this paper we construct quasihydrodynamic (QHD) equations for compressible viscous nonisothermal flow with bulk viscosity. The derivation generalizes phenomenological derivation of QHD system published before and is based on Coleman–Noll procedure.

Key words and phrases: quasihydrodynamic equations.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00549).

1 Введение

Квазигазодинамическая (КГД) и квазигидродинамическая (КГиД) системы уравнений являются модификациями системы уравнений Навье-Стокса, в которые включены малые физически обоснованные слагаемые диссипативного характера [1, 2, 3]. С точки зрения построения разностных аппроксимаций эти слагаемые играют роль регуляризаторов и позволяют использовать для построения соответствующих разностных схем простые центральные разностные аппроксимации. Малость этих слагаемых гарантирует, что модифицированные модели можно использовать для анализа течений, описываемых классическими моделями гидродинамики.

КГД система была впервые построена в 1980-х годах как первое дифференциальное приближение кинетически-согласованных разностных схем для решения уравнений газовой динамики, см. [1]. Результаты дальнейшего развития этого подхода представлены в монографиях [2, 3]. Позднее был предложен альтернативный способ построения КГД уравнений, основанный на усреднении классических уравнений гидродинамики по малому временному интервалу. КГиД система была предложена и детально исследована в работах Ю.В. Шеретова в 1997 году, см. [3] и ссылки там. От КГД системы ее отличают допущения, в рамках которых она была получена. В частности, КГиД уравнения справедливы лишь в том случае, когда в течении не реализуются резкие изменения гидродинамических полей, характерные для течений с ударными волнами. КГиД система также может быть получена усреднением классических уравнений гидродинамики по малому временному интервалу, см. [4].

Оба подхода активно развиваются в последние годы. В частности, предложены варианты КГД системы для задач теории мелкой воды [5, 6], магнитной гидродинамики [7, 8]. Перспективные результаты получены при использовании КГД подхода для расчета турбулентных течений [9]. Активно ведется и теоретическое исследование свойств КГД и КГиД систем: см., например, [10, 11, 12, 13]. В частности, для КГиД системы установлены условия параболичности и равномерной параболичности по Петровскому, доказана локальная по времени теорема о существовании и единственности решения задачи Коши [10], найдены общие точные решения систем Эйлера, Навье-Стокса и КГиД для плоских установившихся течений (см. [14] и ссылки там), исследованы свойства решений КГиД системы в баротропном приближении [15].

Целью настоящей работы является построение математической модели на основе квазигидродинамического подхода для математического моделирования течений, в которых важен учет второй вязкости.

2 Векторы, тензоры и формулы Грина

В дальнейшем нам понадобится некоторая информация из тензорного анализа. Детальное рассмотрение этих вопросов в виде, близком к используемому в настоящей работе, изложено в [16].

Векторы и тензоры будем обозначать строчными и прописными символами в жирном начертании ($\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{B}$) соответственно. Их компоненты в декартовой ортогональной системе координат $Ox_1x_2x_3$ с базисными векторами $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^3$ обозначаются как a_i и B_{ij} соотвественно. Далее будем писать

$$[\boldsymbol{a}]_i = a_i, \quad [\boldsymbol{B}]_{ij} = B_{ij}.$$

Для единичного тензора используется обозначение $\boldsymbol{I}$, $[\boldsymbol{I}]_{ij} = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Свертка тензора и вектора обозначается как $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}$, причем всегда производится по внутреннему индексу:

$$[\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}]_i = A_{ij} b_j, \quad [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}]_i = a_j B_{ji}.$$

При записи операций с тензорами и векторами в координатном виде используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Свертка двух тензоров обозначается как $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij}.$$

Тензорное произведение двух векторов определяется как

$$[\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}]_{ij} = a_i b_j.$$

Компоненты векторного произведения двух векторов имеют вид:

$$[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

где ϵ_{ijk} — компоненты тензора Леви-Чивиты,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } ijk \text{ — четная перестановка индексов 123,} \\ -1, & \text{если } ijk \text{ — нечетная перестановка индексов 123,} \\ 0, & \text{если среди } ijk \text{ повторяющиеся индексы.} \end{cases}$$

Компоненты транспонированного тензора имеют вид:

$$[\boldsymbol{A}^T]_{ij} = A_{ji}.$$

Справедлива следующая формула Грина в области $V \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей ∂V:

$$\int\limits_V \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dV = \int\limits_{\partial V} f n_i\, d\sigma,$$

где $f = f(x_1, x_2, x_3) \equiv f(x_i)$ — заданная функция, n_i — компоненты вектора единичной внешней нормали к границе ∂V области V. Здесь и далее будем считать, что аргументы операторов дифференцирования имеют нужное число производных.

Функция f может быть компонентом вектора или тензора. Если $f = a_i$, то, как следствие предыдущего выражения, имеем:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\, dV = \int\limits_{\partial V} a_i n_i\, d\sigma,$$

или в безкоординатном виде:

$$\int\limits_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{a}\, dV = \int\limits_{\partial V} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

где ∇ — оператор Гамильтона, который может быть рассмотрен как (символический) вектор с компонентами $\partial(\cdot)/\partial x_i$, $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_i a_i = \partial a_i/\partial x_i$, $\nabla \cdot \boldsymbol{a} \equiv \operatorname{div} \boldsymbol{a}$, $[\nabla \otimes \boldsymbol{a}]_{ij} = \nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$.

Для $f = A_{ij}$ и $f = A_{ji}$ имеем:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\, dV = \int\limits_{\partial V} A_{ij} n_i\, d\sigma, \quad \int\limits_\Omega \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i}\, dV = \int\limits_{\partial V} A_{ji} n_i\, d\sigma.$$

Считая, что свертка тензоров производится по первому индексу и оператор ∇ всегда действует слева, имеем в безкоординатном виде:

$$\int\limits_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV = \int\limits_{\partial V} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}\, d\sigma, \quad \int\limits_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{A}^T\, dV = \int\limits_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Величину $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ (в координатном виде — дифференцирование по первому индексу) определим как дивергенцию тензорного поля $\boldsymbol{A}$,

$$\nabla \cdot (\cdot) = \operatorname{div}(\cdot).$$

Тогда имеем:

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dV = \int\limits_{\partial V} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}\, d\sigma, \quad \int\limits_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{A}^T\, dV = \int\limits_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

3 Поток массы и массовая скорость

В соответствии с квазигидродинамическим подходом, будем полагать, что плотность потока массы $\boldsymbol{j}_m$ не равна среднему импульсу единицы объема $\rho\boldsymbol{u}$:

$$\rho\boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}_m =: \rho\boldsymbol{w} \neq 0.$$

Последнее выражение следует считать определением вектора $\boldsymbol{w}$. Конкретный вид определяющего соотношения для $\boldsymbol{w}$ как функции физических полей, описывающих течение (плотности, скорости, давления и др.), будет получен ниже. Таким образом, для вектора плотности потока массы имеем:

$$\boldsymbol{j}_m = \rho(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}). \tag{1}$$

Величину

$$\boldsymbol{u}_m := \frac{\boldsymbol{j}_m}{\rho} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \tag{2}$$

будем называть «массовой скоростью».

В дальнейшем будем считать, что жидкая частица движется вдоль интегральной линии дифференциального уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\boldsymbol{j}_m}{\rho}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

Тогда формула дифференцирования по времени интеграла функции $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$ по жидкому объему примет вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \phi\, dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\phi\frac{\boldsymbol{j}_m}{\rho}\right)\right] dV \tag{3}$$

для скалярных полей и

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \boldsymbol{\phi}\, dV = \int\limits_{V(t)} \left[\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{j}_m}{\rho} \otimes \boldsymbol{\phi}\right)\right] dV \tag{4}$$

для векторных.

В соответствии с вышесказанным, выражение для полной (субстанциональной, лагранжевой, материальной) временной производной имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \frac{\boldsymbol{j}_m}{\rho} \cdot \nabla(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \cdot \nabla(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \boldsymbol{u}_m \cdot \nabla(\cdot). \tag{5}$$

4 Законы сохранения в интегральной форме

Будем считать, что для произвольного подвижного жидкого объема $V = V(t)$ выполняются классические законы сохранения массы, импульса и энергии, которые имеют приведенный ниже вид.

Закон сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\, dV = 0. \tag{6}$$

Закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\boldsymbol{u}\, dV = \int\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{p}^{(n)}\, d\sigma + \int\limits_{V(t)} \rho\boldsymbol{f}\, dV, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{p}^{(n)}$ — сила, действующая на границе $\partial V(t)$ объема $V(t)$, $\boldsymbol{f}$ — вектор массовой плотности внешних сил, $\boldsymbol{u}$ — скорость жидкости.

Закон сохранения энергии

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\left(\varepsilon + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2}\right) dV = \quad & [\text{Изменение энергии}] \\
+ \int\limits_{V(t)} \boldsymbol{j}_m \cdot \boldsymbol{f}\, dV \quad & [\text{Работа внешних сил}] \\
+ \int\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \quad & [\text{Работа напряжений}] \\
- \int\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \quad & [\text{Тепловой поток}] \\
+ \int\limits_{V(t)} r\rho\, dV \quad & [\text{Энергия от внешних источников}]
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь ε — массовая плотность внутренней энергии жидкости, $\boldsymbol{q}$ — вектор плотности потока тепла, $\boldsymbol{a}$ — вектор плотности потока энергии, связанный с работой внутренних напряжений, r — объемная плотность внешних источников энергии.

Второй закон термодинамики

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho s\, dV + \int\limits_{\partial V(t)} \frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma - \int\limits_{V(t)} \frac{\rho r}{T}\, dV \geqslant 0. \tag{9}$$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \boldsymbol{x}\times(\rho\boldsymbol{u})\, dV = \int\limits_{V(t)} \boldsymbol{x}\times(\rho\boldsymbol{f})\, dV + \int\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}^{(n)}\, d\sigma. \tag{10}$$

5 Законы сохранения в дифференциальной форме

В этом разделе приведены дифференциальные законы сохранения, соответствующие сформулированным ранее интегральным законам.

Сначала рассматриваются законы сохранения в консервативной форме, которые представляют собой «основную» систему уравнений.

Далее рассматриваются законы сохранения в лагранжевой форме. Они потребуются в дальнейшем при применении процедуры Колмана–Нолла.

5.1 Законы сохранения в консервативной форме

Используя формулы дифференцирования интеграла по подвижному объему (3), (4) и формулу Гаусса–Остроградского, можно получить приведенные ранее законы сохранения в дифференциальной форме.

Закон сохранения массы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j}_m = 0.$$

Закон сохранения импульса
Считая, что величина силы, действующей на границе $\partial V(t)$ области $V(t)$, определяется с помощью тензора напряжений, имеем:

$$\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{u}_m\otimes\rho\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}\right) = \rho\boldsymbol{f}.$$

Величина

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_m \otimes \rho \boldsymbol{u} - \boldsymbol{P},$$

являющаяся аргументом оператора дивергенции, является тензором плотности потока импульса. Как будет показано ниже, он является симметричным тензором.

Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \boldsymbol{u}_m) = \boldsymbol{j}_m \cdot \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \operatorname{div} \boldsymbol{q} + \rho r, \tag{11}$$

где

$$E = \varepsilon + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2}$$

— массовая плотность полной энергии.

Недивергентные слагаемые в правой части уравнения соответствуют работе внешних сил, а также внешним источникам энергии.

Второй закон термодинамики

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho s \boldsymbol{u}_m + \frac{1}{T}\boldsymbol{q}\right) - \frac{\rho r}{T} \geqslant 0.$$

Закон сохранения момента импульса

Сначала преобразуем подынтегральное выражение в последнем слагаемом в (10). Имеем в компонентах:

$$[\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P})]_i = \epsilon_{ijk} x_j (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P})_k = \epsilon_{ijk} x_j (n_p P_{pk}) = (\epsilon_{ijk} x_j P_{pk}) n_p,$$

где ϵ_{ijk} — компоненты тензора Леви–Чивита. По повторяющимся индексам производится суммирование.

Отсюда для последнего слагаемого в (10) имеем:

$$\int\limits_{\partial V(t)} \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P})\, d\sigma = \int\limits_{\partial V(t)} (\epsilon_{ijk} x_j P_{pk}) n_p \, d\sigma = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_p} (\epsilon_{ijk} x_j P_{pk})\, dV.$$

Тогда закон сохранения момента импульса примет вид:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{u}]}_{\text{(A)}} + \underbrace{\operatorname{div}[\boldsymbol{j}_m \otimes (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})]}_{\text{(B)}} = \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{f}) + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_p}(\epsilon_{ijk} x_j P_{pk})\right] \boldsymbol{e}_i}_{\text{(C)}}. \tag{12}$$

Обычно закон сохранения момента импульса выполняется тождественно при выполнении некоторых соотношений для компонент тензора напряжений. В частности, в классических моделях гидродинамики следствием выполнения закона сохранения момента импульса является симметричность тензора напряжений.

Получим аналогичные условия в рассматриваемом случае, когда поток массы не равен среднему импульсу среды. Для этого преобразуем последнее выражение с учетом тождеств:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Для члена (A) в (12) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{u})] = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \times (\rho \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{x} \times \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x} \times \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}).$$

Для члена (B) в (12) имеем (в компонентах):

$$\left\{\operatorname{div}\left[\boldsymbol{j}_m \otimes (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})\right]\right\}_i = \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_k},$$

где

$$A_{ki} = [\boldsymbol{j}_m \otimes (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})]_{ki} = j_k (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})_i = j_k (\epsilon_{ipq} x_p u_q).$$

Поэтому

$$\left\{\operatorname{div}\left[\boldsymbol{j}_m \otimes (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})\right]\right\}_i = \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_k} = \frac{\partial j_k}{\partial x_k} \cdot [\epsilon_{ipq} x_p u_q] + j_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}[\epsilon_{ipq} x_p u_q]. \tag{13}$$

Для первого слагаемого в (13) имеем:

$$\frac{\partial j_k}{\partial x_k} \cdot (\epsilon_{ipq} x_p u_q) = \epsilon_{ipq} x_p \left(\frac{\partial j_k}{\partial x_k} u_q\right) = \epsilon_{ipq} x_p \left[\frac{\partial}{\partial x_k}(j_k u_q) - j_k \frac{\partial u_q}{\partial x_k}\right] =$$
$$[\boldsymbol{x} \times \operatorname{div}(\boldsymbol{j}_m \otimes \boldsymbol{u})]_i - \epsilon_{ipq} x_p \left(j_k \frac{\partial u_q}{\partial x_k}\right),$$

для второго:

$$j_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}[\epsilon_{ipq} x_p u_q] = j_k \epsilon_{ipq} \left(\frac{\partial x_p}{\partial x_k} u_q + x_p \frac{\partial u_q}{\partial x_k}\right) = j_k \epsilon_{ipq} \left(\delta_{pk} u_q + x_p \frac{\partial u_q}{\partial x_k}\right) =$$
$$= j_k \epsilon_{ikq} u_q + \epsilon_{ipq} x_p \left(\frac{\partial u_q}{\partial x_k} j_k\right) = \boldsymbol{j}_m \times \boldsymbol{u} + \epsilon_{ipq} x_p \left(\frac{\partial u_q}{\partial x_k} j_k\right).$$

Подставляя полученные выражения в (13), получим:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{j}_m \otimes (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u})] = \boldsymbol{x} \times \operatorname{div}(\boldsymbol{j}_m \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{j}_m \times \boldsymbol{u}.$$

Наконец, для члена (С) в (12) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(\epsilon_{ijk}x_jP_{pk}) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial x_p}P_{pk} + \epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial P_{pk}}{\partial x_p} = \\ = \epsilon_{ijk}\delta_{jp}P_{pk} + \epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial P_{pk}}{\partial x_p} = \epsilon_{ijk}P_{jk} + \epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial P_{pk}}{\partial x_p} = \\ = \boldsymbol{p}_\times + \boldsymbol{x} \times \operatorname{div}\boldsymbol{P},$$

где вектор $\boldsymbol{p}_\times$ определен как:

$$(\boldsymbol{p}_\times)_i = \epsilon_{ijk}P_{jk}.$$

Этот вектор — удвоенная кососимметричная часть тензора $\boldsymbol{P}$ в *векторном представлении*,

$$\boldsymbol{p}_\times = \begin{bmatrix} P_{23} - P_{32} \\ P_{31} - P_{13} \\ P_{12} - P_{21} \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение (12), получим:

$$\boldsymbol{x} \times \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{j}_m \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}\boldsymbol{P} - \rho\boldsymbol{f}\right] = \boldsymbol{p}_\times - \boldsymbol{j}_m \times \boldsymbol{u}.$$

Левая часть этого уравнения тождественно равна нуюю в силу закона сохранения импульса. Отсюда имеем условие, которому должен удовлетворять тензор напряжений $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{p}_\times - \boldsymbol{j}_m \times \boldsymbol{u} = 0.$$

Далее, с учетом выражения (1) для вектора плотности потока массы получим:

$$\boldsymbol{j}_m \times \boldsymbol{u} = \rho(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} = \rho\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} - \rho\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} = -\rho\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} = +\rho\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w},$$

откуда:

$$\boldsymbol{p}_\times - \rho\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} = 0.$$

Последнее равенство в координатном виде имеет вид:

$$\epsilon_{kij}(P_{ij} - \rho u_i w_j) = 0.$$

Это означает, что тензор в скобках после символа Леви–Чивиты является симметричным:

$$\boldsymbol{P} - \rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}^s,$$

или

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^s + \rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w},$$

где $\boldsymbol{P}^s$ — некоторый симметричный тензор.

Отметим, что при выводе этого соотношения использовались лишь законы сохранения импульса и момента импульса (вид которых постулировался). Относительно выражения для плотности потока массы и вектора $\boldsymbol{w}$ не делалось никаких предположений кроме того, что первый не совпадает с импульсом, или, что эквивалентно, второй отличен от нуля.

С учетом полученного выражения для тензора напряжений, имеем для тензора плотности потока импульса:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_m \otimes \rho\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{u}_m \otimes \rho\boldsymbol{u} - \boldsymbol{P}^s - \rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w} = \\ = -\boldsymbol{P}^s + \rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - \rho\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u} - \rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w} = \\ = -\boldsymbol{P}^s + \rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} - \rho\left[\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}\right].\end{aligned}$$

Таким образом, тензор плотности потока импульса является симметричным.

5.2 Законы сохранения в лагранжевой форме

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}_m, \tag{14}$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{P} + \rho\boldsymbol{f}, \tag{15}$$

$$\rho\frac{dE}{dt} \equiv \rho\left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right) = \text{правая часть уравнения (11)}, \tag{16}$$

$$\rho\frac{ds}{dt} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) - \frac{\rho r}{T} \geqslant 0, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^s + \rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{P}^s$ — некоторый симметричный тензор второго ранга.

6 Диссипативное неравенство для свободной энергии

Получим уравнение баланса внутренней энергии. Для этого умножим уравнение (15) на $\boldsymbol{u}$ и подставим результат в уравнение энергии (16). В результате получим:

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P} + \rho\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{f} = \operatorname{div}\boldsymbol{a} - \operatorname{div}\boldsymbol{q} + \rho r. \tag{19}$$

Получим теперь диссипативное неравенство для свободной энергии Гельмгольца. Выражение для свободной энергии единицы массы имеет вид:

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \varepsilon(\boldsymbol{x}, t) - Ts(\boldsymbol{x}, t), \tag{20}$$

где s — энтропия. Вычисляя полную производную по времени обеих частей (20), получим:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - T\frac{ds}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} + s\frac{dT}{dt}.$$

Отсюда, воспользовавшись вторым началом термодинамики (17) и балансовым уравнением для внутренней энергии (19), получим неравенство для свободной энергии Гельмгольца:

$$\rho\frac{d\Psi}{dt} \leqslant -\rho s\frac{dT}{dt} - \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{P} - \rho \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \nabla T. \tag{21}$$

7 Процедура Колмана–Нолла

В настоящем разделе полученное выше неравенство для свободной энергии будет использовано для определения вида определяющих соотношений, замыкающих модель. Указанная процедура называется процедурой Колмана–Нолла [17]. Она основана на той идее, что, как только определен факт наличия функциональных связей между параметрами, описывающими течение, неравенство для свободной энергии можно рассматривать не как ограничение на термодинамический процесс, а как ограничение на реологические и другие определяющие соотношения, определяющие, помимо основных уравнений законов сохранения, модель процесса.

Другими словами, неравенство для свободной энергии используется не для того, чтобы «отобрать» допустимые с точки зрения термодинамики процессы, а для того, чтобы «отобрать» такие определяющие соотношения, которые сделают допустимым любой процесс, описываемый с их помощью.

Для дальнейшего нам понадобится несколько технических утверждений.

Утверждение 1. *Для произвольного векторного поля $\boldsymbol{u}$ справедливо следующее представление тензора его градиента:*

$$\nabla \otimes \boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}_u^d + \boldsymbol{L}_u^h + \boldsymbol{S}_u,$$

или

$$\nabla \otimes \boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}_u + \boldsymbol{L}_u^h,$$

где

$$\boldsymbol{L}_u^d = \frac{1}{2}[(\nabla \otimes \boldsymbol{u}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{u})^T] - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{L}_u^h = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\nabla \otimes \boldsymbol{u}) \equiv \frac{1}{3}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{I}$$

— девиатор и шаровая часть тензора градиента $\boldsymbol{u}$*,*

$$\boldsymbol{S}_u = \frac{1}{2}[\nabla \otimes \boldsymbol{u} - (\nabla \otimes \boldsymbol{u})^T]$$

— его кососимметричная часть,

$$\boldsymbol{D}_u = \boldsymbol{L}_u^d + \boldsymbol{S}_u$$

— его часть с нулевым следом.

Утверждение 2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— симметричный тензор второго ранга,* $\boldsymbol{B}$ *— произвольный тензор второго ранга. Тогда*

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^d : \boldsymbol{B}^d + \boldsymbol{A}^h : \boldsymbol{B}^h,$$

где верхними индексами «d» и «h» обозначены девиатор и шаровая часть соответствующего тензора.

В частности, при $\boldsymbol{B} = \nabla \otimes \boldsymbol{u}$ *получаем:*

$$\boldsymbol{A} : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}^d : \boldsymbol{L}_u^d + \frac{1}{3}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \operatorname{tr} A.$$

Доказательство. Доказательство сводится к непосредственной проверке тождества с учетом того, что свертка (i) симметричного и кососимметричного тензора и (ii) шарового тензора и тензора с нулевым следом равны нулю. □

Перейдем теперь непосредственно к реализации процедуры Колмана–Нолла. Для этого преобразуем неравенство (21) для свободной энергии.

Рассмотрим слагаемое $\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{P}$ в (21). В соответствии с законом сохранения момента импульса (18) имеем:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^s + \rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{P}^s$ — симметричный тензор второго ранга, вид которого пока не известен. Представим его в виде суммы девиатора и шаровой части:

$$\boldsymbol{P}^s = \boldsymbol{P}^d + \bar{p}\boldsymbol{I}, \quad \bar{p} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{P}^s. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{P}^s + \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}). \tag{24}$$

Рассмотрим оба слагаемых по отдельности.

Для первого слагаемого в (24) имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}^s &= \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}^d+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\bar{p}=\\ &=\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}^d+\boldsymbol{u}_m\cdot\nabla\bar{p}+\boldsymbol{w}\cdot\nabla\bar{p}=\\ &=\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}^d+\operatorname{div}(\bar{p}\boldsymbol{u}_m)-\bar{p}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m+\boldsymbol{w}\cdot\nabla\bar{p}=\\ &=\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}^d+\operatorname{div}(\bar{p}\boldsymbol{u}_m)+\frac{\bar{p}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\boldsymbol{w}\cdot\nabla\bar{p},\end{aligned}\tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}^d &= \operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{P}^d : (\nabla\otimes\boldsymbol{u})^T=\\ &=\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{P}^d : (\boldsymbol{L}_u^d+\boldsymbol{L}_u^h+\boldsymbol{S}_u)^T=\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{P}^d : \boldsymbol{L}_u^d.\end{aligned}$$

Подставляя результат в (25), получим:

$$\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}^s=-\boldsymbol{P}^d : \boldsymbol{L}_u^d+\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u}+\bar{p}\boldsymbol{u}_m\right)+\boldsymbol{w}\cdot\nabla\bar{p}+\frac{\bar{p}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

и, как следствие, из (24):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}^d : \boldsymbol{L}_u^d+\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u}+\bar{p}\boldsymbol{u}_m\right)+&\\ +\boldsymbol{w}\cdot\nabla\bar{p}+\frac{\bar{p}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\left(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}\right).&\end{aligned}\tag{26}$$

Подставим теперь выражение (26) в неравенство для свободной энергии (21), после перегруппировки слагаемых получим:

$$\rho\frac{d\Psi}{dt}\leqslant\frac{dT}{dt}(-\rho s)+\frac{d\rho}{dt}\left(-\frac{\bar{p}}{\rho}\right)-\frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\nabla T+\Delta\tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta=\operatorname{div}\left(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u}-\bar{p}\boldsymbol{u}_m\right)+\boldsymbol{w}\cdot(-\rho\boldsymbol{f}-\nabla\bar{p})+&\\ +\boldsymbol{P}^d : \boldsymbol{L}_u^d-\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\left(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}\right).&\end{aligned}\tag{28}$$

Для последнего слагаемого в (28) имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\left(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}\right)=u_j\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i w_j)=\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j w_j)-\rho u_i w_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=&\\ =\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\right]-\rho\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}.&\end{aligned}$$

Подставляя результаты последних преобразований в (28), придем к выражению:

$$\Delta = \boldsymbol{P}^d : \boldsymbol{L}_u^d + \operatorname{div}\left[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{P}^d \cdot \boldsymbol{u} - \bar{p}\boldsymbol{u}_m - \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\right] + \\ + \boldsymbol{w}\cdot\left[-\rho\boldsymbol{f} - \nabla\bar{p} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right] \quad (29)$$

Далее, в соответствии с принципом равноприсутствия [18, 19] будем считать, что массовая плотность свободной энергии $\Psi = \Psi(\mathcal{X})$ зависит от следующего вектора параметров:

$$\mathcal{X} = \left\{\rho, \frac{d\rho}{dt}, T, \nabla T, \nabla\otimes\boldsymbol{u}\right\}.$$

Тогда для полной производной по времени свободной энергии Ψ имеем:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{\bar{\mathcal{X}}\in\mathcal{X}} \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\mathcal{X}}}\frac{d\bar{\mathcal{X}}}{dt}. \quad (30)$$

Подставив соотношения (29) и (30) в неравенство для свободной энергии (27), получим:

$$0 \leqslant \frac{dT}{dt}\left(-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial T} - \rho s\right) + \frac{d\rho}{dt}\left(-\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\bar{p}\right) + \\ + \boldsymbol{P}^d : \boldsymbol{L}_u^d - \frac{\boldsymbol{q}}{T}\cdot\nabla T + \Delta_2 + \Delta_3, \quad (31)$$

где

$$\Delta_2 = \operatorname{div}\left[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u} - \bar{p}\boldsymbol{u}_m - \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\right] + \boldsymbol{w}\cdot\left[-\rho\boldsymbol{f} - \nabla\bar{p} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right],$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial\Psi}{\partial(d\rho/dt)}\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{\partial\Psi}{\partial(\nabla\otimes\boldsymbol{u})} : \frac{d(\nabla\otimes\boldsymbol{u})}{dt}.$$

Следующие условия достаточны для выполнения этого неравенства:

- свободная энергия зависит только от следующих переменных:

$$\Psi = \Psi(\rho, T). \quad (32)$$

  При этом получаем $\Delta_3 = 0$;

- энтропия определяется как:

$$s = -\frac{\partial\Psi}{\partial T}; \quad (33)$$

- вектор плотности теплового потока определен как:

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{K} \cdot \nabla T, \tag{34}$$

где $\boldsymbol{K}$ — симметричный неотрицательно определенный тензор второго ранга;

- величина $\bar{p}$ определяется как:

$$\bar{p} = -\rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \rho B_\rho \frac{d\rho}{dt},$$

или с учетом закона сохранения массы (14)

$$\bar{p} = -\rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \rho^2 B_\rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}_m, \tag{35}$$

где B_ρ — некоторая неотрицательная скалярная величина;

- девиатор тензора $\boldsymbol{P}^s$ задается в соответствии с:

$$\boldsymbol{P}^d = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{L}_u^d - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \left(\boldsymbol{G} : \boldsymbol{L}_u^d \right) \boldsymbol{I} \tag{36}$$

Тензор $\boldsymbol{G}$ является неотрицательно определенным тензором четвертого ранга, задающим линейное отображение пространства симметричных тензоров второго ранга в себя.

После подстановки описанных соотношений в неравенство для свободной энергии (31) получим:

$$0 \leqslant \boldsymbol{L}_u^d : \boldsymbol{G} : \boldsymbol{L}_u^d + B_\rho \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \nabla T \cdot \boldsymbol{K} \cdot \nabla T + \Delta_2. \tag{37}$$

В этом неравенстве все слагаемые, кроме Δ_2, всегда являются неотрицательными.

Теперь, выбирая $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{a}$, обеспечим выполнение последнего неравенства.
Это можно сделать двумя способами, причем:

- оба замыкания приводят к одинаковому набору всех определяющих соотношений модели, за исключением выражений для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{w}$.

- в первом замыкании вектор $\boldsymbol{w}$, обеспечивающий справедливость неравенства для свободной энергии и энтропийного неравенства, задается *неявно*, то есть должен удовлетворять определенному дифференциальному уравнению. Во втором замыкании $\boldsymbol{w}$ явно выражается через остальные параметры задачи.

- оба замыкания совпадают, если объемная вязкость равна нулю.

Рассмотрим эти замыкания последовательно.

7.1 Замыкание I

Определим $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{w}$ так, чтобы в неравенстве (37) слагаемое, содержащее $\boldsymbol{a}$, стало равным нулю, а слагаемое, содержащее (в виде множителя) $\boldsymbol{w}$, всегда было бы положительным. Тогда получим:

- определяющее соотношение для вектора $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w}_1 = \tau \frac{1}{\rho} \left[-\rho \boldsymbol{f} - \nabla \bar{p} + \rho (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} \right]. \tag{38}$$

  Здесь τ — некоторая положительная скалярная величина, имеющая размерность времени;

- определяющее соотношение для вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{P}^d \cdot \boldsymbol{u} + \bar{p} \boldsymbol{u}_m + \rho \boldsymbol{u} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}).$$

Тогда получим

$$\Delta_2 = \frac{\rho}{\tau} \boldsymbol{w}_1^2,$$

и неравенство (37) примет вид:

$$0 \leqslant \boldsymbol{L}_u^d : \boldsymbol{G} : \boldsymbol{L}_u^d + B_\rho \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \nabla T \cdot \boldsymbol{K} \cdot \nabla T + \frac{\rho}{\tau} \boldsymbol{w}_1^2,$$

что всегда выполняется при указанных выше свойствах коэффициентов переноса.

Полученные определяющие соотношения также приводят к выполнению энтропийного неравенства (17), а именно, по существу повторяя описанную выше процедуру «в обратном порядке», можно показать, что:

$$\mathcal{D} := \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{q}}{T} - \frac{\rho r}{T} = \frac{1}{T} \boldsymbol{L}_u^d : \boldsymbol{G} : \boldsymbol{L}_u^d + \\ + \frac{1}{T} B_\rho \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{1}{T^2} \nabla T \cdot \boldsymbol{K} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \frac{\rho}{\tau} \boldsymbol{w}_1^2 \geqslant 0.$$

7.2 Замыкание II

С учетом (2), представим $\bar{p}$ в виде двух слагаемых:

$$\bar{p} = \tilde{p} - B_\rho \rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{w}, \tag{39}$$

где:

$$\tilde{p} = -\rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + B_\rho \rho^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}. \tag{40}$$

Подставляя это выражение в Δ_2, получим:

$$\begin{aligned}\Delta_2 = \operatorname{div}\left[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{P}^d \cdot \boldsymbol{u} - \tilde{p}\boldsymbol{u}_m - \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}) + B_\rho\rho^2\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{w}\right] + \\ + \boldsymbol{w}\cdot[-\rho\boldsymbol{f} - \nabla\tilde{p} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}] - B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{w})^2.\end{aligned} \tag{41}$$

Далее, из закона сохранения массы имеем:

$$B_\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = B_\rho\rho^2\left(\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \operatorname{div}\boldsymbol{w}\right)^2 =$$
$$= B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{w})^2 + B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2 - \operatorname{div}\left(2B_\rho\rho^2\boldsymbol{w}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{w}\cdot\nabla\left(2B_\rho\rho^2\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right).$$

Выражая из этого соотношения величину $B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{w})^2$ и подставляя результат в (41), получим:

$$\begin{aligned}\Delta_2 = &-B_\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2 + \\ &+ \operatorname{div}\left[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u} - \tilde{p}\boldsymbol{u}_m - \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}) + B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} - 2B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{w}\right] + \\ &+ \boldsymbol{w}\cdot\left[-\rho\boldsymbol{f} - \nabla\tilde{p} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla\left(2B_\rho\rho^2\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\right].\end{aligned}$$

Выберем теперь:

- определяющее соотношение для $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w}_2 = \tau\frac{1}{\rho}\left[-\rho\boldsymbol{f} - \nabla\tilde{p} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla\left(2B_\rho\rho^2\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\right];$$

- определяющее соотношение для $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{P}^d\cdot\boldsymbol{u} + \tilde{p}\boldsymbol{u}_m + \rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}) - B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} + 2B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{w}.$$

Подставляя теперь эти соотношения в выражение для Δ_2, получим:

$$\Delta_2 = -B_\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2 + \frac{\rho}{\tau}\boldsymbol{w}_2^2. \tag{42}$$

Другими словами, для замыкания 1 имеем:

$$B_\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \Delta_2\Big|_{\substack{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1}} = B_\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{\rho}{\tau}\boldsymbol{w}_1^2,$$

а для замыкания 2:

$$B_\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \Delta_2\Big|_{\substack{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_2}} = B_\rho\rho^2(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2 + \frac{\rho}{\tau}\boldsymbol{w}_2^2.$$

С учетом (42) неравенство (37) примет вид:

$$0 \leqslant \boldsymbol{L}_u^d : \boldsymbol{G} : \boldsymbol{L}_u^d + B_\rho \rho^2 (\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 + \nabla T \cdot \boldsymbol{K} \cdot \nabla T + \frac{\rho}{\tau} \boldsymbol{w}_2^2.$$

Так же как и в случае первого замыкания, можно показать, что для указанного выбора $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{a}$ энтропийное неравенство выполняется с диссипативной функцией:

$$\mathcal{D} := \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{q}}{T} - \frac{\rho r}{T} = \frac{1}{T} \boldsymbol{L}_u^d : \boldsymbol{G} : \boldsymbol{L}_u^d + \\ + \frac{1}{T} B_\rho \rho^2 \left(\operatorname{div} \boldsymbol{u}\right)^2 + \frac{1}{T^2} \nabla T \cdot \boldsymbol{K} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \frac{\rho}{\tau} \boldsymbol{w}_2^2 \geqslant 0.$$

8 Определяющие соотношения

В этом разделе приведен полный набор определяющих соотношений рассматриваемой модели.

Вектор плотности теплового потока В простейшем случае вектор плотности теплового потока определяется соотношением (34). Полагая

$$\boldsymbol{K} = K \boldsymbol{I}, \quad K \geqslant 0,$$

получим

$$\boldsymbol{q} = -K \nabla T.$$

Тензор напряжений
Будем считать, что

$$B_\rho = B_\rho(\rho) := \zeta \frac{1}{\rho^2}, \tag{43}$$

где ζ — коэффициент второй (объемной) вязкости.

Тогда для (35):

$$\bar{p} = -\rho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \zeta \operatorname{div} \boldsymbol{u}_m. \tag{44}$$

Теперь рассмотрим тензор $\boldsymbol{P}^d$, определяемый соотношением (36). Положим в этом выражении

$$[\boldsymbol{G}]_{ijkl} = G_{ijkl} = 2\eta \delta_{ik} \delta_{jl},$$

где $\eta \geqslant 0$ — коэффициент динамической вязкости.

Наконец, подставляя полученные соотношения в выражение (22) и (23), получим:

$$\boldsymbol{P} = \left[2\eta \boldsymbol{L}_u^d + \zeta(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}\right] - p\boldsymbol{I} + \left[\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w} - \zeta(\operatorname{div}\boldsymbol{w})\boldsymbol{I}\right],$$

где первое слагаемое

$$\boldsymbol{P}_{\text{NS}} := 2\eta\boldsymbol{L}_u^d + \zeta(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}$$

— обычный тензор вязких напряжений Навье–Стокса, второе —

$$p := \rho^2\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}$$

— термодинамическое давление, третье —

$$\boldsymbol{P}_{\text{QHD}} := \rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w} - \zeta(\operatorname{div}\boldsymbol{w})\boldsymbol{I},$$

— дополнительное слагаемое в тензоре напряжений, связанное с отличием вектора потока массы от импульса.

Непосредственной проверкой можно показать, что различные замыкающие соотношения для скорости $\boldsymbol{w}$ и потока $\boldsymbol{a}$ совпадают,

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2, \quad \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2,$$

если положить объемную вязкость $\zeta = 0$.

Так как вопрос о выборе единственного способа замыкания пока открыт, далее будем рассматривать случай именно нулевой объемной вязкости. В этом случае имеем обычные КГиД выражения.

9 Замечания и заключение

Применение процедуры Колмана-Нолла приводит к двум вариантам замыкания квазигидродинамической системы.

При использовании обоих замыканий выполняется закон неубывания энтропии и неравенство для свободной энергии. При этом определяющие соотношения для обоих моделей полностью совпадают, за исключением выражений для вектора $\boldsymbol{w}$ и вектора плотности потока энергии за счет работы внутренних сил $\boldsymbol{a}$.

Уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии совпадают с точностью до входящих в них выражений для векторов $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{a}$.

При этом для замыкания 1 определяющее соотношение для $\boldsymbol{w}$ задает ее неявно. Соответствующее уравнение является следствием соотношений (38), (43), (39) и (40), и имеет вид:

$$\boldsymbol{w}_1 + \frac{\tau}{\rho}\nabla(\zeta\operatorname{div}\boldsymbol{w}_1) = \frac{\tau}{\rho}\left[-\rho\boldsymbol{f} - \nabla\tilde{p} + \rho(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\right],$$

где правая часть не зависит от $\boldsymbol{w}_1$, ζ — вторая вязкость.

Для замыкания 2 определяющее соотношение явно задает $\boldsymbol{w}$.

При условии $\zeta = 0$ оба замыкания совпадают.

Список литературы

[1] Шеретов Ю. В. *Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении.* М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

[2] Четверушкин Б.Н. *Кинетические схемы и квазигидродинамическая система уравнений.* М.: МАКС Пресс, 2004.

[3] Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений.* Научный мир, 2007.

[4] Елизарова Т.Г. Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 51(11):2096–2105, 2011.

[5] Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 51(1):170–184, 2011.

[6] Елизарова Т.Г., Афанасьева М.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды. //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 65(1):15–18, 2010.

[7] Попов М.В., Елизарова Т.Г. Моделирование трехмерных МГД-течений в рамках магнитной квазигазодинамики//Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 23. 32 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-23

[8] Елизарова Т.Г., Устюгов С.Д. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений магнитной гидродинамики. Одномерный случай//Препринты ИПМ им М.В.Келдыша. 2011. № 1. 20 с. URL:http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-1

[9] Shirokov I.A., Elizarova T.G. Simulation of laminar–turbulent transition in compressible taylor–green flow basing on quasi-gas dynamic equations. //Journal of turbulence, 15(10):707–730, 2014.

[10] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее. //Математические заметки, 83(5):667–682, Май 2008.

[11] Злотник А.А. Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо и квазигидродинамических систем уравнений. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 50(2):325–337, 2010.

[12] Злотник А.А. О квазигазодинамической системе уравнений с общими уравнениями состояния и источником тепла. //Математическое моделирование, 22(7):53–64, 2010.

[13] Злотник А.А. О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системы с потенциальной массовой силой. //Математическое моделирование, 24(4):65–79, 2012.

[14] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях систем Эйлера, Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для плоских установившихся течений. //Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». (2):29–36, 2013.

[15] Шеретов Ю.В. О свойствах решений квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении. //Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». (3):5–19, 2009.

[16] Aris R. Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Dynamics. Dover Publications, N.-Y., 1989.

[17] Coleman B.D., Noll W. The thermodynaics of elastic materials with heat conduction and viscousity. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 13(1):167–178, 1963.

[18] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.:МИР, 1975.

[19] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge University Press, 2010.

Содержание