ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 61 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Нуралиева А.Б., Ткачев С.С.

Математическая модель спутника с гибкой солнечной панелью на управляемом шарнире

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Нуралиева А.Б., Ткачев С.С. Математическая модель спутника с гибкой солнечной панелью на управляемом шарнире // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 61. 19 с.
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-61**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.Б. Нуралиева, С.С. Ткачев

Математическая модель спутника с гибкой солнечной панелью на управляемом шарнире

Москва — 2015

А.Б.Нуралиева, С.С.Ткачев

Математическая модель спутника с гибкой солнечной панелью на управляемом шарнире

Рассматривается математическая модель спутника с деформируемой солнечной панелью на одностепенном шарнире. Получены нелинейные и линеаризованные уравнения. Проведена верификация модели с помощью первых интегралов и с помощью собственных частот колебаний.

Ключевые слова: деформируемый элемент, нормальная форма колебаний, верификация модели

Anna Nuralieva, Stepan Tkachev

Mathematical model for a satellite with flexible 1DOF hinged solar panel

Mathematical model of a satellite with flexible 1DOF hinged solar panel is considered. Nonlinear and linearized equations are derived. Model verification using first integrals of motion and normal modes is carried out.

Key words: flexible element, normal mode, model verification

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда проект № 14-11-00621.

Введение

При моделировании углового движения спутников с протяженными элементами часто бывает необходимым включать в математическую модель деформацию конструкции. Эти деформации могут оказывать на угловое движение значительное влияние, что приводит к необходимости учитывать их при формировании и реализации управления.

Для проведения моделирования и верификации алгоритмов управления ориентацией космических аппаратов необходимо создать нелинейную математическую модель, которая бы позволила учитывать наличие нескольких упругих элементов, закрепленных шарнирно.

При построении математической модели возможны два подхода: дополнить уравнения движения спутника уравнениями в частных производных [1], [2] или использовать конечномерный подход [3], [4], [5]. Первый вариант может оказаться неприемлемым из-за большой вычислительной сложности и трудности адаптации в будущем для бортовой модели. В этом случае второй вариант оказывается более предпочтительным.

Конечномерная модель использует собственные моды колебаний, которые определяются однократным моделированием методом конечных элементов, когда нежесткие элементы зафиксированы. В случае достаточно медленного вращения одного или нескольких таких элементов относительно основного тела спутника (например, солнечная панель, отслеживающая направление на Солнце на геостационарной орбите) систему можно считать квазистацинарной. В этом случае представляется допустимым провести серию вычислений мод собственных колебаний с различными углами поворота и использовать такую модель с разными параметрами. Если вращение нельзя считать медленным, то его необходимо учитывать непосредственно в математической модели. Этому и посвящена настоящая работа.

Рассматривается подход, при котором для описания деформаций используются собственные моды отдельно зафиксированного нежесткого элемента [6], а затем эти моды уже используются в уравнениях движения всей системы в целом.

Постановка задачи и системы координат

Рассматривается связка двух тел (рис.1): основное тело спутника S (полагается твердым телом) и солнечная панель P (считается деформируемым телом). Тела соединены невесомым шарниром с одной степенью свободы.

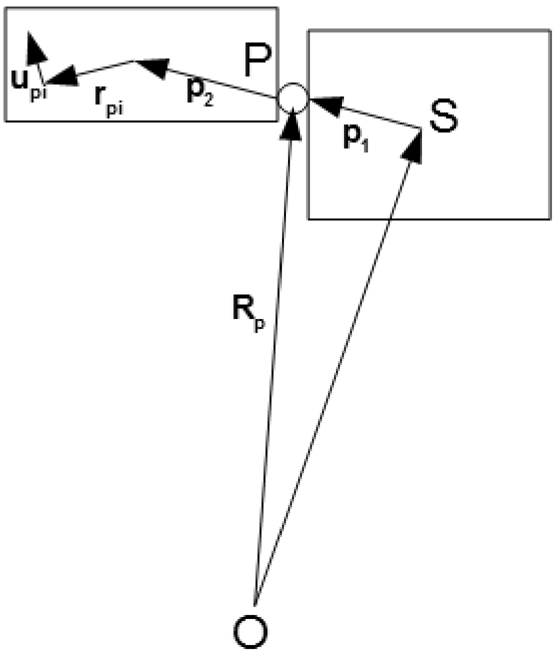

Рис.1. Схематичное изображение спутника с панелью

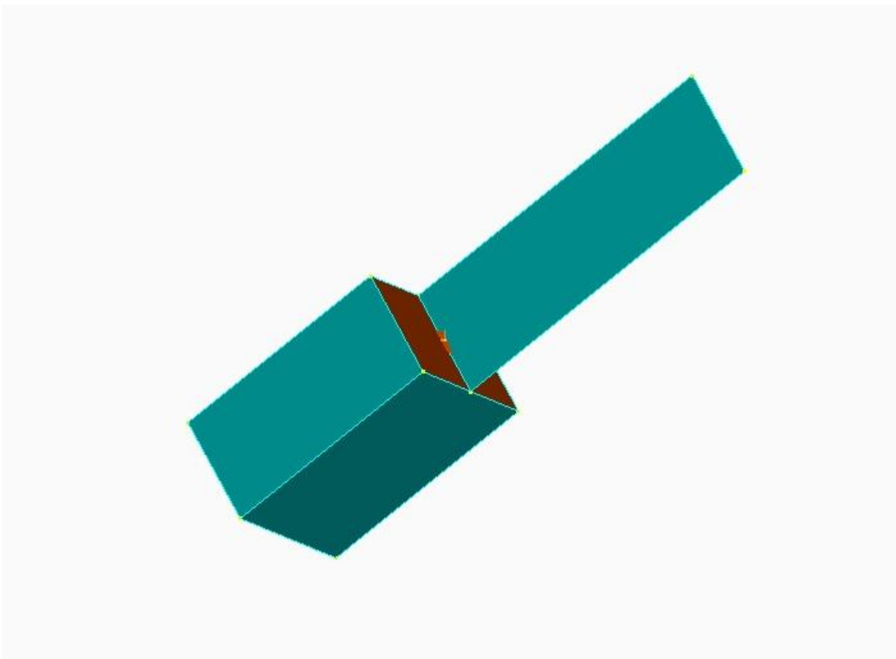

Рис.2. Модель спутника с панелью

На рис.1 векторы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ определяют положение точки крепления относительно центра масс спутника и панели.

В работе используются следующие правые ортогональные системы координат:

$OXYZ$ – кенигова система координат, ее начало лежит в центре масс Земли, ось OZ перпендикулярна плоскости экватора, OX направлена на точку весеннего равноденствия;

$O_s xyz$ – связанная с корпусом спутника система координат, ее начало лежит в центре масс корпуса спутника, оси – его главные центральные оси;

$O_p x_p y_p z_p$ – связанная с панелью система координат, ее начало помещается в точке крепления к шарниру, оси – главные оси инерции для недеформированной панели;

$O_p \xi\eta\zeta$ – связанная с шарниром система координат, ось $O_p\xi$ – ось поворота в шарнире, две другие перпендикулярны ей.

Последовательность переходов между системами координат такова:

$$OXYZ \to O_s xyz \to O_p \xi\eta\zeta \to O_p x_p y_p z_p .$$

Положения i-ых точек спутника и панели, соответственно, задаются (рис.1) векторами

$$\mathbf{R}_{si} = \mathbf{R}_s + \mathbf{r}_{si},$$

$$\mathbf{R}_{pi} = \mathbf{R}_p + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi},$$

где $\mathbf{R}_s$, $\mathbf{R}_p$ – радиус-векторы выделенных точек соответствующих тел (их естественно задавать в $OXYZ$); $\mathbf{r}_{si}$, $\mathbf{r}_{pi}$ – радиус-векторы i-ых точек соответствующего тела относительно связанной с этим телом системы координат, начало которых помещено в точки, указанные на рис.1 тела; $\mathbf{u}_{pi}$ – смещения i-ых точек тела, вызванные упругими деформациями (они задаются в связанной с соответствующим телом системе координат).

Модель движения

Подробный вывод уравнений для более сложной системы (спутник с упругими панелью на шарнире и антенной) выполнен в [6]. Здесь приведем лишь сами уравнения и принятые в них обозначения

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\omega\varphi}\mathbf{e}\dot{\psi} + \mathbf{S}_{\omega p}\ddot{\mathbf{q}}_p + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + 2\sum_i\left(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}\right)\times m_{pi}\boldsymbol{\omega}_2\times\dot{\mathbf{u}}_{pi} +$$
$$+\tilde{\mathbf{J}}_p\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}\psi\right) + \boldsymbol{\omega}\times\tilde{\mathbf{J}}_p\mathbf{e}\psi + \mathbf{e}\psi\times\tilde{\mathbf{J}}_p\boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}\psi\times\tilde{\mathbf{J}}_p\mathbf{e}\psi +$$
$$+m_p\left(\mathbf{p}_1 - \frac{1}{m}\left(m_p\mathbf{p} + m_p\tilde{\mathbf{p}}_2\right)\right)\times\left(2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}\psi\times\left(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2\right) +\right.$$
$$\left.+\mathbf{e}\psi\times\mathbf{e}\psi\times\left(\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2\right) + 2\boldsymbol{\omega}_2\times\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2\right) + \mathbf{f}_p - \mathbf{T}_s = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}^T\mathbf{S}^T_{\omega\varphi}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{e}^T\mathbf{J}_e\mathbf{e}\dot{\psi}+\mathbf{e}^T\mathbf{S}_{\varphi p}\ddot{\mathbf{q}}_p+\\
&+\mathbf{e}^T\Big\{\boldsymbol{\omega}\times\tilde{\mathbf{J}}_p\boldsymbol{\omega}+\Big(m_p\mathbf{p}_2+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}_1-\frac{1}{m}\Big(m_p\mathbf{p}_2+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)\times\\
&\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\Big(m_p\mathbf{p}+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)+\mathbf{e}\psi\times\mathbf{J}_e\mathbf{e}\psi+\tilde{\mathbf{J}}_p(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}\psi)+\boldsymbol{\omega}\times\tilde{\mathbf{J}}_p\mathbf{e}\psi+\\
&+\mathbf{e}\psi\times\tilde{\mathbf{J}}_p\boldsymbol{\omega}+2\sum_i(\mathbf{r}_{pi}+\mathbf{u}_{pi})\times m_{pi}(\boldsymbol{\omega}_2\times\dot{\mathbf{u}}_{pi})-\Big(m_p\mathbf{p}_2+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)\times\\
&\times\Big(\frac{2}{m}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}\psi\times\Big(m_p\mathbf{p}_2+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)+\frac{2}{m}\boldsymbol{\omega}_2\times\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\dot{\mathbf{q}}_p\Big)+\\
&+\mathbf{f}_p\Big\}=M_e,\\
&\mathbf{S}^T_{\omega p}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{S}^T_{\varphi p}\mathbf{e}\ddot{\varphi}+\mathbf{M}_p\ddot{\mathbf{q}}_p+\\
&+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}^T_{pi}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\Big(\mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p+\mathbf{p}_1-\frac{1}{m}\Big(m_p\mathbf{p}+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)\Big)+\\
&+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}^T_{pi}\mathbf{e}\dot{\varphi}\times\mathbf{e}\dot{\varphi}\times\Big(\mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p-\frac{1}{m}\Big(m_p\mathbf{p}_2+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)\Big)+\\
&+2\sum_i m_{pi}\mathbf{A}^T_{pi}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}\dot{\varphi}\times\Big(\mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p-\frac{1}{m}\Big(m_p\mathbf{p}_2+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)\Big)+\\
&+2\sum_i m_{pi}\mathbf{A}^T_{pi}\boldsymbol{\omega}_2\times\Big(\mathbf{A}_{pi}\dot{\mathbf{q}}_p-\frac{1}{m}\Big(\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\dot{\mathbf{q}}_p\Big)\Big)+\\
&+\mathbf{f}_{qp}+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}^T_{pi}\mathbf{A}_{pi}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}_p=0,\\
&\dot{\mathbf{q}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\circ\mathbf{q},\ \dot{\varphi}=\psi,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где

$$
\mathbf{S}_{\omega p}=\sum_i(\mathbf{p}_1+\mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p)\times m_{pi}\mathbf{A}_{pi}-\frac{1}{m}\Big(m_p\mathbf{p}+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\Big)\times\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi},
$$

$$
\tilde{\mathbf{J}}_p=\sum_i\mathbf{K}(\mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p,\mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p),
$$

$$\mathbf{S}_{\omega\varphi} = \tilde{\mathbf{J}}_p - \frac{1}{m}\mathbf{K}\left(m_p\mathbf{p} + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p, m_p\mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p \right) + \mathbf{K}\left(\mathbf{p}_1, m_p\mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p \right),$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \tilde{\mathbf{J}}_p + \mathbf{K}\left(\mathbf{p}_1, m_p\mathbf{p}_1\right) + \mathbf{K}\left(\mathbf{p}_1, m_p\mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p \right)$$

$$+\mathbf{K}\left(m_p\mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p, \mathbf{p}_1 \right) - \frac{1}{m}\mathbf{K}\left(m_p\mathbf{p} + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p, m_p\mathbf{p} + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p \right),$$

$$\mathbf{J}_e = \left(\tilde{\mathbf{J}}_p - \frac{1}{m}\mathbf{K}\left(m_p\mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p, m_p\mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p \right)\right),$$

$$\mathbf{S}_{\varphi p} = \sum_i \left(\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p\right) \times m_{pi}\mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m}\left(m_p\mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p \right) \times \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m}\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi},$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \frac{\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}\mathbf{q}_p}{m_p},$$

$$\mathbf{f}_p = m_p\left(\frac{\mathbf{F}_0^{возм}}{m} - \frac{\mathbf{F}_p^{возм}}{m_p} \right) + m_p\mu\left(\frac{\Delta\mathbf{R}_p}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0\left(\mathbf{R}_0, \Delta\mathbf{R}_p\right)}{R_0^3} \right) - \mathbf{p}_1 \times \sum_i \Delta\mathbf{F}_{pi} - \mathbf{T}_p,$$

$$\mathbf{f}_{qp} = \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\mu\left(\frac{\Delta\mathbf{R}_{pi}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0\left(\mathbf{R}_0, \Delta\mathbf{R}_{pi}\right)}{R_0^3} \right) + \left(\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T \right)\frac{\mathbf{F}_0^{возм}}{m} - \sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\mathbf{F}_{pi}^{возм}.$$

Угловое движение спутника определяется кватернионом ориентации $\mathbf{q}$ и вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Относительное угловое движение панели задается углом поворота в шарнире φ и угловой скоростью ψ. В качестве фазовых переменных, описывающих деформации панели, используются амплитуды ее собственных колебаний. Матрица $\boldsymbol{\Omega}$ – матрица квадратов собственных частот колебаний. Матрица $\mathbf{K}$ обозначает двойное векторное произведение

$$\mathbf{a} \times \left(\mathbf{y} \times \mathbf{b}\right) = \mathbf{K}(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{y}, \ \mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_2b_2 + a_3b_3 & -a_2b_1 & -a_3b_1 \\ -a_1b_2 & a_1b_1 + a_3b_3 & -a_3b_2 \\ -a_1b_3 & -a_2b_3 & a_1b_1 + a_2b_2 \end{pmatrix}.$$

Приведенная система уравнений содержит суммирование по всем точкам деформируемого тела. Для достижения приемлемой точности необходимо разбиение этого тела на большое количество точек. С другой стороны, величины $\mathbf{A}_{pi}$ не зависят от времени (они зависят от свойств самой моды и могут быть определены методом конечных элементов), поэтому просуммировать по всем точкам достаточно только один раз. При этом необходимо учитывать, что величины $\mathbf{A}_{pi}$ задаются в системе координат $O_p x_p y_p z_p$.

Верификация модели

Верификация полученной модели проводится в несколько этапов. На первом этапе проверяется выполнение законов сохранения кинетического момента и полной энергии системы. На втором – результаты конечно элементного моделирования в среде Nastran [7] сравниваются с результатами моделирования с помощью полученной модели. В этом случае в качестве критерия идентичности моделей используется равенство собственных частот колебаний линеаризованной системы, рассчитанных разными способами.

Проверка выполнения законов сохранения

Известно, что в замкнутой системе сохраняется кинетический момент, а при отсутствии диссипативных сил и моментов – полная энергия системы. Для этого при моделировании полагается, что $\mathbf{f}_p = \mathbf{f}_{qp} = \mathbf{T}_s = 0$ и $M_e = 0$.

Кинетический момент для такой системы записывается в виде суммы кинетических моментов основного тела спутника $\mathbf{L}_s$ и панели $\mathbf{L}_p$ и вычисляется относительно общего центра масс:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_p,$$

где

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} - \frac{m_s m_p}{m} \; \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2 \; \times \mathbf{V}_s,$$

$$\mathbf{L}_s = \tilde{\mathbf{J}}_p \; \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}\psi \; + \frac{m_s m_p}{m} \; \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2 \; \times \; \mathbf{V}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_1 \; +$$

$$+ m_p \left(\mathbf{p}_1 - \frac{m_s m_p}{m} \; \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2 \right) \times \; \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}\psi \; \times \; \mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2 \; + \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2 \; + \sum_i m_{pi} \; \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_i \mathbf{q} \; \times \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{q}}_p.$$

В итоге,

$$\mathbf{L}=\mathbf{J}_s\boldsymbol{\omega}+\frac{m_s m_p}{m}\ \mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\tilde{\mathbf{p}}_2\ \times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}_1+\sum_i m_{pi}\ \mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_i\mathbf{q}\ \times\mathbf{A}_i\dot{\mathbf{q}}_p+$$

$$+\tilde{\mathbf{J}}_p\ \boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\psi\ +m_p\left(\mathbf{p}_1-\frac{m_s m_p}{m}\ \mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\tilde{\mathbf{p}}_2\ \right)\times\ \boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\psi\ \times\ \mathbf{p}_2+\tilde{\mathbf{p}}_2\ +\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2\ . \qquad (2)$$

Так как предполагается, что на систему не действуют внешние силы, то полная энергия состоит из кинетической энергии системы и потенциальной энергии деформации. Кинетическая энергия записывается в виде

$$T=\frac{1}{2}m\mathbf{V}_C^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{J}_s\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\psi\ ^T\tilde{\mathbf{J}}_p\ \boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\psi\ +\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}+\frac{1}{2}m_p\ \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}_1\ ^2+$$

$$+\ \boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\psi\ ^T\sum_i m_{pi}\ \mathbf{r}_{pi}+\mathbf{A}_i\mathbf{q}_p\ \times\mathbf{A}_i\dot{\mathbf{q}}_p+m_p\ \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}_1\ ^T\ \boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\psi\ \times\ \mathbf{p}_2+\tilde{\mathbf{p}}_2\ +\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2\ -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{m_p^2}{m}\ \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}_1+\ \boldsymbol{\omega}+\mathbf{e}\psi\ \times\ \mathbf{p}_2+\tilde{\mathbf{p}}_2\ +\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2\ ^2,$$

а потенциальная [3]

$$\Pi=\frac{1}{2}\mathbf{q}_p\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}_p\,.$$

Полная энергия E в итоге определяется их суммой,

$$E=T+\Pi\,. \qquad (3)$$

Величины, определяемые формулами (2), (3), вычисляются при численном интегрировании. Оно проводится для системы со следующими параметрами:

$\mathbf{m}_s=3495\,кг$, $\mathbf{m}_p=349.5\,кг$, $\mathbf{p}_1=\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ м$, $\mathbf{p}_2=\ 0\ \ 1.5\ \ 0\ \ м$,

$$\mathbf{J}_p=\begin{pmatrix}1038.05 & 0 & 0\\ 0 & 29.1263 & 0\\ 0 & 0 & 1067.17\end{pmatrix}кг\cdot м^2, \qquad (4)$$

$$\mathbf{J}_s=\begin{pmatrix}1817.92 & -0.0024 & -0.0103\\ -0.0024 & 944.278 & 0.0038\\ -0.0103 & 0.0038 & 1453.89\end{pmatrix}кг\cdot м^2$$

и начальными условиями (рассматривается одна мода деформации)

$$\omega=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}{}^{град}\!/_{сек},\ \mathbf{q}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \varphi=0,\ \psi=0,\ q_1=1,\ \dot{q}_1=0.$$

При этом частота этой моды $\nu_1=7.63\,Гц$ (определялась путем конечно-элементного моделирования). На рисунках 3-8 ниже приведены результаты вычислений для компонент вектора кинетического момента и для полной энергии при различных шагах интегрирования.

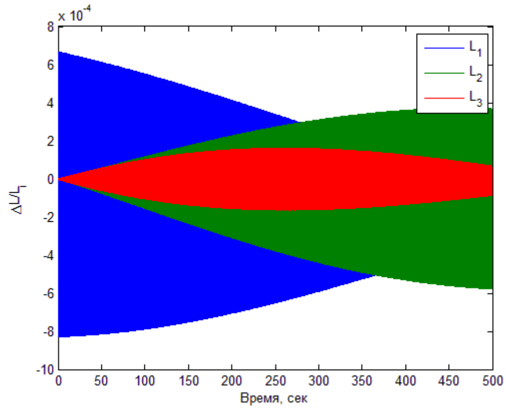

Рис 3. Относительная ошибка разницы компонент начального кинетического момента и текущего значения (шаг интегрирования 0.005 сек)

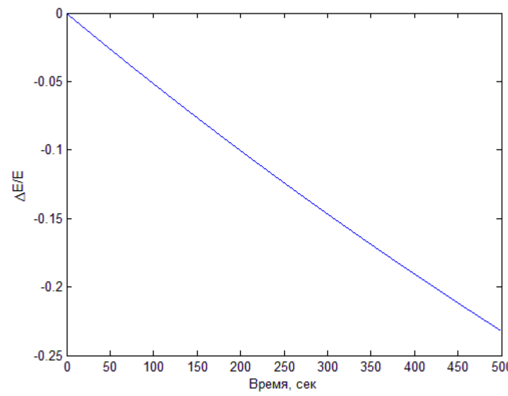

Рис 4. Относительная ошибка разницы начального и текущего значения полной энергии (шаг интегрирования 0.005 сек)

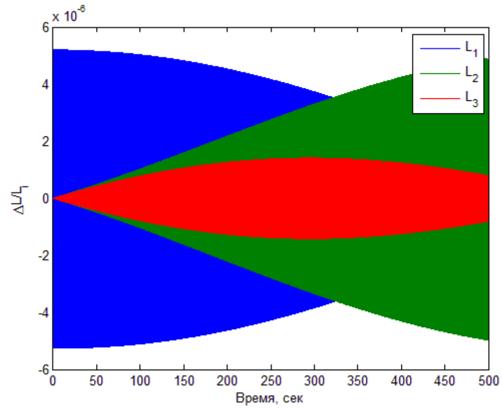

Рис 5. Относительная ошибка разницы компонент начального кинетического момента и текущего значения (шаг интегрирования 0.001 сек)

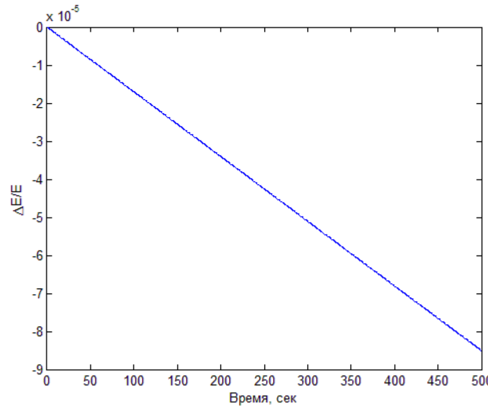

Рис 6. Относительная ошибка разницы начального и текущего значения полной энергии (шаг интегрирования 0.001 сек)

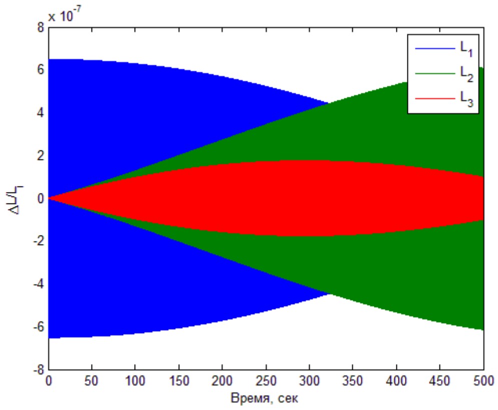

Рис 7. Относительная ошибка разницы компонент начального кинетического момента и текущего значения (шаг интегрирования 0.0005 сек)

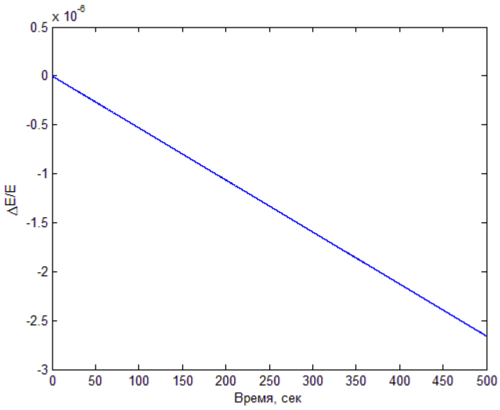

Рис 8. Относительная ошибка разницы начального и текущего значения полной энергии (шаг интегрирования 0.0005 сек)

Из рисунков видно, что при уменьшении шага интегрирования ошибка уменьшается. При этом требование к малости шага связано, в первую очередь, с большим значением частоты и отсутствием демпфирования.

Сравнение собственных мод колебаний

Для определения собственных мод колебаний необходимо линеаризовать уравнения движения (1) в окрестности положения $\boldsymbol{\omega}=0$, $\mathbf{q}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\dot{\mathbf{q}}_p=0$, $\mathbf{q}_p=0$. При этом для простоты расчетов в среде Nastran полагается, что $\psi=0$ и $\varphi=const$. В этом случае уравнения движения запишутся в виде (линейные вариации обозначаются так же, как и сами переменные)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{S}_{\omega p}\ddot{\mathbf{q}}_p=0,\\
&\mathbf{S}_{\omega p}^T\dot{\boldsymbol{\omega}}+\mathbf{M}_p\ddot{\mathbf{q}}_p+\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\mathbf{A}_{pi}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}_p=0,
\end{aligned}\qquad(5)$$

где

$$\mathbf{S}_{\omega p}=\sum_i\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{r}_{pi}\right)\times m_{pi}\mathbf{A}_{pi}-\frac{1}{m}m_p\mathbf{p}\times\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_s+\tilde{\mathbf{J}}_p+\mathbf{K}\left(\mathbf{p}_1,m_p\mathbf{p}_1\right)+\mathbf{K}\left(\mathbf{p}_1,m_p\mathbf{p}_2\right)+\mathbf{K}\left(m_p\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1\right)-\frac{1}{m}\mathbf{K}\left(m_p\mathbf{p},m_p\mathbf{p}\right),$$

$$\mathbf{M}_p=\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\mathbf{A}_{pi}-\frac{1}{m}\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}^T\sum_i m_{pi}\mathbf{A}_{pi}.$$

Уравнения (5) используются для сравнения результатов численного моделирования, выполненного в среде Nastran, и аналитических расчетов. Собственные частоты определяются из уравнения частот

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega p} \\ \mathbf{S}_{\omega p} & \mathbf{M} \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Полученные с помощью модели собственные частоты сравниваются с теми, что получаются в результате моделирования методом конечных элементов в среде Nastran по схеме, представленной на рис.9.

Моделирование в среде Nastran

При моделировании рассматриваются четыре системы: деформируемая панель с жестко закрепленной в нескольких точках стороной и спутник с той же панелью и аналогичным креплением в трех различных положениях ($\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$, $\varphi = \pi/2$). В ходе моделирования определяются собственные частоты колебаний, а для первой системы вычисляются также величины, входящие в уравнения движения (1).

Спутник моделируется параллелепипедом с размерами $1\,м$ по оси $O_s x$, $2\,м$ по $O_s y$ и $1.5\,м$ по $O_s z$. Панель – плоским прямоугольником со сторонами $1\,м$ по $O_p x_p$ и $3\,м$ по $O_p y_p$ (рис. 2).

Параметры материала пластины заданы следующие: модуль Юнга $109 \cdot 10^9\ Па$, коэффициент Пуассона 0.266, плотность $2330\, кг/м^3$, что примерно соответствует кремнию. Параметры материала спутника были выбраны так, чтобы спутник был тяжелее пластины в 10 раз, т.е. плотность $1165\, кг/м^3$. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона заданы, соответственно, как $2 \cdot 10^{12}\ Па$ и 0.3.

Рассматриваются три модели для пластины со спутником: первая – со стандартным расположением пластины, вторая – с пластиной, повернутой на $\pi/4$,и, наконец, третья – с пластиной, повернутой на $\pi/2$. Также была создана модель одиночной пластины (рис.10).

В случае панели со спутником моделируемая пластина крепится на участке длиной $0.2\,м$, расположенном посередине короткой стороны (рис.2). Этот участок «приклеен» (то есть крепление не имеет степеней свободы) к поверхности параллелепипеда-спутника. В случае панели без спутника тот же участок пластины длиной $0.2\,м$ неподвижно закреплен.

Начало координат находится в центре спутника. Точка крепления пластины имеет координаты $(0,1,0)$. Нижнее ребро пластины касается верхней грани спутника.

Количество точек разбиения увеличивалось, пока результаты расчета не стабилизировались (т.е. не стали меняться мало с дальнейшим увеличением). Для параллелепипеда (недеформируемого тела спутника) было выбрано разбиение $20\times20\times20$ (т.е. каждое ребро разбивалась на 20 частей), для панели – 200×600 (т.е. ребро, ориентированное вдоль оси O_px_p, разбивалось на 200 частей, вдоль оси O_py_p – на 600). Для пластины без спутника разбиение такое же – 200×600.

Рис. 9. Сравнение собственных частот колебаний

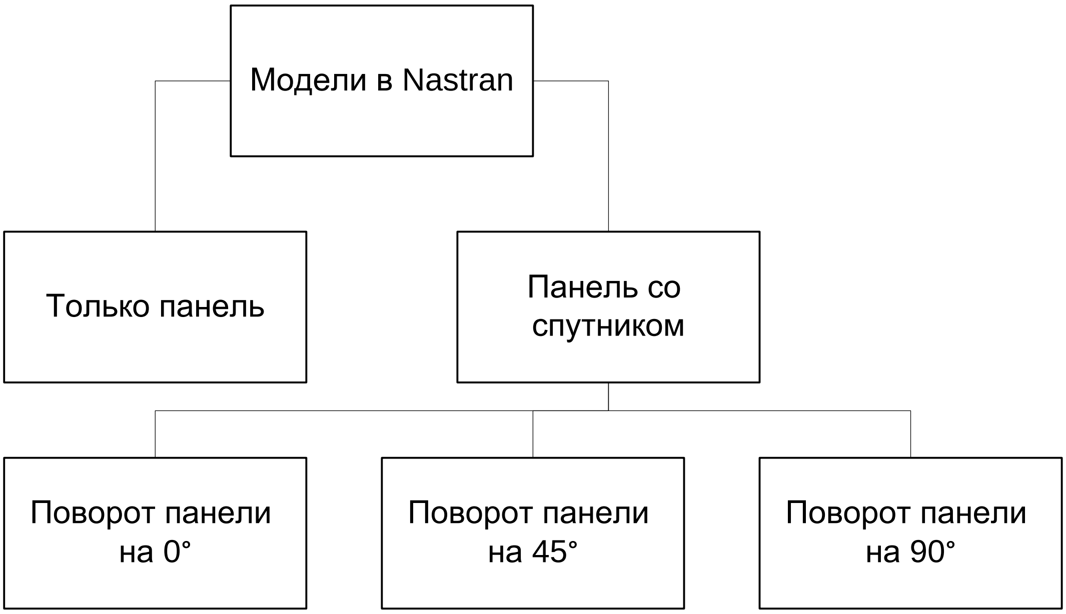

Рис. 10. Схема моделей в Nastran

Результаты моделирования приведены в таблице 1.

Таблица 1

Частоты собственных колебаний (Гц)

Номер моды	Закрепленная панель	Спутник с панелью $\varphi=0$		Спутник с панелью $\varphi=\pi/4$		Спутник с панелью $\varphi=\pi$	
		Nastran	Модель	Nastran	Модель	Nastran	Модель
1	5.2487	7.6310	7.6311	7.8223	7.8234	8.0301	8.0316
2	32.057	32.393	32.483	32.378	32.483	32.361	32.483
3	33.256	36.063	36.068	36.195	36.203	36.364	36.370
4	34.485	52.679	53.148	51.235	51.679	49.722	50.137
5	98.195	99.381	99.420	99.488	99.533	99.596	99.643
6	100.90	100.78	101.03	100.73	101.03	100.69	101.02
7	181.44	181.11	181.51	181.04	181.51	180.97	181.51
8	190.81	191.90	192.06	191.98	192.17	192.07	192.28
9	277.50	276.98	277.54	276.89	277.54	276.79	277.54
10	294.77	295.27	295.89	295.26	295.98	295.25	296.08

Как видно из этой таблицы, частоты, вычисленные с помощью линеаризованных уравнений (5) и с помощью пакета Nastran, находятся в удовлетворительном соответствии между собой. Возникающие ошибки связаны, в первую очередь, с ошибками вычисления собственных мод колебаний в пакете Nastran и при увеличении числа узлов ошибка уменьшаются. Особенно это видно для мод 6,7,9, чьи частоты, вычисленные с помощью Nastran, уменьшаются (по сравнению с закрепленной пластиной).

При уменьшении массы системы такого происходить не должно (отдельная пластина эквивалентна системе, в которой основное тело спутника имеет бесконечную массу) [8]. Для иллюстрации на рис. 11-12 изображены моды колебаний, упомянутые в таблице 1. Рисунки 11 соответствуют модам отдельной пластины (столбец 2), а рисунки 12 – модам всего спутника целиком при угле поворота пластины $\varphi = 0$ (столбец 3).

На рисунках 11 и 12 цветовая градация соответствует отклонению пластины от горизонтального положения. Недеформированное состояние показано темно-зеленым цветом. Нужно отметить, что нумерация мод на рис. 11 и 12 соответствует возрастанию собственной частоты и, например, моды 3 и 4 на рис. 11 соответствуют модам 4 и 3 на рис.12.

Заключение

В работе получена математическая модель спутника с деформируемым элементом на шарнирном соединении. Ее использование заметно снижает вычислительную нагрузку на компьютер за счет того, что нет необходимости проводить конечно-элементное моделирование для разных углов поворота в шарнире. Кроме того, деформируемый элемент моделируется отдельно и это снижает число узлов разбиения, участвующих в вычислении. В дальнейшем этот подход может быть использован для построения и верификации алгоритмов управления и идентификации углового движения спутников с деформируемыми элементами.

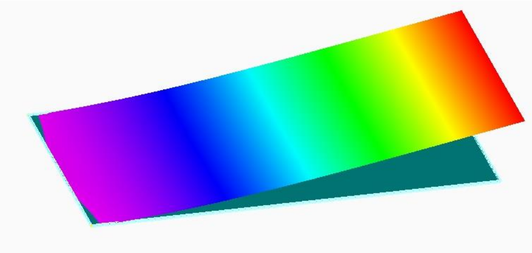

Рис. 11а. Мода 1 (5.2487 Hz)

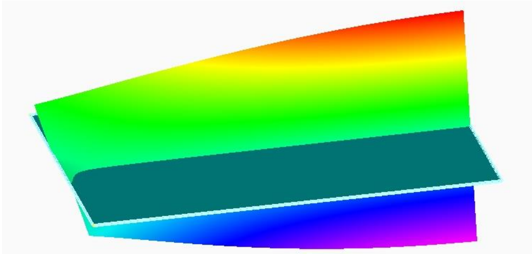

Рис. 11б. Мода 2 (32.057 Hz)

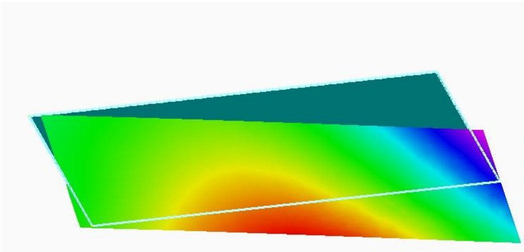

Рис. 11в. Мода 3 (33.256 Hz)

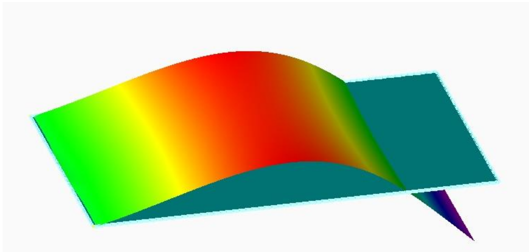

Рис. 11г. Мода 4 (34.485 Hz)

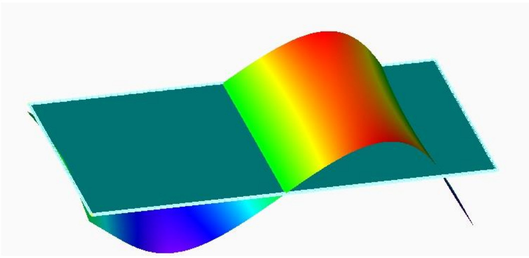

Рис. 11д. Мода 5 (98.195 Hz)

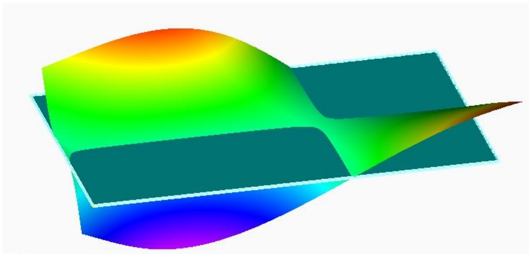

Рис 11е. Мода 6 (100.90 Hz)

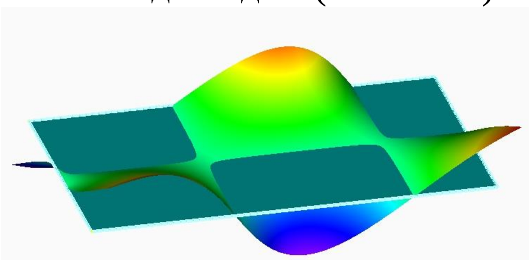

Рис. 11ж. Мода 7 (181.44 Hz)

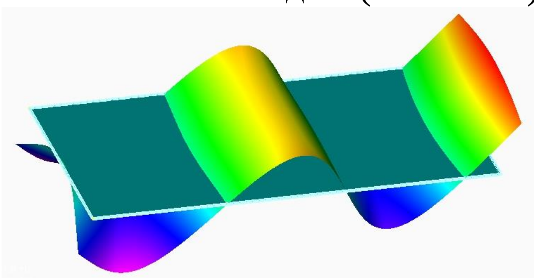

Рис. 11з. Мода 8 (190.81 Hz)

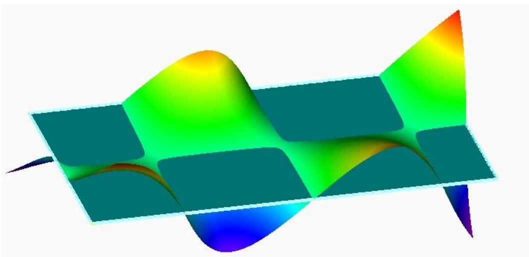

Рис. 11и. Мода 9 (277.50 Hz)

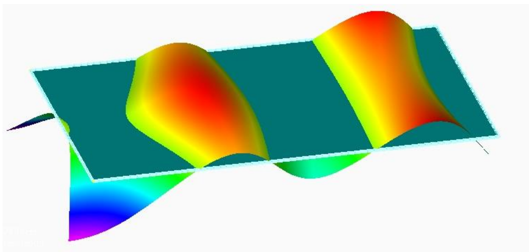

Рис. 11к. Мода 10 (294.77 Hz)

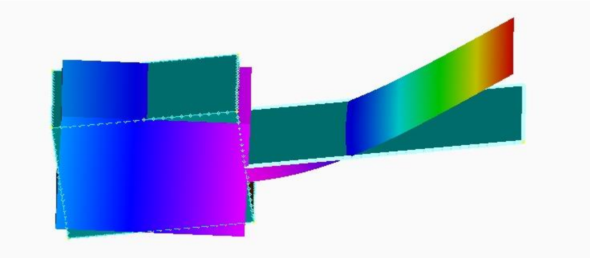

Рис 12а. Мода 1 (7.6310 Hz)

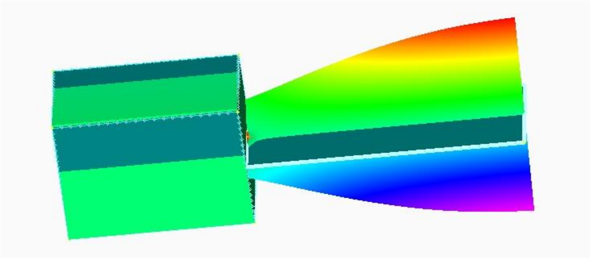

Рис 12б. Мода 2 (32.393 Hz)

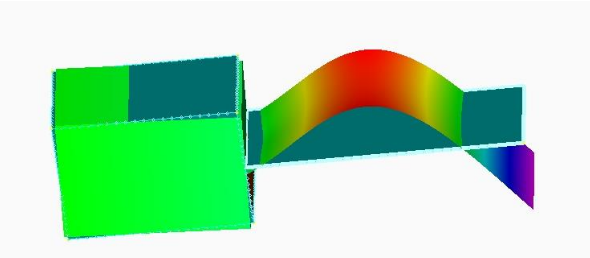

Рис 12в. Мода 3 (36.063 Hz)

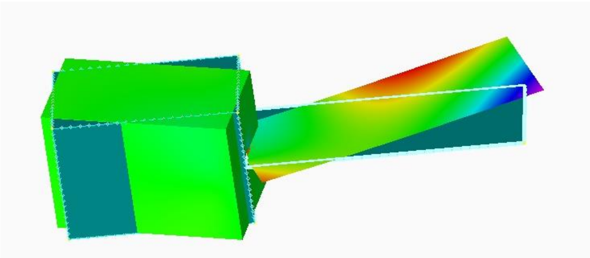

Рис 12г. Мода 4 (52.679 Hz)

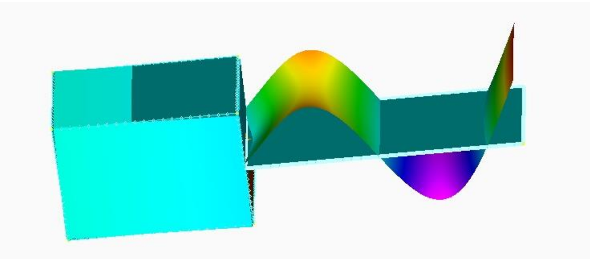

Рис 12д. Мода 5 (99.381 Hz)

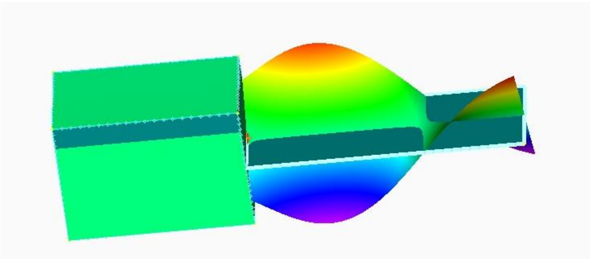

Рис 12е. Мода 6 (100.78 Hz)

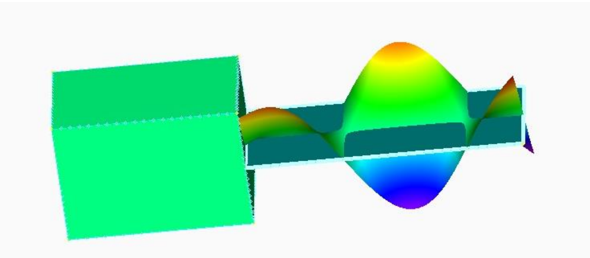

Рис 12ж. Мода 7 (181.11 Hz)

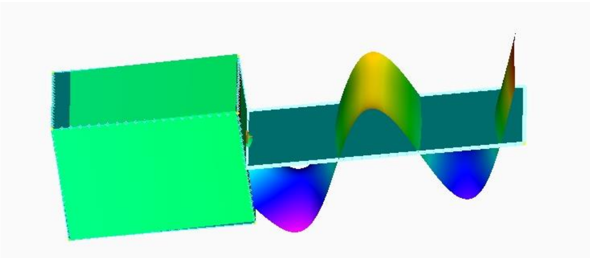

Рис 12з. Мода 8 (191.90 Hz)

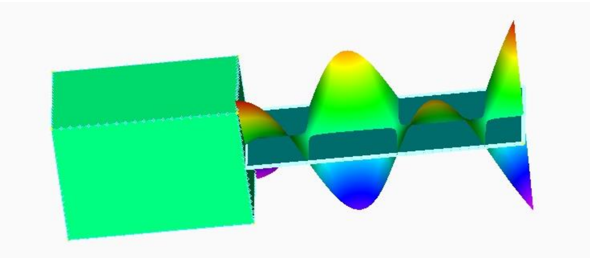

Рис 12и. Мода 9 (276.98 Hz)

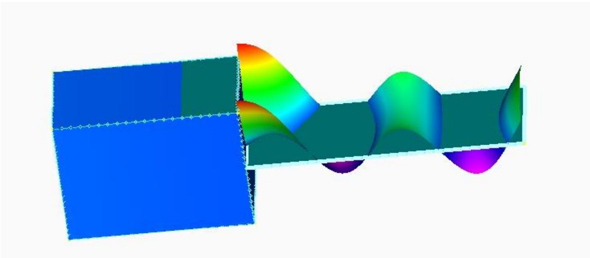

Рис 12к. Мода 10 (295.27 Hz)

Литература

1. Junkins J., Kim Y. Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures / Washington, DC: AIAA Education Series, AIAA, 1993. - 452 с.

2. Набиуллин М.К. Стационарные движения и устойчивость упругих спутников / Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1990. - 216 с.

3. Meirovitch L., Quinn R.D. Equations of Motion for Maneuvering Flexible Spacecraft // J. Guid. Control. - 1987. - Т. 10. - № 5 . - С. 453–465.

4. Santini P., Gasbarri P. General background and approach to multibody dynamics for space applications // Acta Astronaut. - 2009. - Т. 64. - № 11-12 . - С. 1224–1251.

5. Титов Б.А., Вьюжанин В.А., Дмитриев В.В. Формирование динамических свойств упругих космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1995. - 304 с.

6. Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Овчинников М.Ю. Уравнения движения спутника с нежесткими элементами конструкции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2015. - № 58 . - 20 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-58

7. MSC Nastran. URL: http://www.mscsoftware.ru/products/nastran.

8. Гантмахер Ф.Р. Теория Матриц.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 560 с.

Оглавление

Введение 3
Постановка задачи и системы координат 3
Модель движения 5
Верификация модели 8
    Проверка выполнения законов сохранения 8
    Сравнение собственных мод колебаний 11
Моделирование в среде Nastran 12
Заключение.. 15
Литература 18