[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](#) • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 57 за 2015 г.](#)


ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.**

# Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 57. 23 с.
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-57**

О р д е н а   Л е н и н а
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**имени М.В.Келдыша**
**Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к**

**Л.А. Борисов, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев**

# Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера

**Москва — 2015**

**Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.**
Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера

Разработана процедура усреднения случайных однопараметрических полугрупп и их генераторов, основанная на понятии эквивалентности по Чернову операторнозначных функций. Исследованы решения начальных задач для уравнения диффузии дробного порядка и для уравнения Шредингера с релятивистским гамильтонианом свободного движения. Установлено, что в рассмотренных примерах квантование классической гамильтоновой системы является результатом усреднения случайных операторов сдвига в координатном пространстве.

***Ключевые слова:*** однопараметрическая полугруппа, случайный оператор, гамильтониан, теорема Чернова, формула Фейнмана, эквивалентность по Чернову

**Borisov L.A., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.**
Feynman formulas for averaging of semigroups, generating by the operators of Schrödinger type

The averaging procedure of one-parametric semigroups, based on Chernoff equivalence for operator-functions is constructed. The initial problem solutions are investigated for fractional diffusion equation and for Schrödinger equation with relativistic Hamiltonian of freedom motion. It is established, that in these examples the quantization can be treated as averaging of random translation operators in classical coordinate space.

***Key words:*** one-parametric semigroup, random variable, Hamiltonian, Chernoff theorem, Feynman formula, Chernoff equivalence

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-01-00145,

и гранта РНФ, проект № 14-11-00687

## Содержание

## 1. Введение

Метод изучения однопараметрических полугрупп, порожденных эволюционными дифференциальными уравнениями, и равновесных статистических операторов плотности в задачах классической и квантовой статистической механики, основанный на формулах Фейнмана [1] и континуальном интегрировании, разрабатывался рядом авторов, среди трудов которых следует отметить основополагающие в плане создания математического аппарата статьи [2-4]. Развитие этого метода в последнее время связано с получением явных аналитических выражений [5-8] для решающих операторов задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, таких как уравнение теплопроводности или Шредингера. Центральным математическим фактом, лежащим в основе этих исследований, является теорема Чернова [9], устанавливающая сходимость определенного итерационного процесса к полугруппе, которая представляет решение задачи Коши. Приведем здесь формулировку этой теоремы.

*Теорема Чернова (Chernoff, 1968). Пусть* $X$ *– банахово пространство,* $B(X)$ *– банахово пространство линейных ограниченных операторов в* $X$ *и пусть функция* $F: R_+ \to B(X)$ *удовлетворяет условию* $F(0) = I$*, непрерывна в сильной операторной топологии и удовлетворяет оценке при некотором α≥0:* $\|F(t)\|_{B(X)} \le e^{at}, t \ge 0$. *Тогда, если оператор* $F'(0)$ *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов* $U(t), t > 0$, *то* $\forall u \in X, \forall T > 0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0;T]} \left\| \left( U(t) - \left(F(t/n)\right)^n \right) u \right\|_X = 0. \qquad (1)$$

Интерес к применению теоремы Чернова для построения генераторов полугрупп связан не только с возможностью получения решения соответствующих уравнений в более явном виде, чем это позволяют теоремы существования, но и с приданием нового смысла некоторым математическим конструкциям, которые до этого воспринимались только как проявления определенной математической техники. Укажем здесь две таких конструкции.

Первая задача относится к построению равновесного оператора плотности квантовой системы. Как известно (см., напр., [10]), для нахождения квантовой матрицы плотности надо определить ядро оператора $\hat{\rho}(\beta) = \exp\left(-\beta\hat{H}\right)$, где $\hat{H}$ есть оператор, классическим символом которого является функция Гамильтона $H(q, p)$ классической динамической системы, заданная в фазовом пространстве координат $q$ и импульсов $p$. Сопоставление классической динамической величине (т.е. такой, эволюция которой определяется уравнениями Гамильтона) квантового оператора называется квантованием. Математические аспекты процедуры квантования (в частности, линейного квантования) подробно описаны в трудах Ф.А. Березина [11]. Ядра соответствующих интегральных преобразований, связывающих между собой символы и операторы, содержатся в [12]. С технической точки зрения проквантовать можно любую функцию от координат и импульсов, преобразование Фурье которой по импульсам является обобщенной функцией (либо регулярной, либо с точечным носителем, либо медленного роста). В частности, можно построить оператор $\hat{f}(\beta)$, которому отвечает символ в виде классического равновесного распределения $f(\beta)=\exp(-\beta H)$. Однако оператор $\hat{f}(\beta)$ не будет описывать статистических свойств квантовой системы, тогда как его классический символ их, несомненно, описывает. Это означает, что и классический символ, отвечающий квантовому оператору плотности $\hat{\rho}$, не является классическим равновесным распределением, т.е. не имеет статистического и механического смысла. Нетривиальность и где-то даже философская глубина теоремы Чернова состоит в том, что, согласно этой теореме, можно рассмотреть итерационный процесс, состоящий в построении оператора $\hat{D}_n(\beta)=\left(\hat{f}(\beta/n)\right)^n$, после чего перейти к пределу в сильной операторной топологии и получить $\hat{\rho}(\beta)=\lim\limits_{n\to\infty}\hat{D}_n(\beta)$. Иными словами, чтобы получить статистический оператор, надо проквантовать классическую плотность функции распределения как динамическую величину, притом, что собственно квантование классического распределения физически бессмысленно, и бесконечное число раз свернуть полученный оператор с самим собой. Тем самым статистика получилась как предельный переход в динамике, что само по себе достаточно любопытно. Более того, поскольку ядро оператора $\hat{D}_n(\beta)$ определено явно и представляет собой некоторое сверточное произведение, его можно рассматривать как усреднение известных функций, заданных в классическом фазовом пространстве, по известной мере. В пределе при $n\to\infty$ это позволяет трактовать квантовый статистический оператор как результат статистического усреднения бесконечного числа независимых случайных сдвигов в классическом пространстве, т.е., в сущности, как результат усреднения случайных полугрупп.

Указанная трактовка выводит нас на вторую задачу, связанную с усреднением полугрупп и с приданием смысла таким операциям. Дело в том, что линейная комбинация полугрупп не обязана быть полугруппой (и чаще всего ей и не является). Но если в результате итераций, аналогичных описанным выше, можно получить сходимость к полугруппе, то такая полугруппа объявляется эквивалентной по Чернову данной линейной комбинации полугрупп. Строгое определение эквивалентности по Чернову было дано О.Г. Смоляновым в [4] и будет приведено ниже. Здесь лишь укажем на один аспект практического применения понятия эквивалентности по Чернову в математической статистике. В ряде задач, связанных с анализом эволюции выборочной функции распределения $f(x,t)$, строится соответствующее уравнение Лиувилля $\partial f/\partial t+\partial(uf)/\partial x=0$, в котором скорость

$u = u(x)$ определяется по некоторой выборке наблюдаемых данных, известных к текущему моменту времени, т.е. по построению это функция только от $x$, а не от $x$ и $t$, как должно было бы быть, если бы рассматривалась теоретическая плотность функции распределения нестационарной случайной величины, а не ее выборочная оценка. Будучи так или иначе найденной, эта скорость позволяет трактовать уравнение Лиувилля относительно выборочной функции распределения как эволюцию некоторой плотности распределения начальных условий в силу динамической системы (т.е. полугруппы), сдвиг по траекториям которой определяется функцией $u(x)$. Этот подход к анализу нестационарных временных рядов был развит в [13, 14]. Однако из-за нестационарности ряда функция $u(x)$ в каждый момент времени оказывается различной, т.е. фактически является неизвестной функцией времени, и потому прогноз выборочной плотности по такой модели часто оказывается весьма неточным. Гораздо более точным оказывается прогноз, если вместо скорости $u(x)$, определенной в текущий момент времени по одной выборке, взять некоторую среднюю скорость, определяемую по разным непересекающимся выборкам. Обосновать же такую процедуру усреднения с точки зрения формальных определений динамических систем нельзя, ибо средняя скорость в общем случае не является скоростью, которая фигурирует в уравнении Лиувилля, поэтому прогнозные модели нестационарных временных рядов кажутся недостаточно корректно формализованными. Теорема Чернова позволяет придать смысл (асимптотический) такой усредненной скорости: именно, эта скорость отвечает полугруппе, эквивалентной по Чернову среднему значению выборочных полугрупп.

Существенно, что в описанной выше проблеме прогнозирования выборочной функции распределения нестационарного временного ряда по уравнению Лиувилля средняя скорость (или средняя полугруппа) изначально не даны и даже не наблюдаемы, ибо непосредственно не имеют приписываемого им в силу эквивалентности по Чернову смысла. Такой смысл имеют только «парциальные» скорости, в виде линейной комбинации которых и представляется нужная нам средняя скорость. Тем не менее, определенный асимптотический смысл появляется теперь и у средней скорости, которая формируется по некоторому конечному набору выборок.

Подчеркнем, что в представленных примерах на определенных этапах возникало усреднение случайных полугрупп. Обобщению и формализации метода такого усреднения и посвящена настоящая работа. В ней будут рассмотрены применения случайных полугрупп и их математических ожиданий к построению решений различных эволюционных уравнений математической физики. Понятие случайной однопараметрической полугруппы было введено в работе авторов [15], где с помощью введенного в [4] отношения эквивалентности по Чернову на множестве операторнозначных функций было определено математическое ожидание случайной полугруппы.

Дальнейшей целью работы является применение процедуры усреднения операторнозначных функций к построению полугрупп, разрешающих такие эволюционные задачи, как уравнение диффузии, уравнение диффузии дробного порядка, уравнение Шредингера с релятивистским гамильтонианом свободного движения. Будут получены представления для ядер оператора дробной диффузии, оператора релятивистского гамильтониана, ядер соответствующих равновесных операторов квантовой плотности и операторов квантовой динамики. Кроме того, для полугрупп, разрешающих уравнения диффузии и квантовой динамики, будут получены представления посредством математических ожиданий итераций независимых случайных операторов сдвига в координатном пространстве.

## 2. Случайные полугруппы и эквивалентность по Чернову

Для изучения случайных полугрупп и случайных гамильтонианов введем следующее расширение понятия случайной величины.

*Определение 1. Случайная величина – это измеримое отображение измеримого пространства* $E$ *с неотрицательной нормированной конечно-аддитивной мерой* $\mu$ *в некоторое банахово пространство* $Z$*, снабженное минимальной алгеброй подмножеств, порожденной нормой, либо в топологическое нормированное пространство.*

Использование конечно-аддитивных мер вместо счетно-аддитивных позволит расширить класс измеримых отображений, определить средние значения отображений с помощью интеграла Петтиса и применить процедуру усреднения для определения предельных точек последовательностей операторов, полугрупп или квантовых состояний. Необходимость рассмотрения конечно-аддитивных мер связана с тем, что для исследования предельного поведения последовательности отображений нам потребуется рассматривать меры, сосредоточенные в произвольной проколотой окрестности точки топологического пространства, а такие меры не являются счетно-аддитивными. Этот подход был развит в работах [16, 17].

Напомним основные используемые в работе определения, следуя монографии [18]. Пространство $E$ называется измеримым, если в нем введена алгебра (или $\sigma$-алгебра в случае счетно-аддитивной меры) $A$ его подмножеств. Измеримое пространство обозначается парой «пространство – алгебра»: $(E,A)$. Мерой на измеримом пространстве $(E,A)$ называется аддитивная функция множества, определенная на всех элементах алгебры $A$.

Пусть теперь рассматривается отображение $\xi$ измеримого пространства $E$ в некоторое измеримое пространство $Z$, снабженное структурой алгебры подмножеств $B$. Функция $\xi: E \to Z$ называется $(A, B)$-измеримой (или просто измеримой), если для любого подмножества $b \in B$ прообраз $\{\xi \in b\}$ входит в алгебру $A$. Измеримая функция $\xi$ индуцирует под-алгебру $A_\xi$ алгебры $A$, состоящую из прообразов элементов алгебры $B$.

В частности, будет рассмотрен случай, когда алгебра $A$ является максимальной алгеброй $2^E$ всех подмножеств пространства $E$.

В контексте определения 1 будут рассмотрены случайные полугруппы, когда пространство $Z$ представляет собой топологическое векторное пространство сильно непрерывных отображений $\Phi$ полуоси $R_+$ в банахово (т.е. в полное нормированное векторное) пространство $X$ линейных ограниченных операторов $B(X)$, а значениями случайной величины $\xi$ являются однопараметрические полугруппы. Сильная непрерывность отображений $\Phi(t)$ означает, что $\forall t>0,\ \forall x\in X$ функции $\Phi(t)x$ непрерывны. Опишем создаваемую структуру более детально.

Пусть $E$ – хаусдорфово топологическое пространство и $2^E$ – алгебра всех подмножеств множества $E$. Пусть также $W(E)$ – множество неотрицательных нормированных конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $\left(E,2^E\right)$. Для каждой точки $\varepsilon_0\in E$ введем множество $W(E,\varepsilon_0)$ всех неотрицательных нормированных конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $\left(E,2^E\right)$, сосредоточенных в окрестности точки $\varepsilon_0\in E$ в том смысле, что $\forall\mu\in W(E,\varepsilon_0)$ равенство $\mu(A)=0$ выполняется для любого множества $A\subset E$, для которого точка $\varepsilon_0$ не является предельной. Как показано в [8], такая мера $\mu$ не может быть счетно-аддитивной.

Рассмотрим случайную величину, определенную на измеримом пространстве $\left(E,2^E,\mu\right)$ с мерой $\mu\in W(E)$, принимающую значения в пространстве $Z=C\left(R_+,B(X)\right)$ сильно $(C_s)$ или слабо $(C_w)$ непрерывных отображений полуоси $R_+$ в банахово пространство $B(X)$ линейных ограниченных преобразований банахова пространства $X$, сопряженного банахову пространству $X_*$. В качестве примера множества $E$ можно выбрать множество $G(X)$ всех генераторов сильно непрерывных полугрупп, действующих в пространстве $X$, снабженное топологией сильной или слабой граф-сходимости.

Далее, на пространстве $Z=C\left(R_+,B(X)\right)$ определим семейство функционалов $\varphi$, действующих на произвольный элемент $z\in Z$ по правилу:

$$\varphi_{t,A,g}(z)=\langle z(t)A,g\rangle,\ t\in R_+,\ A\in X,\ g\in X_*, \tag{2}$$

где скобки $\langle,\rangle$ означают билинейную форму, задающую двойственность между пространствами $X$ и $X_*$. В частности, если $X$ есть гильбертово пространство $H$, то $X_*=H$ и (2) определяет скалярное произведение в $H$; а если $X=B(H)$, то $X_*=T_1(H)$ – банахово пространство ядерных операторов со следовой нормой, и тогда скобки $\langle , \rangle$ означают след произведения ограниченного и ядерного операторов. Существуют и другие примеры, когда $X$ является банаховым пространством случайных процессов, снабженным некоторой нормой.

Рассмотрим на пространстве $Z$ две топологии: топологию $\tau_w$, порожденную семейством функционалов (2), и топологию $\tau_s$, порожденную семейством функционалов

$$\Phi_{t,A} = \sup_{\|g\|_{X^*}=1} \varphi_{t,A,g}(z). \tag{3}$$

Тогда пространство $Z$, снабженное структурой алгебры борелевских подмножеств (т.е. алгебры, являющейся минимальной алгеброй, содержащей все открытые множества топологии), является измеримым пространством, а отображение $\xi : E \to Z$ является случайной величиной.

*Определение 2. Математическим ожиданием случайной величины $\xi$ как отображения пространства с мерой $\left(E, 2^E, \mu\right)$ в топологическое пространство $Z$ называется интеграл Петтиса*

$$M\xi = \int_E \xi_\varepsilon d\mu_\varepsilon , \tag{4}$$

*где $M\xi$ есть такой элемент пространства $Z$, что $\forall t \in R_+, A \in X, g \in X_*$ выполняется равенство*

$$\langle M\xi(t)A, g\rangle = \int_E \langle \xi_\varepsilon(t)A, g\rangle d\mu_\varepsilon . \tag{5}$$

Интеграл Петтиса является так называемым слабым интегралом и определяется следующим образом. Пусть $F(X, E, B, \mu)$ есть векторное пространство функций $x(t), t \in E$ со значениями в банаховом пространстве $X$, заданных на измеримом множестве $(E, B, \mu)$ с конечно-аддитивной (или счетно-аддитивной) мерой $\mu$, заданной на алгебре ($\sigma$-алгебре) $B$ подмножеств $E$. Функция $x(t)$ называется слабо измеримой, если для любого элемента $f \in X_*$ измерима скалярная функция $f\left(x(t)\right)$. Функция $x(t)$ интегрируема по Петтису на измеримом подмножестве $K \subset E$, если существует такой элемент $x(K) \in X$, что $\forall f \in X_*$ функция $f\left(x(t)\right)$ интегрируема на $K$ и

$$f\left(x(K)\right) = \int_K f(x(t)) d\mu .$$

Тогда этот элемент $x(K) \in X$ называется интегралом Петтиса от векторнозначной функции $x(t)$:

$$x(K) = \int_K x(t) d\mu .$$

Интеграл (5) в определении 2 является интегралом по конечно-аддитивной мере $\mu \in W(E)$ ограниченной вариации от ограниченной измеримой числовой функции (т.е. интегралом Радона, см. [19]), и потому он корректно определен, а равенство (5) при любом $t \in R_+$ определяет линейное ограниченное преобразование $M\xi(t) \in B(X)$.

В работе авторов [15] были сформулированы условия, при которых математическое ожидание $M\xi$, определяемое формулой (4), принадлежит введенному выше пространству $Z = C(R_+, B(X))$. Эти условия даются следующей теоремой.

*Теорема 1. Пусть* $\mu$ *есть вещественнозначная мера на алгебре* $2^E$ *подмножеств множества E с ограниченной вариацией. Тогда если семейство отображений* $\xi$ *является равномерно ограниченным и существует такое плотное в пространстве X линейное подпространство D, что для каждого элемента* $A \in D$ *семейство отображений* $\xi(t)A \in C(R_+, X)$, $\varepsilon \in E$ *является слабо (сильно) равномерно липшицевым, то* $M\xi(t) \in C_w(R_+, B(X))$ *или, соответственно,* $M\xi(t) \in C_s(R_+, B(X))$.

Доказательство.

Плотная слабая равномерная липшицевость означает, что для любых $A \in D$ и $g \in X_*$ существует такая постоянная $L > 0$, что для любых $\Delta t$ таких, что $t + \Delta t \in R_+$, выполняется неравенство

$$\sup_{t \in R_+, \varepsilon \in E} \left| \langle \xi_\varepsilon(t + \Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A, g \rangle \right| \le L|\Delta t|.$$

Плотная сильная равномерная липшицевость означает, что для любого $A \in D$ существует такая постоянная $L > 0$, что для любых $\Delta t$ таких, что $t + \Delta t \in R_+$, выполняется неравенство

$$\sup_{t \in R_+, \varepsilon \in E} \left\| \xi_\varepsilon(t + \Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A \right\|_X \le L|\Delta t|.$$

Равномерная же ограниченность случайной полугруппы $\xi$ означает, что существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\sup_{t \in R_+, \varepsilon \in E} \left\| \xi_\varepsilon(t) \right\|_{B(X)} \le C.$$

Поэтому в силу условия равномерной ограниченности при каждом $t \ge 0$ и для любых $A \in X$ и $g \in X_*$ функция $\langle \xi_\varepsilon(t)A, g \rangle$ ограничена на множестве $E$ и, следовательно, интегрируема по мере $\mu$ ограниченной вариации в смысле Радона (см. [7]), а интеграл (5) как функция аргумента $g$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $X_*$. Следовательно, для любого $A \in X$ определен интеграл Петтиса

$$\int_E \xi_\varepsilon A d\mu_\varepsilon \in X,$$

причем отображение

$$A \to \int_E \xi_\varepsilon A d\mu_\varepsilon$$

линейно по $A$ в силу линейности интеграла Петтиса и непрерывно в силу равномерной ограниченности отображения $\xi$. Отсюда следует, что указанное отображение определено на пространстве $X$ и является линейным ограниченным преобразованием пространства $X$.
Поэтому при каждом $t > 0$ определен оператор

$$M\xi(t) = \int_E \xi_\varepsilon(t) d\mu_\varepsilon \in B(X).$$

Зависимость от переменной $t \in R_+$ значения вектор-функции $M\xi(t)A$ является слабо (соответственно сильно) непрерывной и даже слабо (сильно) липшицевой при всех $A \in D$, так как неравенства из условий слабой (сильной) липшицевости отображения $\xi$ при интегрировании сохраняется с точностью до умножения постоянной Липшица на вариацию меры. Тогда для любого $\delta > 0$ и для любого элемента $u \in X$ найдется такой элемент $A_{u,\delta} \in D$, что $\|u - A_{u,\delta}\|_X < \delta$. Поэтому согласно условию равномерной ограниченности при всех $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\|M\xi(t)u - M\xi(t)A_{u,\delta}\|_X < C\delta.$$

Следовательно, зависимость от переменной $t \in R_+$ значения вектор-функции $M\xi(t)u$ является слабо (соответственно сильно) непрерывной при всех $u \in X$.
Теорема 1 доказана.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 математическое ожидание $M\xi$ процесса $\xi$ также является элементом пространства $C(R_+, B(X))$. Этот элемент будем называть усредненным семейством преобразований пространства $X$.

Согласно теореме о возмущении генератора сильно непрерывной полугруппы ограниченным оператором (см. [20], теорема 9.2.1) имеет место непрерывная зависимость среднего значения случайной полугруппы от равномерно ограниченного по операторной норме возмущения случайного генератора.

Характерным примером возникновения случайных полугрупп является ситуация, когда изначально некорректная задача Коши решается методом регуляризации (см. [7]). Этот метод использует аппроксимацию максимального симметрического оператора, не являющегося генератором полугруппы, последовательностями генераторов. В результате может оказаться, что в зависимости от выбора аппроксимации последовательность регуляризованных полугрупп имеет несколько (или некоторое множество) частичных пределов. Тем самым некорректность первоначальной постановки задачи Коши привела (вполне ожидаемо) к неоднозначной динамике, методом анализа которой как раз и является подход, основанный на усреднении полугрупп.

Другим источником случайности полугрупп, возникающих как в классических, так и в квантовых системах, является наличие случайных параметров в гамильтониане. В зависимости от специфики задачи усреднению в таком случае подвергается либо набор решений, либо исходное уравнение.

Кроме того, существование различных гамильтонианов, описывающих одну и ту же совокупность траекторий в классическом фазовом пространстве, но приводящих к различной квантовой динамике, также порождает неоднозначность, на которую было указано в работе [21]. В таких случаях квантование классических динамических систем как отображение множества классических гамильтонианов в множество квантовых операторов, т.е. в множество самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(R)$, и, как следствие, в множество генерируемых ими унитарных групп, является случайной величиной, при условии, что множество $K$ эквивалентных классических гамильтонианов с алгеброй всех подмножеств $2^K$ снабжено некоторой неотрицательной нормированной мерой.

Итак, согласно теореме 1 объект, называемый «средним значением случайной полугруппы», существует как элемент определенного пространства. Но имеет ли такой объект какой-либо полезный математический смысл? Ведь, как уже говорилось во введении, математическое ожидание случайной полугруппы может не быть полугруппой. Явным примером нарушения полугруппового свойства при усреднении полугрупп является следующее элементарное наблюдение. Числовые функции $e^{it}$ и $e^{-it}$ при $t \geq 0$ представляют собой унитарные сильно непрерывные полугруппы преобразований одномерного банахова пространства $X = R$, но их полусумма, равная, как известно, $\cos(t)$, не является полугруппой преобразований пространства $X$, ибо полугрупповое свойство $f(t+\tau) = f(t)f(\tau)$, которое должно быть справедливо при всех $t$ и $\tau$, для функции $f(t) = \cos(t)$ очевидно, не выполняется, поскольку $\cos(t+\tau) = \cos(t)\cos(\tau) - \sin(t)\sin(\tau)$. Тем не менее, даже утратившие полугрупповое свойство операторнозначные функции могут нести информацию о некоторой полугруппе, которая однозначно определяется по этим функциям с помощью итерационной процедуры, применяемой при построении фейнмановских аппроксимаций полугрупп на основании теоремы Чернова. Дальнейшее изложение развивает идеи работ [15, 18] об эквивалентности операторнозначных функций с точки зрения упомянутой выше процедуры.

Введем множество $\Pi$ сильно непрерывных операторнозначных функций $F: [0;+\infty] \to B(X)$, удовлетворяющих условию $F(0) = I$ и условию $\|F(t)\|_{B(X)} \leq 1 + ct$ при некотором $c \geq 0$ и $t \in [0;T]$, а также условию дифференцируемости в нуле на существенной области определения генератора полугруппы. На этом множестве $\Pi$ в [18] было введено следующее отношение эквивалентности.

*Определение 3. Операторнозначные функции $F,G\in\Pi$, действующие из некоторой замкнутой правой полуокрестности нуля на числовой оси в банахово пространство $B(X)$ ограниченных линейных операторов, действующих в некотором банаховом пространстве $X$, называются эквивалентными по Чернову, если их производные в нуле совпадают на существенной области определения генератора полугруппы или, что равносильно, если для любого $T>0$ и любого $u\in X$ выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0;T]}\left\|\left((F(t/n))^n-(G(t/n))^n\right)u\right\|_X=0.$$

Введенным отношением эквивалентности охвачен достаточно широкий класс операторнозначных функций $\Pi$. Это отношение обладает свойствами симметричности, рефлексивности и транзитивности на $\Pi$. Каждая функция из класса $\Pi$ эквивалентна по Чернову некоторой полугруппе, поэтому введенным отношением эквивалентности класс $\Pi$ факторизуется до множества сильно непрерывных полугрупп преобразований пространства $X$. Следовательно, определение 3 можно расширить, чтобы охватить отношением эквивалентности множество всех сильно непрерывных операторнозначных функций, удовлетворяющих условию $F(0)=I$. В результате мы вводим следующее определение эквивалентности по Чернову.

*Определение 4. Операторнозначные функции $F,G\in\Pi$, действующие из некоторой замкнутой правой полуокрестности нуля на числовой оси в банахово пространство $B(X)$ ограниченных линейных операторов, действующих в некотором банаховом пространстве $X$, называются эквивалентными по Чернову, если для любого $T>0$ и любого $u\in X$ выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0;T]}\left\|\left((F(t/n))^n-(G(t/n))^n\right)u\right\|_X=0. \tag{6}$$

Определение 4 совместно с утверждением теоремы 1 позволяет дать следующее определение обобщенного среднего значения случайной полугруппы.

*Определение 5. Сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа $U$ ограниченных линейных преобразований банахова пространства $X$ является обобщенным средним значением случайной полугруппы $\xi$, если полугруппа $U$ эквивалентна по Чернову математическому ожиданию $M\xi$.*

Приведем пример применения определения 5 для квантовых полугрупп. Пусть $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ – эрмитовы операторы (гамильтонианы), порождающие полугруппы $\hat{U}_1=e^{t\hat{H}_1}$ и $\hat{U}_2=e^{t\hat{H}_2}$, $t\geq 0$. Рассмотрим оператор $\hat{H}=p_1\hat{H}_1+p_2\hat{H}_2$, $p_1\geq 0$, $p_2\geq 0$, $p_1+p_2=1$. Пусть операторы $\hat{H}_{1,2}$ таковы, что условия определения 5 выполнены, и тогда в соответствии с формулой (6) полугруппа $\hat{U}=e^{t\hat{H}}$ эквивалентна по Чернову средней полугруппе $p_1\hat{U}_1+p_2\hat{U}_2$.

Хотя большинство эволюционных задач, возникающих применительно к моделям реальных физических систем, использует формулировки вероятностной меры, в [7] приведен пример, когда требуется использование конечно-аддитивной меры. Такая ситуация возникает тогда, когда сильный граф-предел последовательности самосопряженных операторов $\{\hat{L}_n\}$, действующих в гильбертовом пространстве $H$, совпадает с графиком максимального симметрического оператора $\hat{L}$ из $H$. Пусть на множестве натуральных чисел выбрана конечно-аддитивная мера $\mu$. Тогда, если индекс дефекта $n_+$ оператора $\hat{L}$ равен нулю, то последовательность полугрупп $e^{-it\hat{L}_n}$, $t \geq 0$ сходится в сильной операторной топологии к изометрической полугруппе

$$e^{-it\hat{L}} = \int_N e^{-it\hat{L}_n} d\mu(n),$$

эквивалентной по Чернову полугруппе, порожденной оператором

$$\hat{\hat{L}} = \int_N \hat{L}_n d\mu(n).$$

Если же если индекс дефекта $n_-$ оператора $\hat{L}$ равен нулю, то последовательность полугрупп $e^{-it\hat{L}_n}$, $t \geq 0$ сходится в слабой операторной топологии (т.е. в смысле Петтиса) к сжимающей полугруппе

$$e^{-it\hat{L}*} = \int_N e^{-it\hat{L}_n} d\mu(n),$$

эквивалентной по Чернову полугруппе, порожденной оператором

$$\hat{\hat{L}}* = \int_N \hat{L}_n d\mu(n).$$

В работе [15] приведены достаточные, а также и необходимые условия эквивалентности по Чернову операторнозначной функции и однопараметрической полугруппы, найдены достаточные условия существования обобщенного среднего у случайной полугруппы и приведены примеры существования обобщенных средних у случайных полугрупп, не удовлетворяющих найденным достаточным условиям.

Дальнейшей целью настоящей работы является применение процедуры усреднения операторнозначных функций к построению полугрупп, разрешающих такие эволюционные уравнения как уравнение диффузии, уравнение диффузии дробного порядка, а также уравнение Шредингера с классическим и релятивистским гамильтонианами свободного движения.

**3. Ядра генераторов квантовых полугрупп**

Рассмотрим уравнение

$$u_t' = \Delta u,\ t > 0,\ x \in R;\ u\big|_{t=+0} = u_0(x). \tag{7}$$

Фигурирующий в (7) оператор Лапласа $-\Delta$ как самосопряженный оператор в пространстве $L_2(R)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $p^2$ и допускает спектральное разложение

$$-\Delta = \int_R \lambda^2 dE(\lambda), \tag{8}$$

где $E(\lambda)$ есть ортогональное разложение оператора импульса, т.е. оператора $-i\partial/\partial x$. Именно, если $F$ есть преобразование Фурье в пространстве $L_2(R)$, то

$$E(\lambda)u = F^{-1}\chi_{(-\infty;\,\lambda]}Fu.$$

Это означает, что если $\tilde{u}(p),\ p \in R$ является образом преобразования Фурье функции $u(x), x \in R$, то

$$\big(u, E(\lambda)u\big) = \int_R \chi_{(-\infty;\,\lambda]}(p)\left|\tilde{u}(p)\right|^2 dp.$$

Спектральное разложение (8) оператора Лапласа означает, что для любой функции $u \in W_2^2(R)$ справедливо равенство

$$\big(-\Delta u, u\big) = \int_R p^2 \left|\tilde{u}(p)\right|^2 dp. \tag{9}$$

Тогда функция $f(-\Delta)$ от оператора Лапласа определяется с помощью его спектрального разложения формулой

$$f(-\Delta) = \int_R f\left(\lambda^2\right) dE(\lambda), \tag{10}$$

означающей, что для любой функции $u \in W_2^2(R)$ справедливо равенство

$$\big(f(-\Delta)u, u\big) = \int_R f\left(p^2\right)\left|\tilde{u}(p)\right|^2 dp. \tag{11}$$

Следуя этой логике, определим дробную степень $(-\Delta)^\alpha, \alpha \in (0;1)$ от оператора Лапласа равенством, справедливым для любой функции $u \in W_2^2(R)$:

$$\left((-\Delta)^\alpha u, u\right) = \int_R \left(p^2\right)^\alpha \left|\tilde{u}(p)\right|^2 dp. \tag{12}$$

Этим равенством определяется действие оператора Шредингера дробного порядка. Аналогично действие квантового оператора релятивистской энергии свободного движения $\hat{H} = \sqrt{I + (\hat{p})^2}$ определяется условием, что для любой функции $u \in W_2^2(R)$ справедливо равенство

$$\left(\hat{H}u, u\right) = \int_R \sqrt{1 + p^2}\left|\tilde{u}(p)\right|^2 dp. \tag{13}$$

Рассматривая так называемые линейные квантования (см. [11, 12]), считаем, что символ $p$ отвечает оператору $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}$, ядро которого, как легко показать, имеет вид $\tilde{p}(x,y) = i\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y)$, т.е. является обобщенной функцией с точечным носителем. К тому же классу принадлежит и ядро оператора, которому отвечает символ $H(p) = p^2$: $\tilde{H}(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\delta(x-y)$. Оператор же, которому отвечает символ $H(p) = \sqrt{1+p^2}$, является нелокальным, а ядро этого оператора принадлежит к классу обобщенных функций медленного роста и представляется интегралом

$$\tilde{H}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-y)}\sqrt{1+p^2}\,dp. \tag{14}$$

Отметим, что не каждый оператор, отвечающий релятивистскому движению, имеет ядро в виде обобщенной функции медленного роста. Так, в [12] показано, что оператор, символом которой является скорость релятивистской частицы $u(p) = p/\sqrt{1+p^2}$, хотя и имеет нелокальное ядро, но оно выражается через обычные (не обобщенные) специальные функции:

$$\tilde{u}(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\exp(ipz)dp = \frac{1}{2}\left[I_1(x-y) - L_1(x-y) - \frac{2}{\pi}\right].$$

В этом выражении $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $L_\nu(z)$ – модифицированная функция Струве [22], выражающаяся через гипергеометрическую функцию ${}_1F_2$:

$$L_\nu(z) = e^{-i(\nu+1)\pi/2}\mathbf{H}_\nu\left(e^{i\pi/2}z\right),$$

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\frac{1}{\Gamma(\nu+3/2)}\,{}_1F_2\left(1;\frac{3}{2};\nu+\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right).$$

Для построения функции от оператора $\hat{H}$ с символом $H(p) = \sqrt{1+p^2}$ использование представления (14) технически не удобно, поскольку не позволяет оперировать непосредственно с ядрами таких операторов. В ряде случаев можно предложить способ обхода этих трудностей. Например, ядро соответствующего равновесного оператора плотности может быть получено в явном виде с помощью теоремы Чернова, согласно которой

$$e^{-\beta\hat{H}} = \lim_{n\to\infty}\left(\hat{B}(\beta/n)\right)^n, \quad B(t) = e^{-tH(p)}. \tag{15}$$

Легко проверить, что ядро оператора $\hat{B}$, представляемое интегралом

$$\widetilde{B}(x,y;\beta)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\sqrt{1+p^2}+ip(x-y)}dp, \qquad (16)$$

обладает тем свойством, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{B}(x,z;\beta)\widetilde{B}(z,y;\beta)dz=\widetilde{B}(x,y;2\beta),$$

и потому совпадает с ядром оператора плотности, получаемого из (15) предельным переходом. Для этого ядра можно предложить два эквивалентных представления, которые при $\beta\to 0$ стремятся к $\delta(x-y)$. Первое получается из (16) разложением функции $e^{ip(x-y)}$ в ряд по степеням $(x-y)$, что дает выражение

$$\widetilde{B}(x,y;\beta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{K_{n+1}(\beta)}{n!}\left(\frac{(x-y)^2}{2\beta}\right)^n. \qquad (17)$$

Для его вывода мы использовали представление $K$-функции (модифицированной функции Бесселя III рода) в виде (см. [22])

$$K_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}\int\limits_0^{\infty}e^{-z\sqrt{1+p^2}}p^{2(\nu-1)}dp.$$

Второе представление ядра (16) использует выражение (см. формулу 2.12.10(6) на стр. 188 справочника [22]) для $n$-мерной характеристической функции распределения $e^{-\beta\sqrt{1+p^2}}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\sqrt{1+p^2}+ip(x-y)}d^n p=\left(\frac{2\pi}{|x-y|}\right)^{n/2}|x-y|\int\limits_0^{\infty}p^{n/2}e^{-\beta\sqrt{1+p^2}}J_{\frac{n}{2}-1}\left(p|x-y|\right)dp=$$
$$=(2\pi)^{n/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\left(\beta^2+|x-y|^2\right)^{n/2-1/4}}K_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{\beta^2+|x-y|^2}\right). \qquad (18)$$

При $n=1$ из (18) следует формула

$$\widetilde{B}(x,y;\beta)=\frac{2\beta}{\left(\beta^2+|x-y|^2\right)^{1/4}}K_1\left(\sqrt{\beta^2+|x-y|^2}\right). \qquad (19)$$

Заметим теперь, что если в выражении (15) вместо оператора плотности $e^{-\beta\hat{H}}$ рассмотреть оператор $e^{-it\hat{H}}$, разрешающий задачу Коши для уравнения Шредингера с релятивистским гамильтонианом, то ядро (16) будет выражаться через комплекснозначную комбинацию функций Бесселя согласно [22]:

$$\widetilde{B}(x,y;t)=\frac{-2it}{\left(|x-y|^2-t^2\right)^{1/4}}K_1\left(\sqrt{|x-y|^2-t^2}\right). \qquad (20)$$

В этой формуле при $t>|x-y|$ используются представления

$$K_\nu(z) = -\frac{i\pi}{2} e^{-i\pi\nu/2} H_\nu^2(z), \quad H_\nu^2(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z),$$

где $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ – функции Бесселя I и II родов.

Подчеркнем, что при этом ядро (16) оператора эволюции $e^{-it\hat{H}}$ является пределом при $n \to \infty$ от $n$-кратного сверточного произведения ядер (20).

## 4. Усреднение случайных оператор-функций

В этом разделе мы докажем ряд утверждений, показывающих, как использовать введенные выше определения 4 и 5 эквивалентности по Чернову для построения решений эволюционных уравнений.

*Предложение 1. Пусть $H = L_2(R)$ и для каждого $\varepsilon \in R$ и каждого $v \in R$ определено семейство (не полугруппа) преобразований $U_{\varepsilon,v}(t)$, $t \ge 0$ пространства $H$, действующих по формуле*

$$U_{\varepsilon,v}(t)u(x) = u\left(x + vt + \varepsilon\sqrt{t}\right), \; t \ge 0. \tag{21}$$

*Пусть также на $R$ задана вероятностная мера с плотностью $\rho_\mu$ такая, что $\rho_\mu$ является четной функцией и существуют конечные второй и третий моменты, причем второй момент строго больше нуля: $\int\limits_R \varepsilon^2 \rho_\mu(\varepsilon) d\varepsilon = 2D > 0$.*

*Тогда при любом $v \in R$ семейство усредненных преобразований*

$$U_v^\mu(t) = \int\limits_R U_{\varepsilon,v}(t)\rho_\mu(\varepsilon)d\varepsilon \tag{22}$$

*является эквивалентным по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши для уравнения теплопроводности*

$$u'_t = Du''_{xx} + vu'_x, \quad t > 0, \quad x \in R; \quad u\big|_{t=+0} = u_0. \tag{23}$$

Доказательство.

Поскольку, как следует из (21), $U_{\varepsilon,v}(0) = I$ при всех $\varepsilon \in R$, то и $U_v^\mu(t) = I$ при любой мере $\mu$, удовлетворяющей условиям предложения 1. Кроме того, из (21) также следует, что $\left\|U_{\varepsilon,v}(t)\right\|_{B(H)} = 1$ при всех $\varepsilon \in R$ и $t \ge 0$, поэтому

$$\left\|U_v^\mu(t)\right\|_{B(H)} \le \left\|U_{\varepsilon,v}(t)\right\|_{B(H)} \cdot \mathrm{var}(\mu) = 1$$

при любой мере $\mu$, удовлетворяющей условиям предложения 1.

Далее, для любого $u \in C_0^\infty(R)$, для любого $t \ge 0$ и при всех $\varepsilon \in R$ существует такое число $\theta \in (0;1)$, что выполнено равенство

$$\left(U_{\varepsilon,v}(t) - I\right)u(x) = u\left(x + vt + \varepsilon\sqrt{t}\right) - u(x) =$$

$$= u'_x(x) \cdot \left(vt + \varepsilon\sqrt{t}\right) + \frac{1}{2}u''_{xx}\left(vt + \varepsilon\sqrt{t}\right)^2 + \frac{1}{6}u'''_{xxx}\left(x + \theta \cdot \left(vt + \varepsilon\sqrt{t}\right)\right) \cdot \left(vt + \varepsilon\sqrt{t}\right)^3.$$

Поскольку левая часть в этой цепочке равенств является непрерывной функцией по совокупности аргументов $\varepsilon, t, x$, то такой же будет и правая часть. Следовательно, в силу предположения о моментах меры $\mu$ получаем после интегрирования этого равенства, используя (22), следующее выражение:

$$\left(U_v^{\mu}(t)-I\right)u(x)-u'_x(x)vt-u''_{xx}Dt=\frac{1}{6}\int_R u\left(x+\theta\cdot\left(vt+\varepsilon\sqrt{t}\right)\right)\cdot\left(vt+\varepsilon\sqrt{t}\right)^3\rho_{\mu}(\varepsilon)d\varepsilon .$$

В силу предположения о принадлежности $u\in C_0^{\infty}(R)$ справедлива оценка

$$\left\|\left(U_v^{\mu}(t)-I\right)\frac{u}{t}-v\frac{\partial u}{\partial x}-D\Delta u\right\|_H=o(1),\quad t\to 0 .$$

Тогда, поскольку задача Коши (23) порождает полугруппу $V$ сжимающих преобразований пространства $H$, а ее генератор совпадает с замыканием оператора, действующего по правилу $u\to v\dfrac{\partial u}{\partial x}+D\Delta u$, то выполняются все условия теоремы Чернова и семейство преобразований (22) эквивалентно по Чернову полугруппе $V$, разрешающей задачу Коши (23).

Предложение 1 доказано.

В ряде задач для представления решений эволюционных дифференциальных уравнений посредством математического ожидания итераций независимых случайных операторов сдвига требуется применить операцию усреднения не по мере, а по псевдомере. Следуя [18, 23], псевдомерой на множестве $S$ будем называть комплекснозначную аддитивную функцию $\mu$ множества, определенную на некотором кольце его подмножеств.

*Предложение 2. Пусть $H=L_2(R)$ и для каждого $\varepsilon\in R$ определено семейство (не полугруппа) преобразований $U_{\varepsilon}(t),\ t\geq 0$ пространства $H$, действующих по формуле*

$$U_{\varepsilon}(t)u(x)=u\left(x+\varepsilon\sqrt{t}\right),\ t\geq 0. \qquad (24)$$

*Пусть на $R$ задана псевдомера (комплекснозначная аддитивная функция множества, определенная на кольце измеримых по Лебегу подмножеств числовой прямой) $\mu$ с плотностью*

$$\rho_{\mu}(x)=\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{4\pi D}}\exp\left(-\frac{ix^2}{4D}\right),\quad x\in R. \qquad (25)$$

*Тогда семейство усредненных преобразований*

$$U^{\mu}(t)=\int_R U_{\varepsilon}(t)\rho_{\mu}(\varepsilon)d\varepsilon,\quad t\geq 0 \qquad (26)$$

*является эквивалентным по Чернову полугруппе (и даже совпадает с ней), разрешающей задачу Коши для уравнения Шредингера*

$$iu'_t=Du''_{xx},\quad t>0,\quad x\in R;\quad u\big|_{t=+0}=u_0. \qquad (27)$$

Доказательство.

Поскольку $u_0\in H$, то для любого $t\geq 0$ справедлива цепочка равенств

$$u(t,x)=[U^{\mu}(t)u](x)=\int_R u_0\left(x-\varepsilon\sqrt{t}\right)\rho_{\mu}(\varepsilon)d\varepsilon=\int_R u_0(x-y)\frac{1}{\sqrt{t}}\rho_{\mu}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)dy.$$

Переходя к Фурье-образам по переменной $x$, получаем отсюда с учетом (25)

$$\tilde{u}(t,s)=\tilde{u}_0(s)\tilde{\rho}_{\mu}\left(s\sqrt{t}\right)=\tilde{u}_0(s)e^{-itDs^2}.$$

Следовательно, семейство преобразований (26) разрешает задачу Коши (27). Предложение 2 доказано.

Заметим, что псевдомера $\mu$, удовлетворяющая условиям предложения 2, обладает ограниченной вариацией на каждом измеримом по Лебегу компакте прямой $R$, но в целом вариация псевдомеры $\mu$ на прямой $R$ равна бесконечности.

Аналогично, используя преобразование Фурье, можно получить решение задачи Коши для уравнения диффузии дробного порядка и показать, что разрешающий оператор может быть построен и по принципу эквивалентности в соответствии с определениями 4 и 5. Ранее, насколько известно авторам, этот метод к задачам дробной диффузии не применялся.

*Предложение 3. Пусть* $H=L_2(R)$ *и для каждого* $\varepsilon\in R$ *определено семейство преобразований* $U_{\varepsilon}(t),\ t\geq 0$ *пространства* $H$*, действующих по формуле*

$$U_{\varepsilon}(t)u(x)=u\left(x+\varepsilon t^{\sigma}\right),\ t\geq 0,\quad \sigma>0. \tag{28}$$

*Пусть на* $R$ *задана знакопеременная мера (вещественнозначная аддитивная функция множества, определенная на кольце измеримых по Лебегу подмножеств числовой прямой)* $\mu$*, преобразование Фурье плотности которой относительно меры Лебега имеет вид*

$$\tilde{\rho}_{\mu}(s)=\exp\left(-D|s|^{2\alpha}\right),\quad s\in R,\quad \alpha>0. \tag{29}$$

*Тогда, если* $\sigma=1/(2\alpha)$*, семейство усредненных преобразований*

$$U^{\mu}(t)=\int_R U_{\varepsilon}(t)\rho_{\mu}(\varepsilon)d\varepsilon,\quad t\geq 0 \tag{30}$$

*является эквивалентным по Чернову полугруппе (и даже совпадает с ней), разрешающей задачу Коши для уравнения диффузии дробного порядка*

$$u'_t=-D(-\Delta)^{\alpha}u,\quad t>0,\quad x\in R;\quad u|_{t=+0}=u_0. \tag{31}$$

Доказательство.

Мера $\mu$ в данном случае имеет бесконечно дифференцируемую плотность $\rho_{\mu}(x)$, которая при $\alpha>1/2$ функция убывает на бесконечности быстрее, чем $|x|^{-1/(2\alpha)}$, и мера $\mu$ обладает ограниченной вариацией. При произвольном $\alpha>0$ плотность меры является локально интегрируемой функцией. Отметим, что распределение $\rho_{\mu}(x)$ допускает представление, аналогичное (9):

$$p_{\mu}(x)=\frac{1}{\pi\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right)x^{2n}. \tag{32}$$

Повторяя ход доказательства предложения 2, имеем

$$u(t,x)=[U^{\mu}(t)u](x)=\int\limits_R u_0\left(x-\varepsilon t^{\sigma}\right)\rho_{\mu}(\varepsilon)d\varepsilon=\int\limits_R u_0(x-y)t^{-\sigma}\rho_{\mu}\left(\frac{y}{t^{\sigma}}\right)dy.$$

Переходя к Фурье-образам по переменной $x$, получаем отсюда с учетом (29)

$$\tilde{u}(t,s)=\tilde{u}_0(s)\tilde{\rho}_{\mu}\left(st^{\sigma}\right)=\tilde{u}_0(s)e^{-D|s|^{2\alpha}t^{2\alpha\sigma}}.$$

Следовательно, семейство преобразований (30) разрешает задачу Коши (31). Предложение 3 доказано.

*Предложение 4. Пусть* $H=L_2(R)$ *и для каждого* $\varepsilon\in R$ *определено семейство преобразований* $U_{\varepsilon}(t),\ t\geq 0$ *пространства* $H$, *действующих по формуле*

$$U_{\varepsilon}(t)u(x)=u\left(x+\varepsilon t\right),\ t\geq 0. \qquad (33)$$

*Пусть на* $R$ *задано однопараметрическое семейство знакопеременных мер* $\mu(t),\ t\geq 0$, *преобразование Фурье плотности которых относительно меры Лебега определено равенством*

$$\tilde{\rho}_{\mu}(s)=\exp\left(-D\sqrt{|s|^2+t^2}\right),\quad s\in R. \qquad (34)$$

*Тогда семейство усредненных преобразований*

$$U^{\mu}(t)=\int\limits_R U_{\varepsilon}(t)\rho_{\mu}(\varepsilon)d\varepsilon,\quad t\geq 0 \qquad (35)$$

*является эквивалентным по Чернову полугруппе (и даже совпадает с ней), разрешающей задачу Коши для уравнения*

$$u'_t=-D\sqrt{(-\Delta)+I}\,u,\quad t>0,\quad x\in R;\quad u|_{t=+0}=u_0. \qquad (36)$$

Доказательство.

Мера $\mu$ в данном случае имеет бесконечно дифференцируемую плотность $\rho_{\mu}(x)$, которая убывает на бесконечности быстрее любой степени функции $|x|$. При произвольном $t>0$ плотность меры является абсолютно интегрируемой функцией. Конкретный вид $p_{\mu}(x)$ для решения этой задачи дается формулой (19), в которой следует провести переобозначения: $\beta\to t,\ x-y\to x$. Имеем далее

$$u(t,x)=[U^{\mu}(t)u](x)=\int\limits_R u_0\left(x-\varepsilon t\right)\rho_{\mu}(\varepsilon)d\varepsilon=\int\limits_R u_0(x-y)t^{-1}\rho_{\mu}\left(\frac{y}{t}\right)dy.$$

Переходя к Фурье-образам по переменной $x$, получаем отсюда с учетом (34)

$$\tilde{u}(t,s)=\tilde{u}_0(s)\tilde{\rho}_{\mu}\left(st\right)=\tilde{u}_0(s)e^{-Dt\sqrt{1+|s|^2}}.$$

Следовательно, семейство преобразований (35) разрешает задачу Коши (36). Предложение 4 доказано.

Для решения уравнения Шредингера с оператором Гамильтона, которому отвечает релятивистский гамильтониан свободного движения, потребуется усреднение полугрупп по комплекснозначной псевдомере.

*Предложение 5. Пусть* $H = L_2(R)$ *и для каждого* $\varepsilon \in R$ *определено семейство преобразований* $U_\varepsilon(t),\ t \ge 0$ *пространства* $H$*, действующих по формуле*

$$U_\varepsilon(t)u(x) = u(x + \varepsilon t),\ t \ge 0. \qquad (37)$$

*Пусть на* $R$ *задано однопараметрическое семейство комплекснозначных псевдомер* $\mu(t),\ t \ge 0$*, преобразование Фурье плотности которых относительно меры Лебега определено равенством*

$$\tilde{\rho}_\mu(s) = \exp\left(-iD\sqrt{|s|^2 + t^2}\right), \quad s \in R. \qquad (38)$$

*Тогда семейство усредненных преобразований*

$$U^\mu(t) = \int_R U_\varepsilon(t)\rho_\mu(\varepsilon)d\varepsilon, \quad t \ge 0 \qquad (39)$$

*является эквивалентным по Чернову полугруппе (и даже совпадает с ней), разрешающей задачу Коши для уравнения*

$$u_t' = -iD\sqrt{(-\Delta) + I}\,u, \quad t > 0, \quad x \in R; \quad u|_{t=+0} = u_0. \qquad (40)$$

Доказательство.
Согласно формуле (14), плотность псевдомеры $\mu$ в данном случае является обобщенной функцией медленного роста. Свертка же обобщенной функции медленного роста с начальной функцией $u_0$ из пространства Соболева $W_2^k(R)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^k(R)$. Действительно, принадлежность начальной функции пространству Соболева $W_2^k(R)$ равносильна условию

$$\sqrt{1 + |p|^{2k}}\,\tilde{u}_0(p) \in L_2(R).$$

Аналогично принадлежность свертки $u_0 * \rho_\mu$ пространству Соболева $W_2^k(R)$ равносильна условию

$$\sqrt{1 + |p|^{2k}}\,\tilde{u}_0(p)\tilde{\rho}_\mu(p) \in L_2(R),$$

которое выполняется для плотности, задаваемой в (38).
Имеем далее

$$u(t,x) = [U^\mu(t)u](x) = \int_R u_0(x - \varepsilon t)\rho_\mu(\varepsilon)d\varepsilon = \int_R u_0(x - y)t^{-1}\rho_\mu\left(\frac{y}{t}\right)dy.$$

Переходя к Фурье-образам по переменной $x$, получаем отсюда с учетом (38)

$$\tilde{u}(t,s) = \tilde{u}_0(s)\tilde{\rho}_\mu(st) = \tilde{u}_0(s)e^{-iDt\sqrt{1+|s|^2}}.$$

Следовательно, семейство преобразований (39) разрешает задачу Коши (40).
Предложение 5 доказано.

Итак, в каждом из рассмотренных примеров построения операторов квантовой эволюции эти операторы получены в результате процедуры усреднения, которую можно трактовать как вычисление математического ожидания случайных операторов сдвига по мере или псевдомере. Тем самым динамика квантовых систем может быть построена как усреднение случайных сдвигов в координатном пространстве исходной классической системы.

Авторы благодарят профессоров Г.Г. Амосова, О.Г. Смолянова, Е.Т. Шавгулидзе и Н.Н. Шамарова за плодотворные обсуждения затронутых в работе проблем.

**Литература**

1. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys., 20, 1948. P. 367-387.
2. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys., 43, V. 10, 2002. P. 5161-5171.
3. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation // J. Math. Phys., 5, V. 3, 1964. P. 332-343.
4. Smolyanov O.G., Weizsacker H., Wittin O. Chernoff's theorem and discrete time approximation of Brownian motion on manifolds // Potential Anal., 26, 2007. P. 1-29.
5. Бутко Я.А., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана в стохастической и квантовой динамике / В сб. Современные проблемы математики и механики, 6, № 1, 2011. С. 61-75.
6. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Скорость сходимости фейнмановских интегралов полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // ТМФ, 2012. Т.172, №1. С. 122-137.
7. Сакбаев В.Ж. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций / В сб. Современная математика. Фундаментальные направления, 43, 2012. С. 3-174.
8. Сакбаев В.Ж. О многозначных отображениях, задаваемых регуляризацией уравнения Шредингера с вырождением // ЖВМ и МФ, 46, 2006. С. 682-698.
9. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal., 84, 1968. P. 238-242.
10. Фейнман Р. Статистическая механика (пер. с англ.). – М.: Мир, 1975. – 407 с.
11. Березин Ф.А. Невинеровские континуальные интегралы // ТМФ, 1971, т. 6, № 2, стр. 194-212.
12. Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. – М.: МФТИ, 2004. – 236 с.
13. Орлов Ю.Н., Осминин К.П. Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. – М.: Эдиториал УРСС/Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 384 с.
14. Босов А.Д., Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н. Моделирование нестационарного временного ряда с заданными свойствами выборочного распределения // Математическое моделирование, 2014. № 3. С. 97-107.

15. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Труды МИРАН, 2014. Т. 285. С. 232-243.
16. Sakbaev V.Zh. Stochastic properties of degenerated quantum systems // Infinitely dimensional analysis and quantum probabilities, 13, V.1, 2010. P. 65-85.
17. Sakbaev V.Zh. On the variation description of the trajectories quantum dynamical maps // p-adic numbers, ultrametric analysis and application, 4, V.2, 2012. P. 120-134.
18. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. – М.: МГУ, 1990. – 150 с.
19. Hewitt E., Iosida K. Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc., 72, 1952. P. 46-66.
20. Като Т. Теория возмущений линейных операторов (пер с англ.). – М.: Мир, 1972. – 342 с.
21. Додонов В.В., Манько В.И., Скаржинский В.Д. Неоднозначности вариационного описания классических систем и проблема квантования // Труды ФИАН, 152, 1982. С. 37-89.
22. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
23. Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. Негауссовские лагранжевы формулы Фейнмана // Доклады РАН, 457, № 1, 2014. С. 28-31.