ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 49 за 2015 г.

Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.

Динамика частиц в оригинальной метрике Шварцшильда

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Динамика частиц в оригинальной метрике Шварцшильда // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 49. 21 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-49

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Н.Н. Фимин,   В.М. Чечёткин

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ОРИГИНАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Москва — 2015

Фимин Н.Н., Чечёткин В.М.

Динамика частиц в оригинальной метрике Шварцшильда

Рассматриваются свойства оригинальной метрики Шварцшильда точечной тяготеющей массы. Установлены законы движения в соответствующем пространстве—времени. Исследуется переход от метрики Шварцшильда к метрике “пылевого мира”. Анализируется динамика системы частиц в постньютоновском приближении.

Ключевые слова: Метрика Шварцшильда, метрика Гильберта, постньютоновское приближение, горизонт событий, многочастичная система.

Nikolay Nikolaevich Fimin, Valery Mikhailovich Chechetkin

Particle dynamics in original Schwarzschild metric

The properties of original Schwarzschild metric for point–like mass are considered. The motion laws for Schwarzschild space–time are analyzed. The transition of Schwarzschild metric to “dust world” metric is investigated. The dynamics of particle system in post–Newtonian approximation is considered.

Key words: Schwarzschild metric, Hilbert metric, post–Newtonian approximation, event horizon, multiparticle system.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 14-01-00670 и № 14-29-06086.

Оглавление

1. Введение. Общие замечания

Изучению движения отдельных частиц и многочастичных систем в метрике, создаваемой точечным гравитирующим телом, посвящена обширная литература (см., например, [1]–[5] и приведенную там библиографию). Тем не менее, актуальность данной проблемы очевидна и интерес к данной тематике никак нельзя назвать угасающим. В первую очередь, безусловно, это связано с описанием различных аспектов движения частиц вблизи поверхности "горизонта событий" (в частности, рассеяния частиц на черной дыре, их прохождения либо отражения от горизонта, испарения черной дыры). Кроме этого, вполне можно утверждать, что поведение нелокальных объектов (упорядоченных совокупностей точечных взаимодействующих частиц, частиц с внутренней сложной структурой) в окрестности псевдосингулярной поверхности к настоящему времени изучено недостаточно полно.

Признавая интерес к изучению вышеотмеченных вопросов вполне закономерным, целесообразно, однако же, в приоритетном порядке обратиться к анализу динамики (систем) частиц в метрике, соответствующей пространству–времени тяготеющей центральной точки, принципиально с иной стороны. Вид компонент метрического тензора g_{ik}, получаемых в результате решения соответствующих уравнений Эйнштейна, существенно зависит от дополнительных условий, которые формулируются, исходя из априорных физических предпосылок. "Стандартный" вид такой метрики [6], известной как метрика Шварцшильда (что, вообще говоря, исторически неправомерно), не является единственным в этом плане (см., например, [7]–[10]). При этом различие формы g_{ik} приводит к принципиальному изменению динамики частиц, в том числе смещению точек остановки частиц при движении в соответствующей метрике и изменению поля ускорений, промежутка времени достижения определенной радиальной координаты — в том случае (рассматриваемом ниже в настоящей работе), когда решения уравнений ОТО не предусматривают наличие псевдосингулярности типа горизонта событий (при этом также не существует "подгоризонтной" области нестационарности метрики гравитирующего центра).

Окончательный ответ на вопрос о физической реализуемости пространства–времени, отвечающего определенному набору метрических коэффициентов (получаемых из решения уравнений Эйнштейна при конкретном выборе тензора энергии–импульса), не может быть решен иначе, чем путем изучения свойств динамической системы, находящейся в нем. В противном случае любые умопостроения касательно структуры изучаемого риманова многообразия являются не более чем дидактическими упражнениями в прикладной дифференциальной геометрии. Безусловно, оптимальным вариантом исследований динамики частиц в условиях реализации ОТО является наблюдение за естественными астрофизическими процессами и следствиями возможных экспериментов. Однако затруднительность определения влияния определенного фактора в процессе интерпретации воздействия на динамическую систему следствий многих физических процессов приводит к необходимости выявления в ходе предварительного анализа всех возможных "проблемных ситуаций" при реализации динамических процессов в пространстве–времени, отвечающем заданной метрике, и одновременного поиска метрики, в которой указанные динамические процессы (в пределах некоторой погрешности, присущей наблюдениям) были бы возможны. При детальном анализе свойств метрики точечного гравитирующего центра в той форме, которая в литературе приводится практически повсеместно (обладающей "горизонтом событий" как "односторонней мембраной" и требующей расширения в виде метрики Крускала), становится ясно, что с ней связан целый ряд таких "проблемных ситуаций". Следует отметить, что "особенность Шварцшильда" привлекала к себе внимание уже достаточно давно, причем в некоторых работах еще в 1920–30-х гг. авторитетными исследователями, среди которых выделялась группа авторов, чьими усилиями общая теория относительности приобрела современный вполне завершенный вид (А. Эддингтон [11]–[12], М. Бриллюэн [13], Л. Инфельд [14], Г. Вейль [15]–[16], П. Дирак [17], Н. Розен [18]), были выдвинуты весьма серьезные аргументы против толкования этой "особенности" (и вообще комплекса свойств сферически–симметричного гравитационного поля) в том смысле, который был придан ей после вышеупомянутой работы Д. Гильберта [6]. Отдельно следует выделить работу А. Эйнштейна [19], где "...целью исследования было определить, могут ли частицы сконцентрироваться столь близко от центра, чтобы в полном поле обнаруживалась особенность Шварцшильда. Исследование показало, что еще перед тем, как достигается критическая концентрация частиц, некоторые (наружные) частицы начинают двигаться со скоростью света, т. е. вдоль нулевой мировой линии. Поэтому невозможно так сконцентрировать частицы системы, чтобы в поле возникала особенность" [20] (при этом энергия частиц стремится к бесконечности). Также в качестве труднообъяснимых моментов в общепринятой теории можно указать на несовпадение асимптотик рассматриваемой метрики точечного центра и метрики коллапса ограниченной звезды Оппенгеймера–Снайдера [21]–[22], неприводимость к стандартному виду метрики задачи о гравитационном поле с тензором энергии–импульса $T^i_j \sim M\delta(\mathbf{r})$ [23], а также многое другое.

В настоящей работе авторы обращаются к анализу оригинальной метрики Шварцшильда, которая самодостаточна, свободна от физических парадоксов и не требует разнообразных "пополнений".

2. Метрика Гильберта и оригинальная метрика Шварцшильда

Простейшим математическим объектом, к которому могут быть применены методы общей теории относительности, является поле точечной частицы в пустом пространстве. При этом рассматривается сферически–симметричная метрика, являющаяся решением системы полевых уравнений Эйнштейна при условии, что тензор энергии–импульса тождественно равен нулю вне точки–источника поля (тем самым определяется метрика "внешней" по отношению к данному источнику области пространства).

В литературе метрика точечной массы в пустоте обычно приводится в следующей форме:

$$ds^2_H = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{c^2\left(1 - \dfrac{\alpha}{r}\right)} - \frac{r^2}{c^2}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \tag{1}$$

где $\alpha \equiv 2GM/c^2$ (G — гравитационная постоянная, c — скорость света (полагаем $c = 1$), M — масса, сосредоточенная в точке–источнике поля). Здесь и далее в обозначениях мы следуем [24], так что элемент собственного времени $d\tau = ds$ (связь со стандартным интервалом $\mathfrak{s}$: $\int d\mathfrak{s} = \int c d\tau$). Она была введена в рассмотрение Д. Гильбертом в работе [6], но связана им с именем К. Шварцшильда. Однако она не совпадает по форме с метрикой, введенной самим Шварцшильдом ранее в работе [7]:

$$ds^2_S = \left(1 - \frac{\alpha}{\mathcal{R}}\right)dt^2 - \frac{d\mathcal{R}^2}{c^2\left(1 - \dfrac{\alpha}{\mathcal{R}}\right)} - \frac{\mathcal{R}^2}{c^2}\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right), \;\; \mathcal{R}(r) \equiv \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3}. \tag{2}$$

Поэтому в настоящей работе мы будем называть метрику (1) *метрикой Гильберта* (МГ), а метрику (2) — соответственно, *оригинальной метрикой Шварцшильда* (или просто МШ). Различия между ними очевидны: для (2) особенность метрики $r = 0$ является единственной ("физическая сингулярность"), а для (1) имеем две особенности: истинную $r = 0$ и псевдоособенность

$r = \alpha$ ("горизонт событий"). Принцип соответствия (совпадение на больших расстояниях от центра симметрии гравитационного потенциала с ньютоновским ϕ_N: $g_{00} = 1 - \alpha(r^3+\zeta)^{-1/3} = 1 + 2\phi_N/c^2$, $\phi_N = -GM/r$) дает $\alpha = 2GM/c^2$ (при не слишком больших $\zeta > 0$).

Примечательным отличием по явному виду МГ и МШ является использование в качестве радиальных координат соответственно переменных r (величины, которая задействована в МГ) и $\mathcal{R} = (r^3+\zeta)^{1/3}$ ($\zeta \in \mathbb{R}^1_+$). Следует отметить, что в пособиях по ОТО (например, в [25], стр. 386) утверждается: "...выбор радиус–вектора r является произвольным". Данная фраза несколько дезориентирует читателя — подразумевается ли произвольность в смысле изменения масштаба, либо также по отношению к пространственной трансляции? Кроме того, правомерно ли вообще величину r называть радиус–вектором в МГ? Эти вопросы требуют ответов в первую очередь.

Рассмотрим два 3–мерных многообразия $\mathscr{A}^{(3)}_E$ и $\mathscr{A}^{(3)}_R$, оснащенных соответственно евклидовой и римановой метрикой; установим соответствие между системами сферических координат и выпишем дифференциалы дуг окружностей на обоих многообразиях:

$$d\lambda^2_E \equiv d\big(\lambda(\mathscr{A}^{(3)}_E)\big)^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2),$$

$$d\lambda^2_R \equiv d\big(\lambda(\mathscr{A}^{(3)}_R)\big)^2 = (\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R])^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2),$$

где ϱ следует интерпретировать как радиус кривизны на $\mathscr{A}^{(3)}_2$ (на евклидовом многообразии $\mathscr{A}^{(3)}_E$ гауссова кривизна $k_G = r^{-2}$, т. е. там $\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_E] \equiv r$). Далее, рассмотрим линейные элементы:

$$d\ell^2_E = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \;\; d\ell^2_R = d(\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_R])^2 + (\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R])^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2),$$

где $d(\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_R]) = \big(f(\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R])\big)^{1/2} d(\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R])$, $f(...)$ — некоторая неизвестная функция. Саму величину $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_R]$ можно назвать "модулем радиус–вектора на римановом многообразии"; при этом, очевидно, $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_E]$ представляет собой расстояние от начала координат до некоторой точки $A \in \mathscr{A}^{(3)}_E$ и $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_E] = \int_0^r dr = r = \varrho[\mathscr{A}^{(3)}_E]$. Иными словами, в евклидовом пространстве длина радиус–вектора равна радиусу кривизны.

В то же время для неевклидова (риманова) многообразия общего вида имеем [26]:

$$\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_R] = \int_0^{\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_R]} d\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}^{(3)}_R] = \int_{\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R](0)}^{\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R](r)} \big(f(\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R])\big)^{1/2} d(\varrho[\mathscr{A}^{(3)}_R]),$$

где величина $\varrho[\mathscr{A}_R^{(3)}](0)$ неизвестна (т. к. неизвестна зависимость $\varrho[\mathscr{A}_R^{(3)}](r)$).

Если положить, что метрика на $\mathscr{A}_E^{(3)}$ совпадает с пространственной частью метрики Минковского $ds^2 = dt^2 - c^{-2}dr^2 - c^{-2}r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$, то $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_E^{(3)}] = \int_0^r dr = r$ и $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_E^{(3)}] = r = \varrho[\mathscr{A}_E^{(3)}]$. В то же время, если взять пространственную компоненту МГ

$$d\ell_H^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{3}$$

то $\varrho[\mathscr{A}_R^{(3)}] = r$, но

$$\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(3)}] = \int \left(\frac{r}{r - 2GM/c^2}\right)^{1/2} dr \neq r = \varrho[\mathscr{A}_R^{(3)}]. \tag{4}$$

Таким образом, переменная r в метрике Гильберта не является радиус–вектором.

Следует отметить, что в работе в [25] утверждается, что геометрический смысл координаты r определяется тем, что в метрике (3) длина окружности с центром в центре поля равна $\sigma(r) = 2\pi r$. Это не постулат. На самом деле это не более, чем следствие прямого вычисления длины окружности, задаваемой, например, в параметрическом виде, соотношениями $\mathscr{U}(\varphi) = r(= \mathrm{const}_1)$, $\mathscr{V}(\varphi) = \varphi$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ на поверхности с введенным выше элементом длины $d\ell_H^2$ (так что коэффициенты метрики (3) $g_{rr}(\mathscr{U}, \mathscr{V}) = (1 - \alpha/\mathscr{U})^{-1}$, $g_{\varphi\varphi}(\mathscr{U}, \mathscr{V}) = \mathscr{U}^2 \sin^2(\vartheta_k)$) в "экваториальном" сечении плоскостью $\vartheta_{k=0} = \pi/2$. Выражение для этой длины, согласно [27], имеет следующий вид (в общем сечении плоскостью $\vartheta_k (= \mathrm{const}_2\, \forall k)$):

$$\sigma_k(\mathscr{U}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{rr}(\mathscr{U}, \mathscr{V})\left(\frac{d\mathscr{U}}{d\varphi}\right)^2 + g_{\varphi\varphi}(\mathscr{U}, \mathscr{V})\left(\frac{d\mathscr{V}}{d\varphi}\right)^2} = \int_0^{2\pi} \mathscr{U} \sin(\vartheta_k)\, d\varphi.$$

При $k = 0$ имеем $\sigma_0(r) = 2\pi r \equiv \sigma(r)$, для $k \neq 0$ (широтном сечении) $\sigma_k < \sigma$ (то есть включение в рассмотрение дополнительной координаты ϑ приводит при $r = \mathrm{const}$ к уменьшению длины окружности до величины $2\pi r \sin(\vartheta)$). Таким образом, если выбрать в пространственной компоненте МГ в качестве множителя при $d\Omega^2$ не r^2, а $\Psi^2(r, C_i)$, где $\Psi(r, C_i)$ — произвольная гладкая функция, зависящая только от r и набора некоторых параметров ($\mathscr{U}(\varphi) = \Psi(r, C_i)$, $\mathscr{V}(\varphi) = \varphi$), то длина окружности с центром в центре поля будет равна $\sigma_\Psi(r) = 2\pi\Psi(r, C_i)$. Можно провести переобозначение $\Psi(r, C_i) \equiv r'$, однако следует помнить, что из условия $r \to 0$ не следует

$r' \to 0$ (так что вид метрики (3) неявно подразумевает вспомогательное требование на r: $\lim_{r\to 0} g_{jj}\big(r'(r)\big)\big|_{j=\varphi,\vartheta} = 0$, обоснованность которого в известной авторам литературе не обсуждалась).

Рассмотрим, в каких пределах изменяется переменная r. В соответствии с (4) имеем

$$\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(3)}](r) = \sqrt{r^2 - \alpha r} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|r - \frac{\alpha}{2} + \sqrt{r^2 - \alpha r}\right| + C_0,$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Используем постулированное выше взаимное соответствие пространственной части метрики Гильберта с соответствующей частью метрики Минковского: для некоторой величины r_0 имеем $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(3)}](r_0) = 0$, где r_0 определяется из уравнения

$$\sqrt{r_0^2 - \alpha r_0} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|r_0 - \frac{\alpha}{2} + \sqrt{r_0^2 - \alpha r_0}\right| + C_0 = 0$$

при $C_0 = -\frac{1}{2}\alpha\ln\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

Точка с радиус–вектором r_0 соответствует центру сферической симметрии на многообразии $\mathscr{A}_E^{(3)}$ (евклидовом, получающимся из пространства Минковского элиминацией временной переменной). Таким образом,

$$\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(3)}](r) = \sqrt{r^2 - \alpha r} + \frac{\alpha}{2}\big(\ln\left|2r - \alpha + 2\sqrt{r^2 - \alpha r}\right| - \ln(\alpha)\big).$$

$$r \in [\alpha \equiv 2GMc^{-2}; \infty[\;\to\; \widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(3)}](r) \in [0, \infty[,$$

причем $r = 2GMc^{-2}$ соответствует особой точке $d\ell_H^2$ (см. (3)). Тем самым мы получаем, что центр сферической симметрии в $\mathscr{A}_E^{(3)}$ расположен не в точке $r_0 = 0$, а в точке $r_0 = 2GMc^{-2}$, где $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(3)}](r_0 = 2GMc^{-2}) = 0$ в метрике многообразия $\mathscr{A}_R^{(3)}$ (соответствующей пространственной части метрики (1)).

Рассмотрим пространственный элемент многообразия $\mathscr{A}_E^{(4)}$ с метрикой Минковского, предполагая, что центр сферы с пространственным элементом $d\ell_E^2$, сдвинут на величину r_0 относительно начала координат:

$$ds^2 = dt^2 - c^{-2}(d|r - r_0|)^2 - c^{-2}|r - r_0|^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) = \tag{5}$$

$$= dt^2 - c^{-2}dr^2 - c^{-2}|r - r_0|^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \quad 0 \le |r - r_0| \le \infty.$$

Получаем: $\varrho[\mathscr{A}_E^{(4)}] = |r - r_0|$, ибо

$$\varrho[\mathscr{A}_E^{(4)}] = \int_0^{|r-r_0|} d|r - r_0| = \int_{r_0}^{r} \frac{r - r_0}{|r - r_0|} dr = |r - r_0|.$$

Обобщим метрику (5):

$$ds^2 = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{X}(\wp))dt^2 - c^{-2}\mathfrak{F}_2(\mathfrak{X}(\wp))d(\sqrt{\mathfrak{X}(\wp)})^2 - c^{-2}\mathfrak{X}(\wp)\, d\Omega^2, \tag{6}$$

$$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{X}(\wp)),\ \mathfrak{F}_2(\mathfrak{X}(\wp)),\ \mathfrak{X}(\wp) > 0, \quad \wp \equiv |r - r_0|.$$

Тогда при условии $R_{\mu\nu} = 0$ (вне точечного источника) метрика (6) приобретает следующую форму [28]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\mathfrak{X}(\wp))}}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\mathfrak{X}(\wp))}}\right)^{-1} d(\sqrt{\mathfrak{X}(\wp)})^2 - \frac{\mathfrak{X}(\wp)}{c^2} d\Omega^2, \tag{7}$$

причем здесь α — некоторая функция массы M, генерирующей гравитационное поле. Для последней метрики уже $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}] \neq \widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(4)}]$. Действительно,

$$\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}] \equiv \varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](\wp) = \sqrt{\mathfrak{X}(\wp)},$$

$$\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(4)}] \equiv \widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(4)}](\wp) = \int \left(\frac{\sqrt{\mathfrak{X}(\wp)}}{\sqrt{\mathfrak{X}(\wp)} - \alpha}\right)^{1/2} d\sqrt{\mathfrak{X}(\wp)} =$$

$$= \left(\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](\wp) \cdot (\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}] - \alpha)\right)^{1/2} + \alpha \ln\left(\frac{\sqrt{\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}]} + \sqrt{\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}] - \alpha}}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Если $r = r_0$, то, очевидно, $\wp = 0$, и, следовательно, $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](\wp = 0) = \alpha$, а $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(4)}](\wp = 0) = 0$. Единственная допустимая форма $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}]$, удовлетворяющая условиям

$$\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](0) = \alpha, \quad \widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(4)}](0) = 0, \quad \frac{d\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}]}{d\wp} > 0,$$

а также принимающая в пределе $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}] \to r$ вид метрики (1), есть $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}] = (\wp^n + \alpha^n)^{1/n}$ ($\wp > 0$, $n > 0$, $r \neq r_0$) [29]. При $n = 3$ и $r_0 = 0$, $r \in]0, \infty[$ отсюда получаем МШ (2) и $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](r) = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$.

Линейный элемент МГ, задаваемой (1), является частным случаем метрики с радиусом кривизны, задаваемым условием (7). Действительно, при $r_0 = \alpha = 2GM/c^2$, $n = 1$ имеем для метрики Гильберта $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](r) = |r - 2MG/c^2| + 2GM/c^2$. Данный радиус кривизны определен для $r \in]-\infty; +\infty[$ (для $\wp \in [0; \infty[$), так что при $r = 0$ имеем $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](0) = 4GM/c^2$, а для $r = 2GM/c^2$ — соответственно, $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](2GM/c^2) = 0$.

Вид выражения $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](r) = (r^n + \alpha^n)^{1/n}$ приводит к заключению, что центр сферической симметрии в евклидовом пространстве (пространственной части многообразия Минковского) находится в точке $r_0 = 0$ ($\forall n > 0$). Ему соответствует центр сферической симметрии пространства Римана (с "включенным" гравитационным полем) в точке $\widetilde{\varrho}[\mathscr{A}_R^{(4)}](0) = 0$ ($\forall n > 0$); при этом в данной точке $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](0) = \alpha = 2GM/c^2$.

В качестве примера к интерпретации величин r и $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](r)$ можно привести следующую 2–мерную физическую иллюстрацию. Рассмотрим в обычном евклидовом пространстве тонкую резиновую мембрану, прогнувшуюся (с растяжением материала мембраны) локально под весом точечного груза массы M на глубину α. Тогда r является аналогом расстоянию от точки проекции груза на воображаемую плоскость (совпадающую с "невозмущенной" мембраной) по прямой, а $\varrho[\mathscr{A}_R^{(4)}](r)$ — аналогом расстояния от реального груза по образующей деформированной мембраны.

Необходимость в "максимальном аналитическом расширении" (в качестве которого для (1) вводится метрика Крускала $ds_K^2 = \varkappa(r) \cdot (dw^2 - dz^2) - r^2 d\Omega^2$) для МШ отпадает: геодезические линии в МШ не требуют пополнения (при этом данная метрика всюду статична).

Таким образом, можно утверждать, что геометрические свойства многообразия с метрикой Шварцшильда позволяют описать эволюцию динамической системы на нем без привлечения в целях упрощения и элиминации особенностей нестационарных систем отсчета (СО) либо введения "обобщающего физическую ситуацию" пространства–времени с искусственно домысленной топологией.

3. Кинетический потенциал пробной частицы в метрике Шварцшильда и уравнения ее движения

Рассмотрим динамику отдельной частицы в гравитационном поле с метрикой, определяемой выражением (2). Как будет видно из дальнейшего, здесь имеются существенные различия с описанием поведения пробной частицы в метрике Гильберта.

Кинетический потенциал Лагранжа для анализа движения частицы (единичной массы m) в поле метрики Шварцшильда может быть записан как $L = m\mathcal{L}/2$, где

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{r^4}{(r^3+\alpha^3)\big((r^3+\alpha^3)^{1/3}-\alpha\big)}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 -$$

$$-(r^3+\alpha^3)^{2/3}\left(\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right), \tag{8}$$

причем можно положить элемент аффинного параметра $d\tau$ равным элементу собственного времени. Сразу же можно заметить, что координаты t и φ являются циклическими, так что отсюда получаем два закона сохранения (углового момента и энергии): $(r^3+\alpha^3)^{2/3}d\varphi/ds = \mathfrak{C}_1$ (при фиксированном значении переменной $\vartheta = \pi/2$) и

$$\left(1 - \frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)\frac{dct}{d\tau} = \mathfrak{C}_2 \quad (\mathfrak{C}_{1,2} = \mathrm{const}). \tag{9}$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа (в координатах Шварцшильда [7]) имеют общую форму

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\big(d\mathfrak{X}^a/ds\big)}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{X}^a} \;\; (a=\overline{0,3}); \quad \mathfrak{X}^0 = t,\; \mathfrak{X}^1 = \frac{r^3}{3},\; \mathfrak{X}^2 = -\cos\vartheta,\; \mathfrak{X}^3 = \varphi,$$

из сравнения которой со стандартным уравнением геодезических

$$\frac{d^2\mathfrak{X}^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{d\mathfrak{X}^b}{ds}\frac{d^2\mathfrak{X}^c}{ds} = 0 \;\; (a,b,c=\overline{0,3}),$$

можно получить явный вид всех ненулевых коэффициентов Кристоффеля:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2\mathcal{R} - \dfrac{3}{2}\alpha}{\mathcal{R}^3(\mathcal{R}-\alpha)}, \quad \Gamma^1_{22} = \mathcal{R}^3\left(1-\frac{\alpha}{\mathcal{R}}\right)\mathrm{cosec}^2(\vartheta), \quad \Gamma^1_{33} = \mathcal{R}^3\left(1-\frac{\alpha}{\mathcal{R}}\right)\sin^2(\vartheta),$$

$$\Gamma^1_{44} = -\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\mathcal{R}}\right), \quad \Gamma^2_{21} = -\mathcal{R}^{-3}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{\cos(\vartheta)}{\sin^2(\vartheta)}, \quad \Gamma^2_{33} = \cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta),$$

$$\Gamma^3_{31} = -\mathcal{R}^{-3}, \quad \Gamma^3_{32} = -\frac{\cos(\vartheta)}{\sin^2(\vartheta)}, \quad \Gamma^4_{41} = -\frac{\alpha}{2}\mathcal{R}^{-3}\big(\mathcal{R}-\alpha\big)^{-1}.$$

Движение пробной частицы в поле тяготения, представленном пространством–временем (2), дается, в согласии с принципом геодезических линий, четырьмя уравнениями:

$$\frac{d}{ds}\left(\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)\frac{dt}{ds}\right)=0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\left(r^3+\alpha^3\right)^{2/3}\frac{d\vartheta}{ds}\right)-\left(r^3+\alpha^3\right)^{2/3}\sin\,\vartheta\cos\,\vartheta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\left(r^3+\alpha^3\right)^{2/3}\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{ds}\right)=0,$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-c^{-2}\left(\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\right.$$

$$\left.+(r^3+\alpha^3)^{2/3}\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2+(r^3+\alpha^3)^{2/3}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right)=1. \tag{11}$$

Проинтегрируем уравнение (10):

$$\frac{dt}{ds}=\gamma\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)^{-1}\quad(\gamma-\text{постоянная интегрирования}),$$

и подставим последнее выражение в интеграл (11). Используя полученное соотношение, определим скорость частицы относительно системы координат (t,r,ϑ,φ) стандартным образом как нетензорную величину u, такую, что

$$u^2=\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+(r^3+\alpha^3)^{2/3}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+(r^3+\alpha^3)^{2/3}\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{12}$$

при этом

$$\gamma^{-2}=\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)^{-1}-\frac{u^2}{c^2}\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)^{-2}. \tag{13}$$

Отсюда

$$\frac{u^2}{c^2}=\frac{\gamma^2}{4}-\left(\frac{\gamma}{2}-\gamma^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)\right)^2. \tag{14}$$

Если движение радиальное ($u = u(r,t)$), то из соотношения (12) получаем, что $u(r,t) = \big(1 - \alpha/(r^3+\alpha^3)^{1/3}\big)^{-1/2} dr/dt$. Если полагать движение инфинитным, причем $u(r \to \infty) = u_\infty$, то на основании соотношения (13) имеем: $\gamma^{-2} = 1 - u_\infty^2/c^2$. Следовательно, $u_\infty = c\sqrt{1-\gamma^{-2}}$ и, таким образом, скорость на бесконечности будет мнимой, нулевой или вещественной соответственно при $\gamma < 1$, $\gamma = 1$ или $\gamma > 1$. Если $\gamma < 1$, то частица не может достигать бесконечных значений r; если $\gamma \geq 1$, то данная постоянная является множителем, используемым в преобразовании Лоренца от инерциальной системы координат $(t, r, \vartheta, \varphi)$, в которой частица, имеющая при $r \to \infty$ (когда МШ вырождается в пространство–время Минковского) нулевую скорость к инерциальной системе, где частица по–прежнему покоится. Скорость частиц на бесконечности, таким образом, ограничена: $u_\infty \leq c$. При радиальном движении из бесконечной точки максимально достижимая частицей скорость $u_{max} = \frac{1}{2}c\big(1 - u_\infty^2/c^2\big)^{-1/2}$. Обращение в нуль (действительной) скорости происходит при значении координаты $r = r_{u=0}^{(1)} \equiv 0$ и $r = r_{u=0}^{(2)}$, где

$$r_{u=0}^{(2)}(\gamma) = \frac{\alpha(-\gamma^6 + 3\gamma^4 - 3\gamma^2)^{1/3}}{\gamma^2 - 1},$$

но, так как функция $r_{u=0}^{(2)}(\gamma) < 0$ для $\gamma > 1$, то данная точка остановки физически нереализуема. Для сравнения: в МГ точками остановки являются $r = r_{u=0}^{(1)} \equiv \alpha$ и $r = r_{u=0}^{(2)} \equiv \alpha/(1-\gamma^2)$ (для $\gamma > 1$ нефизический случай).

Если продифференцировать равенство (14) по времени, то приходим к стандартному определению нетензорного радиального ускорения частицы

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_S = \frac{c^2\alpha r^2}{2\gamma^2} \frac{(r^3+\alpha^3)^{1/3}\gamma^2 - 2(r^3+\alpha^3)^{1/3} + 2\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{11/3}} \sqrt{(r^3+\alpha^3)^{1/3} - \alpha}. \quad (15)$$

При этом знак ускорения меняется в точке $r = r_S$,

$$r_S = \frac{\alpha(\gamma^6 - 6\gamma^4 + 12\gamma^2)}{2 - \gamma^2},$$

то есть притяжение к точке массы M сменяется отталкиванием; при этом для $r = \alpha$ (на горизонте событий МГ, где $\big(du/dt\big)_{Hilbert} = 0$) имеем $\big(du/dt\big)_S \neq 0$ (вырождение динамики имеет место только при $r = r_S$ и $r = 0$).

Весьма показательным отличием МШ от МГ также является факт того, что при "падении" (радиальном движении) частицы на черную дыру время достижения ею поверхности $r = \alpha \equiv 2GM/c^2$ конечно даже для удаленного внешнего наблюдателя. Действительно, для движения по радиальной геодезической из соотношения (11) (при $d\varphi/ds = d\vartheta/ds = 0$) и закона сохранения энергии (9) получаем уравнения траектории частицы:

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{\mathfrak{E}_2^2 - c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)}, \quad \frac{dct}{d\tau} = \mathfrak{E}_2\left(1 - \frac{2GM}{c^2(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)^{-1}.$$

Промежуток времени, соответствующий (с точки зрения внешнего наблюдателя) движению (радиальному) частицы от некоторого $r = r_{in}$ до $r = 2GM/c^2$, получаем из вышеприведенных уравнений:

$$\int dt = \int_{r_{in}}^{2GM/c^2} \frac{\mathfrak{E}_2 c^{-1} dr}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)\sqrt{\mathfrak{E}_2^2 - c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)}} < \infty.$$

Таким образом, частица в МШ преодолевает (конечное) расстояние

$$\ell[r_{in}, 2GM/c^2] = \int_{r_{in}}^{2GM/c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2(r^3+\alpha^3)^{1/3}}\right)^{-1/2} dr,$$

в отличие от метрики Гильберта, за конечное время. Следует отметить, что радиальное движение частицы определено вплоть до $r = 0$, так как МШ статична во всей области определения; при этом наличествует расходимость интеграла, соответствующего величине $\ell[r_{in}, r = 0]$. Это, в совокупности с ранее полученным фактом остановки (уменьшения скорости частицы до нуля при радиальном движении из–за отрицательного ускорения (15)) в точке $r = 0$, означает, что при “падении на притягивающий центр” происходящий процесс неправомерно ассоциировать с “коллапсом”, идентичным тому, что имеет место при помещении частицы в подгоризонтную область МГ — в последнем случае частица попадает в область нестационарной метрики, формирующей центральную сингулярность (понятие остановки частицы там неприменимо). В случае МШ скорее правомерно говорить о “накоплении частиц в области центра”.

4. Связь МШ и метрики, соответствующей коллапсу пылевой материи

Однако вполне можно построить, используя специально подобранную СО, нестационарную метрику, находящуюся с МШ в таком же соотношении, как метрика Толмана сферически–симметричного коллапса пылевой (удовлетворящей условию $p=0$) среды [30]–[31]. Рассмотрим метрику следующего вида:

$$ds_{TS}^2 = d\mathcal{T}^2 - \frac{\big(\partial\mathcal{R}(\mathcal{T},\mathscr{R})/\partial\mathscr{R}\big)^2}{c^2\big(1+\phi_1(\mathscr{R})\big)}d\mathscr{R}^2 - \frac{\mathcal{R}^2}{c^2}\big(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\big), \qquad (16)$$

где $\mathcal{T}$ и $\mathscr{R}$ — время и радиальная координата в синхронно–сопутствующей СО, $\mathcal{R} = \Big(r^3(\mathcal{T},\mathscr{R}) + \big(2Gc^{-2}\mathcal{M}(\mathscr{R})\big)^3\Big)^{1/3}$ (здесь $\mathcal{M}(\mathscr{R})$ — масса радиальных оболочек пылевой материи внутри сферы радиуса $\mathcal{R}(\mathscr{R})$), $\phi_1(\mathscr{R}) > -1$ — произвольная функция (физический смысл которой будет выявлен ниже).

Установим возможность преобразования координат $(\mathcal{T},\mathscr{R}) \to (t,\mathcal{R})$, которое переводит метрику (16) в МШ. Для этого выразим дифференциалы $d\mathcal{R}$ и dt через $d\mathcal{T}$ и $d\mathscr{R}$: $d\mathcal{R} = (\partial\mathcal{R}/\partial\mathcal{T})d\mathcal{T} + (\partial\mathcal{R}/\partial\mathscr{R})d\mathscr{R}$, $dt = (\partial t/\partial\mathcal{T})d\mathcal{T} + (\partial t/\partial\mathscr{R})d\mathscr{R}$, откуда:

$$d\mathcal{T} = \Delta^{-1}\left(\frac{\partial t}{\partial\mathscr{R}}\cdot dr - \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathscr{R}}\cdot dt\right), \quad d\mathscr{R} = \Delta^{-1}\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{T}}\cdot dt - \frac{\partial t}{\partial\mathcal{T}}\cdot d\mathcal{R}\right),$$

$$\Delta = \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{T}}\cdot\frac{\partial t}{\partial\mathscr{R}} - \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathscr{R}}\cdot\frac{\partial t}{\partial\mathcal{T}}.$$

Подставим последние выражения в (16); условием ортогональности метрики будет соотношение

$$\frac{\big(\partial\mathcal{R}/\partial\mathscr{R}\big)^2}{1+\phi_1(\mathscr{R})}\cdot\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{T}}\cdot\frac{\partial t}{\partial\mathcal{T}} - \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathscr{R}}\cdot\frac{\partial t}{\partial\mathscr{R}} = 0. \qquad (17)$$

Метрика (16) принимает следующий вид:

$$ds_{TS}^2 = \frac{1+\phi_2(\mathscr{R})}{\big(\partial t/\partial\mathcal{T}\big)^2\big(1-\phi_2(\mathscr{R})/\mathcal{R}\big)}dt^2 - \frac{d\mathscr{R}^2}{1-\phi_2(\mathscr{R})/\mathcal{R}} - \mathcal{R}^2 d\Omega^2,$$

$$\phi_2(\mathscr{R}) \ - \text{ произвольная функция, такая, что } \left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathcal{T}}\right)^2 = \phi_1(\mathscr{R}) + \frac{\phi_2(\mathscr{R})}{\mathcal{R}}$$

(таким образом, функция $\phi_1(\mathscr{R})$ приобретает смысл аналога полной энергии при радиальном движении пылевой частицы со скоростью $\partial\mathcal{R}/\partial\mathcal{T}$).

Пусть $\phi_2(\mathscr{R}) = \alpha_{\mathcal{M}} = \mathrm{const}_1$, $\phi_1(\mathscr{R}) = \phi_1^{(0)} = \mathrm{const}_2$. Тогда непосредственно из общего вида метрики (16) получаем последовательно:

$$\mathcal{T} - \mathcal{T}_0(\mathscr{R}) = \pm\int^{\mathcal{R}(\mathcal{T},\mathscr{R})}\frac{d\xi}{\phi_1^{(0)} + \alpha_{\mathcal{M}}/\xi}, \quad \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\mathscr{R}} = \pm\frac{d\mathcal{T}_0}{d\mathscr{R}}\sqrt{\phi_1^{(0)} + \alpha_{\mathcal{M}}/\mathcal{R}},$$

где $\mathcal{T}_0(\mathscr{R})$ — произвольная функция, возникающая при интегрировании.

Интегрируя (17), получаем

$$\frac{1+\phi_1}{\partial\mathcal{R}/\partial\mathscr{R}}d\mathcal{R} = \left(1 - \frac{\phi_2}{\mathcal{R}}\right)d\mathscr{R}, \tag{18}$$

откуда

$$\omega(\mathcal{T}, \mathcal{T}_0; \mathscr{R}) \equiv \mathcal{T}_0(\mathscr{R}) \pm (1+\phi_1)\cdot\mathfrak{L}(\mathcal{R}) = \text{const},$$
$$\mathfrak{L}(\mathcal{R}) \equiv \int^{\mathcal{R}(\mathcal{T},\mathscr{R})} \frac{dy}{\left(1 - \dfrac{\alpha_{\mathcal{M}}}{y}\right)\left(\phi_1 + \dfrac{\alpha_{\mathcal{M}}}{y}\right)}.$$

Интеграл $\mathfrak{L}(\mathcal{R})$ представляет собой выражение для характеристики (18). Тогда общее решение (17) можно записать в виде: $t(\mathcal{T},\mathscr{R}) = \widetilde{t}\big(\omega(\mathcal{T},\mathcal{T}_0;\mathscr{R})\big)$, где $\widetilde{t}(\omega)$ — произвольная гладкая функция своего аргумента. Теперь выражение для $\partial t/\partial\mathcal{T}$ приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial t}{\partial\mathcal{T}} = \pm\frac{1+\phi_1}{1-\alpha_{\mathcal{M}}/\mathcal{R}}\frac{d\widetilde{t}}{d\omega}. \tag{19}$$

Если принять $\widetilde{t}(\omega) = \omega/\sqrt{1+\phi_1}$, то метрика (16) переходит в МШ. Преобразование координат будет иметь особенность только в центре координат.

Легко проверить, что коэффициенты метрики (16) в синхронно–сопутствующей СО удовлетворяют уравнениям Эйнштейна:

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = 0,\quad R_2^2 - \frac{1}{2}R = R_3^3 - \frac{1}{2}R = 0,\quad R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4}\mu c^2,\quad R_0^1 = 0,$$

где R_a^b — компоненты тензора Риччи, R — скалярная кривизна, μ — плотность материи ($\mathcal{M}(\mathscr{R}) = 4\pi\int_0^{\mathcal{R}(\mathscr{R})}\mu\xi^2 d\xi$); правые части уравнений пропорциональны соответствующим компонентам тензора энергии–импульса $T^{ab} = \mu c^2\delta_0^a\delta_0^b$ ($\varepsilon = \mu c^2$).

5. Динамика системы гравитирующих точечных частиц в постньютоновском приближении

Рассмотрим вопрос о динамике многочастичной системы, причем каждая частица обладает гравитационным полем, так что локально вблизи каждой из них пространство–время будет шварцшильдовским. Очевидно, в самой общей постановке данная задача из–за своей существенной нелинейности чрезвычайно сложна (даже в случае небольшого числа частиц). Поэтому разумно обратиться к методике исследования эволюции динамической системы, использующей постньютоновское приближение [32].

При этом можно использовать тот факт, что в постньютоновском приближении для систем отсчета, галилеевых на бесконечности, возможно введение единого времени, так как рассинхронизация часов является величиной 4–го порядка малости по c: $\Delta t = \big(h_{0a}/(cg_{00})\big)dx^a \sim c^{-4}$ (в настоящем параграфе мы отходим от соглашения $c = 1$ и рассматриваем физическую малость величин в виде разложения по степеням $1/c$) [33]. Кроме того, в этом приближении система N частиц (для простоты равной массы m) обладает квазиаддитивным по частицам кинетическим потенциалом Лагранжа L_Σ (подразумевается, что суммарный лагранжиан системы составляется таким образом, что производные $\partial L_\Sigma/\partial \mathbf{x}_n \equiv \mathbf{f}_n$ должны быть равны величинам сил $\widetilde{\mathbf{f}}_n \equiv \big(\partial L_n/\partial \mathbf{x}\big)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_n}$, действующих на n–ое тело ($n = \overline{1, N}$) при заданном движении остальных). Эти два обстоятельства позволяют построить в постньютоновском приближении статистическую механику и обобщенную гидродинамику гравитирующих точечных частиц.

Используем известное выражение для лагранжиана частицы в гравитационном поле всех остальных [25] и перейдем посредством преобразования Лежандра к функции Гамильтона $\mathfrak{H}(x^j, p_j, t)$ ($j = \overline{1, 3}$) в канонических переменных x^j,

$$p_j = mv^j\left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2}\right) - mc^2\left(\frac{h_{0j}}{c} + \sum_{i=1}^{3}\frac{h_{ji}v^i}{c^2} + \frac{h_{00}v^j}{2c^2}\right),$$

где h_{00}, h_{ji}, $h_{0j}(x^k)$ — поправки к галилеевым значениям метрического тензора. Форма гамильтониана постньютоновского приближения:

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + mc^2\left(\frac{h_{00}}{2} + \sum_{j=1}^{3}\frac{h_{0j}p_j}{mc} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{h_{ji}p_jp_i}{2m^2c^2} - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{\mathbf{p}^2h_{00}}{4m^2c^2}\right),$$

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{2\Phi^2}{c^4} - \frac{2Gm}{c^4}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Phi'_n}{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_n|} - \frac{3Gm}{c^4}\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbf{v}^2}{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_n|},$$

$$h_{0j} = \frac{Gm}{2c^3}\sum_{n=1}^{N}|\mathcal{R} - \mathcal{R}_n|^{-1}\big(7v_{nj} + (\mathbf{v}_n\mathbf{e}_n)e_{nj}\big), \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_n}{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_n|},$$

$$h^i_j = -\frac{2}{c^2}\Phi\delta^i_j, \quad \Phi(\mathcal{R}) = -Gm\sum_{n=1}^{N}|\mathcal{R}-\mathcal{R}_n|^{-1}, \quad \Phi'_n = -Gm\sum_{k\neq n}^{N}|\mathcal{R}_k-\mathcal{R}_n|^{-1}.$$

Описанию коллективной динамики гравитирующих частиц в постньютоновском приближении на микроскопическом уровне соответствует кинетическое уравнение с "самосогласованным полем" для (одночастичной) функции распределения $f(x^j, p_j, t)$ с нормировкой на полную массу покоя системы частиц: $\int f d\mathbf{x}d\mathbf{p} = Nm(=\mathrm{inv})$ (при этом для пространственного распределения плотности в связи с наличием кривизны пространства–времени, создаваемого ансамблем шварцшильдовских частиц следует ориентироваться на нормировку $\int \mathcal{F}\, d\mathbf{p} = \rho(\mathbf{x})\sqrt{|\det g_{ij}|}\big|_{i,j=\overline{1,3}}$, где $\rho(\mathbf{x},t)$ — плотность массы покоя, g_{ij} — метрический тензор пространственной части 4–метрики). Кинетическое уравнение имеет вид: $\partial\mathcal{F}/\partial t + [\mathfrak{H},\mathcal{F}] = 0$, где $[.,.]$ — стандартные скобки Пуассона в фазовом μ–пространстве.

Для перехода к гидродинамическому описанию эволюции системы представим функцию распределения в форме, присущей "гидродинамической подстановке" [34]: $\mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \rho(\mathbf{x},t)\delta\big(\mathbf{p}-\mathbf{P}(\mathbf{x},t)\big)$, где $\rho(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$ имеют смысл плотности массы покоя частиц и импульса частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно. Проводя дифференцирование функции распределения и собирая множители при δ–функции и ее производных, получаем систему уравнений обобщенной гидродинамики среды, состоящей из гравитирующих частиц:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}\big(\rho\mathcal{V}^k\big) = 0, \quad \frac{\partial P_\ell}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\mathcal{V}^k\frac{\partial P_\ell}{\partial x^k} = \mathfrak{F}_\ell, \qquad \ell = \overline{1,3},$$

где: $\mathcal{V}^k = \big(\partial\mathfrak{H}\big(\mathbf{x},\mathbf{p}(\mathbf{x},t)\big)/\partial\mathbf{p}\big)|_{\mathbf{p}=\mathbf{P}(\mathbf{x},t)}$ — компоненты "обобщенной скорости" среды, $\mathfrak{F}_\ell(\mathbf{x},t) = -\partial\mathfrak{H}(\mathbf{x},\mathbf{P}(\mathbf{x},t))/\partial x_\ell$ — компоненты "обобщенной массовой силы":

$$\mathcal{V}^k = \frac{P_k}{m}\left(1 - \frac{\mathbf{P}^2}{2m^2c^2} + \frac{h_{00}}{2}\right) + ch_{0k} + \sum_{\ell=1}^{3}h_{k\ell}\frac{P_\ell}{m},$$

$$\mathfrak{F}_\ell = -\frac{mc^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\ell}\left(1 - \frac{\mathbf{P}^2}{2m^2c^2} - \frac{h_{00}}{2}\right) - \sum_k cP_k\frac{\partial h_{0k}}{\partial x^\ell} - \frac{1}{2m}\sum_{j,k}\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^\ell}P_jP_k.$$

Приведенную модель построения гидродинамики сплошной среды можно назвать "односкоростной". Естественными обобщениями данной модели будут "многоскоростная среда" ($\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho_i,\mathbf{P}_i)\big|_{i=\overline{1,I_0}}$) и "континуумслойная гидродинамика" ($\mathcal{F} = \int \rho(\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{s}},t)\delta\big(\mathbf{p}-\mathbf{P}(\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{s}},t)\big)\, d\widetilde{\mathbf{s}}$, где $\widetilde{\mathbf{s}}$ — лагранжева координата).

Отсутствие необходимости при построении динамики постньютоновских частиц вводить релятивистские постулаты — и, тем самым, существенное упрощение формализма, — обусловлено, как уже указано выше, общим для системы временем и соответствующей простой структурой гамильтониана (это позволяет использовать методы классической механики).

6. Заключение

Мы рассмотрели свойства оригинальной метрики Шварцшильда и показали, что динамика частиц в ней значительно проще, чем в метрике Гильберта. Вопрос о физической реализуемости МШ окончательно может быть решен только путем детального анализа высокоточных астрономических наблюдений, однако, по мнению авторов, МШ выглядит более адекватной в плане возможности осуществления финальной стадии звездной эволюции, чем метрика Гильберта (при этом не только предполагается следование принципу Оккама — при учете которого МГ является очевидным аутсайдером, но и даются конкретные выводы из математических свойств обеих метрик). Можно ожидать, что дальнейшее исследование деталей соответствующих экспериментальных данных относительно динамики двойных звездных систем, процессов аккреции вещества в таких системах и, в особенности, непосредственно поведения объектов–кандидатов в коллапсары, выявят правомерность использования для их описания оригинальной метрики Шварцшильда.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-01-00670 и № 14-29-06086.

Список литературы

[1] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman & Comp., San Francisco, 1973).

[2] S.L. Bazanski, Ann. Inst. Henri Poincare **2**, 145 (1977).

[3] J. Plebanski, Acta Phys. Polon., **28**, 141 (1965).

[4] R.K. Sachs, Zeit. für Physik **157**, 462 (1960).

[5] F. De Felice, C.J.S. Clarke, *Relativity on curved manifolds* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[6] D. Hilbert, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., 53 (1917, submitted 23 Dec. 1916).

[7] K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.–Math. Klasse, 189–196 (1916).

[8] J. Droste, Ned. Acad. Wet., S. A., **19**, 197 (1917).

[9] S. Antoci, D.-E. Liebscher, L. Mihich, Astron. Nachr., **324**, 485 (2003).

[10] D.H. Menzel, Memoirs Soc. Roy. Sci. Liege, **9**, 343 (1976).

[11] A.S. Eddington, *Space, time, and gravitation: An outline of the general relativity theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1920).

[12] A.S. Eddington, *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung* (Springer, Berlin, 1925).

[13] M. Brillouin, Le Journal de Physique et Le Radium, **23**, 43 (1923).

[14] L. Infeld, Lincei Rend., **29**, 810 (1928); Phys. Zeitschrift, **15**, 159 (1932).

[15] H. Weyl, Math. Zeitschrift, **2**, 384 (1918); Math. Zeitschrift, **12**, 114 (1922).

[16] H. Weyl, Ann. der Phys., **65**, 541 (1921); Götting. Nachr., **99**, 296 (1921).

[17] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Astr. Soc. (London), **A270**, 354 (1962).

[18] A. Einstein, N. Rosen, Phys. Rev., **48**, 73 (1935).

[19] A. Einstein, Annals of Mathematics, **40**, 922 (1939).

[20] П.Г. Бергман, Введение в теорию относительности (М.: ГИИЛ, 1947).

[21] J.R. Oppenheimer, H. Snyder, Phys. Rev., **56**, 455 (1939).

[22] Н.Н. Фимин, В.А. Чечеткин, Астроном. журнал, **86**, 886 (2009).

[23] Я.В. Пугачев, В.Д. Гунько, Известия Высших Учебных Заведений, сер. Физика, **10**, 46 (1974).

[24] G.C. McVittie, *General relativity and cosmology* (London: Chapman and Hall Ltd., 1956).

[25] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля, изд. 7* (М.: Наука, 1988).

[26] L.S. Abrams, Phys. Rev. D, **20**, 2474 (1979).

[27] П.К. Рашевский, *Курс дифференциальной геометрии* (М.–Л.: ГИТТЛ, 1950).

[28] L.S. Abrams, Can. J. Phys., **67**, 919 (1989).

[29] S.J. Crothers, Progr. in Physics, **1**, 74 (2005); Progr. in Physics, **2**, 68 (2007).

[30] R.C. Tolman, *Relativity, thermodynamics and cosmology* (Clarendon Press, Oxford, 1934).

[31] P.S. Joshi, *Gravitational collapse and spacetime singularities* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).

[32] V.A. Fock, *Theory of space, time and gravitation* (Pergamon, London, 1959).

[33] Г.М. Верешков, Ю.С. Гришкан, Астроном. журнал, **51**, 1116 (1974).

[34] В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин, Доклады РАН, **446**, № 2, 142 (2012).