



Абрашкин В.И., Воронов К.Е.,
Пияков А.В., Пузин Ю.Я.,
Сазонов В.В., Сёмкин Н.Д.,
Филиппов А.С., Чебуков С.Ю.

Неуправляемое
вращательное движение
опытного образца малого
космического аппарата
«Аист»

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Неуправляемое вращательное движение опытного образца малого космического аппарата «Аист» / В.И.Абрашкин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 48. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-48>

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша**

**В.И.Абрашкин, К.Е.Воронов, А.В.Пияков, Ю.Я.Пузин,
В.В.Сазонов, Н.Д.Сёмкин, А.С.Филиппов, С.Ю.Чебуков**

**НЕУПРАВЛЯЕМОЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ
ОПЫТНОГО ОБРАЗЦА МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО
АППАРАТА «АИСТ»**

Москва – 2015

Аннотация

Приведены результаты реконструкции неуправляемого вращательного движения опытного образца малого космического аппарата «Аист» во время его полета в начале 2014 г. Реконструкция выполнена посредством обработки данных бортовых измерений магнитного поля Земли. Процедура обработки имела дело с порциями данных, охватывающими отрезки времени длиной около трех часов. Данные, полученные на каждом таком отрезке, обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения спутника относительно центра масс. При обработке оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели. Результаты обработки нескольких отрезков данных позволили получить достаточно полное представление о движении спутника.

V.I.Abrashkin, K.E.Voronov, A.V.Piyakov, Yu.Ya.Puzin, V.V.Sazonov, N.D.Semkin, A.S.Filippov, S.Yu.Chebukov. Uncontrolled attitude motion of the prototype of the small spacecraft Aist. We present the results of reconstruction of the uncontrolled attitude motion of the prototype of the small spacecraft *Aist* during its flight at the beginning of 2014. The reconstruction was realized by processing onboard measurements of the Earth magnetic field. The measurement data were accumulated in time segments, which had length about 100 min. The measurement data on each such segment were processed simultaneously by means of the least squares method and integration of the spacecraft attitude motion equations. The estimates of the mathematical model parameters and initial conditions of the attitude motion were obtained as a result of such processing. The results of processing some segments above made clear the attitude motion of the spacecraft.

1. Введение. В данной работе описаны методика и результаты реконструкции неуправляемого вращательного движения спутника, являющегося опытным образцом (ОО) малого космического аппарата (МКА) «Аист». Этот спутник был разработан АО «Прогресс» и выведен на орбиту 28.12.2013 г. посредством отделения от разгонного блока «Волга». Выведение этого МКА произошло через 8 месяцев после выведения на орбиту летного образца (ЛО) МКА этого типа (апрель 2013 г.). Научная программа полета обоих МКА определялась периодическим включением по командам с Земли бортовой научной и навигационной аппаратуры МАГКОМ и МЕТЕОР. Научная аппаратура разработана специалистами самарского аэрокосмического университета, а ее управление в полете осуществлялось с помощью технических средств АО «Прогресс». Аппаратура МАГКОМ имела два трехкомпонентных магнитометра и три электромагнита. Она предназначалась для измерений магнитного поля на борту спутника и управления вращательным движением последнего посредством механического момента, создаваемого электромагнитами. В частности, она должна была уменьшить угловую скорость спутника после отделения от разгонного блока и удерживать ее заданных пределах. На ЛО МКА «Аист» аппаратура МАГКОМ успешно справилась с поставленными задачами [1]. На ОО МКА она позволила решить только информационную задачу – выполнить измерения магнитного поля Земли и реконструировать вращательное движение спутника. Уменьшить начальную угловую скорость не удалось.

Фактическое вращательное движение обоих МКА «Аист» определялось по данным магнитных измерений. Обработка измерений выполнялась с помощью программно-математического обеспечения, разработанного в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Ниже описаны результаты реконструкции вращательного движения ОО МКА «Аист», а также результаты реконструкции быстрого движения ЛО МКА «Аист», которое в [1] не рассматривалось.

2. Уравнения вращательного движения спутника. Спутник считаем твердым телом, центр масс которого – точка O – движется по геоцентрической орбите. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс и соотношений, используемых при обработке данных измерений, введем четыре правые декартовы системы координат.

Приборная система $Oy_1y_2y_3$ жестко связана со спутником. В ней интерпретируются данные магнитных измерений.

Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Оси Ox_i составляют острые углы с осями Oy_i ($i=1, 2, 3$). Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов относятся к системе $Ox_1x_2x_3$.

Система $SY_1Y_2Y_3$ близка ко второй геоэкваatorialной системе координат эпохи даты. Ее начало находится в центре масс Земли, плоскость SY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось SY_3 направлена в северный полюс мира, ось SY_1 направлена приблизительно в точку весеннего равноденствия – повернута от плоскости гринвичского меридиана на среднее звездное время против вращения Земли. Система $SY_1Y_2Y_3$ используется в модели SGP4 [2], принятой в

данной работе для описания орбитального движения спутника. Эту систему считаем инерциальной.

Система координат $OZ_1Z_2Z_3$ – квазиинерциальная. Ось OZ_2 направлена по вектору кинетического момента орбитального движения спутника, ось OZ_3 параллельна линии узлов его орбиты и направлена от нисходящего узла к восходящему. Абсолютная величина угловой скорости этой системы не превышает 5 град./сут.

Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $Oy_1y_2y_3$ обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} – косинус угла между осями Oy_i и Ox_j . Элементы этой матрицы будем выражать через углы γ , α и β , которые введем посредством следующего условия. Система $Oy_1y_2y_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол α вокруг оси Oy_2 , 2) на угол β вокруг новой оси Oy_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси Oy_1 , совпадающей с осью Ox_1 .

Положение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $CY_1Y_2Y_3$ будем задавать нормированным кватернионом $\mathbf{Q}=(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, $Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1$. Кватернионный вид формулы перехода (при совпадении точек O и C): $(0, Y_1, Y_2, Y_3) = \mathbf{Q} \circ (0, x_1, x_2, x_3)$. Матрицу перехода от первой из этих систем ко второй обозначим $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$, b_{ij} – косинус угла между осями CY_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты $\mathbf{Q}$ по известным формулам.

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OZ_1Z_2Z_3$ будем задавать углами Эйлера ψ , θ и φ , которые введем по общепринятой схеме. Система $OZ_1Z_2Z_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол ψ вокруг оси OZ_3 , 2) на угол θ вокруг новой оси OZ_1 , 3) на угол φ вокруг новой оси OZ_3 , совпадающей с осью Ox_3 .

Орбитальное движение спутника описывается формулами модели SGP4, исходной информацией для которой служат двухстрочные элементы NORAD [2]. Система уравнений вращательного движения спутника образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент его абсолютной угловой скорости ω_i и кинематическими уравнениями для компонент кватерниона $\mathbf{Q}$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный момент и момент, обусловленный взаимодействием магнитного поля Земли (МПЗ) с собственным дипольным магнитным моментом спутника. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2x_3) + p_2h_3^\circ - p_3h_2^\circ, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_3\omega_1 - \nu x_3x_1) + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(p_3h_1^\circ - p_1h_3^\circ), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda(p_1h_2^\circ - p_2h_1^\circ),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
2\dot{Q}_0 &= -Q_1\omega_1 - Q_2\omega_2 - Q_3\omega_3, \\
2\dot{Q}_1 &= Q_0\omega_1 + Q_2\omega_3 - Q_3\omega_2, \\
2\dot{Q}_2 &= Q_0\omega_2 + Q_3\omega_1 - Q_1\omega_3, \\
2\dot{Q}_3 &= Q_0\omega_3 + Q_1\omega_2 - Q_2\omega_1,
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \nu = \frac{3\mu_e}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}},$$

$$p_1 = p\lambda\omega_1, \quad p_2 = p(1 + \lambda\mu)\omega_2, \quad p_3 = p\omega_3.$$

Здесь x_i – компоненты геоцентрического радиуса-вектора точки O , h_i° – компоненты вектора $\mathbf{H}$ напряженности МПЗ в этой точке, I_i – моменты инерции спутника относительно осей Ox_i , p_i – отнесенные к I_1 компоненты магнитного диполя спутника. Выписанные выражения для этих компонент, в которых p – постоянный коэффициент, означают, что магнитный дипольный момент спутника пропорционален вектору его кинетического момента в движении относительно центра масс. Пояснения этого допущения будут даны ниже.

Имеют место формулы

$$h_i^\circ(t) = \sum_{j=1}^3 H_j(t) b_{ji}(t) \quad (i=1, 2, 3), \quad (2)$$

где $H_i(t)$ – компоненты вектора $\mathbf{H}$ в системе координат $CY_1Y_2Y_3$. Эти компоненты определяются моделью IGRF, формулами теории SGP4, задающими движение точки O , и формулами перехода от гринвичской системы координат к системе $CY_1Y_2Y_3$. При численном интегрировании уравнений (1) используются следующие единицы измерения физических величин: $[t] = 10^3 \text{ с}$, $[x_i] = 10^3 \text{ км}$, $[\omega_i] = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $[p] = 10^{-3} \text{ г}^{-1/2} \text{ см}^{1/2}$, $[H_i] = \text{г}^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-1} = \text{Э}$. Размерности величин p и H_i указаны в системе физических величин СГСМ.

Переменные Q_j зависимы – они связаны условием нормировки кватерниона $\mathbf{Q}$. Если это условие выполнено в начальный момент времени, то в силу свойств кинематических уравнений в системе (1) оно будет выполняться тождественно. Следовательно, достаточно обеспечить условие нормировки только в начальный момент.

Величины λ , μ , p , γ , α и β считаются неизменными на каждом интервале обработки данных измерений (см. ниже), но их значения определяются в результате этой обработки наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника. Иными словами, перечисленные величины являются параметрами согласования.

3. Тестирование магнитных измерений. На борту спутника находились два трехкомпонентных магнитометра, которые будем называть магнитометр 1 и

магнитометр 2. Измерения проводились на отрезках полета длиной до 6 часов. Оцифровка показаний магнитометров выполнялась в единые моменты времени с шагом 6 с. Компоненты измеряемых векторов напряженности магнитного поля выдавались в собственных системах координат магнитометров. Обе эти системы – левые декартовы. Чтобы перейти к правым системам, направления осей 2 обеих систем были изменены на противоположные (у данных измерений компонент поля вдоль осей 2 менялся знак). Измененная таким образом система координат магнитометра 2 служила приборной системой $Oy_1y_2y_3$. Тестирование измерений магнитометров выполнялось двумя способами.

Первый способ основан на следующих предположениях: 1) магнитометры измеряют одно и то же переменное поле, 2) постоянные составляющие поля в точках расположения магнитометров различны (или измерения магнитометров содержат постоянные смещения). В случае точной реализации этих предположений измерения магнитометра 2, пересчитанные в систему координат магнитометра 1, отличались бы от измерений последнего на постоянный вектор смещения. Из-за разного рода ошибок точного постоянства вектора смещения достичь невозможно, однако его вариации во времени должны быть малыми. Сопоставляющие параметры – матрица перехода между системами координат магнитометров и постоянный вектор смещения – определялись методом наименьших квадратов. Методика определения этих параметров описана в [3] и состоит в следующем. Результаты измерений обоих магнитометров, полученные на некотором интервале времени, обозначим

$$t_n, g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)}, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (3)$$

Здесь $g_i^{(n)}$ и $h_i^{(n)}$ – результаты измерений i -ых компонент магнитного поля магнитометрами 1 и 2 в их собственных системах координат в момент времени t_n . С высокой точностью должны выполняться соотношения

$$g_i^{(n)} = d_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} h_j^{(n)} \quad (i=1, 2, 3; n=1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

где d_i – компоненты постоянного вектора смещения в системе координат магнитометра 1, c_{ij} – элементы матрицы перехода C от системы координат магнитометра 2 к системе координат магнитометра 1. Если на отрезке $t_1 \leq t \leq t_N$ спутник совершал сложное вращательное движение, то для отыскания матрицы C и смещений d_i удобно воспользоваться методом наименьших квадратов. Применение этого метода означает принятие следующей гипотезы: ошибки в соотношениях (4) некоррелированы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии.

Следуя методу наименьших квадратов, ищем минимум выражения

$$Z = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 [g_i^{(n)} - \hat{g}_i^{(n)}]^2, \quad \hat{g}_i^{(n)} = d_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} h_j^{(n)}$$

по величинам c_{ij} и d_i при условии, что матрица C ортогональна и имеет положительный определитель. Эта задача решается с помощью стандартных процедур вычислительной линейной алгебры. Обозначим решение этой задачи C° , $d^\circ = (d_1^\circ, d_2^\circ, d_3^\circ)^T$. В линейном приближении окрестность решения параметризуется независимыми параметрами ξ_i, θ_i ($i=1, 2, 3$): $d_i = d_i^\circ + \xi_i$, $C = E_\theta C^\circ$, где

$$E_\theta = \begin{vmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Величины θ_i представляют собой компоненты вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отличие матрицы C от ее оценки C° . Эти компоненты относятся к системе координат магнитометра 1. Согласно методу наименьших квадратов параметры ξ_i, θ_i образуют случайный вектор $\eta \in R^6$ с нулевым математическим ожиданием. Ковариационная матрица K_η этого вектора выражается через матрицу P системы нормальных уравнений, получающейся линеаризацией исходной задачи по η в точке минимума выражения Z , и значение $Z_{\min}$:

$$K_\eta = \sigma_0^2 P^{-1}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{Z_{\min}}{3N-6}}.$$

Здесь σ_0 – стандартное отклонение ошибок в соотношениях (4). Стандартные отклонения величин ξ_i и θ_i – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы K_η – обозначим σ_{d_i} и σ_{θ_i} .

Сопоставление данных измерений магнитометров описанным методом было выполнено на пяти интервалах времени. Параметры t_1 , N и $t_N - t_1$ этих интервалов указаны в табл. 1. Интервал 5 включает интервалы 3 и 4. Ниже приводится решение описанной задачи для каждого интервала.

Таблица 1. Интервалы обработки магнитных измерений

№ инт.	Дата, 2014 г.	t_1 , ДМВ, ч:мин:с	N	$t_N - t_1$, мин
1	11 января	01 : 47 : 08	1799	188.8
2	14 января	01 : 45 : 14	1670	190.7
3	7 февраля	01 : 45 : 14	1813	184.4
4	7 февраля	04 : 54 : 43	1568	165.8
5	7 февраля	01 : 45 : 14	3416	355.3

Интервал 1:

$$d^{\circ} = \begin{pmatrix} -11225 \\ -6408 \\ -2441 \end{pmatrix}, \quad C^{\circ} = \begin{pmatrix} 0.006778 & -0.999020 & 0.043729 \\ -0.999842 & -0.007490 & -0.016127 \\ 0.016438 & -0.043612 & -0.998913 \end{pmatrix};$$

интервал 2:

$$d^{\circ} = \begin{pmatrix} -11316 \\ -6683 \\ -2913 \end{pmatrix}, \quad C^{\circ} = \begin{pmatrix} 0.003670 & -0.999118 & 0.041829 \\ -0.999868 & -0.004328 & -0.015655 \\ 0.015822 & -0.041766 & -0.999002 \end{pmatrix};$$

интервал 3:

$$d^{\circ} = \begin{pmatrix} -10074 \\ -7073 \\ -3667 \end{pmatrix}, \quad C^{\circ} = \begin{pmatrix} 0.006862 & -0.998615 & 0.052167 \\ -0.999894 & -0.007522 & -0.012468 \\ 0.012843 & -0.052076 & -0.998561 \end{pmatrix};$$

интервал 4:

$$d^{\circ} = \begin{pmatrix} -10101 \\ -7055 \\ -3576 \end{pmatrix}, \quad C^{\circ} = \begin{pmatrix} 0.007608 & -0.998497 & 0.054285 \\ -0.999883 & -0.008316 & -0.012827 \\ 0.013259 & -0.054181 & -0.998443 \end{pmatrix};$$

интервал 5:

$$d^{\circ} = \begin{pmatrix} -10092 \\ -7053 \\ -3625 \end{pmatrix}, \quad C^{\circ} = \begin{pmatrix} 0.006794 & -0.998545 & 0.053491 \\ -0.999892 & -0.007481 & -0.012647 \\ 0.013029 & -0.053399 & -0.998488 \end{pmatrix}.$$

Оценки точности найденных решений приведены в табл. 2.

Таблица 2. Стандартные отклонения параметров согласования показаний магнитометров

№ инт.	σ_0	σ_{d1}	σ_{d2}	σ_{d3}	$\sigma_{\theta 1}$	$\sigma_{\theta 2}$	$\sigma_{\theta 3}$
	γ				град.		
1	2277	55	55	54	0.109	0.113	0.117
2	2563	66	66	63	0.133	0.137	0.143
3	2096	50	50	50	0.101	0.105	0.103
4	2052	52	53	52	0.107	0.111	0.109
5	2108	36	37	36	0.075	0.077	0.076

Наглядное представление о результатах сопоставления дают рис. 1 – 4. Они иллюстрируют фрагменты согласованных данных на интервалах 1 – 4. Длина каждого фрагмента примерно 30 мин. Аналогичные графики для полных длин интервалов выглядели бы менее информативно из-за сравнительно большой частоты осцилляции данных, обусловленной быстрым вращением спутни-

ка. Фрагменты, полученные согласованием данных на интервалах 3 и 4, практически совпадают с теми же фрагментами, полученными согласованием данных на всем интервале 5. На рис. 1а, ... 4а в каждой системе координат изображены две ломаные. Звенья одной из них последовательно соединяют точки $(t_n, g_i^{(n)})$, другая проходит через точки $(t_n, \hat{g}_i^{(n)})$, $n=1, 2, \dots, N$. На вид эти ломаные очень близки. Чтобы наглядно показать их различие, на рис. 1б, ... 4б изображена разность этих ломаных, т.е. ломаная с вершинами в точках $(t_n, g_i^{(n)} - \hat{g}_i^{(n)})$. Анализ рисунков показывает, что различие между показаниями магнитометров достаточно велико.

Второй способ основан на предположении, что магнитометры измеряли в основном МПЗ. С учетом большого числа электрических цепей на борту спутника это предположение выглядит несколько наивным, однако опыт магнитных измерений на ЛО «Аиста» и ряде других спутников [4 – 7] позволял надеяться, что оно окажется адекватным. Этот способ состоял в сравнении модуля напряженности измеренного поля с модулем напряженности МПЗ, рассчитанной с помощью модели IGRF. Сравнение модулей не требует знания ориентации магнитометра, надо знать только орбитальное движение спутника. Такой подход позволяет проверить данные измерений каждого магнитометра, используя минимальную дополнительную информацию.

В случае достаточно точных данных в рамках второго способа можно уточнить их временную привязку и постоянную систематическую ошибку (смещение нуля). Привязка ко времени данных магнитных измерений на ОО МКА оказалась достаточно точной, тем не менее небольшой временной сдвиг уменьшал ошибку их согласования с МПЗ. Этот сдвиг, обозначим его τ , прибавлялся ко времени привязки измерения и принимался постоянным на всем временном интервале сравнения. Постоянную систематическую ошибку в измерениях компоненты поля вдоль оси магнитометра с номером i обозначим Δ_i ($i=1, 2, 3$). Эти величины вычитались из соответствующих измерений и также принимались постоянными на интервале сравнения. Значения величин τ и Δ_i определялись методом наименьших квадратов из условия наилучшего согласования на этом интервале модулей измеренного и расчетного векторов напряженности [1, 4 – 7].

Ниже описаны результаты тестирования измерений магнитометра 2. Измерения магнитометра 1 при таком тестировании оказались заметно хуже и в дальнейшей обработке магнитных измерений не использовались.

Согласование получалось значительно лучше, когда в качестве измерений принимались величины $\chi h_i^{(n)}$ при $\chi=1 \div 1.06$. Коэффициент χ подбирался на сетке с шагом 0.005 для каждого отрезка данных. Чтобы не вводить новых обозначений, указанные величины будем обозначать $h_i^{(n)}$. Ниже под измерениями магнитного поля понимаются именно эти величины при подходящем значении χ . Уточнение этого коэффициента приводило обычно и к уменьшению $|\tau|$.

Введем функцию

$$\Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = \sum_{n=1}^N \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_i]^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^3 H_i^2(t_n + \tau)} \right\}^2$$

и положим

$$\Psi_1(\tau) = \min_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Функция $\Psi_1(\tau)$ вычислялась на равномерной сетке с шагом 1с. Минимизация Ψ по Δ_i на каждом ее узле выполнялась методом Гаусса-Ньютона [8]. Значение τ^* , доставляющее минимум функции Ψ_1 на этой сетке, принималось в качестве сдвига, а соответствующие экстремальные значения Δ_i служили оценками смещений.

Стандартное отклонение σ_H ошибок согласования измеренных и расчетных модулей напряженности МПЗ и стандартное отклонение σ_τ сдвига τ рассчитывались в рамках метода наименьших квадратов по формулам

$$\sigma_H^2 = \frac{\Psi_1(\tau^*)}{N-4}, \quad \sigma_\tau^2 = 2\sigma_H^2 \left[\frac{d^2 \Psi_1(\tau^*)}{d\tau^2} \right]^{-1}.$$

Вторая производная здесь вычислялась по сеточным значениям Ψ_1 разностным способом. Расчеты такого рода проводились для нескольких значений χ (см. выше), из которых затем выбиралось значение с наименьшей величиной σ_H . Найденные оценки величин χ , τ , σ_τ и Δ_i приведены в табл. 3. Рядом со смещениями Δ_i в скобках приведены их стандартные отклонения. Эти стандартные отклонения находились из решения задачи наименьших квадратов с функционалом $\Psi(\tau^*, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ при найденных значениях χ и τ^* .

Таблица 3. Сравнение скорректированного модуля показаний магнитометра 2 с моделью IGRF

№ инт.	χ	σ_H, γ	$\tau, \text{с}$	$\sigma_\tau, \text{с}$	Δ_1, γ	Δ_2, γ	Δ_3, γ
1	1.025	924	1	1.7	-1803(38)	-2432(40)	-541(35)
2	1.045	1020	3	2.2	-2069(44)	-2371(47)	-502(39)
3	1.055	1061	-1	2.0	-2291(42)	-3034(45)	-551(43)
4	1.060	1046	1	2.5	-2307(45)	-3067(47)	-553(46)
5	1.055	1063	1	1.6	-2302(31)	-3043(32)	-580(31)

Результаты сравнения данных измерений поля и расчетных значений МПЗ иллюстрируются графиками на рис. 5, 6. В верхней части этих рисунков приведены графики функции

$$h_{\text{calc}}(t) = \sqrt{H_1^2(t) + H_2^2(t) + H_3^2(t)} \quad (t_1 + \tau \leq t \leq t_N + \tau),$$

и ломаные, проходящие через точки $(t_n + \tau, h_{\text{mes},n})$, где

$$h_{\text{mes},n} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_i]^2} \quad (n=1, 2, \dots, N).$$

Поскольку указанные графики и ломаные практически сливаются, в нижней части рисунков изображены ломаные, звенья которой соединяют соседние точки $(t_n + \tau, h_{\text{mes},n} - h_{\text{calc}}(t_n + \tau))$. Данные табл. 3 и рисунки показывают, что данные измерений поля со значениями МПЗ из модели IGRF согласуются достаточно точно.

После того как оценка τ получена, в дальнейшей обработке вместо величин t_n (см. (1)) используются величины $t_n + \tau$. Однако ниже в подписях к рисункам, связанным с магнитными измерениями, указывается нескорректированное время. Это сделано ради удобства работы с данными.

4. Методика определения движения спутника по данным магнитных измерений. Следуя методу наименьших квадратов, аппроксимацией фактического движения спутника на отрезке $t_1 \leq t \leq t_N$ будем считать решение системы (1), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=1}^N [h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n)]^2 - N\Delta_i^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_n)], \quad \hat{h}_i(t) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} h_j^{\circ}(t).$$

Здесь функции $h_i^{\circ}(t)$ определены соотношениями (2), Δ_i – оценки постоянных смещений в измерениях.

Функционал (5) получен в результате преобразования стандартного функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений $h_i^{(n)} \approx \hat{h}_i(t_n) + \Delta_i$ ($i=1, 2, 3$; $n=1, 2, \dots, N$) (ср. [4]). Минимизация Φ проводится по начальным условиям решения $\omega_i(t_1)$, $Q_j(t_1)$ ($j=0, 1, 2, 3$) и параметрам математической модели p , λ , μ , γ , α , β . При этом учитывается условие нормировки

$$Q_0^2(t_1) + Q_1^2(t_1) + Q_2^2(t_1) + Q_3^2(t_1) = 1. \quad (6)$$

Для простоты письма все уточняемые величины объединим в один вектор $z \in R^{13}$. В принятых обозначениях $\Phi = \Phi(z)$, $z_* = \arg \min \Phi(z)$ – искомая оценка вектора z . Минимизация $\Phi(z)$ выполнялась в несколько этапов разными методами. Все этапы описаны в [1]. Здесь ограничимся описанием заключительного этапа, чтобы пояснить применяемые оценки точности. На этом этапе применял-

ся метод Гаусса – Ньютона [8]. Он – итерационный. На каждой его итерации поправки $\Delta Q_j(t_1)$ к имеющимся значениям $Q_j(t_1)$ ищутся в виде (ср. кинематические уравнения системы (1))

$$\begin{aligned}\Delta Q_0(t_1) &= -\frac{1}{2}[\theta_1 Q_1(t_1) + \theta_2 Q_2(t_1) + \theta_3 Q_3(t_1)], \\ \Delta Q_1(t_1) &= \frac{1}{2}[\theta_1 Q_0(t_1) + \theta_3 Q_2(t_1) - \theta_2 Q_3(t_1)], \\ \Delta Q_2(t_1) &= \frac{1}{2}[\theta_2 Q_0(t_1) + \theta_1 Q_3(t_1) - \theta_3 Q_1(t_1)], \\ \Delta Q_3(t_1) &= \frac{1}{2}[\theta_3 Q_0(t_1) + \theta_2 Q_1(t_1) - \theta_1 Q_2(t_1)].\end{aligned}\tag{7}$$

Параметры θ_i суть компоненты вектора бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения $Q_j(t_1)$. Эти параметры и поправки $\Delta\omega_i(t_1)$, Δp и др. находятся из системы нормальных уравнений с матрицей $\|C_{ij}\|_{i,j=1}^{12}$ и правой частью $\|D_i\|_{i=1}^{12}$:

$$\begin{aligned}C_{ij} &= \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial P_i} \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial P_j} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^3 B_{li} B_{lj}, \\ D_i &= \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^3 [h_l^{(n)} - \hat{h}_l(t_n)] \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial P_i} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^3 \Delta_l B_{li}, \\ \frac{\partial \hat{h}_1(t)}{\partial P_i} &= \hat{h}_2(t) \frac{\partial \hat{\phi}_3(t)}{\partial P_i} - \hat{h}_3(t) \frac{\partial \hat{\phi}_2(t)}{\partial P_i}, \\ \frac{\partial \hat{h}_2(t)}{\partial P_i} &= \hat{h}_3(t) \frac{\partial \hat{\phi}_1(t)}{\partial P_i} - \hat{h}_1(t) \frac{\partial \hat{\phi}_3(t)}{\partial P_i}, \\ \frac{\partial \hat{h}_3(t)}{\partial P_i} &= \hat{h}_1(t) \frac{\partial \hat{\phi}_2(t)}{\partial P_i} - \hat{h}_2(t) \frac{\partial \hat{\phi}_1(t)}{\partial P_i}, \\ B_{li} &= \sum_{n=1}^N \frac{\partial \hat{h}_l(t_n)}{\partial P_i} \quad (l=1, 2, 3; i, j=1, 2, \dots, 12).\end{aligned}$$

Здесь $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ – обозначения величин $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1(t_1), \omega_2(t_1), \omega_3(t_1), p, \lambda, \mu, \gamma, \alpha$ и β в указанном порядке, $\partial \hat{\phi}_m(t)/\partial P_i$ – псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных $\partial \hat{h}_l(t)/\partial P_i$. Псевдопроизводная – это не частная производная некоторой функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую

запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами. Псевдопроизводная – это вектор, являющийся аналогом угловой скорости. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная – для расчета производных по параметру. В обозначении $\partial \hat{\phi}_m / \partial P_j$ индекс m указывает векторную компоненту, индекс j – номер параметра, по которому выполняется дифференцирование. Приведем формулы для расчета псевдопроизводных в системе нормальных уравнений и расчета некоторых настоящих производных

$$\frac{\partial \hat{\phi}_i(t)}{\partial P_j} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial \phi_k(t)}{\partial P_j}, \quad \left\| \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial P_s} \right\| = - \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & 0 & \sin \alpha \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & \cos \alpha \end{array} \right\|,$$

$$(i=1, 2, 3; j=1, 2, \dots, 9; s=10, 11, 12)$$

при этом (ср. выписанные выражения для $\partial Q_i / \partial P_j$ с кинематическими уравнениями в (1) и формулами (7))

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_0(t)}{\partial P_j} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi_1(t)}{\partial P_j} Q_1(t) + \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial P_j} Q_2(t) + \frac{\partial \phi_3(t)}{\partial P_j} Q_3(t) \right], \\ \frac{\partial Q_1(t)}{\partial P_j} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi_1(t)}{\partial P_j} Q_0(t) + \frac{\partial \phi_3(t)}{\partial P_j} Q_2(t) - \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial P_j} Q_3(t) \right], \\ \frac{\partial Q_2(t)}{\partial P_j} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi_2(t)}{\partial P_j} Q_0(t) + \frac{\partial \phi_1(t)}{\partial P_j} Q_3(t) - \frac{\partial \phi_3(t)}{\partial P_j} Q_1(t) \right], \\ \frac{\partial Q_3(t)}{\partial P_j} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi_3(t)}{\partial P_j} Q_0(t) + \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial P_j} Q_1(t) - \frac{\partial \phi_1(t)}{\partial P_j} Q_2(t) \right], \\ \frac{\partial b_{i1}(t)}{\partial P_j} &= b_{i2} \frac{\partial \phi_3(t)}{\partial P_j} - b_{i3} \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial P_j}, & \frac{\partial a_{1k}(t)}{\partial P_s} &= a_{2k} \frac{\partial \hat{\phi}_3(t)}{\partial P_s} - a_{3k} \frac{\partial \hat{\phi}_2(t)}{\partial P_s}, \\ \frac{\partial b_{i2}(t)}{\partial P_j} &= b_{i3} \frac{\partial \phi_1(t)}{\partial P_j} - b_{i1} \frac{\partial \phi_3(t)}{\partial P_j}, & \frac{\partial a_{2k}(t)}{\partial P_s} &= a_{3k} \frac{\partial \hat{\phi}_1(t)}{\partial P_s} - a_{1k} \frac{\partial \hat{\phi}_3(t)}{\partial P_s}, \\ \frac{\partial b_{i3}(t)}{\partial P_j} &= b_{i1} \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial P_j} - b_{i2} \frac{\partial \phi_1(t)}{\partial P_j}, & \frac{\partial a_{3k}(t)}{\partial P_s} &= a_{1k} \frac{\partial \hat{\phi}_2(t)}{\partial P_s} - a_{2k} \frac{\partial \hat{\phi}_1(t)}{\partial P_s} \end{aligned}$$

$$(i, k=1, 2, 3; j=1, 2, \dots, 9; s=10, 11, 12).$$

Значения псевдопроизводных $\partial \phi_k / \partial P_j$ определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_1}{\partial P_j} = \frac{\partial \phi_2}{\partial P_j} \omega_3 - \frac{\partial \phi_3}{\partial P_j} \omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial P_j},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_2}{\partial P_j} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial P_j} \omega_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial P_j} \omega_3 + \frac{\partial \omega_2}{\partial P_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_3}{\partial P_j} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial P_j} \omega_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial P_j} \omega_1 + \frac{\partial \omega_3}{\partial P_j} \\ (i=1, 2, 3; j=1, 2, \dots, 9)\end{aligned}$$

совместно с уравнениями (1) и уравнениями в вариациях для $\partial \omega_k / \partial P_j$. Последние получают дифференцированием по P_j первых трех уравнений (1), причем производные $\partial Q_i / \partial P_j$ выражаются через $\partial \varphi_k / \partial P_j$ с помощью приведенных выше формул. Ненулевые начальные условия для $\partial \varphi_k / \partial P_j$ и $\partial \omega_k / \partial P_j$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta_k} \right|_{t=t_1} = \left. \frac{\partial \omega_k}{\partial \omega_k(t_1)} \right|_{t=t_1} = 1 \quad (k=1, 2, 3).$$

Прибавление найденных поправок $\Delta Q_j(t_1)$ к имеющимся значениям $Q_j(t_1)$ нарушает условие (6), поэтому новый кватернион ориентации нормируется. Внесенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно $\Delta Q_j(t_1)$.

Интегрирование уравнений (1) и указанных выше уравнений в вариациях выполняется одним из методов Дормана – Принса 8-го порядка. Это – метод типа Рунге – Кутты, реализованный в стандартной процедуре DOP853 [9]. Метод и программа позволяют строить полином, интерполирующий вычисляемое решение внутри шага интегрирования. Этот полином используется для вычисления функционала (5), матрицы $\|C_{ij}\|$ и правой части $\|D_i\|$ системы нормальных уравнений. При этом интегрирование уравнений движения и уравнений в вариациях выполняется с оптимальным достаточно большим шагом, величина которого выбирается по критерию локальной точности интегрирования. Наличие интерполяционного полинома и возросшее быстродействие персональных компьютеров позволили осуществлять совместную обработку всех собранных данных измерений, не проводя их предварительную обработку.

Точность аппроксимации измерений и оценки z_* будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в измерениях одной и той же векторной компоненты напряженности МПЗ равны. Эти предположения согласованы с видом функционала (5). При сделанных допущениях z_* – случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению z . Вследствие условия (6) это распределение – несобственное, т.е. имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать ха-

рактеризацию ошибок более наглядной, ошибки $\Delta Q_j(t_1)$ в задании компонент $Q_j(t_1)$ вектора z_* представим в виде (7), где теперь θ_i образуют случайный вектор бесконечно малого поворота. Величины θ_i имеют нулевые математические ожидания и вместе с ошибками остальных компонент z_* описываются ковариационной матрицей

$$K_z = \sigma^2 C^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^{12}, \quad \sigma^2 = \frac{\Phi(z_*)}{3N-12}.$$

Здесь σ^2 – оценка дисперсии ошибок в измерениях (3), C – матрица $\| C_{ij} \|$, вычисленная в точке z_* . Точность аппроксимации измерений будем характеризовать стандартным отклонением σ , точность оценки z_* – стандартными отклонениями $\sqrt{K_{ii}}$ ($i=1, 2, \dots, 12$). Стандартные отклонения величин θ_i , $\omega_i(t_1)$, p и др. обозначим $\sigma_{\theta i}$, $\sigma_{\omega i}$, $\sigma_p \dots$

5. Результаты реконструкции движения ОО МКА «Аист». Реконструкция выполнена на первых четырех интервалах времени, перечисленных в табл. 1. Оценки точности начальных условий найденных движений спутника и оценки параметров принятой математической модели приведены в табл. 4. Угловые величины в ней выражены в радианах. Оценки параметров λ , μ , γ , α и β , характеризующих тензор инерции спутника, довольно стабильны. Оценки параметра p меняются, но это изменение можно связать с изменением угловой скорости спутника.

В [1] величины p_i в уравнениях (1) считались параметрами согласования. Их значения определялись на каждом обрабатываемом интервале измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника. Однако в случае быстрого вращения спутника, когда его движение близко движению Эйлера – Пуансо, влияние магнитного момента проявляется специфическим образом. Это влияние усредняется по указанному движению так, что эффективный дипольный момент спутника оказывается направленным вдоль вектора его кинетического момента в движении относительно центра масс. Формулы для величины p_i в (1) учитывают это обстоятельство. Кроме того, они учитывают тот факт, что кинетический момент и эффективный дипольный момент на интервале обработки данных измерений меняются мало. Формулы выбраны максимально простые, поэтому уточняемый параметр p зависит не только от величины дипольного момента, но и от угловой скорости спутника. По этой причине разные значения p на разных интервалах измерений даже при стабильной токовой обстановке на спутнике не должны вызывать удивления. Изменчивость этой обстановки на разных интервалах неуправляемого движения спутника характеризуется оценками смещений Δ_i . Судя по данным табл. 4, она невелика.

Обработка измерений на интервалах 1 – 4 с помощью модели движения [1] дала значения σ , равные соответственно 1281, 1130, 2189 и 1964 γ . Оценки

параметров p_i при этом имели большой разброс. Как видим, потеря точности аппроксимации измерений в новой математической модели незначительна, зато оценки дипольного момента спутника стали более стабильны. Следует отметить, что при минимизации функционала (5) априорная информация о параметрах системы (1) не учитывалась. Она неизвестна.

Таблица 4. Интервалы реконструкции вращательного движения

№ инт.	σ, γ	$\sigma_{\omega 1},$ 10^{-3}с^{-1}	$\sigma_{\omega 2},$ 10^{-3}с^{-1}	$\sigma_{\omega 3},$ 10^{-3}с^{-1}	$\sigma_{\theta 1}$	$\sigma_{\theta 2}$	$\sigma_{\theta 3}$
1	1300	0.15	0.29	0.10	0.0032	0.0022	0.00062
2	1148	0.11	0.27	0.092	0.0022	0.0017	0.00056
3	2207	0.95	0.40	0.31	0.0037	0.0048	0.0074
4	1970	0.38	0.52	0.33	0.0037	0.0033	0.0063
6	1184	0.17	0.052	0.092	0.0028	0.0046	0.0041

№ инт.	Δ_1, γ	Δ_2, γ	Δ_3, γ	$p \times 10^6$ $\Gamma^{-1/2} \text{см}^{1/2}$	$\sigma_p \times 10^6$ $\Gamma^{-1/2} \text{см}^{1/2}$	λ	σ_λ
1	−1745	2512	−544	−126	3.9	1.232	0.00073
2	−1969	2516	−581	−108	5.4	1.230	0.00068
3	−2307	3020	−561	−34	6.7	1.235	0.0010
4	−2266	3077	−522	−35	6.3	1.235	0.00099
6	−471	−1556	6062	−70	4.9	1.239	0.0023

№ инт.	μ	σ_μ	γ	σ_γ	α	σ_α	β	σ_β
1	0.312	0.0012	0.019	0.0011	0.139	0.0011	−0.280	0.0061
2	0.314	0.0012	0.019	0.0011	0.138	0.0010	−0.279	0.0057
3	0.308	0.0012	0.014	0.0019	0.140	0.0019	−0.280	0.0053
4	0.308	0.0011	0.016	0.0018	0.142	0.0018	−0.278	0.0051
6	0.309	0.00092	0.027	0.0016	0.177	0.0038	−0.262	0.0013

Ни уравнения (1), ни уравнения движения, принятые в [1], не позволили обработать с приемлемой ошибкой измерения на интервале 5 из табл. 1. Этот интервал – слишком длинный. Точность уравнений (1) имеет предел. Сокращение длины интервала позволяет повысить точность обработки. Например, обработка начальной части интервала 3 длиной 1 ч дает $\sigma=1102\gamma$. Однако на графиках, иллюстрирующих движение спутника, такое повышение точности незаметно.

Рис. 7 – 14 иллюстрируют реконструированное движение спутника и аппроксимацию данных измерений. На них представлены начальные участки каждого интервала длиной по 30 мин. Они позволяют получить представление

о довольно однообразных движениях на полных интервалах. На рис. 7а, 9а, 11а и 13а изображены графики углов Эйлера ψ , θ и φ , описывающих движение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OZ_1Z_2Z_3$. На тех же рисунках с индексом «б» приведены графики угловых скоростей ω_i . Рис. 8, 10, 12 и 14 характеризуют магнитные измерения. На рис. 8а, 10а, 12а и 14а приведены графики функций $\hat{h}_i(t)$ (см. (5)) и ломаные, звенья которых последовательно соединяют точки $(t_n, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n=1, 2, \dots, N$. Длинные звенья ломаных соответствуют пропускам в данных измерений. Каждая ломаная и график аппроксимирующей ее функции $\hat{h}_i(t)$ изображены в общей системе координат. Такие ломаная и график почти совпадают, поэтому на рисунках с теми же номерами, но индексом «б» изображены графики остатков – ломаные, соединяющие точки $(t_n, h_i^{(n)} - h_i[t_n] - \Delta_i)$. Аналогичные ломаные для полных интервалов приведены на рис. 8в, 10в, 12в и 14в. Отсюда можно понять, что графики движения на полных интервалах были бы неинформативны. Как следует из табл. 4 и вида рис. 8, 10, 12 и 14, аппроксимация магнитных измерений получилась вполне приемлемой – хуже, чем в случае «Фотона М-2» [5], но лучше, чем на «Фотоне-12» [4].

Интересно сравнить найденные движения ОО «Аиста» с быстрыми движениями ЛО «Аиста». Реконструкция достаточно быстрого движения последнего приведена на рис. 15, 16, которые организованы аналогично рис. 7 – 14. Обработанный интервал здесь не слишком длинный, и угловая скорость спутника не очень велика, поэтому рисунки построены для полного интервала. Реконструкция характеризуется следующими значениями параметров: момент t_1 соответствует 02:43:59 ДМВ 27.04.2013, $N=1093$, $t_N - t_1 = 109.6$ мин, $\tau=0$, $\chi=0.994$. Остальные параметры приведены в табл. 4 в строке интервала 6. Как видим, параметры тензоров инерции обоих спутников достаточно близки. В частности, отношение моментов инерции $I_1:I_2:I_3$ составляет для ОО «Аиста» примерно 1.23:1.38:1, а для ЛО «Аиста» 1.24:1.38:1.

Сравнение рис. 7 – 14 с рис. 15, 16 показывает, что движения спутников заметно отличались, хотя все реконструированные движения близки движению Эйлера – Пуансо. Отличие состоит в том, что рис. 7 – 14 иллюстрируют движения ОО, близкие вращению вокруг его оси минимального момента инерции (оси x_3), а на рис. 15, 16 движение ЛО происходит вокруг оси максимального момента инерции (оси x_2). Это следует из вида графиков компонент угловой скорости. На рис. 7б, 9б, 11б и 13 компонента ω_3 положительна, компоненты ω_1 и ω_2 меняют знак. На рис. 15б знак меняют ω_1 и ω_3 , а $\omega_2 > 0$. Кроме того, в движении Эйлера – Пуансо компоненты угловой скорости – периодические функции времени, причем период компоненты вдоль оси вращения вдвое меньше, чем у компонент вдоль других осей. Это обстоятельство бросается в глаза на перечисленных рисунках. Различие движений спутников проявляется и в графиках углов Эйлера. У ЛО монотонно меняется угол ψ , у ОО – угол φ .

Приведем количественные характеристики реконструированных движений. Движение Эйлера – Пуансо имеет место лишь в случае, когда главный момент приложенных к спутнику внешних сил равен нулю. Этот случай описывается системой (1), в которой $\nu \equiv 0$, $p = 0$. В получившейся системе первые три уравнения (относительно ω_i) отделяются и допускают два первых интеграла – модуля кинетического момента и удвоенной кинетической энергии. Эти интегралы запишем в виде

$$L = \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + (1 + \lambda\mu)^2 \omega_2^2 + \omega_3^2}, \quad 2E = \lambda \omega_1^2 + (1 + \lambda\mu) \omega_2^2 + \omega_3^2.$$

Наряду с этими интегралами рассмотрим их комбинации, которые также являются первыми интегралами:

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt{\frac{2(1 + \lambda\mu)E - L^2}{\lambda\mu}} = \sqrt{\frac{1 - \lambda + \lambda\mu}{\mu} \omega_1^2 + \omega_3^2}, \\ w_3 &= \sqrt{\frac{L^2 - 2E}{\lambda\mu(1 + \lambda\mu)}} = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\mu(1 + \lambda\mu)} \omega_1^2 + \omega_2^2}, \\ \kappa &= L^2 - 2\lambda E = (1 + \lambda\mu)(1 - \lambda + \lambda\mu) \omega_2^2 - (\lambda - 1) \omega_3^2 = \\ &= (1 + \lambda\mu)(1 - \lambda + \lambda\mu) w_3^2 - (\lambda - 1) w_2^2. \end{aligned}$$

Для обоих «Аистов» параметризованные коэффициенты в выписанных выражениях положительны.

Траектории первых трех уравнений новой системы (1) в пространстве $R^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ называются полодиями. Значения интегралов L , w_2 , w_3 и κ на этих траекториях будем обозначать теми же символами с индексом 0. При $\kappa_0 \neq 0$ и $w_{20}w_{30} > 0$ полодии представляют собой замкнутые кривые. В случае $\kappa_0 > 0$ полодии охватывают ось ω_2 . Их проекции на плоскость (ω_1, ω_3) образуют семейство эллипсов, задаваемых уравнениями $w_2 = w_{20}$. При $w_{20} = 0$ соответствующий эллипс вырождается в точку $\omega_1 = \omega_3 = 0$, и движение спутника представляет собой стационарное вращение вокруг оси x_2 с угловой скоростью $\omega_2 = \pm L_0 / (1 + \lambda\mu)$. Проекции полодий на плоскость (ω_1, ω_2) суть отрезки эллипсов $w_3 = w_{30}$, расположенных внутри эллипса $\lambda^2 \omega_1^2 + (1 + \lambda\mu)^2 \omega_2^2 = L_0^2$. Проекция полодий на плоскость (ω_2, ω_3) представляют собой отрезки гипербол $\kappa = \kappa_0 > 0$, лежащих внутри эллипса $\omega_3^2 + (1 + \lambda\mu)^2 \omega_2^2 = L_0^2$.

Аналогичным образом при $\kappa_0 < 0$ полодии охватывают ось ω_3 . Их проекции на плоскость (ω_1, ω_2) образуют семейство эллипсов $w_3 = w_{30}$. При $w_{30} = 0$ такой эллипс вырождается в точку $\omega_1 = \omega_2 = 0$, и движение спутника представляет собой стационарное вращение вокруг оси x_3 с угловой скоростью $\omega_3 = \pm L_0$. Проекция полодий на плоскости (ω_1, ω_3) и (ω_2, ω_3) представляют

собой отрезки эллипсов $w_2 = w_{20}$ и гипербол $\kappa = \kappa_0 < 0$ соответственно. Отрезки выделяются соотношениями, которые следуют из первого интеграла $L = L_0$.

На движениях спутника с достаточно большой угловой скоростью даже при ненулевом внешнем моменте функции L , w_2 , w_3 меняются мало. В такой ситуации движение спутника на интервалах обработки данных измерений имеет смысл характеризовать величинами

$$\langle L \rangle = \frac{1}{t_N - t_1} \int_{t_1}^{t_N} L dt, \quad \delta L = \sqrt{\frac{1}{t_N - t_1} \int_{t_1}^{t_N} (L - \langle L \rangle)^2 dt}$$

и определяемыми аналогичным образом величинами $\langle w_2 \rangle$, δw_2 , $\langle w_3 \rangle$, δw_3 . Среднеквадратические отклонения δL , δw_2 , δw_3 характеризуют близость движения спутника к движению Эйлера – Пуансо с параметрами $\langle L \rangle$, $\langle w_2 \rangle$, $\langle w_3 \rangle$. По существу эти отклонения характеризуют приложенный к спутнику внешний механический момент, играющий в данном случае роль малого возмущения. Для найденных реконструкций движения «Аистов» указанные средние величины и их среднеквадратические отклонения приведены в табл. 5.

Таблица 5. Параметры движения Эйлера – Пуансо в единицах 10^{-3}с^{-1}

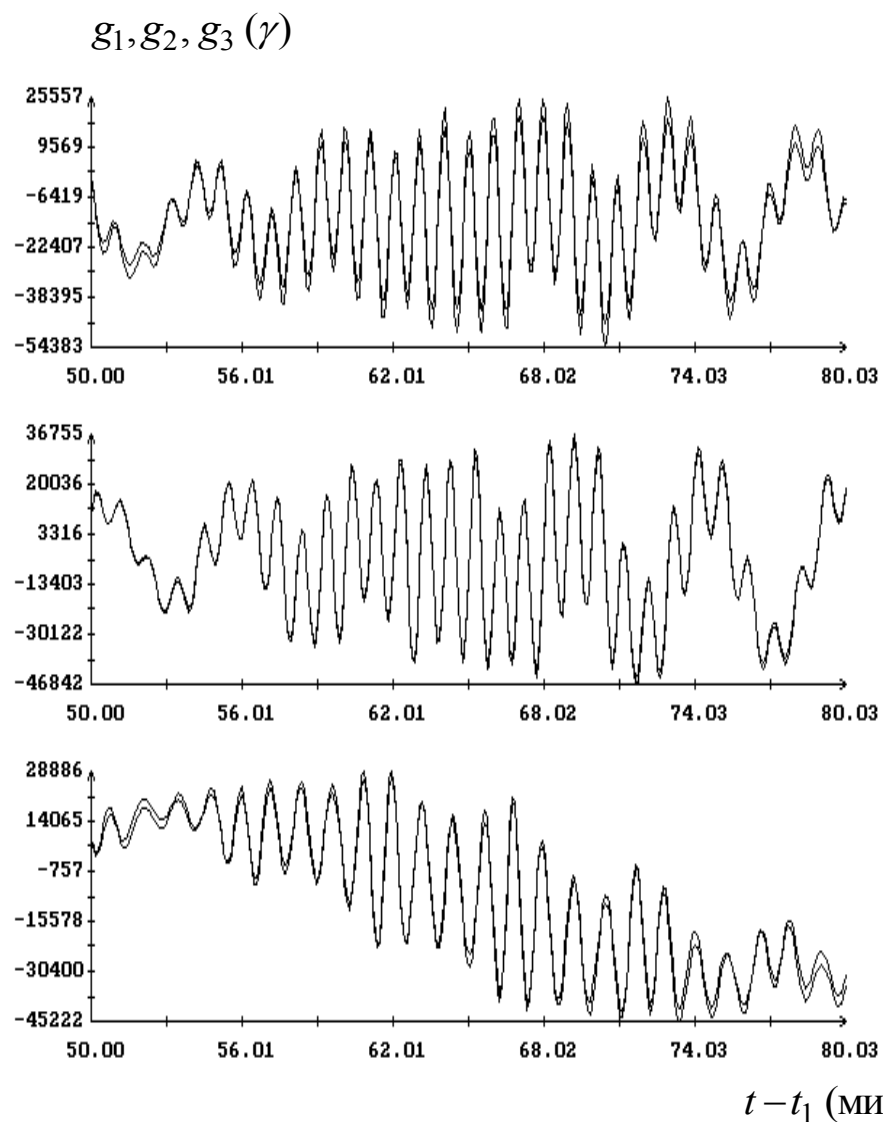
№ инт.	$\langle L \rangle$	δL	$\langle w_2 \rangle$	δw_2	$\langle w_3 \rangle$	δw_3
1	113.2	0.0018	92.2	0.019	47.5	0.017
2	115.1	0.0017	95.4	0.015	46.5	0.014
3	179.9	0.0012	117.0	0.0062	99.0	0.0031
4	179.7	0.0012	116.6	0.0064	99.1	0.0031
6	57.1	0.0035	21.2	0.016	38.3	0.0039

Для всех рассматриваемых интервалов $\delta L \ll \langle L \rangle$, $\delta w_2 \ll \langle w_2 \rangle$, $\delta w_3 \ll \langle w_3 \rangle$, следовательно, движение спутников на них было действительно близко движению Эйлера – Пуансо.

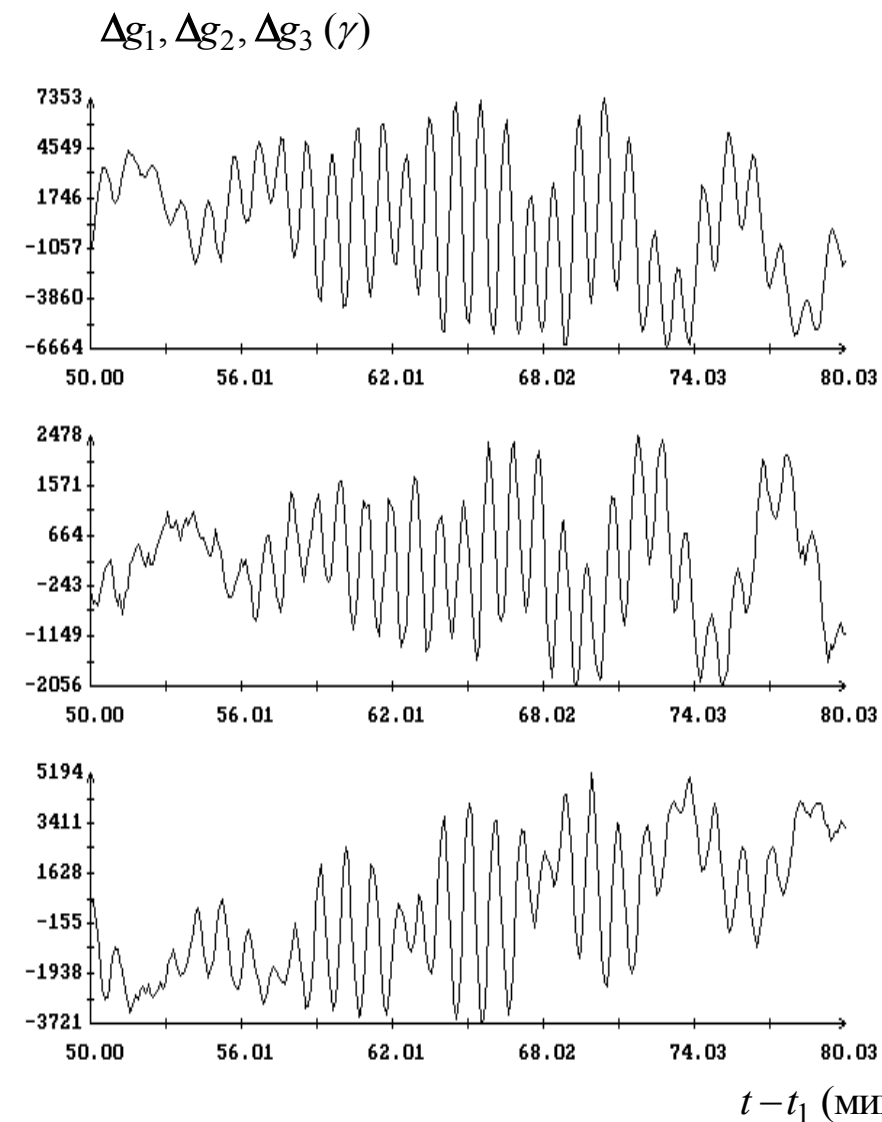
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00423).

Литература

1. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков А.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Филиппов А.С., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Аист* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 17.
2. Hoots F.R., Roehrich R.L. Models for propagation of NORAD element sets. Spacetrack report No. 3. 1988.
3. Панкратов В.А., Сазонов В.В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 42.
4. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 45-56.
5. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон М-2* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 5. С. 450-470.
6. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-3* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48. № 3. С. 252-265.
7. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение движения спутника «Бион М-1» средствами аппаратуры ГРАВИТОН // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 2.
8. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., Мир, 1985.
9. Hairer E., Norset S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. 1993. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg.



(а)



(б)

Рис. 1. Интервал 1; (а) – согласованные данные измерений магнитометров 1, 2 в системе координат магнитометра 1; (б) – разности компонент согласованных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1.

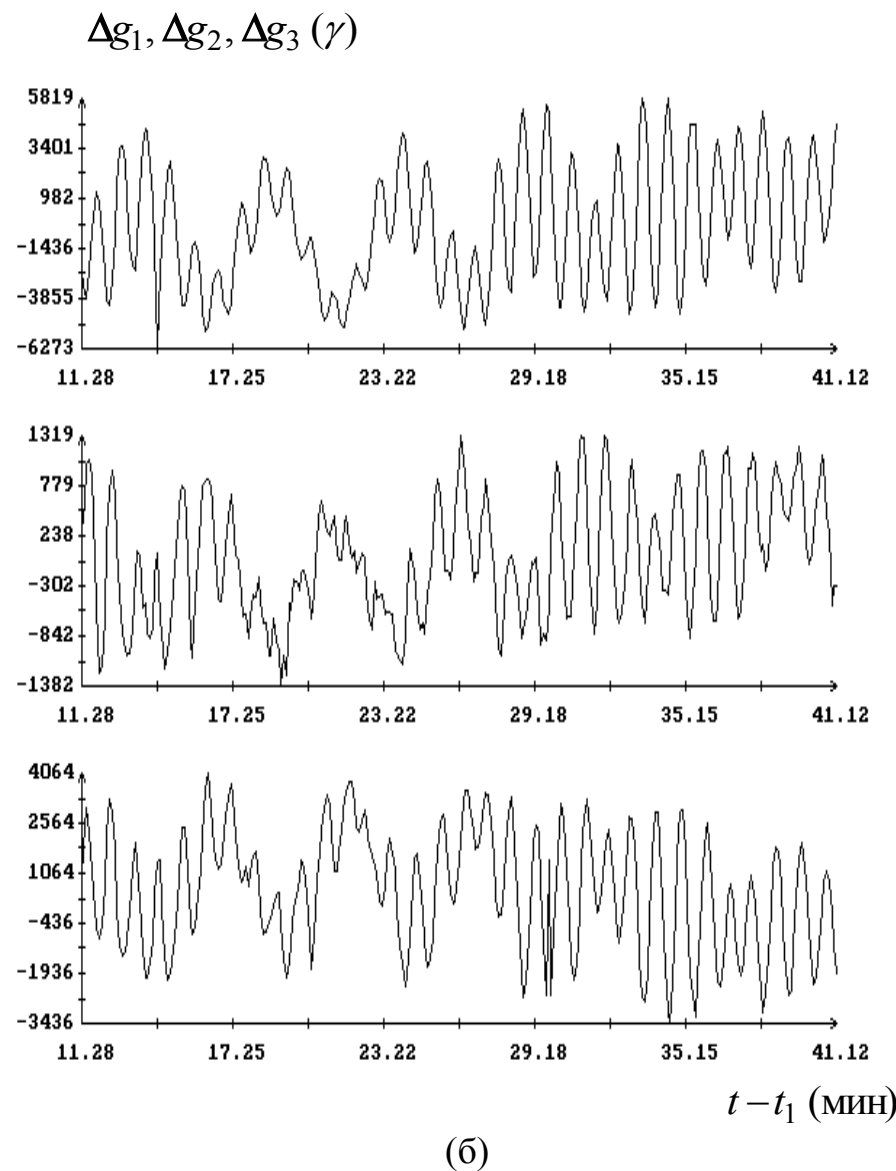
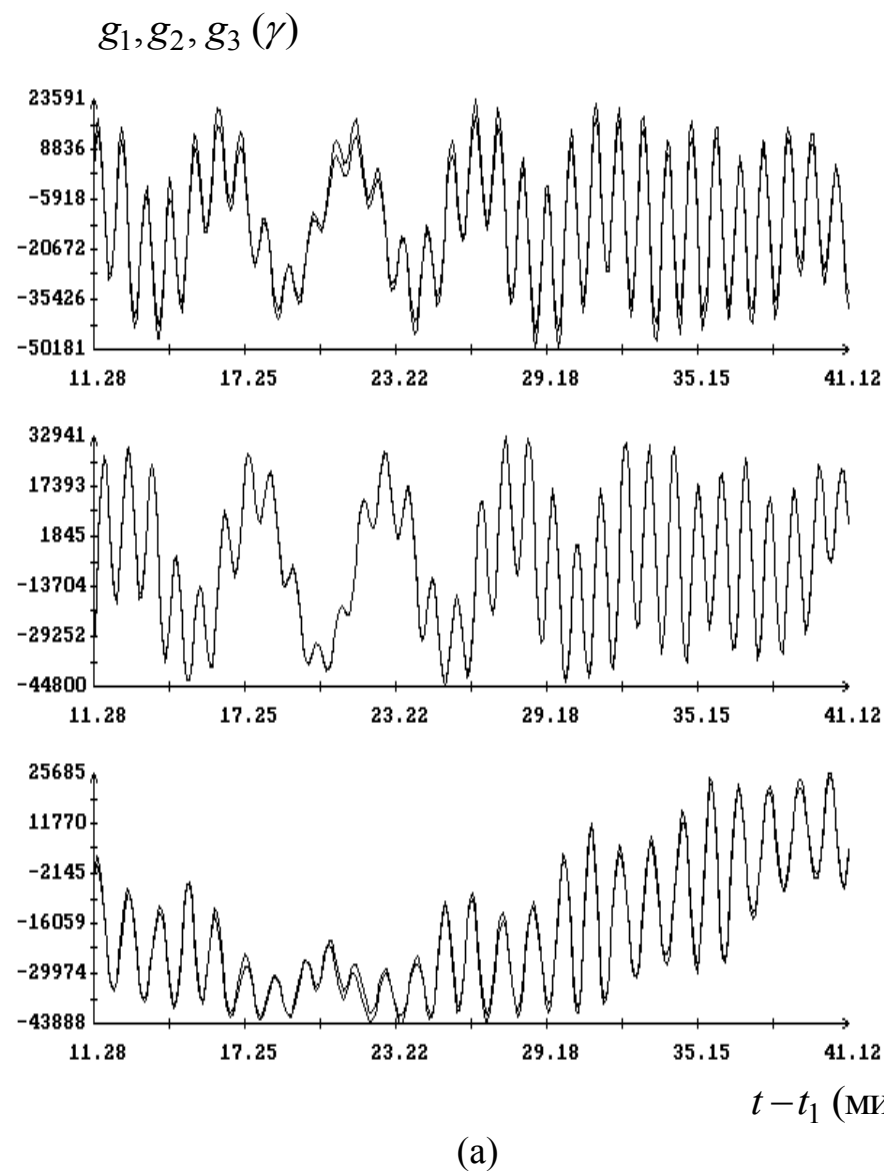
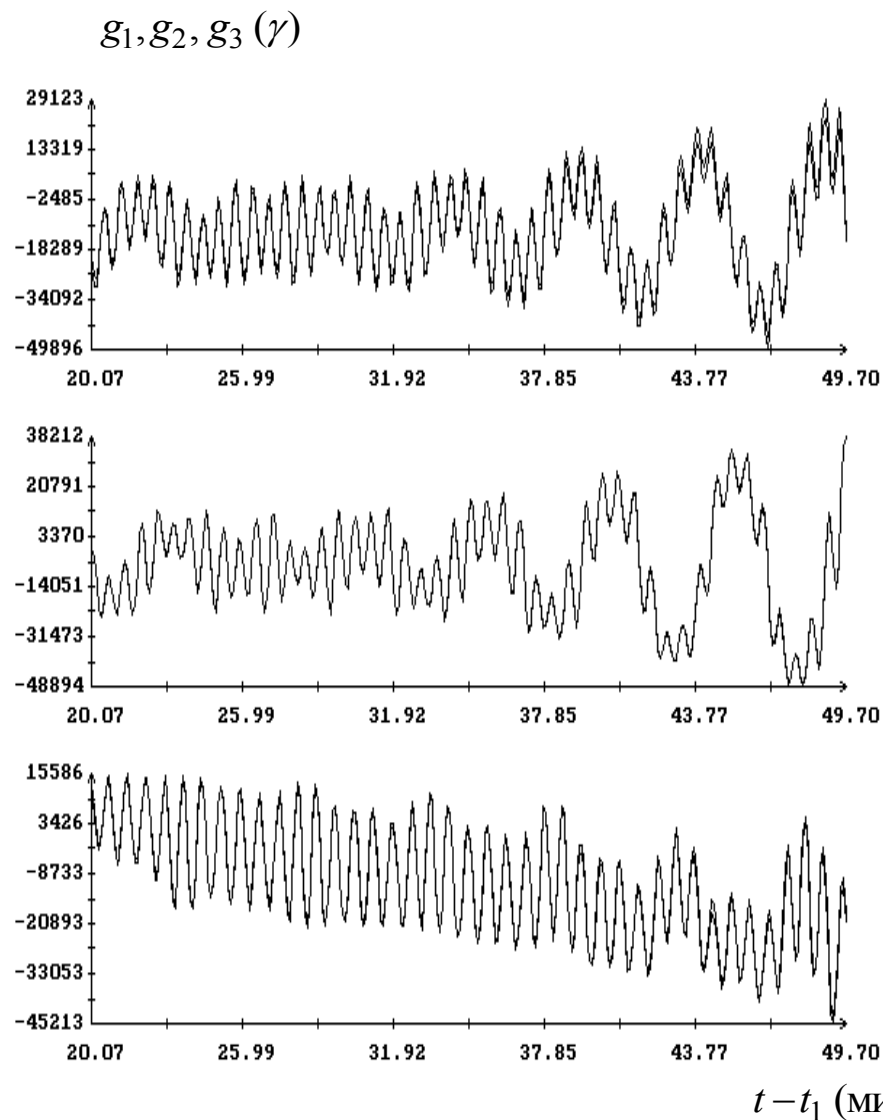
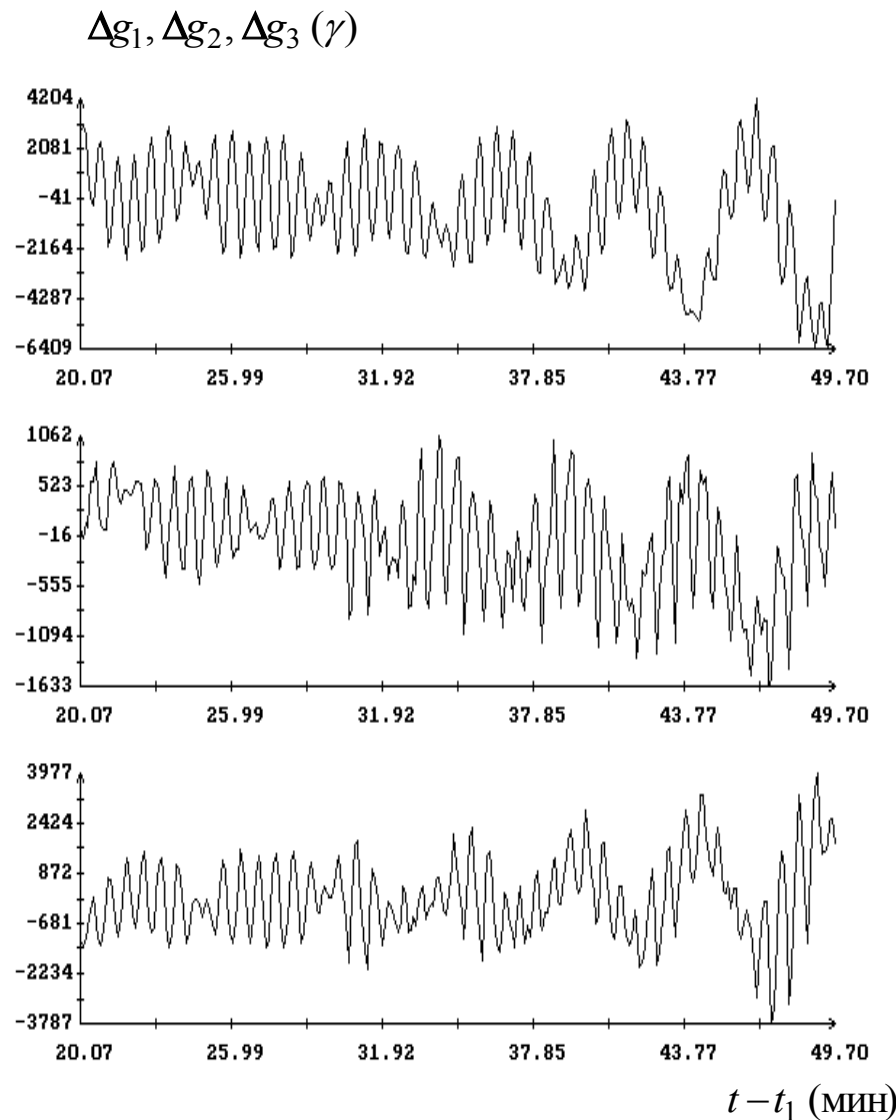


Рис. 2. Интервал 2; (а) – согласованные данные измерений магнитометров 1, 2 в системе координат магнитометра 1; (б) – разности компонент согласованных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1.

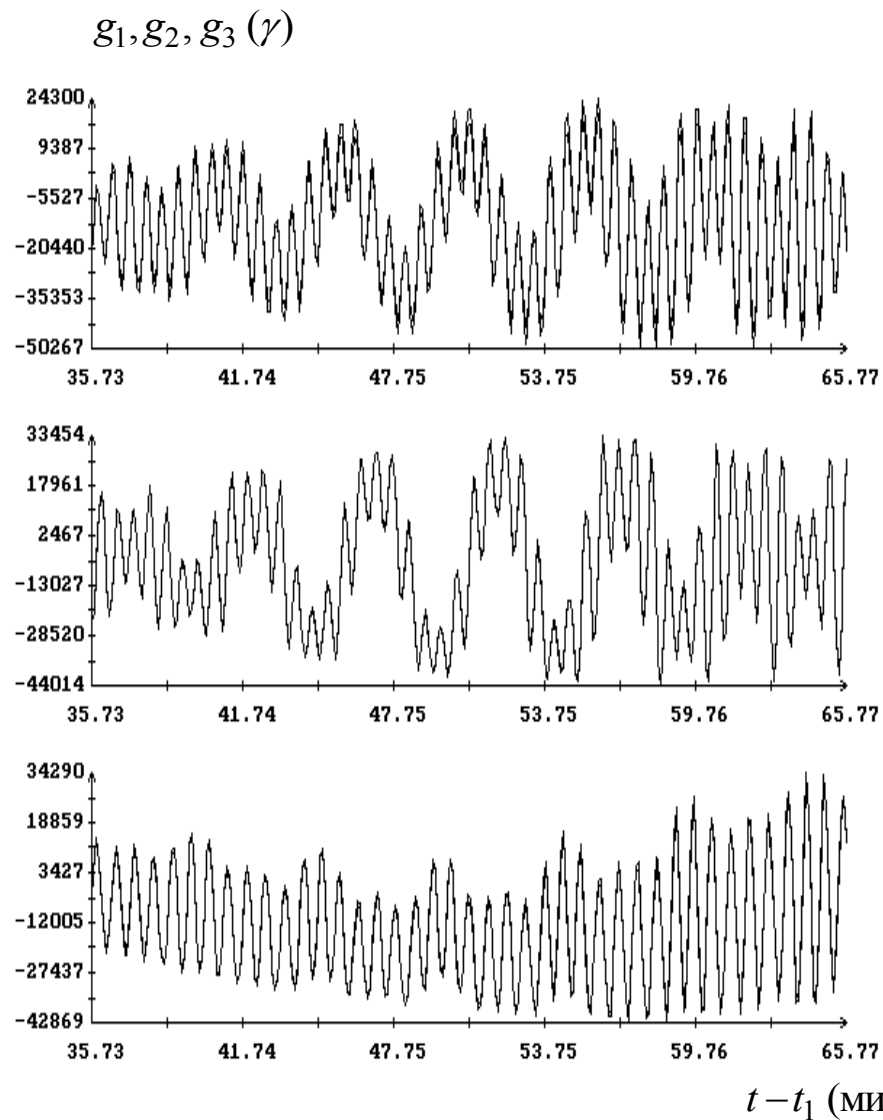


(а)

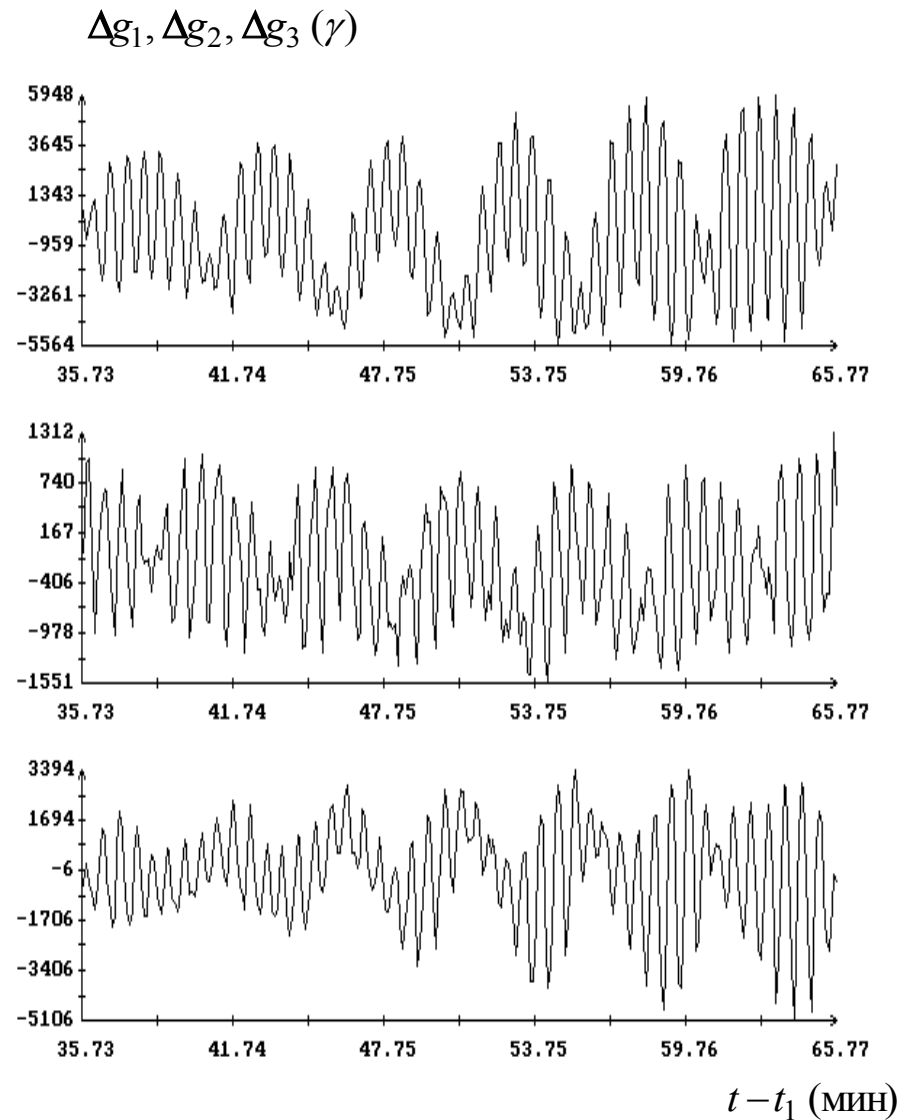


(б)

Рис. 3. Интервал 3; (а) – согласованные данные измерений магнитометров 1, 2 в системе координат магнитометра 1; (б) – разности компонент согласованных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1.



(а)



(б)

Рис. 4. Интервал 4; (а) – согласованные данные измерений магнитометров 1, 2 в системе координат магнитометра 1; (б) – разности компонент согласованных измерений магнитометров 1 и 2 в системе координат магнитометра 1.

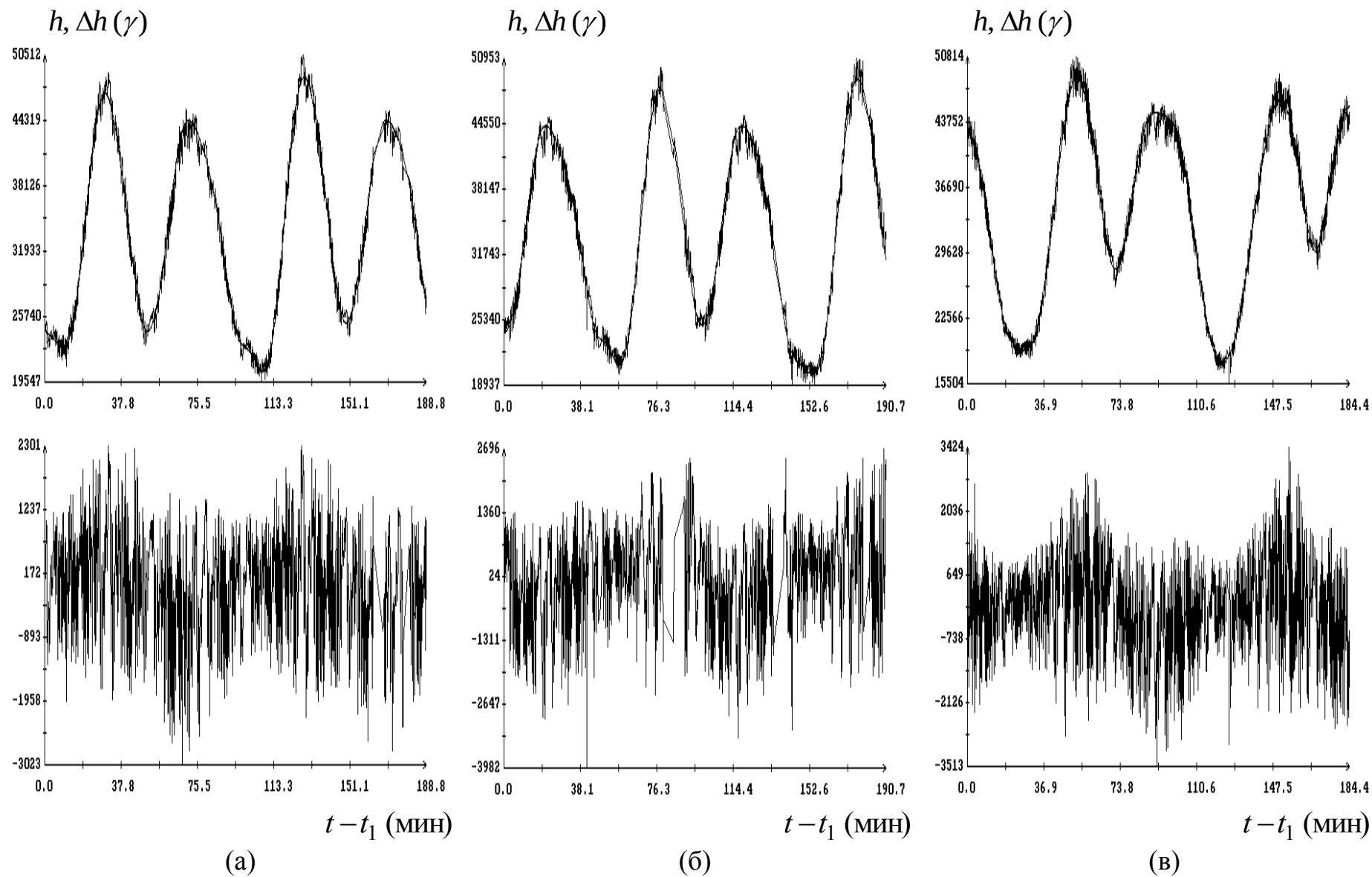
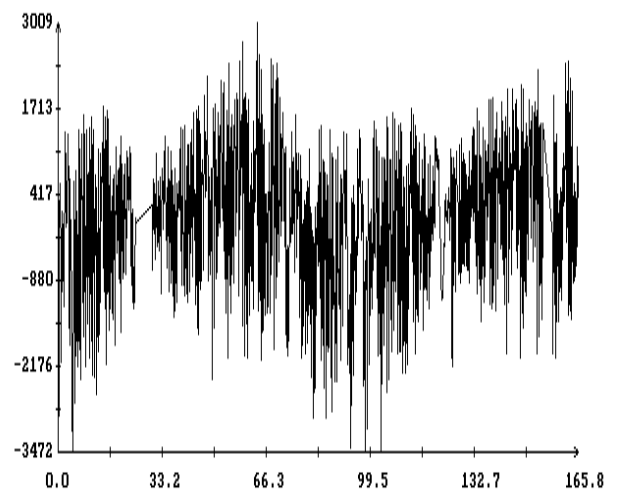
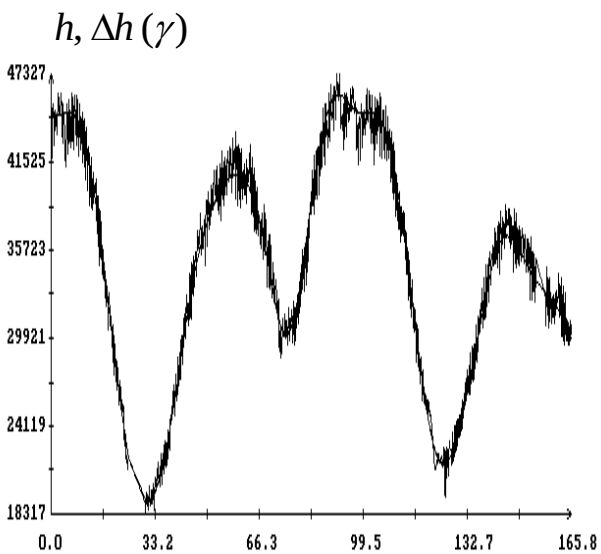
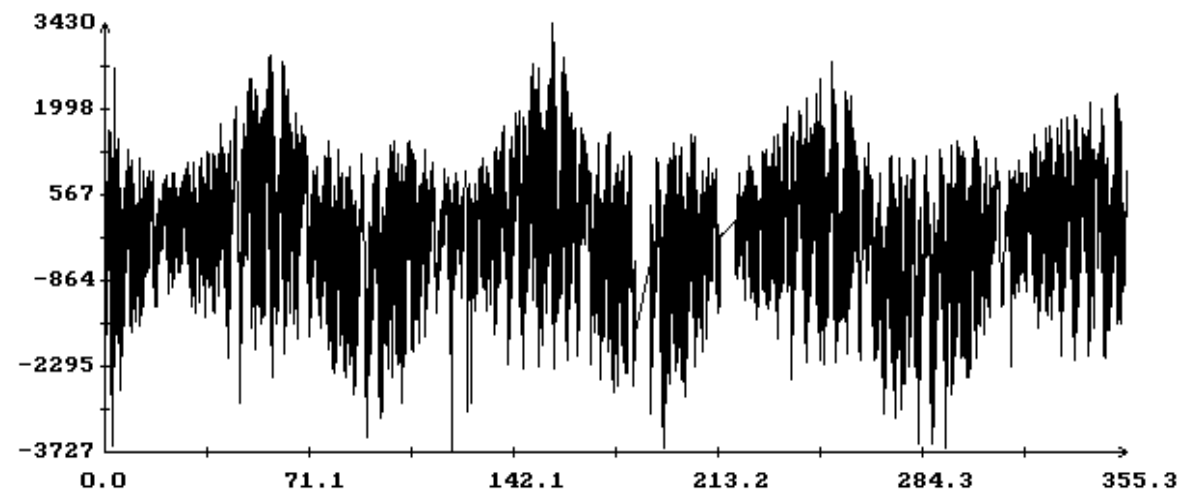
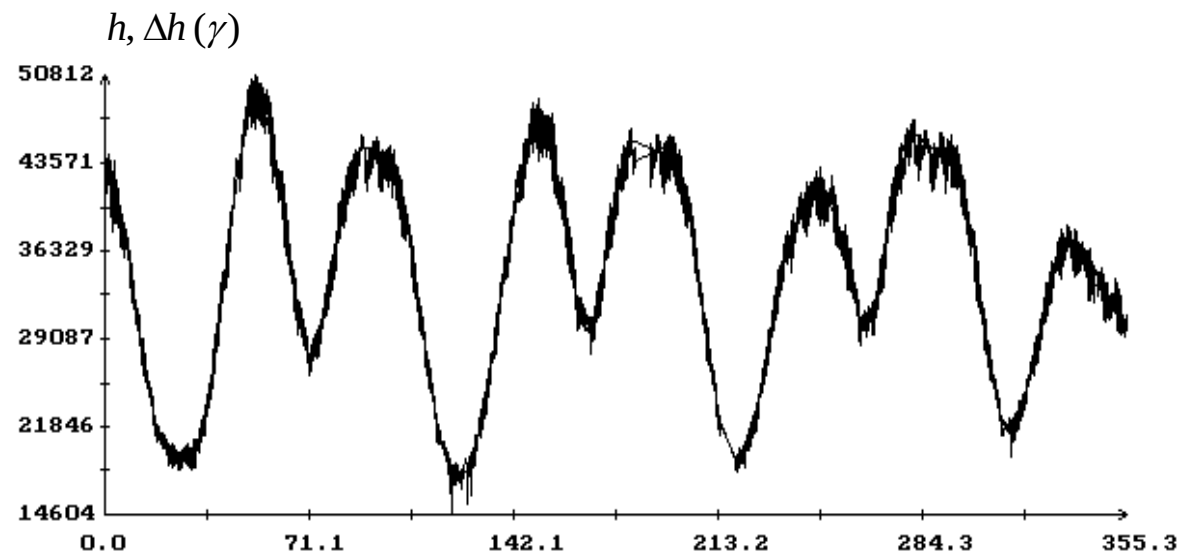


Рис. 5. Сравнение модуля измерений магнитометра 2 с модулем напряженности МПЗ (модель IGRF):
(а) – на интервале 1; (б) – на интервале 2, (в) – на интервале 3.

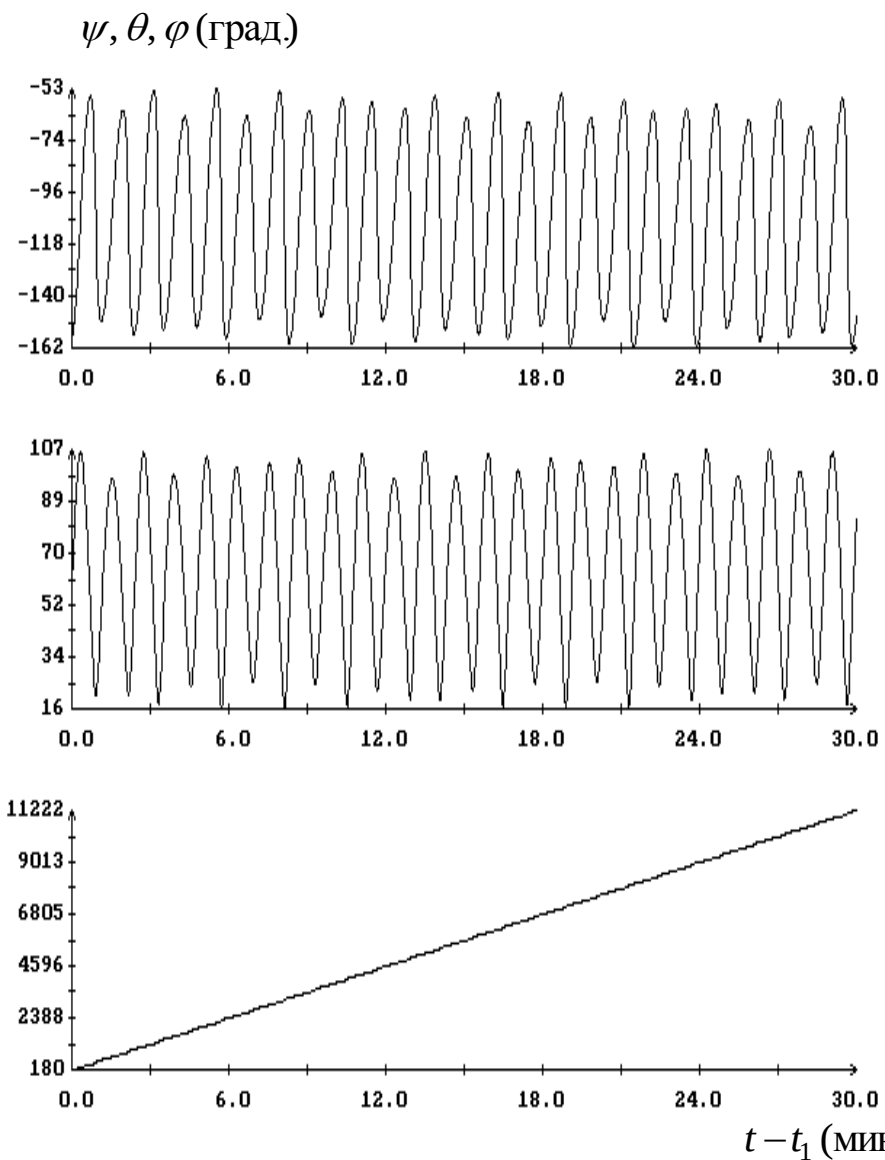


(a)

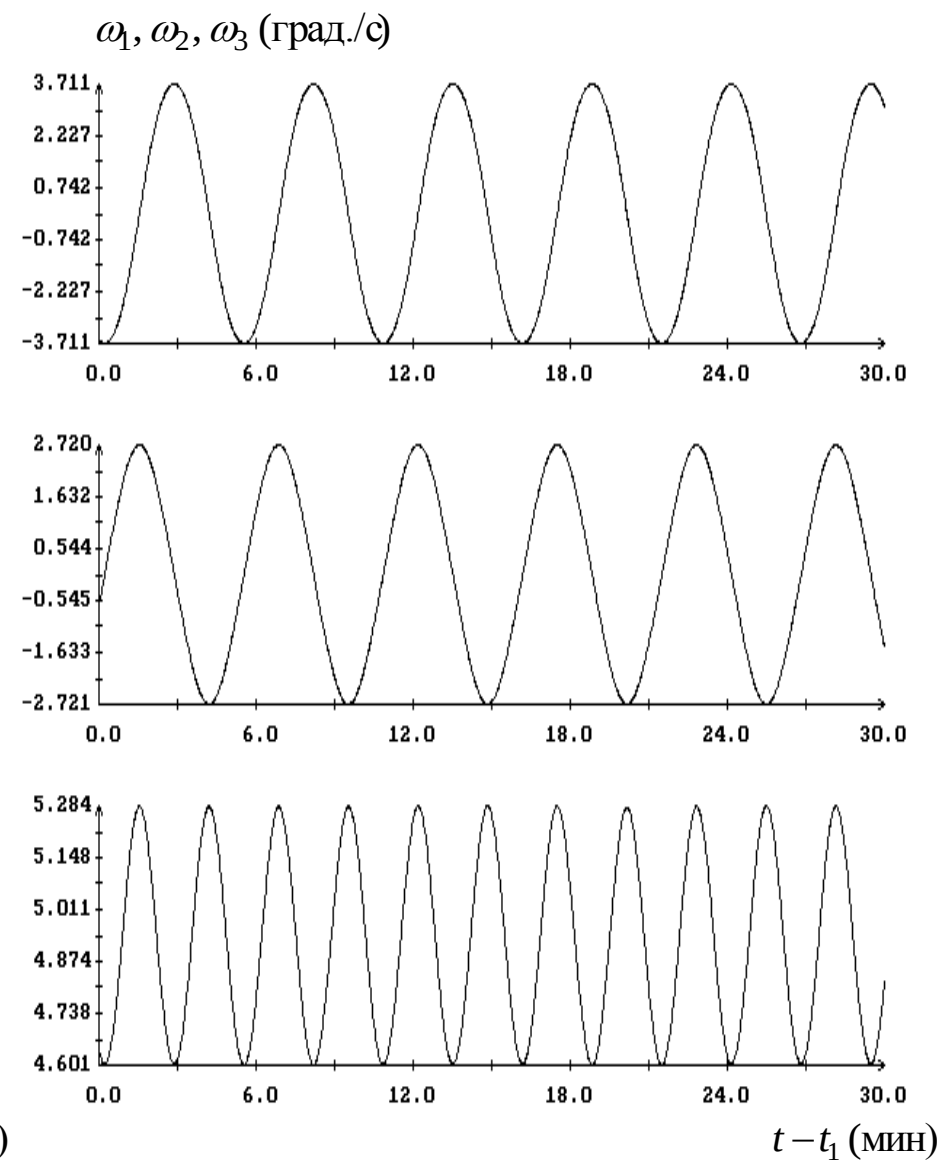


(б)

Рис. 6. Сравнение модуля измерений магнитометра 2 с модулем напряженности МПЗ (модель IGRF):
(а) – на интервале 4; (б) – на интервале 5.



(а)



(б)

Рис. 7. Интервал 1. Вращательное движение спутника.

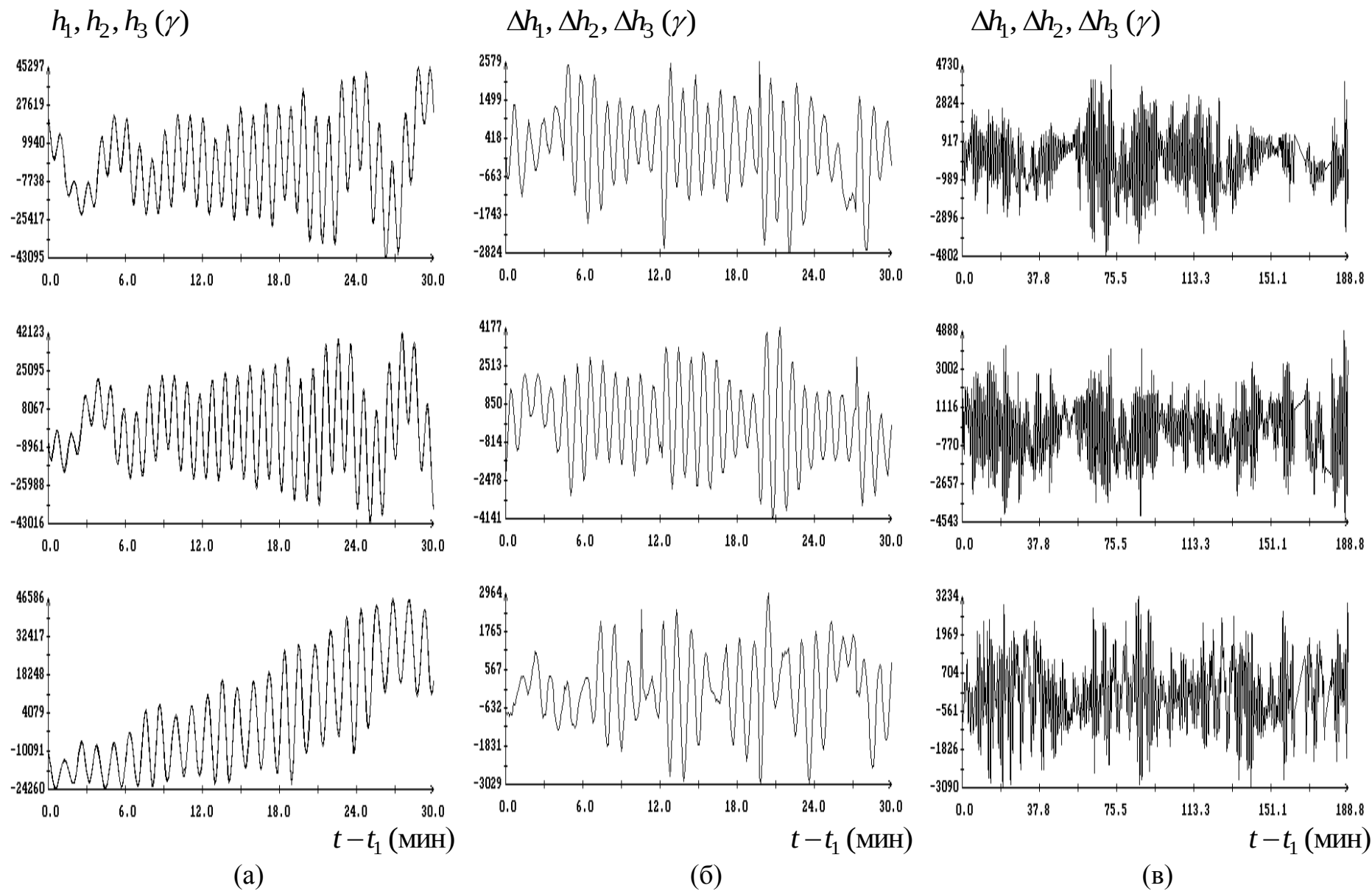
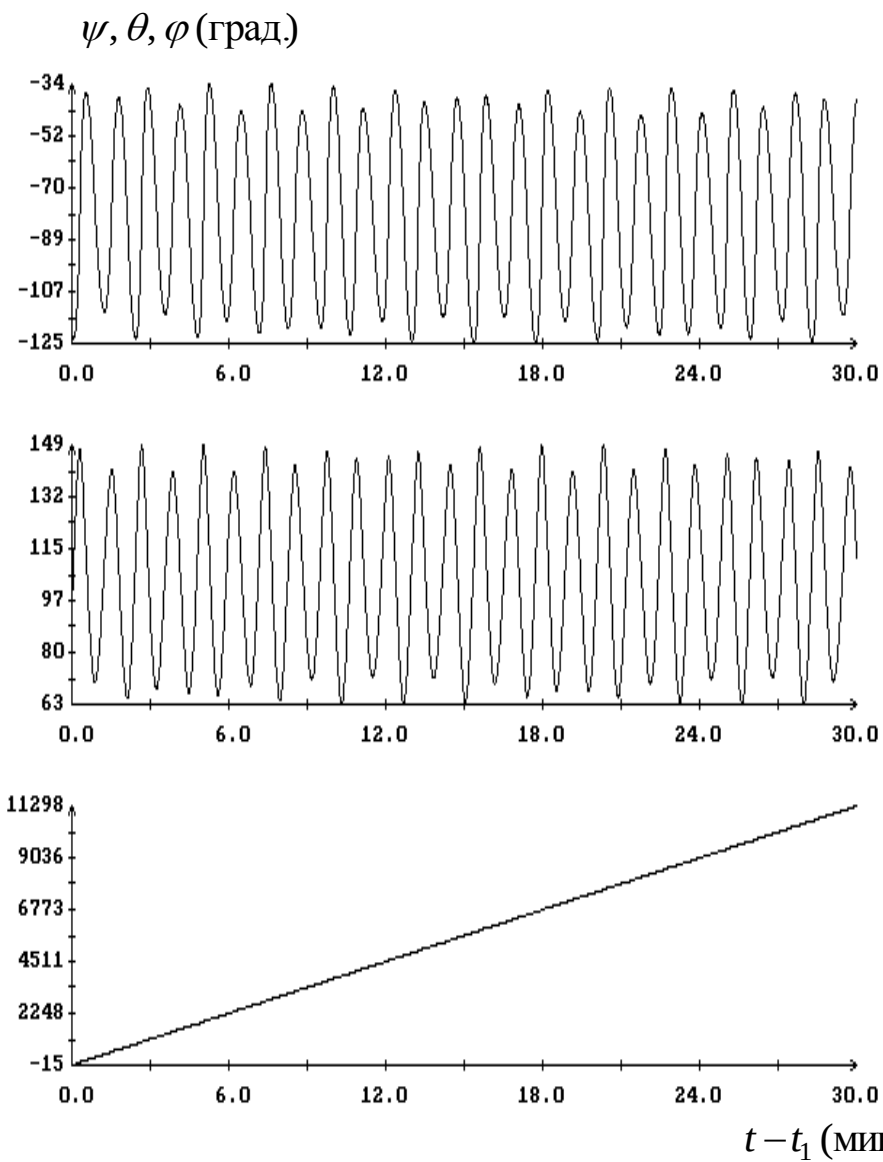
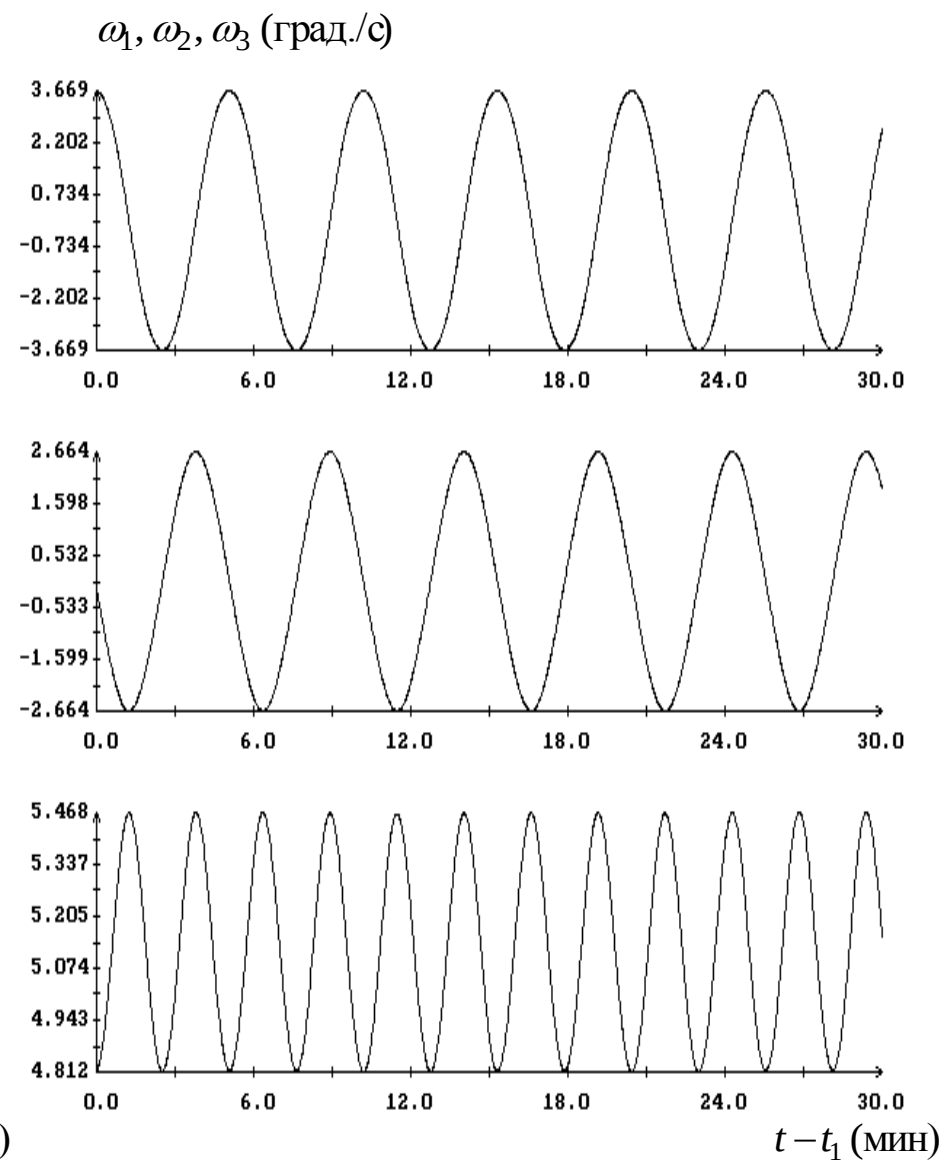


Рис. 8. Интервал 1. Сравнение измерений магнитометра 2 и расчетной напряженности МПЗ (модель IGRF).



(а)



(б)

Рис. 9. Интервал 2. Вращательное движение спутника.

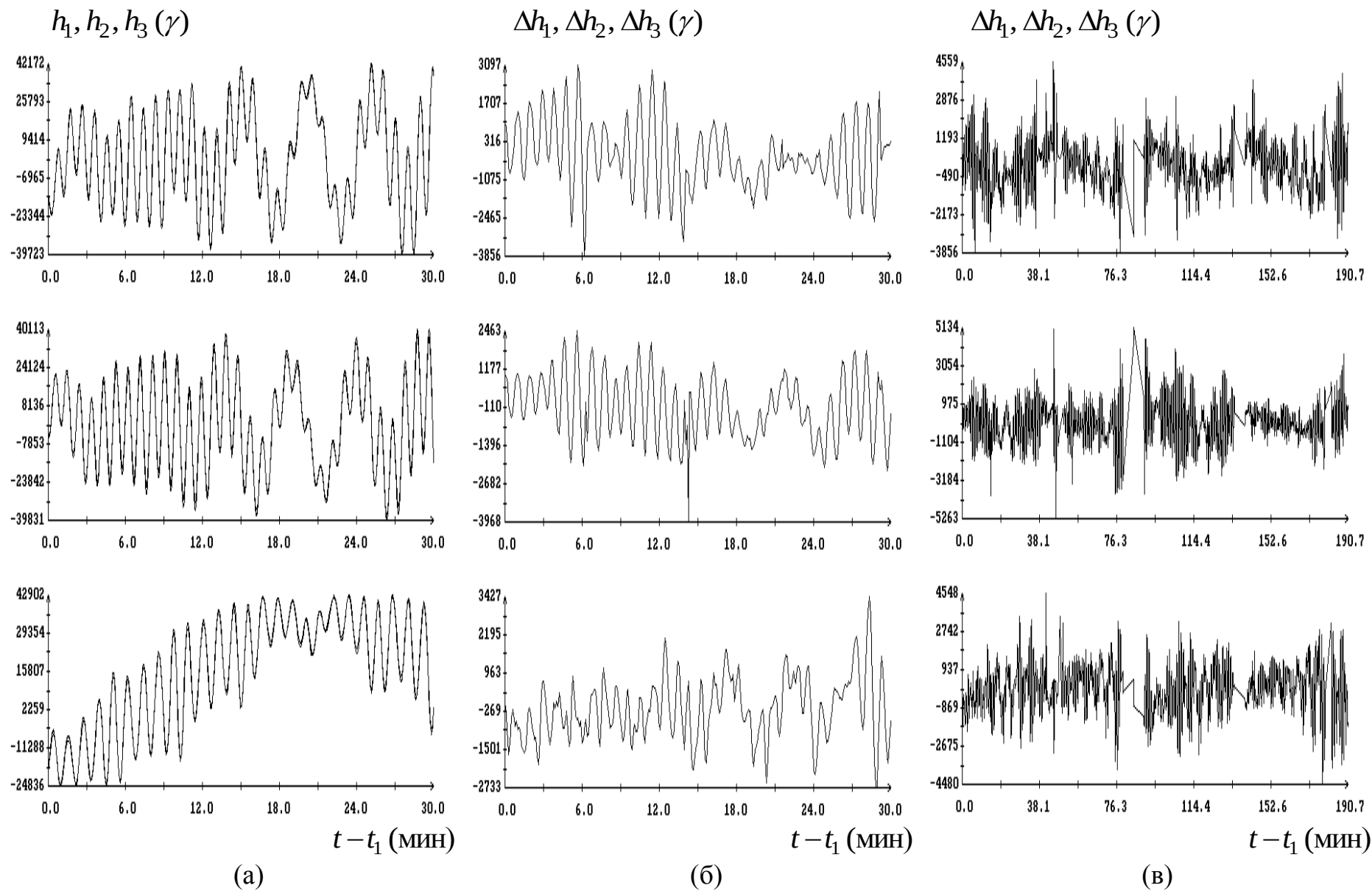
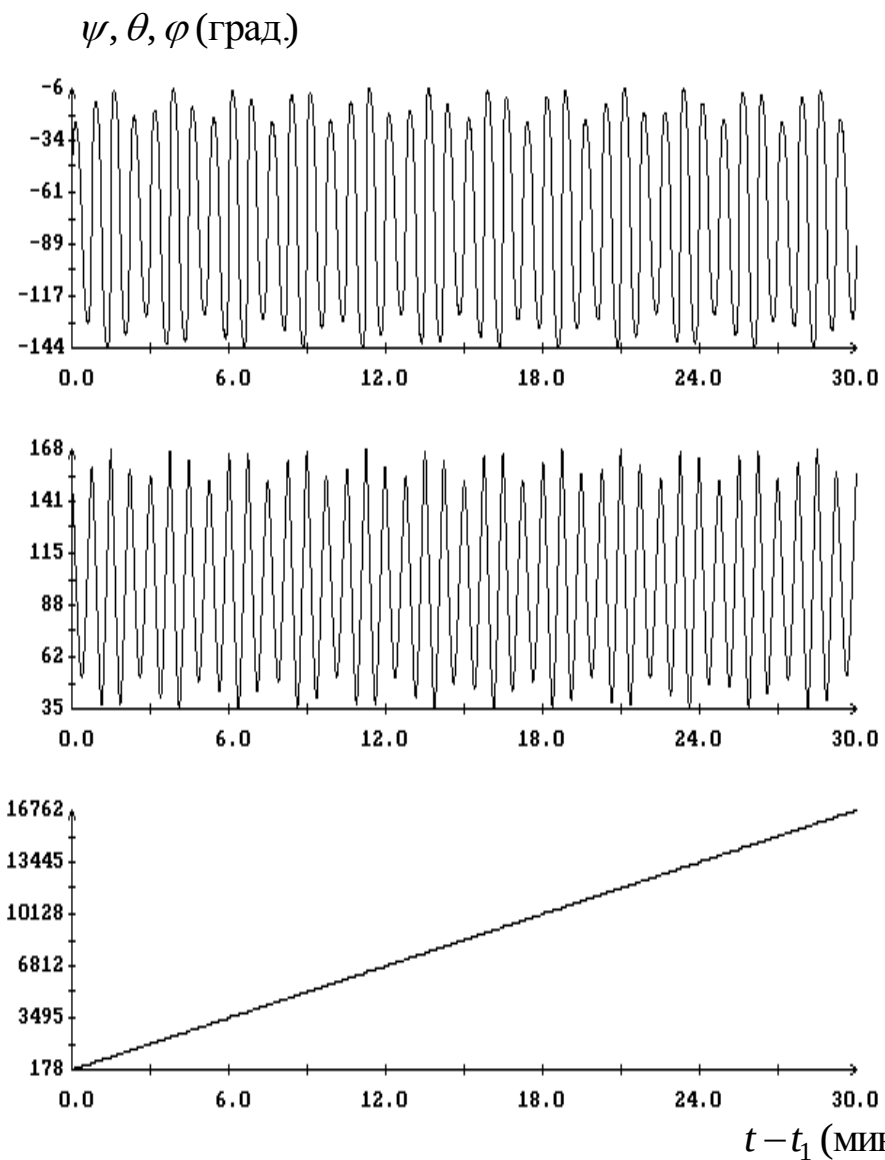
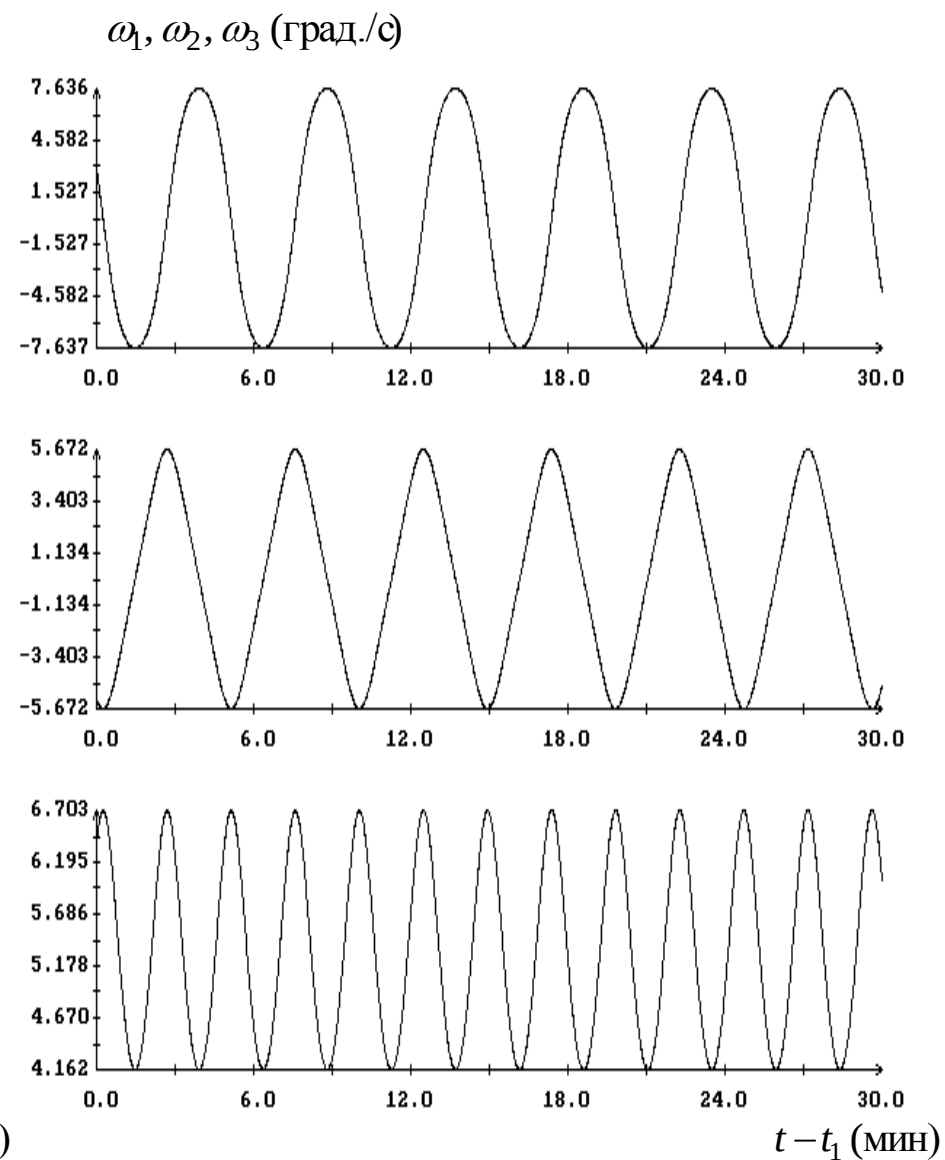


Рис. 10. Интервал 2. Сравнение измерений магнитометра 2 и расчетной напряженности МПЗ (модель IGRF).



(а)



(б)

Рис. 11. Интервал 3. Вращательное движение спутника.

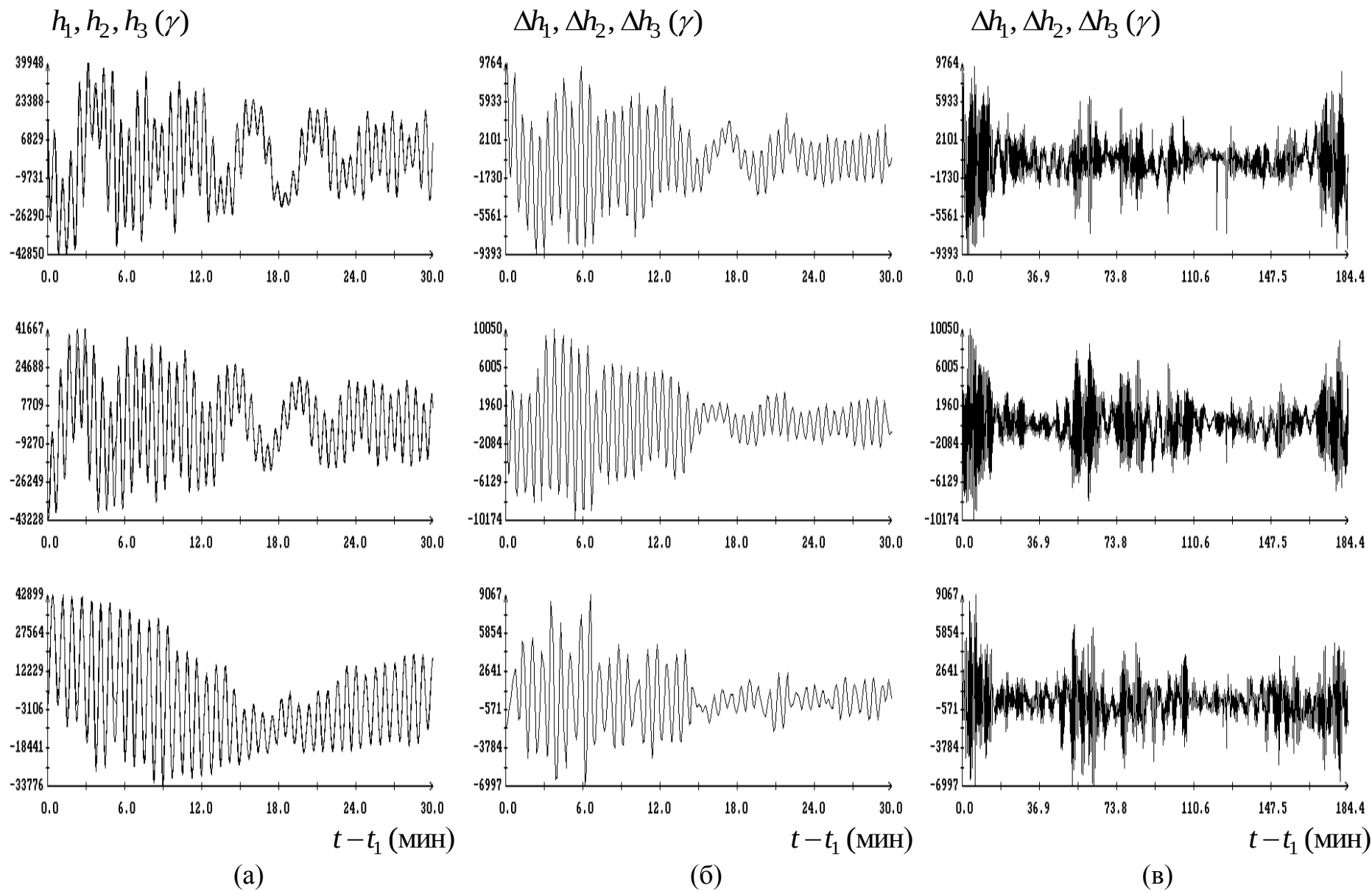
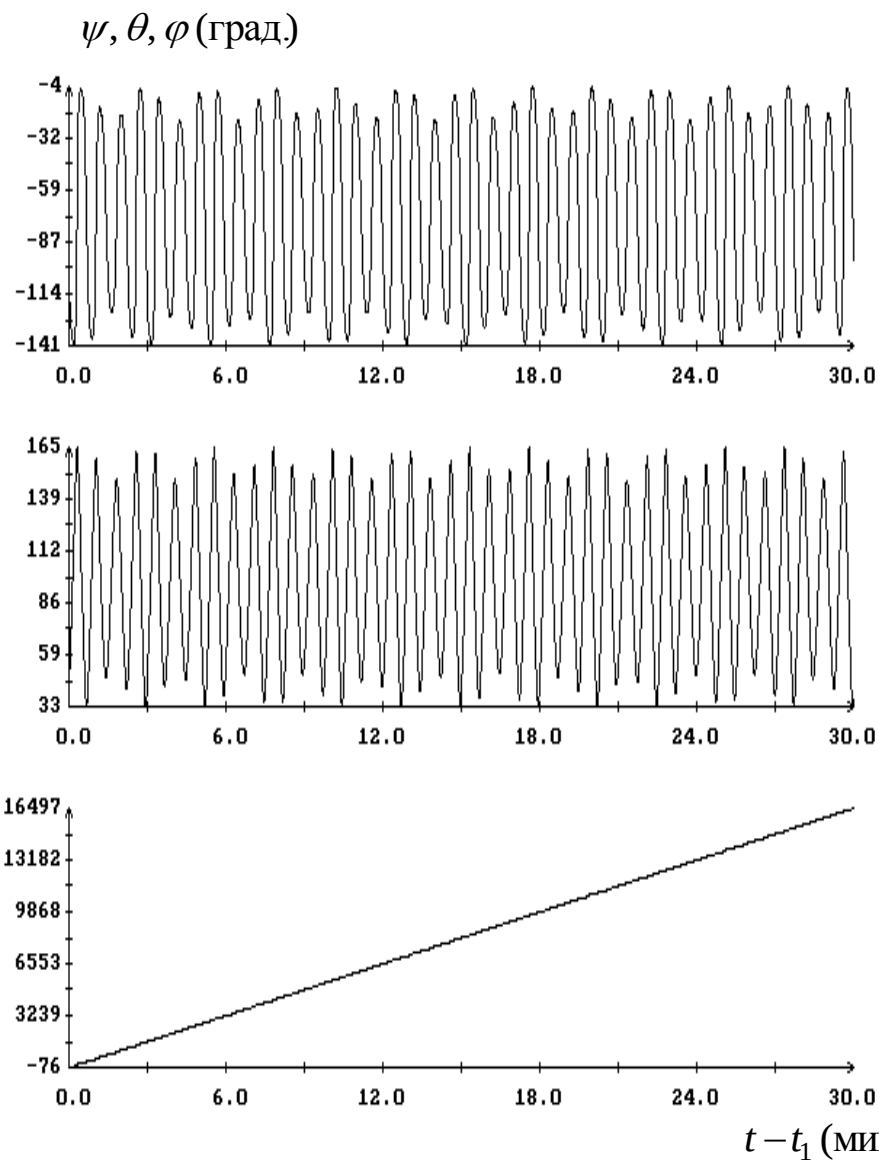
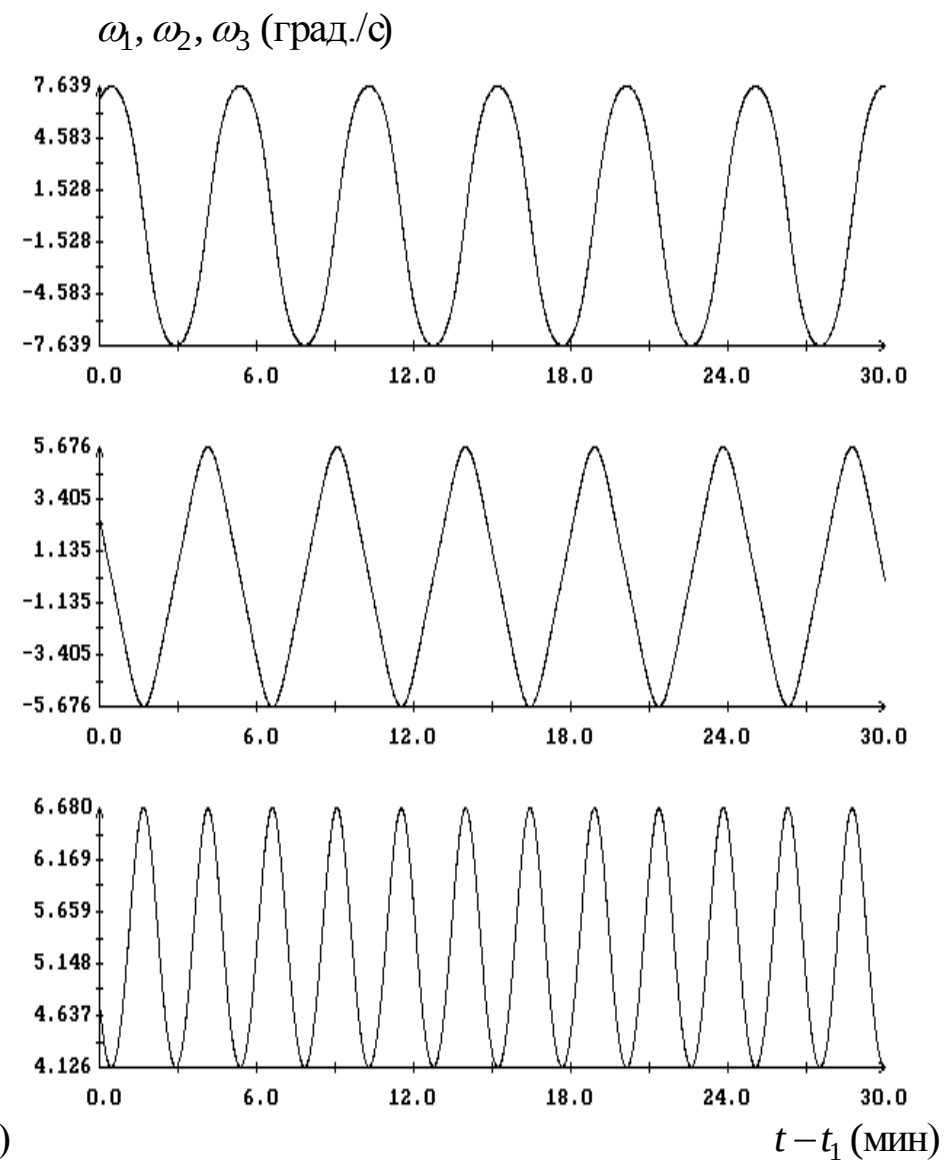


Рис. 12. Интервал 3. Сравнение измерений магнитометра 2 и расчетной напряженности МПЗ (модель IGRF).



(а)



(б)

Рис. 13. Интервал 4. Вращательное движение спутника.

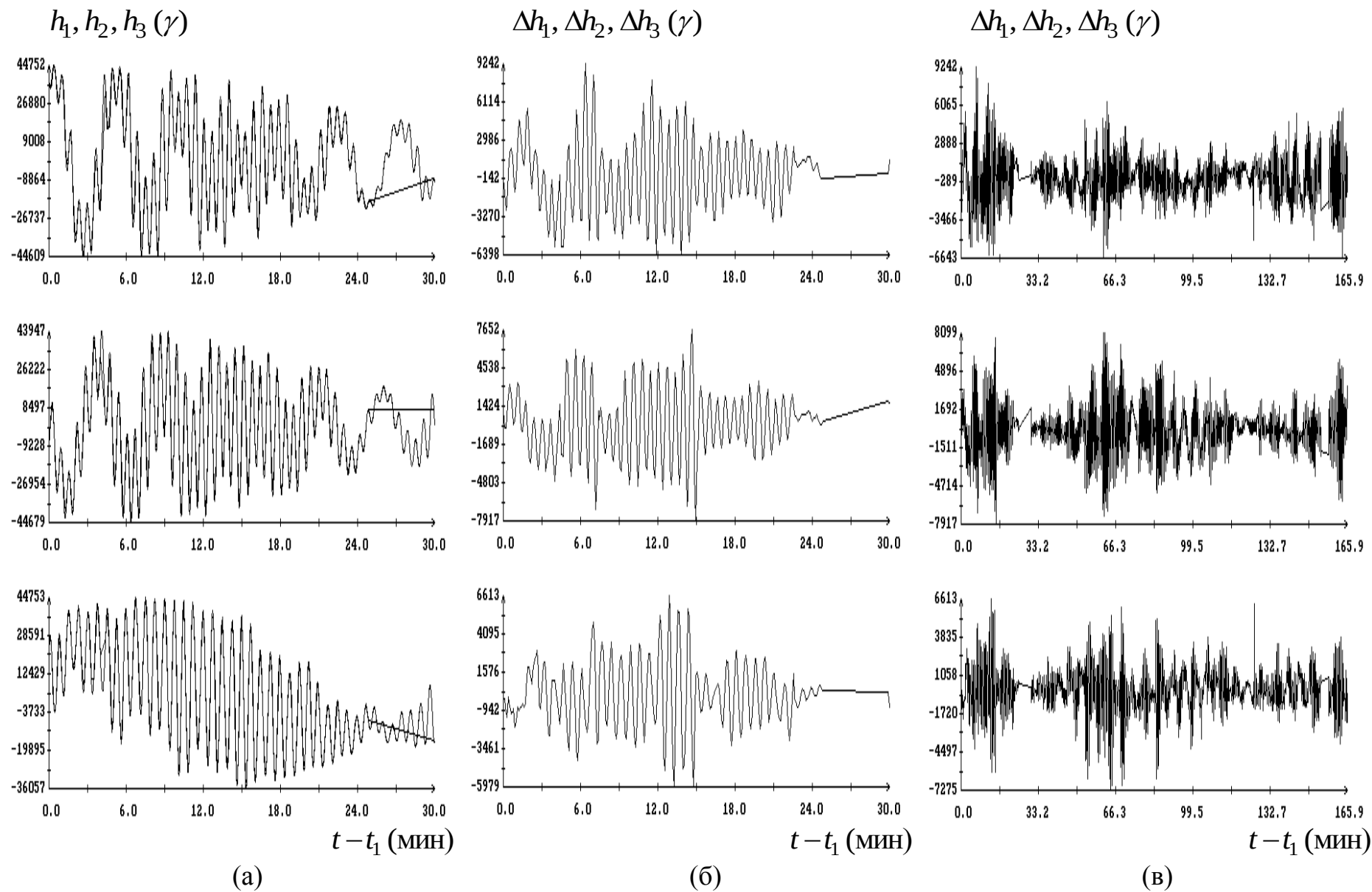
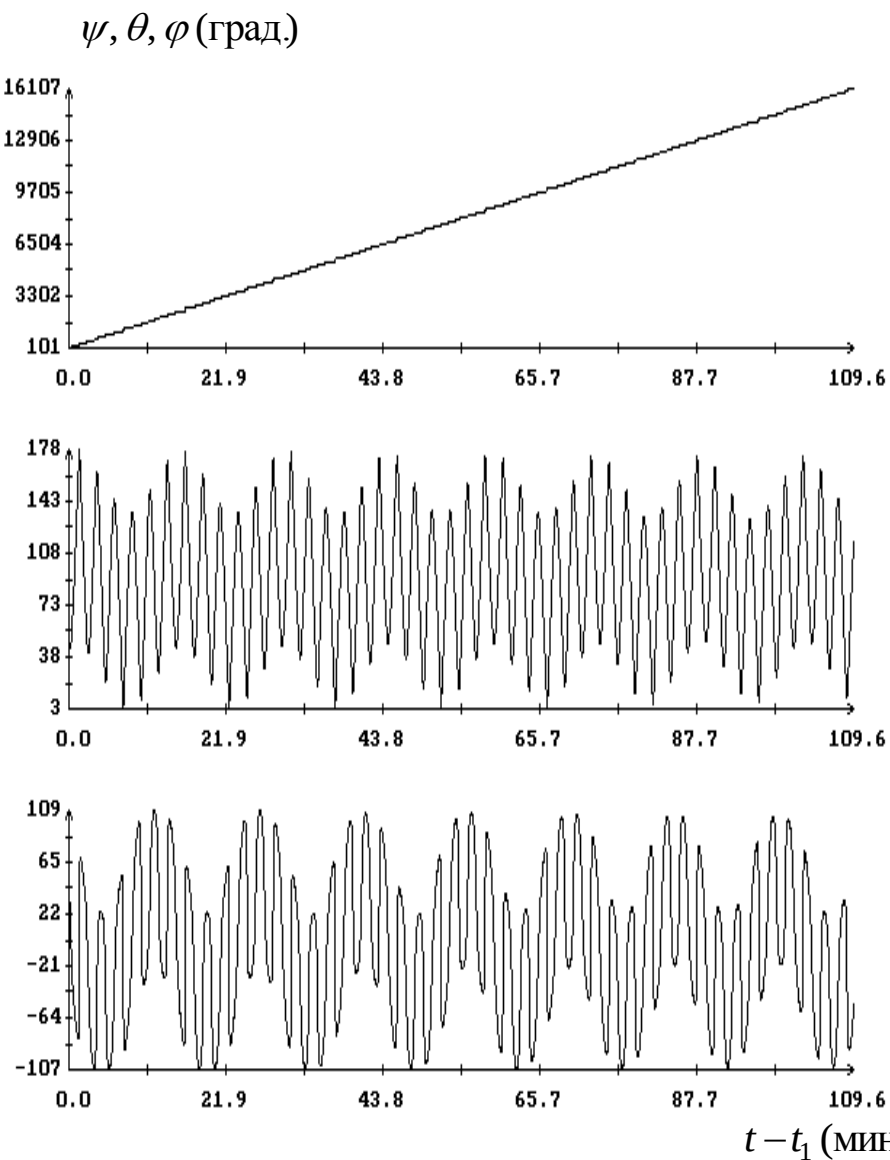
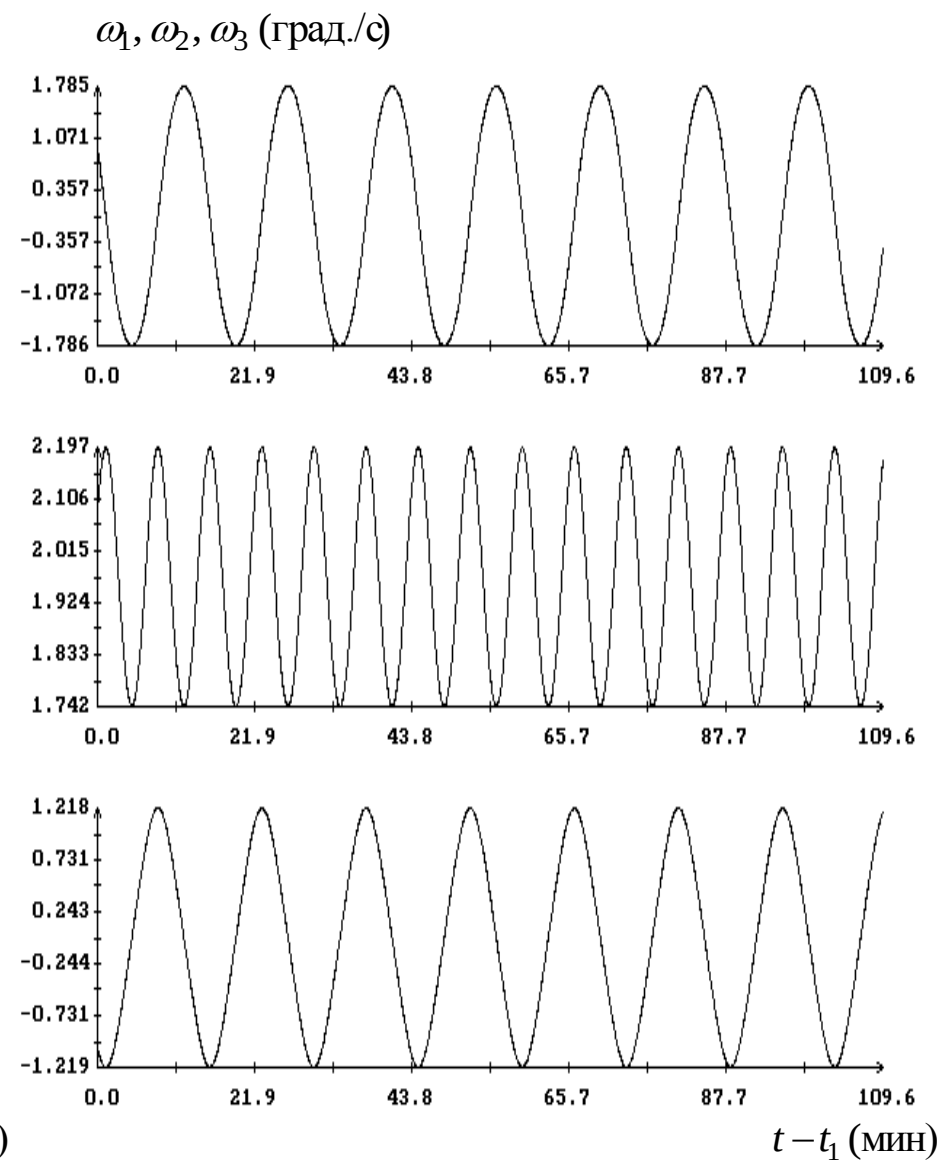


Рис.14. Интервал 4. Сравнение измерений магнитометра 2 и расчетной напряженности МПЗ (модель IGRF).



(а)



(б)

Рис. 15. Интервал 6. Вращательное движение спутника.

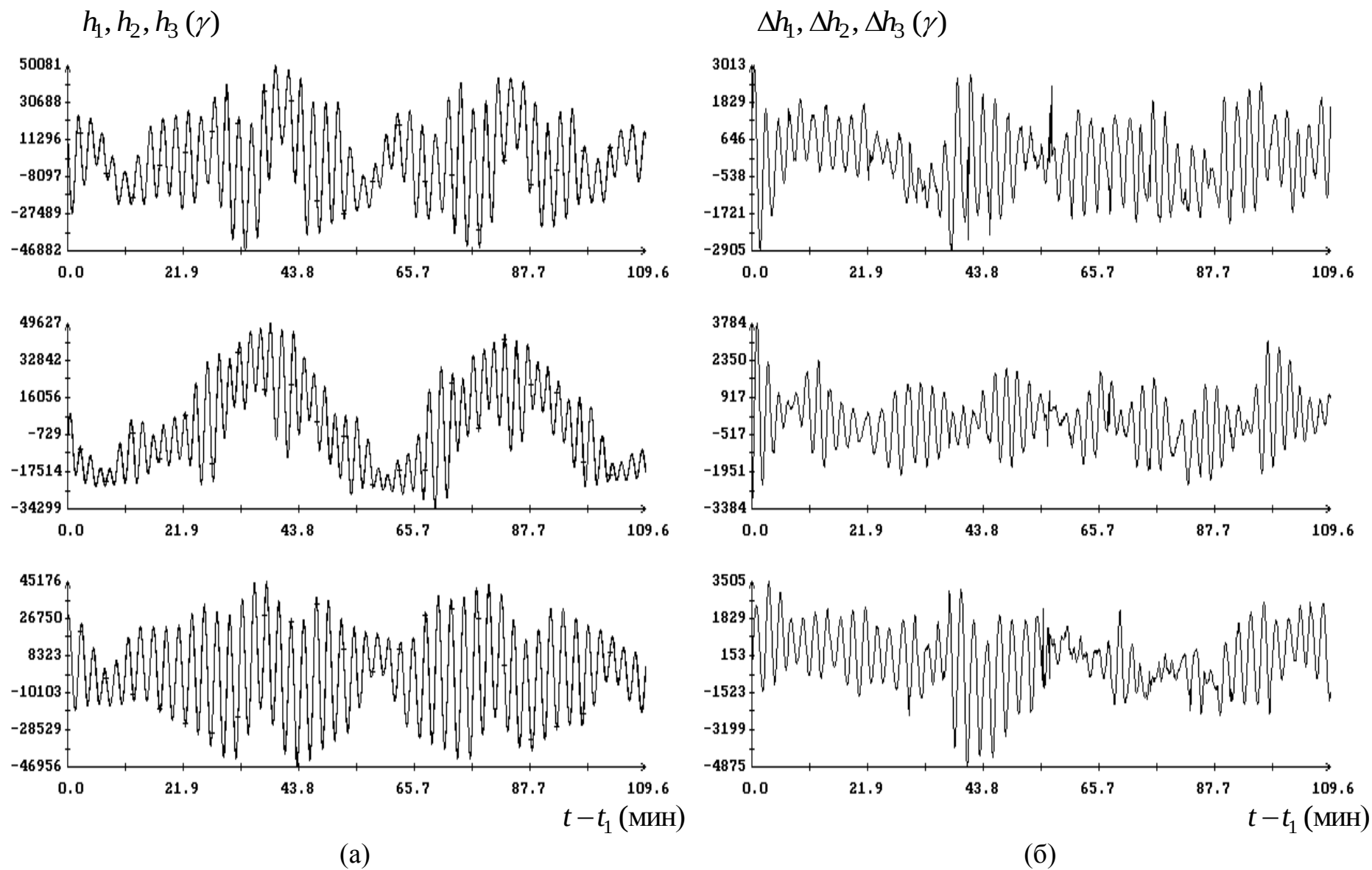


Рис.16. Интервал 6. Сравнение магнитных измерений и расчетной напряженности МПЗ (модель IGRF).