ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 46 за 2015 г.

Пустыльников Л.Д.

Закон возрастания энтропии и обобщённые релятивистские биллиарды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д. Закон возрастания энтропии и обобщённые релятивистские биллиарды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 46. 17 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-46

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Л. Д. Пустыльников

Закон возрастания энтропии и обобщённые релятивистские биллиарды

Москва — 2015

УДК 517.938
Лев Давидович Пустыльников
Закон возрастания энтропии и обобщённые релятивистские биллиарды. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2015

Предложен механизм возникновения необратимости. Он основан на учёте релятивистского фактора в механической системе, состоящей из конечного числа частиц, взаимодействующих между собой в соответствии с законом упругого удара и двигающихся в сосуде с естественным законом отражения от его стенок. Изучаемая модель, модификация модели Пуанкаре, является обобщённым биллиардом и описывает движение трёхмерного газа в виде частиц в параллелепипеде. Доказано, что при выполнении общих условий энтропия Гиббса и термодинамическая энтропия системы частиц возрастают со временем, если учитывать релятивистский фактор, в то время как в ньютоновском случае энтропия Гиббса — постоянная.
Ключевые слова: обобщённый биллиард, закон возрастания энтропии.

Lev Davidovich Pustyl’nikov
The law of entropy increase and generalized relativistic billiards.

A mechanism for the occurrence of irreversibility is proposed. It is based on the allowance for the relativistic factor in the mechanical system consisting of a finite number of particles interacting with one other particle in accordance with the law of elastic collision and moving in a vessel with a natural law of reflection from the vessel walls. The investigated model, a modification of Poincaré model is the generalized billiard and describes the motion of three–dimensional gas from particles in a parallelepiped. It is proved that for general conditions the Gibbs entropy and thermodynamic entropy for this system of particles increase with time when the relativistic factor is taken into account, whereas in Newtonian case the Gibbs entropy is a constant.

Key words: generalized billiard, law of entropy increase.

1. Введение

В этой статье мы даём доказательство закона возрастания энтропии для трёхмерного газа, состоящего из конечного числа одинаковых точечных частиц $P_1, \ldots, P_n$, перемещающихся в сосуде, имеющем форму параллелепипеда, при условии, что воздействие границы сосуда на газ является периодическим. Доказательства были даны в [6] для случая одномерного газа, где сосуд — отрезок, а также для трёхмерного газа без деталей доказательства.

Общая постановка принадлежит Пуанкаре, который рассмотрел подобную модель в работе [5] и изучил случай, когда внешняя сила, вызванная внешним телом (горячее тело), действует на частицы. Особенность нашей модели, рассмотренной здесь, состоит в том, что влияние внешнего тела моделируется периодическими воздействиями стенок сосуда. Мы предполагаем, что сосуд имеет форму параллелепипеда, определённого неравенствами $a_1 \leqslant q_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant q_2 \leqslant b_2$, $a \leqslant q \leqslant b$, где q_1, q_2, q — ортогональные координаты. Частицы $P_1, \ldots, P_n$ перемещаются в сосуде и отражаются по закону упругого удара.

Мы предполагаем, что выполнены следующие граничные условия. После отражения от граней параллелепипеда, заданных уравнениями $q = a$ ($q = b$) в момент времени t, частица двигается так же, как если бы она упруго отразилась в этот момент от стенки, двигающейся в направлении q на основе закона $q = f_1(t)$ (на основе закона $q = f_2(t)$); после отражения от граней, заданных уравнениями $q_1 = a_1$ ($q_1 = b_1$), в момент времени t частица двигается так же, как если бы она упруго отразилась в этот момент от стенки, двигающейся в направлении q_1 на основе закона $q_1 = g_1(t)$ ($q_1 = g_2(t)$); после отражения от граней, заданных уравнениями $q_2 = a_2$ ($q_2 = b_2$), в момент времени t частица двигается так же, как если бы она упруго отразилась в этот момент от стенки, двигающейся в направлении q_2 на основе закона $q_2 = h_1(t)$ ($q_2 = h_2(t)$). Мы предположим, что функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — гладкие и имеют период 1 относительно t; функции $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ — постоянные, а движение рассматривается в рамках специальной теории относительности. С физической точки зрения функции $f_i(t)$, $g_i(t)$, $h_i(t)$ ($i = 1{,}2$) моделируют поля, вызванные малыми колебаниями атомов стенок сосуда.

Рассмотренная система — обобщённый биллиард в параллелепипеде, который был введён для произвольной замкнутой области в [7] и был изучен в [1], [2], [8] и [6] в релятивистском случае.

Основные результаты состоят в следующем: энтропия Гиббса, построенная относительно ньютоновской инвариантной меры, и термодинамическая энтропия, построенная относительно фазового объёма, возрастают при возрастании времени t, если учитывать релятивистский эффект. Если рассматривать эту систему в рамках ньютоновской механики, то энтропия Гиббса будет постоянная [6]. Рост энтропии — не монотонный, но необратимый, что соответствует физическим представлениям. Другое доказательство диссипативности обобщённого релятивистского биллиарда дано в [1] и [2].

2. Введение меры на фазовом пространстве, функции распределения и энтропии

Обозначим пространственные координаты частицы P_s через $q_1^{(s)}$, $q_2^{(s)}$, $q^{(s)}$, а компоненты вектора импульса частицы P_s вдоль направлений q_1, q_2, q через $p_1^{(s)}$, $p_2^{(s)}, p^{(s)}$. Введём функцию статистического распределения $\rho(t) = \rho(q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q^{(1)}, p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p^{(1)}, \ldots, q_1^{(N)}, q_2^{(N)}, q^{(N)}, p_1^{(N)}, p_2^{(N)}, p^{(N)}, t) \geqslant 0$ для частиц $P_1, \ldots, P_N$ в момент времени t. Мера

$$d\Gamma = \frac{d\vec{q}\,d\vec{p}}{\left|v_1^{(1)}v_2^{(1)}v^{(1)}\ldots v_1^{(N)}v_2^{(N)}v^{(N)}\right|} \tag{1}$$

инвариантна относительно классической динамики для рассмотренной модели газа ([6]), где

$$d\vec{q} = dq_1^{(1)}dq_2^{(1)}dq^{(1)}\ldots dq_1^{(N)}dq_2^{(N)}dq^{(N)},$$
$$d\vec{p} = dp_1^{(1)}dp_2^{(1)}dp^{(1)}\ldots dp_1^{(N)}dp_2^{(N)}dp^{(N)},$$

$v_1^{(s)} = v_1^{(s)}(t)$, $v_2^{(s)}(t)$, $v^{(s)}(t)$ — компоненты вектора скорости частицы P_s в момент времени t вдоль направлений q_1, q_2, q. Энтропия Гиббса в этом случае имеет вид:

$$H(t) = -\int_K \rho(t)\ln\rho(t)\,d\Gamma, \tag{2}$$

где фазовое пространство $K = \underbrace{\Pi\times\ldots\times\Pi}_{N}\times\underbrace{R_3\times\ldots\times R_3}_{N}$, $\Pi = \big\{q_1, q_2, q : a_1 \leqslant q_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant q_2 \leqslant b_2, a \leqslant q \leqslant b\big\}$, R_3 — трёхмерное пространство. Мы также рассмотрим термодинамическую энтропию

$$\tilde{H}(t) = -\int_K \tilde{\rho}(t)\ln\tilde{\rho}(t)\,d\vec{q}\,d\vec{p}$$

для функции распределения

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{\rho(t)}{\left|v_1^{(1)}v_2^{(1)}v^{(1)}\ldots v_1^{(N)}v_2^{(N)}v^{(N)}\right|}$$

относительно фазового объёма.

Условие нормировки и определения $d\Gamma$ и $\tilde{\rho}(t)$ приводят к соотношениям $\int_K \rho(t)\,d\Gamma = 1$, $\int_K \tilde{\rho}(t)\,d\vec{q}\,d\vec{p} = 1$, $\int_K \rho(t)\,d\vec{q}\,d\vec{p} < \infty$. Кроме того, справедливо равенство $\rho(t)\,d\Gamma(t) = \rho(t_0)\,d\Gamma(t_0)$, $t > t_0$, которое характеризует закон сохранения массы. Используя равенство (2), получим соотношение

$$\tilde{H}(t) = H(t) + \int_K \tilde{\rho}(t)\ln\bigl|v_1^{(1)}v_2^{(1)}v^{(1)}\dots v_1^{(N)}v_2^{(N)}v^{(N)}\bigr|\,d\vec{q}\,d\vec{p}. \tag{3}$$

3. Релятивистская модель трёхмерного газа и формулировка основных результатов

Предполагаем, что масса покоя частицы равна 1, скорость света $c = 1$. В трёхмерном случае энергия $E^{(s)}$, вектор скорости $\vec{v}^{\,(s)}$ и вектор импульса $\vec{p}^{\,(s)}$ связаны соотношениями

$$\vec{p}^{\,(s)} = \frac{\vec{v}^{\,(s)}}{\sqrt{1-|\vec{v}^{\,(s)}|^2}}, \quad E^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{1-|\vec{v}^{\,(s)}|^2}} = \sqrt{|\vec{p}^{\,(s)}|^2+1}.$$

Теорема 1. *Предположим, что релятивистская модель трёхмерного газа удовлетворяет следующим условиям:*

1) функции f_i, $(i = 1{,}2)$ имеют период 1 по t, а функции $g_i(t)$, $h_i(t)$ $(i = 1{,}2)$ не зависят от t и имеют вид

$$g_1(t) \equiv a_1, \quad g_2(t) \equiv b_1, \quad h_1(t) \equiv a_2, \quad h_2(t) \equiv b_2;$$

2) высота сосуда $l = b - a$ — иррациональное число;

3) справедливо неравенство

$$\delta = \delta\bigl(f_1(t), f_2(t)\bigr) = \int_0^1 \ln\frac{\bigl(1+\dot{f}_1(t)\bigr)\bigl(1-\dot{f}_2(t-l)\bigr)}{\bigl(1-\dot{f}_1(t)\bigr)\bigl(1+\dot{f}_2(t-l)\bigr)}\,dt > 0; \tag{4}$$

4) в начальный момент времени t_0 функция статистического распределения $\rho(t_0)$ обращается в ноль в области

$$|p_1^{(s)}| > p_0^{(s)}, \quad |p_2^{(s)}| > p_0^{(s)}, \quad |p^{(s)}| > p^{(*)},$$

где $s = 1,\dots,N$; $p_i^{(s)} = p_i^{(s)}(t_0)$, $(i = 1{,}2)$, $p^{(s)} = p^{(s)}(t_0)$.

Если при фиксированных константах $p_0^{(s)}$ $(s = 1,\dots,N)$ константа p^* достаточно большая, то для любого момента времени $t \geqslant t_0$ справедливы следующие утверждения:

1) $H(t) - H(t_0) > C_1^* + C_2^*(t - t_0)$,

$\tilde{H}(t) - \tilde{H}(t_0) > C_1^* + C_2^*(t - t_0)$,

где $C_2^* > 0$, и константы C_1^*, C_2^* не зависят от t и t_0;

2) для почти всех по мере Лебега начальных данных, у которых импульсы частиц в момент времени t_0 удовлетворяют условиям

$$|p_1^{(s)}| \leqslant p_0^{(s)}, \quad |p_2^{(s)}| \leqslant p_0^{(s)}, \quad |p^{(s)}| \geqslant p^{(*)} \quad (s = 1, \ldots, N)$$

энергия $E_s(t)$ частицы P_s в момент времени $t \geqslant t_0$ допускает оценку

$$E_s(t) > \tilde{C} E_s(t_0) e^{\tilde{\delta}(t-t_0)},$$

где $s = 1, \ldots, N$; $E_s(t_0)$ — энергия частицы в момент времени t_0, $\tilde{\delta} > 0$, $\tilde{C} > 0$, а константы $\tilde{\delta}$ и $\tilde{C}$ не зависят от t, t_0 и s.

Замечание 1. Как следует из [5] и [1], физический смысл неравенства (4) состоит в том, что стенки сосуда — горячие по отношению к газу, так как энергия, передаваемая частицам от стенок сосуда за достаточно большое время, будет положительной. Неравенство (4) справедливо, если

$$\begin{aligned} &f_1(t) = \varepsilon\big(Q_1 \sin(2\pi K t) + Q_2 \sin(4\pi K t)\big) + C^*, \\ &f_2(t) \equiv b, \end{aligned}$$

где C^* — константа $\left(\dfrac{dC^*}{dt} \equiv 0\right)$, $KQ_2 > 0$, K — целое число, $Q_1 \neq 0$, $\varepsilon > 0$, ε — малый параметр, и для этого случая величина $\delta = \delta\big(f_1(t), f_2(t)\big)$ из равенства (4) имеет вид

$$\delta = 8\pi^3 K^3 Q_1^2 Q_2 \varepsilon^3 + O(\varepsilon^5),$$

и $\delta > 0$ при малом ε.

Замечание 2. Используя доказательства в работах [1] и [2], можно заменить условие 2) теоремы 1 требованием, согласно которому число l не равно рациональному числу, у которого знаменатель меньше некоторой положительной константы, а числитель и знаменатель — взаимно простые числа.

Доказательство теоремы 1 дано в секции 5. Оно использует вспомогательные леммы, которые сформулированы и доказаны в секции 4.

4. Вспомогательные леммы и теорема

Пусть $N = 1$. Предположим, что после столкновения в момент времени t с нижней границей $q = a$, частица имеет вектор импульса $\vec{p} = (p_1, p_2, p)$ и вектор скорости $\vec{v} = (v_1, v_2, v)$, а компонента v удовлетворяет неравенству $v > 0$ и направлена к верхней границе $q = b$. Предположим, что после первого столкновения с верхней границей в момент времени $\bar{t}$ частица имеет вектор импульса $\bar{\vec{p}} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p})$ и вектор скорости $\bar{\vec{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v})$ и компонента $\bar{v}$ направлена к нижней границе $q = a$. После первого столкновения с нижней границей в момент времени t' частица имеет вектор импульса $\vec{p}\,' = (p_1', p_2', p')$. Определим преобразования

$$A\colon (t,p) \longrightarrow (t',p'), \quad \bar{A}\colon (t,p) \longrightarrow (\bar{t},-\bar{p}),$$

зависящие от параметров p_1, p_2, и преобразования

$$\hat{A}\colon (t,p) \longrightarrow (\hat{t},\hat{p}\,), \quad \bar{\bar{A}}\colon (t,p) \longrightarrow (\bar{\bar{t}},\bar{\bar{p}}\,)$$

с помощью равенств (6)

$$\bar{\bar{t}} = t + l, \qquad \bar{\bar{p}} = p\frac{1-\dot{f}_2(\bar{\bar{t}}\,)}{1+\dot{f}_2(\bar{\bar{t}}\,)}, \tag{5}$$

$$\hat{t} = t + 2l, \qquad \hat{p} = p\frac{\big(1+\dot{f}_1(\hat{t}\,)\big)\big(1-\dot{f}_2(\bar{\bar{t}}\,)\big)}{\big(1-\dot{f}_1(\hat{t}\,)\big)\big(1+\dot{f}_2(\bar{\bar{t}}\,)\big)}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Преобразования $\bar{A}$ и A задаются с помощью следующих равенств:*

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= t + \frac{l\sqrt{1+|\vec{p}\,|^2}}{p},\\
-\bar{p} &= \frac{1-\dot{f}_2(\bar{t}\,)}{1+\dot{f}_2(\bar{t}\,)} - \frac{2\dot{f}_2(\bar{t}\,)}{1+\dot{f}_2^2(\bar{t}\,)}\big(\sqrt{p^2+\Delta}-p\big),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
t' &= t + \frac{l\sqrt{1+|\vec{p}\,|^2}}{-\bar{p}},\\
p' &= (-\bar{p})\frac{1+\dot{f}_1(t')}{1-\dot{f}_1(t')} + \frac{2\dot{f}_1(t')}{1-\dot{f}_1^2(t')}\big(\sqrt{\bar{p}^2+\bar{\Delta}}-(-\bar{p})\big),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\Delta = p_1^2 + p_2^2 + 1$, $\bar{\Delta} = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 1$, и величины $\sqrt{p^2+\Delta}$ и $\sqrt{\bar{p}^2+\bar{\Delta}}$ предполагаются положительными.

Доказательство. Равенства для $\bar{t}$ и t' очевидно следуют из определений преобразований $\bar{A}$ и A. Докажем равенство для $(-\bar{p})$ в (7). Равенство для p' в (8) доказывается совершенно аналогично. Предположим сначала, что масса покоя верхней стенки конечна и равна M, а затем перейдём к пределу при $M \to \infty$.

В силу законов сохранения импульса и энергии имеем:

$$p + PM = \bar{p} + \bar{P}M, \tag{9}$$

$$\sqrt{|\vec{p}\,|^2+1} + M\sqrt{P^2+1} = \sqrt{|\vec{\bar{p}}\,|^2+1} + M\sqrt{\bar{P}^2+1}\,, \tag{10}$$

где $P = \dfrac{V}{\sqrt{1-V^2}}$, $\bar{P} = \dfrac{\bar{V}}{\sqrt{1-\bar{V}^2}}$, V — скорость верхней стенки в момент времени $\bar{t}$ столкновения с частицей (перед самим столкновением), $\bar{V}$ — скорость верхней стенки в момент времени $\bar{t}$ после столкновения с частицей. Решая уравнение (10), получим:

$$M\bar{P} = M\left\{\left(\frac{\sqrt{1+|\vec{p}|^2} - \sqrt{1+|\vec{\bar{p}}|^2}}{M} + \sqrt{1+P^2}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= MP + \frac{\sqrt{1+P^2}}{P}\left(\sqrt{1+|\vec{p}|^2} - \sqrt{1+|\vec{\bar{p}}|^2}\right) + O\left(\frac{1}{M}\right).$$

Подставим это равенство в (9). Тогда в пределе при $M \to \infty$ получим равенство $\sqrt{|\vec{\bar{p}}|^2+1} - \sqrt{|\vec{p}|^2+1} = \dot{f}_2(\bar{t}\,)(\bar{p}-p)$, которое приводит к соотношениям

$$\bar{p}^2 - p^2 = \dot{f}_2(\bar{t}\,)(\bar{p}-p)\left(\sqrt{|\vec{\bar{p}}|^2+1} + \sqrt{|\vec{p}|^2+1}\right),$$
$$\bar{p} + p = \dot{f}_2(\bar{t}\,)\left(\sqrt{|\vec{\bar{p}}|^2+1} + \sqrt{|\vec{p}|^2+1}\right), \tag{11}$$
$$-\dot{f}_2^2(\bar{t}\,)(\bar{p}-p) = -\dot{f}_2(\bar{t}\,)\left(\sqrt{|\vec{\bar{p}}|^2+1} - \sqrt{|\vec{p}|^2+1}\right), \tag{12}$$

Складывая равенства (11) и (12), получим равенства

$$-\bar{p}\left(1-\dot{f}_2^2(\bar{t}\,)\right) = p\left(1+\dot{f}_2^2(\bar{t}\,)\right) - 2\dot{f}_2(\bar{t}\,)\sqrt{|\vec{p}|^2+1} =$$
$$= p\left(1-\dot{f}_2(\bar{t}\,)\right)^2 - 2\dot{f}_2(\bar{t}\,)\left(\sqrt{|\vec{p}|^2+1} - p\right),$$

из которых следует равенство (7) для $-\bar{p}$.

Лемма 1 доказана. ■

Замечание 3. Из определений A и $\bar{\bar{A}}$ и из леммы 1 следует, что при фиксированных p_1 и p_2 для больших p преобразования A и $\hat{A}$ отличаются на величину $O\left(\dfrac{1}{p}\right)$, и преобразования $\bar{A}$ и $\bar{\bar{A}}$ отличаются на величину $O\left(\dfrac{1}{p}\right)$.

Введём новую переменную $\eta = \ln p$ и определим преобразования $\mathscr{D}$, $\bar{\mathscr{D}}$, $\hat{\mathscr{D}}$, $\bar{\bar{\mathscr{D}}}$ следующим образом:

$$\mathscr{D}\colon (t,\eta) \longrightarrow (t' \bmod 1, \eta'), \qquad \bar{\mathscr{D}}\colon (t,\eta) \longrightarrow (\bar{t} \bmod 1, \bar{\eta}),$$
$$\hat{\mathscr{D}}\colon (t,\eta) \longrightarrow (\hat{t} \bmod 1, \hat{\eta}), \qquad \bar{\bar{\mathscr{D}}}\colon (t,\eta) \longrightarrow (\bar{\bar{t}} \bmod 1, \bar{\bar{\eta}}),$$

где $\eta' = \ln p'$, $\bar{\eta} = \ln(-\bar{p})$, $\hat{\eta} = \ln \hat{p}$, $\bar{\bar{\eta}} = \ln \bar{\bar{p}}$.

Лемма 2. *Предположим, что координаты p_1, p_2 вектора $\vec{p} = (p_1, p_2, p)$ удовлетворяют неравенствам $|p_i| \leqslant p_0$ $(i = 1{,}2)$. Тогда существует число $\Delta_0 > 0$,* *зависящее только от функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ и p_0, такое, что если $p \geqslant e^{\Delta_0}$, то преобразования $\bar{A}$ и A определены, и если $\eta \geqslant \Delta_0$, то преобразования $\bar{\mathscr{D}}$ и $\mathscr{D}$ также определены.*

Доказательство леммы 2 следует из неравенств (5), (6), из леммы 1 и из определений преобразований $\mathscr{D}$, $\bar{\mathscr{D}}$, $\hat{\mathscr{D}}$ и $\bar{\bar{\mathscr{D}}}$.

Лемма 3. *Пусть*

$$F(t) = \ln \frac{\big(1 + \dot{f}_1(t)\big)\big(1 - \dot{f}_2(t-l)\big)}{\big(1 - \dot{f}_1(t)\big)\big(1 + \dot{f}_2(t-l)\big)} \tag{13}$$

и $(\hat{t}_k, \hat{p}_k) = \hat{A}^k(t,p)$, где $\hat{A}^k$ — k-ая степень $\hat{A}$. Предположим, что l — иррациональное число и

$$\int_0^1 F(t)\,dt = \delta > 0. \tag{14}$$

Если $\tilde{\delta}$ — произвольное число, такое, что $0 < \tilde{\delta} < \delta$, то существует натуральное число $\tilde{m} = \tilde{m}(\tilde{\delta})$, такое, что для всех $t, p > 0$ и целого $m \geqslant \tilde{m}$ выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} F(\hat{t}_k) \geqslant m\tilde{\delta}, \quad \ln \hat{p}_m \geqslant \ln p + m\tilde{\delta}. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение окружности $B\colon t \longrightarrow \hat{t} = t + 2l \bmod 1$. Так как l — иррациональное число, то отображение B — строго эргодично [3], то есть эргодическая теорема Биргофа для непрерывной функции справедлива всюду [3] и для любого t существует предел

$$I = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} F(B^k t) = \int_0^1 F(t)\,dt,$$

где B^k — k-ая степень B, и сходимость к I равномерная по t.

В силу (14) $I = \delta > 0$, и поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} F(B^k t) = m\delta + o(m), \tag{16}$$

где $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{o(m)}{m} = 0$ и сходимость — равномерная относительность всех t. Теперь лемма 3 следует из (16), (13) и определения $\hat{A}$.

Лемма 3 доказана. ■

Теорема 2. *Предположим, что количество частиц $N = 1$, для этого случая справедливы условия 1), 2), 3) теоремы 1 и координаты p_1, p_2 вектора $\vec{p} =$*

(p_1, p_2, p) *удовлетворяют неравенствам* $|p_1| < p_0$, $|p_2| < p_0$. *Пусть* $(t_*^{(m)}, p_*^{(m)}) = A^m(t,p)$ *и* $(\bar t_*^{(m)}, \bar p_*^{(m)}) = \bar A A^{m-1}(t,p)$ (A^m*-тая степень* A; $m = 1{,}2,\ldots$). *Тогда для любого* $\tilde\delta > 0$, *такого, что* $0 < \tilde\delta < \delta$, *существует число* $\tilde p = \tilde p(p_0, \tilde\delta)$, *такое, что, если* $p \geqslant \tilde p$, *то для всех* t $p_*^{(m)} \to \infty$, $\bar p_*^{(m)} \to \infty$ *при* $m \to \infty$, *и справедливы неравенства*

$$p_*^{(m)} > \tilde C p e^{\tilde\delta m}, \quad \bar p_*^{(m)} > \tilde C p e^{\tilde\delta m},$$

$$\prod_{k=1}^{m} \left\{ \frac{\partial p_*^{(k)}}{\partial \bar p_*^{(k)}}(t_*^{(k)}, \bar p_*^{(k)}) \frac{\partial \bar p_*^{(k)}}{\partial p_*^{(k-1)}}(\bar t_*^{(k)}, p_*^{(k-1)}) \right\} > \tilde C e^{\tilde\delta m}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \bar p_*^{(m)}}{\partial p_*^{(m-1)}}(t_*^{(m)}, p_*^{(m-1)}) \prod_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{\partial p_*^{(k)}}{\partial \bar p_*^{(k)}}(t_*^{(k)}, \bar p_*^{(k)}) \frac{\partial \bar p_*^{(k)}}{\partial p_*^{(k-1)}}(\bar t_*^{(k)}, p_*^{(k-1)}) \right\} > \\ > \tilde C e^{\tilde\delta m}, \tag{18}$$

где $p_*^{(0)} = p$, $\tilde C$ — *положительная константа, не зависящая от* t, p_1, p_2, p, m; *величины* $\dfrac{\partial p_*^{(k)}}{\partial \bar p_*^{(k)}}(t_*^{(k)}, \bar p_*^{(k)})$, $\dfrac{\partial \bar p_*^{(k)}}{\partial p_*^{(k-1)}}(\bar t_*^{(k)}, p_*^{(k-1)})$ *в левой части* (17) *и* (18) — *функции от* $t_*^{(k)}, \bar p_*^{(k)}$ *и* $\bar t_*^{(k)}, p_*^{(k-1)}$ *соответственно, и произведение в левой части* (18) *при* $m = 1$ *заменяется на* 1.

Доказательство. Предположим, что Δ_0 — число, удовлетворяющее условию леммы 2. Согласно леммам 2 и 1 и определениям A, $\bar A$, $\hat A$, $\bar{\bar A}$, $\mathscr D$, $\bar{\mathscr D}$, $\hat{\bar{\mathscr D}}$, $\bar{\bar{\mathscr D}}$, если $|p_1| \leqslant p_0$, $|p_2| \leqslant p_0$, то преобразования $\mathscr D$, $\bar{\mathscr D}$, $\hat{\mathscr D}$, $\bar{\bar{\mathscr D}}$ определены в области $\Gamma = \{t, \eta : 0 \leqslant t \leqslant 1, \eta \geqslant \Delta_0\}$, и если $(t,\eta) \in \Gamma$, то справедливы следующие оценки:

$$|t' - \hat t\,| + |\bar t - \bar{\bar t}| < \frac{C_1}{p}, \quad |\eta' - \hat\eta\,| + |\bar\eta - \bar{\bar\eta}| < \frac{C_1}{p}, \tag{19}$$

$$\left| \ln\left\{ \frac{\partial p'}{\partial(-\bar p)}(t', -\bar p) \frac{\partial(-\bar p)}{\partial p}(\bar t, p) \right\} - \right. \\ \left. - \ln\left\{ \frac{\partial \hat p}{\partial \bar{\bar p}}(\hat t, \bar{\bar p}) \frac{\partial \bar{\bar p}}{\partial p}(\bar{\bar t}, p) \right\} \right| < \frac{C_1}{p},$$

где $(t', \eta') = \mathscr D(t,\eta)$, $(\bar t, \bar\eta) = \bar{\mathscr D}(t,\eta)$, $(\hat t, \hat\eta) = \hat{\mathscr D}(t,\eta)$, $(\bar{\bar t}, \bar{\bar\eta}) = \bar{\bar{\mathscr D}}(t,\eta)$, C_1 — константа, не зависящая от t, η, p_1, p_2, и функции $\dfrac{\partial p'}{\partial(-\bar p)}(t', -\bar p)$, $\dfrac{\partial(-\bar p)}{\partial p)}(\bar t, p)$, $\dfrac{\partial \hat p}{\partial \bar{\bar p}}(\hat t, \bar{\bar p})$, $\dfrac{\partial \bar{\bar p}}{\partial p}(\bar{\bar t}, p)$ — производные функций $p' = p'(t', -\bar p)$, $-\bar p = -\bar p(\bar t, p)$, $\hat p = \hat p(\hat t, \bar{\bar p})$, $\bar{\bar p} = \bar{\bar p}(\bar{\bar t}, p)$, которые определены в (5)–(12). В силу определений $\hat A$ и $\bar{\bar A}$

имеем: $\hat{\eta} = \bar{\bar{\eta}} + \mathscr{F}_1(\hat{t}\,)$, $\bar{\bar{\eta}} = \eta + \mathscr{F}_2(\bar{\bar{t}}\,)$, где функции

$$\mathscr{F}_1(t) = \ln\frac{1+\dot{f}_1(t)}{1-\dot{f}_1(t)}, \quad \mathscr{F}_2(t) = \ln\frac{1-\dot{f}_2(t)}{1+\dot{f}_2(t)}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{d\mathscr{F}_1(t)}{dt}\right| \leqslant C_2, \quad \left|\frac{d\mathscr{F}_2(t)}{dt}\right| \leqslant C_2 \tag{20}$$

и C_2 — константа, не зависящая от t. В силу леммы 3 для любого $\tilde{\delta}$, такого, что $0 < \tilde{\delta} < \delta$, существует натуральное число $\tilde{m} = \tilde{m}(\tilde{\delta})$, такое, что неравенство (15) справедливо для всех $t, p > 0$ и целого $m \geqslant \tilde{m}$. Введём следующие обозначения:

$$\begin{gathered}(x_0, y_0) = \hat{A}^{\tilde{m}}(t,p),\ (x_n, y_n) = A^n(x_0, y_0),\ (\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \bar{A}A^{n-1}(x_0, y_0),\\ (\hat{x}_n, \hat{y}_n) = \hat{A}^n(x_0, y_0),\ (\bar{\bar{x}}_n, \bar{\bar{y}}_n) = \bar{\bar{A}}A^{n-1}(x_0, y_0),\ (t_0, \eta_0) = (x_0, \ln y_0),\\ (t_n, \eta_n) = \mathscr{D}^n(t_0, \eta_0),\ (\bar{t}_n, \bar{\eta}_n) = \bar{\mathscr{D}}\mathscr{D}^{n-1}(t_0, \eta_0),\ (\hat{t}_n, \hat{\eta}_n) = \hat{\mathscr{D}}^n(t_0, \eta_0),\\ (\bar{\bar{t}}_n, \bar{\bar{\eta}}_n) = \bar{\bar{\mathscr{D}}}\mathscr{D}^{n-1}(t_0, \eta_0),\end{gathered}$$

где $n = 1{,}2, \ldots$, а $\mathscr{D}^n$ и $\hat{\mathscr{D}}^n$ — n-ые степени $\mathscr{D}$ и $\hat{\mathscr{D}}$ соответственно. В силу (19)–(20), если $|p_1| \leqslant p_0$, $|p_2| \leqslant p_0$, то выполняются следующие неравенства: при $n = 1{,}2, \ldots$

$$|t_n - \hat{t}_n| + |\bar{t}_n - \bar{\bar{t}}_n| < C_1 \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{y_{s-1}}, \tag{21}$$

$$|\eta_n - \hat{\eta}_n| < C_2 \sum_{s=1}^{n} (|t_s - \hat{t}_s| + |\bar{t}_s - \bar{\bar{t}}_s|) + C_1 \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{y_{s-1}},$$

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left\{\frac{\partial y_k}{\partial \bar{y}_k}(x_k, \bar{y}_k)\frac{\partial \bar{y}_k}{\partial y_{k-1}}(\bar{x}_k, y_{k-1})\right\} - \right.\\ &\left. - \sum_{k=1}^{n} \ln\left\{\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \bar{\bar{y}}_k}(\hat{x}_k, \bar{\bar{y}}_k)\frac{\partial \bar{\bar{y}}_k}{\partial \hat{y}_{k-1}}(\bar{\bar{x}}_k, \hat{y}_{k-1})\right\}\right| <\\ &< C_2 \sum_{s=1}^{n} (|t_s - \hat{t}_s| + |\bar{t}_s - \bar{\bar{t}}_s|) + C_1 \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{y_{s-1}},\end{aligned}$$

при условии, что все точки (t_k, η_k) $(k = 0{,}1, \ldots, n-1)$ принадлежат Г. Поэтому, если предположить, что при $n = 1{,}2, \ldots$

$$|t_n - \hat{t}_n| + |\bar{t}_n - \bar{\bar{t}}_n| < d, \quad C_1\left|\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{y_s}\right| < d,$$

и константа d выбрана произвольно малой и независимой от n, то при большом p получим:

$$\eta_n \geqslant \hat{\eta}_n - |\eta_n - \hat{\eta}_n| > \ln p + (n+\tilde{m})\big(\tilde{\delta} - (C_2+1)d\big),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left\{\frac{\partial y_k}{\partial \bar{y}_k}(x_k, \bar{y}_k)\frac{\partial \bar{y}_k}{\partial y_{k-1}}(\bar{x}_k, y_{k-1})\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left\{\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \bar{\bar{y}}_k}(\hat{x}_k, \bar{\bar{y}}_k)\frac{\partial \bar{\bar{y}}_k}{\partial \hat{y}_{k-1}}(\bar{\bar{x}}_k, \hat{y}_{k-1})\right\} -$$
$$- \left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left\{\frac{\partial y_k}{\partial \bar{y}_k}(x_k, \bar{y}_k)\frac{\partial \bar{y}_k}{\partial y_{k-1}}(\bar{x}_k, y_{k-1})\right\} - \right.$$
$$\left. - \ln\left\{\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \bar{\bar{y}}_k}(\hat{x}_k, \bar{\bar{y}}_k)\frac{\partial \bar{\bar{y}}_k}{\partial \hat{y}_{k-1}}(\bar{\bar{x}}_k, \hat{y}_{k-1})\right\}\right| >$$
$$> (n+\tilde{m})\big(\tilde{\delta} - (C_2+1)d\big). \qquad (22)$$

Это предположение приводит к неравенству

$$\left|\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{y_s}\right| < \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{n} \exp\big(-(s+\tilde{m})\big(\tilde{\delta} - (C_2+1)d\big)\big) <$$
$$< \frac{\exp\big(-\tilde{m}\big(\tilde{\delta} - (C_2+1)d\big)\big)}{p\big(1 - \exp\big(-\big(\tilde{\delta} + (C_2+1)d\big)\big)\big)},$$

так что правая часть этого неравенства может быть сделана произвольно малой, если задать p достаточно большим.

Поэтому из (21)–(22), определений A, $\bar{A}$ и леммы 1 следует, что для любого $\tilde{\delta}$ с условием $0 < \tilde{\delta} < \delta$ существуют константы $\tilde{\tilde{p}}$ и $\tilde{m}$, такие, что условие $p \geqslant \tilde{\tilde{p}}$ приводит к условию $(t_n, \eta_n) \in \Gamma$ для всех $n = 0,1,\ldots$ и справедливы неравенства

$$y_n > C_3 p e^{(n+\tilde{m})\tilde{\delta}}, \quad \bar{y}_n > C_3 p e^{(n+\tilde{m})\tilde{\delta}}, \qquad (23)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial y_k}{\partial \bar{y}_k}(x_k, \bar{y}_k)\frac{\partial \bar{y}_k}{\partial y_{k-1}}(\bar{x}_k, y_{k-1})\right\} > C_3 p e^{(n+\tilde{m})\tilde{\delta}},$$

$$\frac{\partial \bar{y}_n}{\partial y_{n-1}}(\bar{x}_n, y_{n-1}) \prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial y_k}{\partial \bar{y}_k}(x_k, \bar{y}_k)\frac{\partial \bar{y}_k}{\partial y_{k-1}}(\bar{x}_k, y_{k-1})\right\} >$$
$$> C_3 p e^{(n+\tilde{m})\tilde{\delta}}, \qquad (24)$$

где C_3 — положительная константа, не зависящая от t, p, n, p_1, p_2, и произведение в левой части неравенства (24) заменяется числом 1, когда $n = 1$. Вводя обозначения

$$\beta = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{\big(1+\dot f_1(t)\big)\big(1-\dot f_2(t-l)\big)}{\big(1-\dot f_1(t)\big)\big(1+\dot f_2(t-l)\big)}\right|,$$

$\tilde p = \tilde{\tilde p}\beta^{\tilde m}$, $\tilde C = C_3\beta^{-\tilde m}$, мы видим, что утверждение теоремы 2 следует из неравенств (23)–(24).

Теорема 2 доказана. ■

5. Доказательство теоремы 1

Предположим, что в момент времени t частица P_s имеет вектор координат $\vec q^{\,(s)} = \vec q^{\,(s)}(t) = (q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, q^{(s)})$, вектор импульсов $\vec p^{\,(s)} = \vec p^{\,(s)}(t) = (p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, p^{(s)})$ и вектор скоростей $\vec v^{\,(s)} = \vec v^{\,(s)}(t) = (v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, v^{(s)})$, и предположим также, что в момент времени $\tilde t > t$ частица P_s имеет вектор координат $\vec{\tilde q}^{\,(s)} = \vec{\tilde q}^{\,(s)}(\tilde t\,) = (\tilde q_1^{(s)}, \tilde q_2^{(s)}, \tilde q^{\,(s)})$, вектор импульсов $\vec{\tilde p}^{\,(s)} = \vec{\tilde p}^{\,(s)}(\tilde t\,) = (\tilde p_1^{(s)}, \tilde p_2^{(s)}, \tilde p^{\,(s)})$ и вектор скоростей $\vec{\tilde v}^{\,(s)} = \vec{\tilde v}^{\,(s)}(\tilde t\,) = (\tilde v_1^{(s)}, \tilde v_2^{(s)}, \tilde v^{\,(s)})$. Введём дифференциалы

$$\begin{aligned}
d\vec q &= dq_1^{(1)}\, dq_2^{(1)}\, dq^{(1)} \dots dq_1^{(N)}\, dq_2^{(N)}\, dq^{(N)},\\
d\vec p &= dp_1^{(1)}\, dp_2^{(1)}\, dp^{(1)} \dots dp_1^{(N)}\, dp_2^{(N)}\, dp^{(N)},\\
d\vec{\tilde q} &= d\tilde q_1^{(1)}\, d\tilde q_2^{(1)}\, d\tilde q^{\,(1)} \dots d\tilde q_1^{(N)}\, d\tilde q_2^{(N)}\, d\tilde q^{\,(N)},\\
d\vec{\tilde p} &= d\tilde p_1^{(1)}\, d\tilde p_2^{(1)}\, d\tilde p^{\,(1)} \dots d\tilde p_1^{(N)}\, d\tilde p_2^{(N)}\, d\tilde p^{\,(N)},
\end{aligned}$$

и величины $\rho = \rho(q_1^{(1)}, \dots, p^{(N)}, t)$, $\tilde\rho = \rho(\tilde q_1^{(1)}, \dots, \tilde p^{\,(N)}, \tilde t\,)$.

Так как количество частиц в элементах фазового пространства K, имеющих меры

$$d\Gamma = \frac{d\vec q\, d\vec p}{\big|v_1^{(1)} v_2^{(1)} v^{(1)} \dots v_1^{(N)} v_2^{(N)} v^{(N)}\big|},$$

и

$$d\tilde\Gamma = \frac{d\vec{\tilde q}\, d\vec{\tilde p}}{\big|\tilde v_1^{(1)} \tilde v_2^{(1)} \tilde v^{\,(1)} \dots \tilde v_1^{(N)} \tilde v_2^{(N)} \tilde v^{\,(N)}\big|},$$

— одинаково, то

$$\rho\, d\Gamma = \tilde\rho\, d\tilde\Gamma. \tag{25}$$

Полагая

$$\tau^{(s)}(\vec{q}^{\,(s)}, \vec{p}^{\,(s)}, \tilde{t}^{\,(s)}) = \frac{\mathscr{D}(\tilde{q}_1^{(s)}, \tilde{q}_2^{(s)}, \tilde{q}^{\,(s)}, \tilde{p}_1^{(s)}, \tilde{p}_2^{(s)}, \tilde{p}^{\,(s)})}{\mathscr{D}(q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, q^{(s)}, p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, p^{(s)})},$$

получим:

$$d\vec{q}\,d\vec{p}\prod_{s=1}^{N}\tau^{(s)}(\vec{q}^{\,(s)}, \vec{p}^{\,(s)}, \tilde{t}^{\,(s)}) = d\vec{\tilde{q}}\,d\vec{\tilde{p}}.$$

Поэтому в силу (25) имеем:

$$\ln\tilde{\rho} = \ln\rho + \sum_{s=1}^{N}\bigl(\ln|\tilde{v}_1^{(s)}\tilde{v}_2^{(s)}\tilde{v}^{\,(s)}| - \ln|v_1^{(s)}v_2^{(s)}v^{(s)}|\bigr) - \\ - \sum_{s=1}^{N}\ln|\tau^{(s)}(\vec{q}^{\,(s)}, \vec{p}^{\,(s)}, \tilde{t}^{\,(s)})|. \qquad (26)$$

Оценим величины $\tau^{(s)}(\vec{q}^{\,(s)}, \vec{p}^{\,(s)}, \tilde{t}^{\,(s)})$, $(s = 1, \ldots, N)$.

Без ограничения общности можно предположить, что в начальный момент времени t частица P_s расположена на границе $q = a$ сосуда, а координата $v^{(s)}$ её вектора скорости $\vec{v}^{\,(s)}$ удовлетворяет неравенству $v^{(s)} > 0$. Случай $v^{(s)} < 0$ сводится к случаю $v^{(s)} > 0$, если вместо границы $q = a$ взять верхнюю границу $q = b$ сосуда.

Обозначим через $t_k^{(s)}$ k-ый (после t) момент времени столкновения частицы P_s с границей $q = a$, и через $\vec{p}_k^{\,(s)} = (p_{k1}^{(s)}, p_{k2}^{(s)}, p_{k0}^{(s)})$, $\vec{v}_k^{\,(s)} = (v_{k1}^{(s)}, v_{k2}^{(s)}, v_{k0}^{(s)})$ k-ые векторы импульса и скорости частицы P_s в момент времени $t_k^{(s)}$ соответственно. Обозначим также через $\bar{t}_k^{(s)}$ k-ый (после t) момент времени столкновения частицы P_s с границей $q = b$, и через $\vec{\bar{p}}_k^{\,(s)} = (\bar{p}_{k1}^{(s)}, \bar{p}_{k2}^{(s)}, \bar{p}_{k0}^{(s)})$, $\vec{\bar{v}}_k^{\,(s)} = (\bar{v}_{k1}^{(s)}, \bar{v}_{k2}^{(s)}, \bar{v}_{k0}^{(s)})$ — k-ые векторы импульса и скорости частицы P_s в момент времени $\bar{t}_k^{(s)}$ соответственно. Возможны следующие два случая:

1) $t_{n_s}^{(s)} \leqslant \tilde{t} \leqslant \bar{t}_{n_s+1}^{(s)}$,

2) $\bar{t}_{n_s}^{(s)} \leqslant \tilde{t} \leqslant t_{n_s}^{(s)}$, где n_s — натуральное число. Полагая $p_{0,0}^{(s)} = p^{(s)}(t)$, в

случае 1) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\tau^{(s)}(\vec{q}^{(s)}, \vec{p}^{(s)}, \tilde{t}^{(s)}) = \\
&= \frac{\mathscr{D}(\bar{t}_1^{(s)}, p^{(s)})}{\mathscr{D}(q^{(s)}, p^{(s)})} \prod_{k=1}^{n_s} \left\{ \frac{\partial p_{k,0}}{\partial(-\bar{p}_{k,0}^{(s)})}(t_k^{(s)}, -\bar{p}_{k,0}^{(s)}) \frac{\partial(-\bar{p}_{k,0}^{(s)})}{\partial(p_{k-1,0}^{(s)})}(\bar{t}_k^{(s)}, p_{k-1,0}^{(s)}) \right\} \times \\
&\quad \times \frac{\mathscr{D}(\tilde{q}^{(s)}, \tilde{p}^{(s)})}{\mathscr{D}(t_{n_s}^{(s)}, \tilde{p}^{(s)})} = \\
&= \frac{\tilde{v}^{(s)}}{v^{(s)}} \prod_{k=1}^{n_s} \left\{ \frac{\partial p_{k,0}^{(s)}}{\partial(-\bar{p}_{k,0}^{(s)})}(t_k^{(s)}, -\bar{p}_{k,0}^{(s)}) \frac{\partial(-\bar{p}_{k,0}^{(s)})}{\partial(p_{k-1,0}^{(s)})}(\bar{t}_k^{(s)}, p_{k-1,0}^{(s)}) \right\},
\end{aligned}
\tag{27}
$$

и в случае 2) имеем:

$$
\begin{aligned}
\tau^{(s)}(\vec{q}^{(s)}, \vec{p}^{(s)}, \tilde{t}^{(s)}) &= \frac{|\tilde{v}^{(s)}| \partial(-\bar{p}_{n_s,0}^{(s)})}{\partial(\bar{p}_{n_s-1,0}^{(s)})}(\bar{t}_{n_s}^{(s)}, p_{n_s-1,0}^{(s)}) \times \\
\times \prod_{k=1}^{n_s-1} &\left\{ \frac{\partial p_{k,0}^{(s)}}{\partial(-\bar{p}_{k,0}^{(s)})}(t_k^{(s)}, -\bar{p}_{k,0}^{(s)}) \frac{\partial(-\bar{p}_{k,0}^{(s)})}{\partial(p_{k-1,0}^{(s)})}(\bar{t}_k^{(s)}, p_{k-1,0}^{(s)}) \right\}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

В случае $n_s = 1$ произведение в правой части равенства (28) заменяется на 1. Применяя результаты теоремы 2 к равенствам (27), (28), получим, что для любого $\tilde{\delta}$, удовлетворяющего неравенству $0 < \tilde{\delta} < \delta$ (величина δ определена в (4)), существует константа $\hat{p} = \hat{p}(p_0, \tilde{\delta}\,)$, такая, что если $p^{(s)}(t) \geqslant \hat{p}$ ($s = 1, \ldots, N$), то

$$\tau^{(s)}(\vec{q}^{(s)}, \vec{p}^{(s)}, \tilde{t}^{(s)}) > C_4 e^{\tilde{\delta} n_s}$$

для всех $\tilde{t} > t$ и $s = 1, \ldots, N$, где $C_4 > 0$ — константа, не зависящая от t и n_s. Следовательно,

$$\ln \tau^{(s)}(\vec{q}^{(s)}, \vec{p}^{(s)}, \tilde{t}^{(s)}) > \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2(\tilde{t} - t), \tag{29}$$

где $C_2 > 0$, и константы $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ не зависят от t, $\tilde{t}$, $\vec{q}^{(s)}$, $\vec{p}^{(s)}$, s. Используя (1), (2), (25), (26), получим:

$$
\begin{aligned}
H(\tilde t\,) &= -\int_K \frac{\tilde\rho \ln\tilde\rho\, d\vec{\tilde q}\, d\vec{\tilde p}}{\prod\limits_{s=1}^{N} |v_1^{(s)}(\tilde t\,) v_2^{(s)}(\tilde t\,) v^{(s)}(\tilde t\,)|} = \\
&= -\int_K \frac{\rho\, d\vec{\tilde q}\, d\vec{\tilde p}}{\prod\limits_{s=1}^{N} |v_1^{(s)}(t) v_2^{(s)}(t) v^{(s)}(t)|} \times \\
&\quad \times \Big\{ \ln\rho + \sum_{s=1}^{N} \big(\ln|\tilde v_1^{(s)} \tilde v_2^{(s)} \tilde v^{\,(s)}| - \ln|v_1^{(s)} v_2^{(s)} v^{(s)}| \big) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{N} \ln|\tau^{(s)}(\vec q^{\,(s)}, \vec p^{\,(s)}, \tilde t\,)| \Big\}, \\
H(t) &= -\int_K \frac{\rho \ln\rho\, d\vec q\, d\vec p}{\prod\limits_{s=1}^{N} |v_1^{(s)}(t) v_2^{(s)}(t) v^{(s)}(t)|}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Теперь, применяя оценку (29) к равенству (30) и теорему 2 к равенству (3), получим утверждение теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] Deryabin M. V., Pustyl'nikov L. D. On Generalized Relativistic Billiards in External Force Fields, Letters in Math. Physics, 63 (2003), 195–207.

[2] Deryabin M. V., Pustyl'nikov L. D. On Generalized Relativistic Billiards, Regular and Chaotic Dynamics, 8(3) (2003), 283–296.

[3] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория, М.: Наука, 1975.

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, М.: Наука, 1964.

[5] Poincaré H. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz, J. Phys. Théoret. Appl. 5(4) (1906), 369–403.

[6] Пустыльников Л. Д. Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми, УМН (1995), т. 50, вып. 1 (301), 143–186.

[7] Pustyl'nikov L. D. The law of entropy increase and generalized billiards, Russian Math. Surveys, (1999), 54(3), 650–651.

[8] Deryabin M. V., Pustyl'nikov L. D. Exponential attractors in generalized relativistic billiards, Communications in math. physics, (2004), 248, 527–552.

Оглавление