ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2015 г.

Попов И.В., Тимофеева Ю. Е.

Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов И.В., Тимофеева Ю. Е. Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 42. 28 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-42**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

И. В. Попов, Ю. Е. Тимофеева

Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости

Москва — 2015

Попов И. В., Тимофеева Ю. Е.

Многомерные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости

В работе представлены многомерные явные трехслойные разностные схемы для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости. Данные схемы имеют третий порядок аппроксимации по времени, первый порядок по пространству в случае использования разности вперед и второй порядок по пространству при использовании центральной разности. Проведено сравнение с известными разностными схемами на серии типовых тестов.

Ключевые слова: адаптивная искусственная вязкость, перенос.

Igor Victorovich Popov, Yulia Evgenijevna Timofeeva

Multidimensional difference schemes with heightened order approximation for advection equation with adaptive artificial viscosity

This paper describes multidimensional explicit difference schemes with three layers using for advection equation with adaptive artificial viscosity. These schemes have the third order approximation on time and the first or the second order on space depends on forward or central difference usage. This paper also contains comparative analysis with known schemes.

Key words: adaptive artificial viscosity, advection.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01-04620-а

Оглавление

Постановка задачи

Зададим прямоугольную область $\Omega = \{0 \le x \le L_1, 0 \le y \le L_2\}$ с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1- участок границы, ортогональный оси Oy, Γ_2- ортогональный оси Ox. В данной области рассматриваем уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(\vec{a}u) = 0$$

$\vec{a}$ - вектор скорости с компонентами (a_1, a_2), $u = u(x, y, t)$ - скалярная величина.

По свойству оператора дивергенции:

$$div(\vec{a}u) = udiv(\vec{a}) + \vec{a}grad(u) = u\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y}\right) + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial y}$$

Будем считать, что $a_1 = const > 0$, $a_2 = const > 0$, тогда $div(\vec{a}) = 0$ и уравнение переноса в координатах примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Построение разностной схемы

По каждому координатному направлению введем для простоты равномерную сетку узлов: по оси Ox с шагом $h_x = \frac{L_1}{N_x - 1}$, где $N_x -$ число узлов: $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N_x-1} = L_1$; по оси Oy с шагом $h_y = \frac{L_2}{N_y - 1}$, где $N_y -$ число узлов: $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{N_y-1} = L_2$. Потоки будем определять в точках $\bar{x}_{i+\frac{1}{2}} = 0.5(x_i + x_{i+1})$, $\bar{y}_{j+\frac{1}{2}} = 0.5(y_j + y_{j+1})$, $0 \le i \le N_x - 2$, $0 \le j \le N_j - 2$. Введём также сетку по времени $t_n = n\tau, n = 0,1 \ldots$. Шаг сетки τ определяется по формуле $\tau = \frac{Ku * h}{a}$, где $Ku = min(Ku_x, Ku_y)$ - число Куранта. Индекс момента времени n будем писать сверху: $u^n = u(t_n)$, $u^{n+1} = u(t_{n+1})$.

Для построения разностной схемы используем такой же подход, как в одномерном случае [1]. Выразим временные производные (до третьей включительно) из уравнения переноса и подставим полученные выражения в разложение искомой функции в ряд Тейлора

$$u^{n+1} = u^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \tau + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n \frac{\tau^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n \frac{\tau^3}{6} + O(\tau^4)$$

Временные производные, выраженные через пространственные координаты, имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \ a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_1a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_1a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Подставим найденные выражения для временных производных в разложение:

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + a_1\frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^n}{\partial y} - \frac{2\tau}{3}\left(a_1^2\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + 2a_1a_2\frac{\partial^2 u^n}{\partial x\partial y} + a_2^2\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right) =$$
$$= -\frac{\tau}{6}(\ a_1^2\frac{\partial^2 u^{n-1}}{\partial x^2} + 2a_1a_2\frac{\partial^2 u^{n-1}}{\partial x\partial y} + a_2^2\frac{\partial^2 u^{n-1}}{\partial y^2})$$

Выделим потоки:

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left[a_1\left(u^n - \frac{2\tau}{3}\left(a_1\frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\right)\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[a_2\left(u^n - \frac{2\tau}{3}\left(a_1\frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\right)\right] =$$
$$= -\frac{\tau}{6}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\left(a_1\frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^{n-1}}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\left(a_1\frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^{n-1}}{\partial y}\right)\right)\right]$$

$$W_x^n = a_1\left(u^n - \frac{2\tau}{3}\left(a_1\frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\right)$$

$$W_y^n = a_2\left(u^n - \frac{2\tau}{3}\left(a_1\frac{\partial u^n}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^n}{\partial y}\right)\right)$$

$$W_x^{n-1} = a_1\left(a_1\frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^{n-1}}{\partial y}\right)$$

$$W_y^{n-1} = a_2\left(a_1\frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} + a_2\frac{\partial u^{n-1}}{\partial y}\right)$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}[W_x^n] + \ \frac{\partial}{\partial y}[W_y^n] = -\ \frac{\tau}{6}\left[\frac{\partial}{\partial x}(W_x^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial y}(W_y^{n-1})\right]$$

Перепишем уравнение в операторном виде:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + div(W^n) = -\frac{\tau}{6} div(W^{n-1})$$

Выберем контрольный объём в виде прямоугольника вокруг узла ij, со сторонами, равными h_x и h_y и площадью $S_{ij} = h_x h_y$.

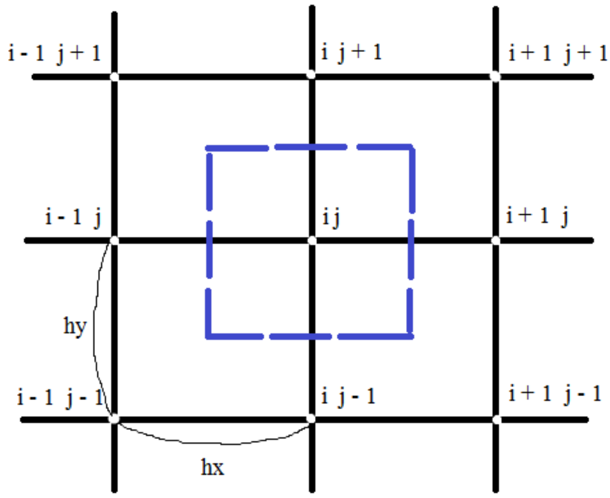

Рис. 1 Контрольный объём для узла ij

Проинтегрируем уравнение по выбранному контрольному объёму:

$$\iint\limits_{S_{ij}} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} dS + \iint\limits_{S_{ij}} div(W^n) dS = -\frac{\tau}{6} \iint\limits_{S_{ij}} div(W^{n-1}) dS$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} S_{ij} + \oint\limits_{l_{ij}} (\vec{n}, W^n) dl = -\frac{\tau}{6} \oint\limits_{l_{ij}} (\vec{n}, W^{n-1}) dl$$

l_{ij} – контур, ограничивающий контрольный объем, $\vec{n}$ - вектор нормали к стороне контура.

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{S_{ij}} \sum_{k=1}^{4} (n_k, W_k^n) l_k - \frac{\tau^2}{6S_{ij}} \sum_{k=1}^{4} (n_k, W_k^{n-1}) l_k$$

Аппроксимация потоков

Определим компоненты потоков в четырех точках – серединах расстояний между соседними узлами (отмечены красным цветом на рис. 2).

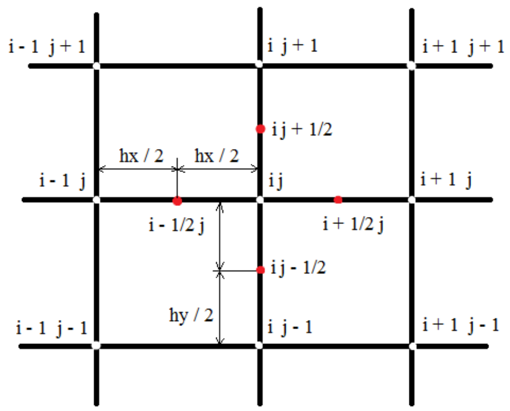

Рис. 2 Точки, в которых определяются потоки

Для аппроксимации потока выберем контрольный объём в виде ромба, диагонали которого равны h_x и h_y. Для компоненты $W^n_{i+\frac{1}{2}j}$ и $W^{n-1}_{i+\frac{1}{2}j}$ контрольный объём представлен на рис. 3.

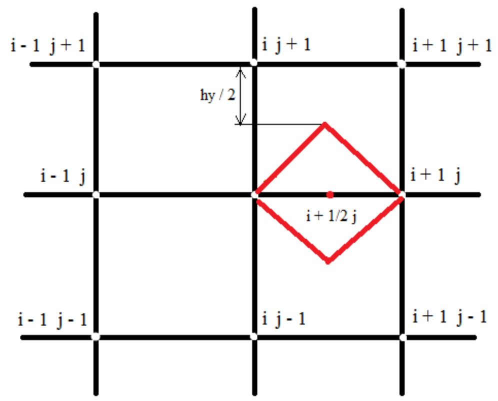

Рис. 3 Контрольный объём для аппроксимации потока в точке $i+\frac{1}{2}j$

$$\iint\limits_{S_{i+\frac{1}{2}j}} W^n_{i+\frac{1}{2}j} dS = \iint\limits_{S_{i+\frac{1}{2}j}} \left(a_1 u^n - \frac{2\tau}{3} a_1 div(\vec{a} u^n)\right) dS$$

$$W^n_{i+\frac{1}{2}j} S_{i+\frac{1}{2}j} = a_1 u^n_{i+1j} S_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{2\tau}{3} a_1 \oint\limits_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl$$

$$S_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2} h_x h_y$$

Будем использовать усреднения:

$$\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(u^n_{ij} + u^n_{i+1j} + u^n_{i+1j+1} + u^n_{ij+1})$$

$$\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(u^n_{ij} + u^n_{i+1j} + u^n_{i+1j-1} + u^n_{ij-1})$$

$$\oint\limits_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + u^n_{i+1j}\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + u^n_{i+1j}\right)}{2} \right) \frac{1}{2}\sqrt{h_x^2 + h_y^2} +$$

$$+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + u^n_{ij}\right)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + u^n_{ij}\right)}{2} \right) \frac{1}{2}\sqrt{h_x^2 + h_y^2} +$$

$$+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + u^n_{ij}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + u^n_{ij}\right)}{2} \right) \frac{1}{2}\sqrt{h_x^2 + h_y^2} +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + u^n_{i+1j}\right)}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \frac{\left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + u^n_{i+1j}\right)}{2} \right) \frac{1}{2}\sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

Если $h_x = h_y = h$, получаем

$$\oint\limits_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n) dl = \frac{h}{4}\left(2a_1 (u^n_{i+1j} - u^n_{ij}) + 2a_2 \left(\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - \bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} \right) \right) =$$

$$= a_1 \frac{h}{2}\left(u_{i+1j}^n - u_{ij}^n\right) + \frac{a_2}{2}\frac{h}{2}\left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2}\right)$$

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^n = a_1 u_{i+1j}^n - \frac{2\tau a_1}{3S_{i+\frac{1}{2}j}}(a_1 \frac{h}{2}\left(u_{i+1j}^n - u_{ij}^n\right) +$$

$$+ \frac{a_2}{2}\frac{h}{2}\left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2}\right)) =$$

$$= a_1 u_{i+1j}^n - \frac{2\tau a_1}{3h}(a_1\left(u_{i+1j}^n - u_{ij}^n\right) +$$

$$+ \frac{a_2}{2}\left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2}\right))$$

Для $n-1$ слоя аппроксимация потока

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} = \frac{a_1}{S_{i+\frac{1}{2}j}} \oint\limits_{l_{i+\frac{1}{2}j}} (\vec{n}, \vec{a}u^n)dl$$

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} = \frac{a_1}{h}\left(a_1\left(u_{i+1j}^n - u_{ij}^n\right) + \frac{a_2}{2}\left(\frac{u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n}{2} - \frac{u_{i+1j-1}^n + u_{ij-1}^n}{2}\right)\right)$$

Повторим выкладки для потока $W_{ij+\frac{1}{2}}^n$.

$$\iint\limits_{S_{ij+\frac{1}{2}}} W_{ij+\frac{1}{2}}^n dS = \iint\limits_{S_{ij+\frac{1}{2}}} (a_2 u^n - \frac{2\tau}{3} a_2 div(\vec{a}u^n))dS$$

$$W_{ij+\frac{1}{2}}^n S_{ij+\frac{1}{2}} = a_2 u_{ij+1}^n S_{ij+\frac{1}{2}} - \frac{2\tau}{3} a_2 \oint\limits_{l_{ij+\frac{1}{2}}} (\vec{n}, \vec{a}u^n)dl$$

Контрольный объем выбираем аналогичным образом, $S_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{h_x h_y}{2}$, используем усреднения

$$\bar{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4}(u_{ij}^n + u_{i+1j}^n + u_{i+1j+1}^n + u_{ij+1}^n)$$

$$\bar{u}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{4}(u_{ij}^n + u_{ij+1}^n + u_{i-1j+1}^n + u_{i-1j}^n)$$

$$\oint\limits_{l_{ij+\frac{1}{2}}}(\vec{n},\vec{a}u^n)dl \;=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_1\frac{\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij+1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}a_2\frac{\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij+1}}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{h_x^2+h_y^2}+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a_1\frac{\bar{u}^n_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij+1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}a_2\frac{\bar{u}^n_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij+1}}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{h_x^2+h_y^2}+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a_1\frac{\bar{u}^n_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}a_2\frac{\bar{u}^n_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij}}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{h_x^2+h_y^2}+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_1\frac{\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}a_2\frac{\bar{u}^n_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+u^n_{ij}}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{h_x^2+h_y^2}$$

При $h_x = h_y = h$ получаем

$$\oint\limits_{l_{ij+\frac{1}{2}}}(\vec{n},\vec{a}u^n)dl \;=\frac{h}{2}\left(\frac{a_1}{2}\left(\frac{u^n_{i+1j}+u^n_{i+1j+1}}{2}-\frac{u^n_{i-1j+1}+u^n_{i-1j}}{2}\right)+\;a_2\left(u^n_{ij+1}-u^n_{ij}\right)\right)$$

$$W^n_{ij+\frac{1}{2}}=a_2u^n_{ij+1}-\frac{2\tau}{3h}a_2\left(\frac{a_1}{2}\left(\frac{u^n_{i+1j}+u^n_{i+1j+1}}{2}-\frac{u^n_{i-1j+1}+u^n_{i-1j}}{2}\right)+\;a_2\left(u^n_{ij+1}-u^n_{ij}\right)\right)$$

Для слоя $n-1$

$$W^{n-1}_{ij+\frac{1}{2}}\;=\frac{a_2}{h}\left(\frac{a_1}{2}\left(\frac{u^n_{i+1j}+u^n_{i+1j+1}}{2}-\frac{u^n_{i-1j+1}+u^n_{i-1j}}{2}\right)+\;a_2\left(u^n_{ij+1}-u^n_{ij}\right)\right)$$

Полученная аппроксимация двумерного уравнения переноса:

$$u^{n+1}_{ij}=u^n_{ij}-\frac{\tau}{h_x}\left(W^n_{x_{i+\frac{1}{2}j}}-W^n_{x_{i-\frac{1}{2}j}}\right)-\frac{\tau}{h_y}\left(W^n_{y_{ij+\frac{1}{2}}}-W^n_{y_{ij-\frac{1}{2}}}\right)-$$
$$-\frac{\tau^2}{6}\left[\frac{W^{n-1}_{x_{i+\frac{1}{2}j}}-W^{n-1}_{x_{i-\frac{1}{2}j}}}{h_x}+\frac{W^{n-1}_{y_{ij+\frac{1}{2}}}-W^{n-1}_{y_{ij-\frac{1}{2}}}}{h_y}\right]$$

При аппроксимации потоков на $n-$ом слое вместо направленной разности вперёд можно использовать центральную разность, тогда выражения будут иметь вид:

$$W^n_{i+\frac{1}{2}j}=a_1\left(\frac{u^n_{i+1j}+u^n_{ij}}{2}\right)-\frac{2\tau a_1}{3h}\left(a_1\left(u^n_{i+1j}-u^n_{ij}\right)+\right.$$

$$+\frac{a_2}{2}\left(\frac{u^n_{i+1j+1}+u^n_{ij+1}}{2}-\frac{u^n_{i+1j-1}+u^n_{ij-1}}{2}\right))$$

Монотонизация схемы

Для монотонизации схемы используется подход, описанный в [2].

По полученной разностной схеме находится предикторное решение. Затем проверяются условия немонотонности решения отдельно по направлению x $(u^n_{i+1j}-u^n_{ij})(u^n_{ij}-u^n_{i-1j})<0$ и по направлению y $(u^n_{ij+1}-u^n_{ij})(u^n_{ij}-u^n_{ij-1})<0$. На тех отрезках, для которых условия выполняются, исходное уравнение заменяется на (считаем $h_x=h_y=h$):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+div(\vec{a}u)=div(\mu grad(u))$$

$$\iint\limits_{S_{ij}}\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}dS+\iint\limits_{S_{ij}}div(W^n)dS=$$

$$=-\frac{\tau}{6}\iint\limits_{S_{ij}}div(W^{n-1})dS+\iint\limits_{S_{ij}}div(\mu grad(u))dS$$

$$\iint\limits_{S_{ij}}div(\mu grad(u))dS=\oint\limits_{l_{ij}}\mu(\vec{n},grad(u))dl=\oint\limits_{l_{ij}}\mu\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dl=$$

$$=\mu_{i+\frac{1}{2}j}\frac{u^n_{i+1j}-u^n_{ij}}{h}h+\mu_{ij+\frac{1}{2}}\frac{u^n_{ij+1}-u^n_{ij}}{h}h-$$

$$-\mu_{i-\frac{1}{2}j}\frac{u^n_{ij}-u^n_{i-1j}}{h}h-\mu_{ij-\frac{1}{2}}\frac{u^n_{ij}-u^n_{ij-1}}{h}h$$

Величина μ, как и в одномерном случае, является искусственной вязкостью.

Разностная схема для нахождения корректорного решения принимает вид:

$$u^{n+1}_{ij}=u^n_{ij}-\frac{\tau}{h}\left(W^n_{i+\frac{1}{2}j}+W^n_{ij+\frac{1}{2}}-W^n_{i-\frac{1}{2}j}-W^n_{ij-\frac{1}{2}}\right)-$$

$$-\frac{\tau}{6h}\left(W^{n-1}_{i+\frac{1}{2}j}+W^{n-1}_{ij+\frac{1}{2}}-W^{n-1}_{i-\frac{1}{2}j}-W^{n-1}_{ij-\frac{1}{2}}\right)+$$

$$+\frac{\tau}{h^2}\left(\mu_{i+\frac{1}{2}j}(u_{i+1j}^n - u_{ij}^n) + \mu_{ij+\frac{1}{2}}(u_{ij+1}^n - u_{ij}^n)\right) -$$

$$-\frac{\tau}{h^2}\left(\mu_{i-\frac{1}{2}j}(u_{ij}^n - u_{i-1j}^n) + \mu_{ij-\frac{1}{2}}(u_{ij}^n - u_{ij-1}^n)\right)$$

Для определения величины искусственной вязкости воспользуемся методом «замороженных коэффициентов» аналогично одномерному случаю, положим $\mu_{i+\frac{1}{2}j} = \mu_{i-\frac{1}{2}j} = \mu_x$, $\mu_{ij+\frac{1}{2}} = \mu_{i-\frac{1}{2}j} = \mu_y$. Считаем, что решение на ($n-1$)-ом слое монотонно и будем рассматривать только слагаемые со слоя n. Для обеспечения монотонности по критерию Фридрихса коэффициенты при u_{i+1j}^n, u_{ij+1}^n, $u_{ij}^n, u_{i-1j}^n, u_{ij-1}^n$ должны быть положительными.

Рассмотрим вариант аппроксимации потоков с использованием разности вперёд. При u_{ij}^n имеем

$$1 + \frac{a_1\tau}{h} - \frac{4\tau^2 a_1^2}{3h^2} + \frac{a_2\tau}{h} - \frac{4\tau^2 a_2^2}{3h^2} - \frac{2\tau}{h^2}(\mu_x + \mu_y) > 0$$

$$1 + \frac{\tau}{h}(a_1 + a_2) - \frac{4\tau^2}{3h^2}(a_1^2 + a_2^2) - \frac{2\tau}{h^2}(\mu_x + \mu_y) > 0$$

$$\mu_x + \mu_y < \frac{h^2}{2\tau} + \frac{h}{2}(a_1 + a_2) - \frac{2\tau}{3}(a_1^2 + a_2^2)$$

$$\mu_x < \frac{h^2}{4\tau} + \frac{h}{2}a_1 - \frac{2\tau}{3}a_1^2$$

$$\mu_y < \frac{h^2}{4\tau} + \frac{h}{2}a_2 - \frac{2\tau}{3}a_2^2$$

Перепишем через число Куранта $Ku_x = \frac{a_1\tau}{h}$(для $Ku_y = \frac{a_2\tau}{h}$ аналогично):

$$\mu_x < a_1 h(\frac{1}{4Ku_x} + \frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3})$$

$$\frac{1}{4Ku_x} + \frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3} > 0$$

$$-4(Ku_x + 0.34)(Ku_x - 1.09) > 0$$

Согласно теоретическому исследованию, число Куранта лежит в пределах $0 < Ku_x < 1.09$ при «замороженных» коэффициентах, однако в реальных расчётах следует использовать $Ku_x < 1$ для обеспечения устойчивости (для Ku_y значения аналогичны).

При u_{i+1j}^n имеем:

$$-\frac{a_1\tau}{h}+\frac{2\tau^2 a_1^2}{3h^2}+\frac{\tau}{h^2}\mu_x>0$$

$$\mu_x>a_1h-\frac{2\tau a_1^2}{3}$$

$$\mu_x>a_1h(1-\frac{2Ku_x}{3})$$

$$1-\frac{2Ku_x}{3}>0$$

$$Ku_x<\frac{3}{2}$$

Из неравенств при u_{ij+1}^n получаем аналогичные значения для вязкости μ_y:

$$\mu_y>a_2h-\frac{2\tau a_2^2}{3}$$

$$Ku_y<\frac{3}{2}$$

При удовлетворении вышеизложенным условиям, неравенства при u_{i-1j}^n, u_{ij-1}^n выполняются автоматически.

Итак, полученные ограничения на величину искусственной вязкости:

$$\mu_{x\,min}=a_1h-\frac{2\tau a_1^2}{3}$$

$$\mu_{y\,min}=a_2h-\frac{2\tau a_2^2}{3}$$

$$\mu_{x\,max}=\frac{h^2}{4\tau}+\frac{h}{2}a_1-\frac{2\tau}{3}a_1^2$$

$$\mu_{y\,max}=\frac{h^2}{4\tau}+\frac{h}{2}a_2-\frac{2\tau}{3}a_2^2$$

Если при аппроксимации потоков использовать центральную разность, то при u_{ij}^n будем иметь

$$1-\frac{4\tau^2 a_1^2}{3h^2}-\frac{4\tau^2 a_2^2}{3h^2}-\frac{2\tau}{h^2}(\mu_x+\mu_y)>0$$

$$\mu_x+\mu_y<\frac{h^2}{2\tau}-\frac{2\tau}{3}(a_1^2+a_2^2)$$

$$\mu_x < \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3} a_1^2$$

$$\mu_y < \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3} a_2^2$$

Получим также ограничения на число Куранта:

$$\mu_x < a_1 h(\frac{1}{4Ku_x} - \frac{2}{3} Ku_x)$$

$$\frac{1}{4Ku_x} - \frac{2}{3} Ku_x > 0$$

$$0 < Ku_x < 0.612$$

Для Ku_y ограничение будет аналогичным.
При u_{i+1j}^n коэффициент имеет вид:

$$-\frac{a_1\tau}{2h} + \frac{2\tau^2 a_1^2}{3h^2} + \frac{\tau}{h^2}\mu_x > 0$$

$$\mu_x > \frac{a_1 h}{2} - \frac{2\tau a_1^2}{3}$$

Через число Куранта:

$$\mu_x > a_1 h\left(\frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2Ku_x}{3} > 0$$

$$Ku_x < 0.75$$

Из неравенства для коэффициента при u_{ij+1}^n получаем

$$\mu_y > \frac{a_2 h}{2} - \frac{2\tau a_2^2}{3}$$

$$Ku_y < 0.75$$

Для схемы с центральной разностью ограничения на величину искусственной вязкости имеют вид:

$$\mu_{x\,max} = \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3} a_1^2$$

$$\mu_{y\,max} = \frac{h^2}{4\tau} - \frac{2\tau}{3}a_2^2$$

$$\mu_{x\,min} = \frac{a_1 h}{2} - \frac{2\tau a_1^2}{3}$$

$$\mu_{y\,min} = \frac{a_2 h}{2} - \frac{2\tau a_2^2}{3}$$

Этапы расчёта

На первом этапе находится предикторное решение по формуле

$$\tilde{u}_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_x}(W_{x_{i+\frac{1}{2}j}}^n - W_{x_{i-\frac{1}{2}j}}^n) - \frac{\tau}{h_y}\left(W_{y_{ij+\frac{1}{2}}}^n - W_{y_{ij-\frac{1}{2}}}^n\right) -$$

$$-\frac{\tau^2}{6}[\frac{W_{x_{i+\frac{1}{2}j}}^{n-1} - W_{x_{i-\frac{1}{2}j}}^{n-1}}{h_x} + \frac{W_{y_{ij+\frac{1}{2}}}^{n-1} - W_{y_{ij-\frac{1}{2}}}^{n-1}}{h_y}]$$

Далее по найденному решению $\tilde{u}^{n+1}$ определяются участки введения искусственной вязкости: проверяются условия немонотонности решения отдельно по направлению x $(\tilde{u}_{i+1j}^n - \tilde{u}_{ij}^n)\left(\tilde{u}_{ij}^n - \tilde{u}_{i-1j}^n\right) < 0$ и по направлению y $(\tilde{u}_{ij+1}^n - \tilde{u}_{ij}^n)\left(\tilde{u}_{ij}^n - \tilde{u}_{ij-1}^n\right) < 0$. На тех отрезках, для которых условия выполняются, исходное уравнение заменяется на

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(\vec{a}u) = div(\mu grad(u))$$

На остальных интервалах полагаем $\mu_{i+\frac{1}{2}j} = \mu_{i-\frac{1}{2}j} = 0, \mu_{ij+\frac{1}{2}} = \mu_{ij-\frac{1}{2}} = 0$.

Далее расчёт ведётся по формуле

$$u_{ij}^{n+1} = \tilde{u}_{ij}^{n+1} + \tau\mu_{i+\frac{1}{2}j}\frac{u_{i+1j}^n - u_{ij}^n}{h_x^2} - \tau\mu_{i-\frac{1}{2}j}\frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{h_x^2} +$$

$$+\tau\mu_{ij+\frac{1}{2}}\frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h_y^2} - \tau\mu_{ij-\frac{1}{2}}\frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{h_y^2}$$

Для искусственной вязкости используются следующие значения ($0 \le \alpha \le 1$):

$$\mu_{i+\frac{1}{2}j} = \mu_{i-\frac{1}{2}j} = \alpha\mu_{x\,max} + (1-\alpha)\,\mu_{x\,min}$$

$$\mu_{ij+\frac{1}{2}} = \mu_{ij-\frac{1}{2}} = \alpha\mu_{y\,max} + (1-\alpha)\,\mu_{y\,min}$$

Результаты расчётов

Пусть в задаче Коши для линейного двумерного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$u = u(x, y, t)$$

с финитным начальным условием

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \begin{cases} R(r, \varphi), 0 \le r \le r_0 \\ 0, r_0 < r \end{cases},$$

где $r = \sqrt{(x - x_{00})^2 + (y - y_{00})^2}$,

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x - x_{00}}{r}\right), y \ge y_{00} \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x - x_{00}}{r}\right), y < y_{00} \end{cases},$$

$r_0 = const > 0$, скорости a_1 и a_2 задаются следующим образом:

$$a_1 = \begin{cases} \frac{dx_0(t)}{dt}, 0 \le r \le r_1 \\ 0, \ r > r_1 \end{cases},$$

$$a_2 = \begin{cases} \frac{dy_0(t)}{dt}, 0 \le r \le r_1 \\ 0, \ r > r_1 \end{cases},$$

где $x_0(0) = x_{00}, y_0(0) = y_{00}, r_1 \ge r_0$.

Функции $x = x_0(t), y = y_0(t)$ определяют траекторию движения центра решения (x_0, y_0) в плоскости (x, y): $x_0(t) = x_{00} + u_{00}t, y_0(t) = y_{00} + v_{00}t$, u_{00}, v_{00} - $const$.

Для тестирования и сравнительного анализа использовались четыре типа функций $R(r, \varphi)$, три из них (2 – 4) описаны также в [3]. Ниже представлены виды точных решений, на левом рисунке показаны линии уровня, на правом – видовая проекция.

1. Прямоугольный параллелепипед

$$R(r, \varphi) = \begin{cases} 1, -\frac{r_0}{2} \le x \le \frac{r_0}{2}, -\frac{r_0}{2} \le y \le \frac{r_0}{2} \\ 0, \ |x| > \frac{r_0}{2}, |y| > \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

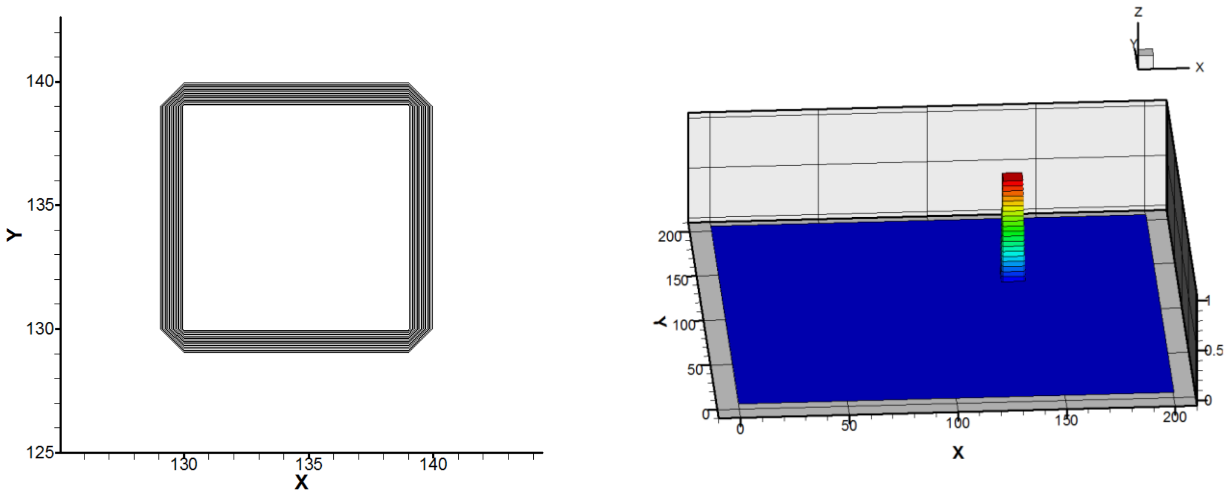

Рис. 4 Начальный профиль «прямоугольный параллелепипед»

2. Конус

$$R(r,\varphi) = \begin{cases} 1 - \dfrac{r}{r_0}, 0 \le r \le r_0 \\ 0, \qquad r > r_0 \end{cases}$$

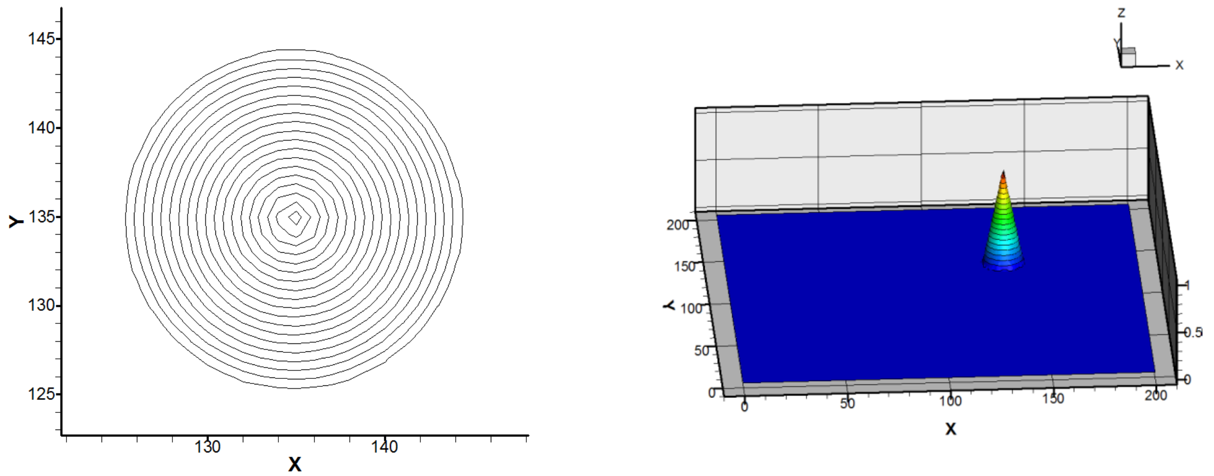

Рис. 5 Начальный профиль «конус»

3. Конус без сектора

$$R(r,\varphi) = \begin{cases} 1 - \dfrac{r}{r_0}, \varphi \notin [\varphi_1, \varphi_2], 0 \le r \le r_0, 0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le 2\pi \\ 0, \qquad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \end{cases}$$

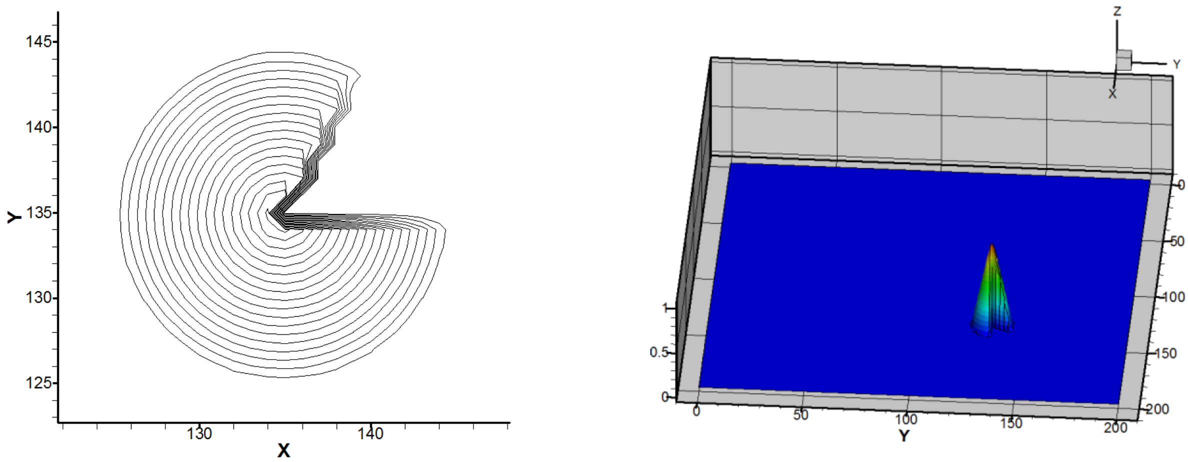

Рис.6 Начальный профиль «конус без сектора»

4. Буква М

$$R(r,\varphi)=\begin{cases}1, & (x,y)\in M\\ 0, & (x,y)\notin M\end{cases}$$

$$M=\{(x,y):(x,y)\in P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4\}$$

$$P_1=\{(x,y):x_1\le x\le x_2;y_1\le y\le y_5\}$$

$$P_2=\left\{(x,y):x_2\le x\le x_3;y_3-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)\le y\le y_5-\frac{y_5-y_4}{x_3-x_2}(x-x_2)\right\}$$

$$P_3=\left\{(x,y):x_3\le x\le x_4;y_2+\frac{y_3-y_2}{x_4-x_3}(x-x_3)\le y\le y_4+\frac{y_5-y_4}{x_4-x_3}(x-x_3)\right\}$$

$$P_4=\{(x,y):x_4\le x\le x_5;y_1\le y\le y_5\}$$

$$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5;y_1<y_2<y_3<y_4<y_5$$

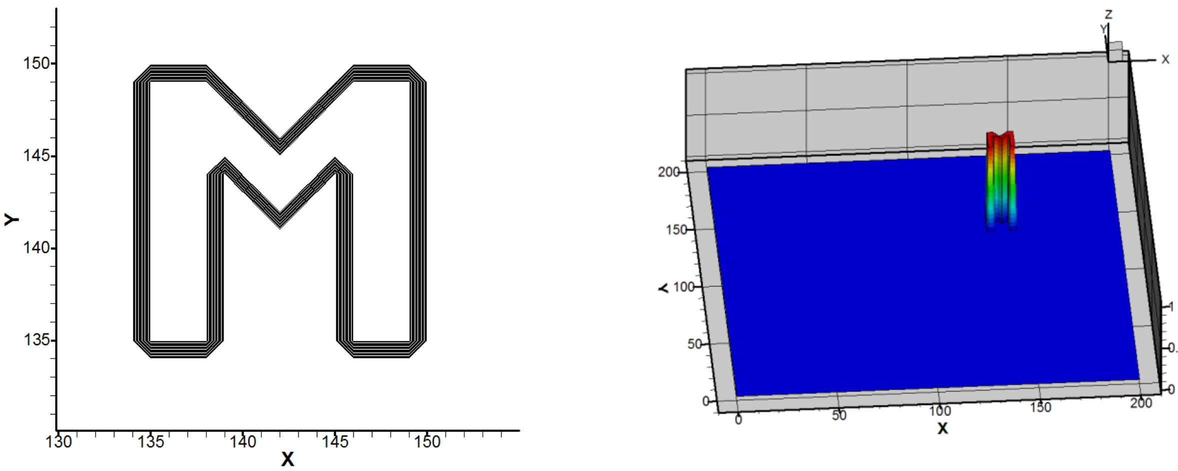

Рис.7 Начальный профиль «буква М»

Зададим следующие значения параметров:

$$x_{00} = 10, y_{00} = 10, r_0 = r_1 = 10, u_{00} = v_{00} = 1$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}, x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 11, x_5 = 14$$

$$y_1 = 0, y_2 = 7, y_3 = 10, y_4 = 10, y_5 = 14$$

Тест «прямоугольный параллелепипед»

Проведём вычисления по описанному методу в области, содержащей 200x200 узлов, пространственные шаги выберем единичными. Зададим начальный профиль в виде прямоугольного параллелепипеда, число Куранта равным 0.1, положим $\alpha = 0$ (используется минимальная вязкость).

Табл. 1 содержит нормы точного решения.

Таблица 1

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*1*	*12000*	*109.545*
Локальная	*1*	*100*	*10*

Используем вариант аппроксимации потоков с разностью вперёд.

На рис. 8 представлен вид профиля на моменты времени 50, 100 и 120:

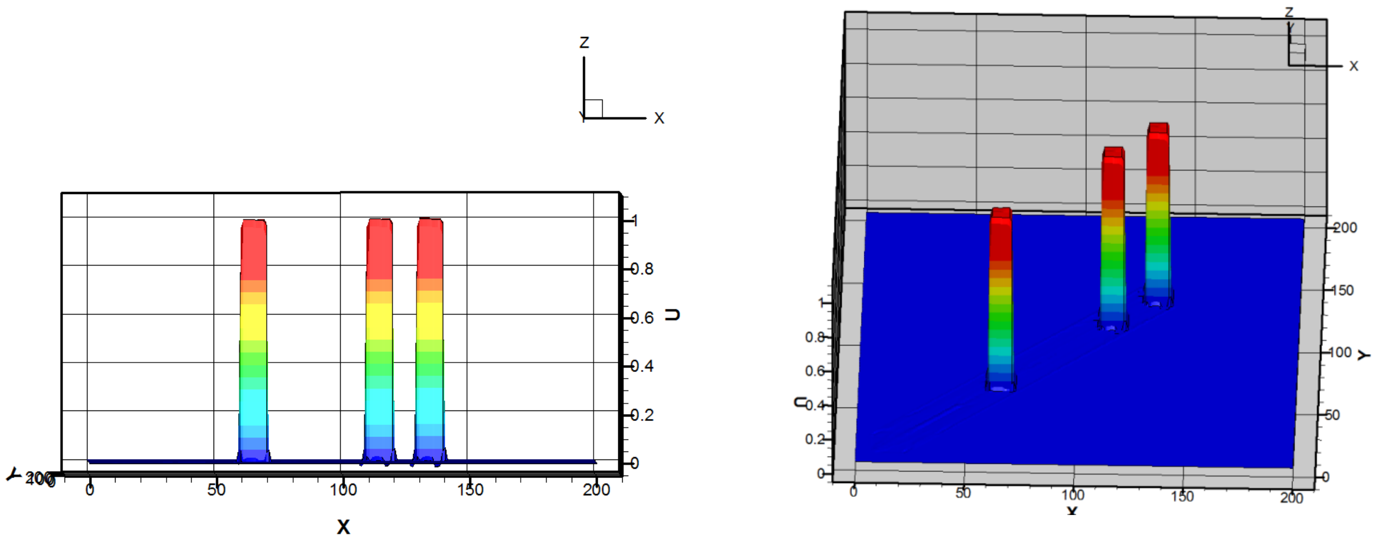

Рис. 8 Профиль «прямоугольный параллелепипед» в моменты времени 50, 100, 120

На рис. 9 представлена вертикальная проекция начального профиля на момент времени $t_{fin} = 120$.

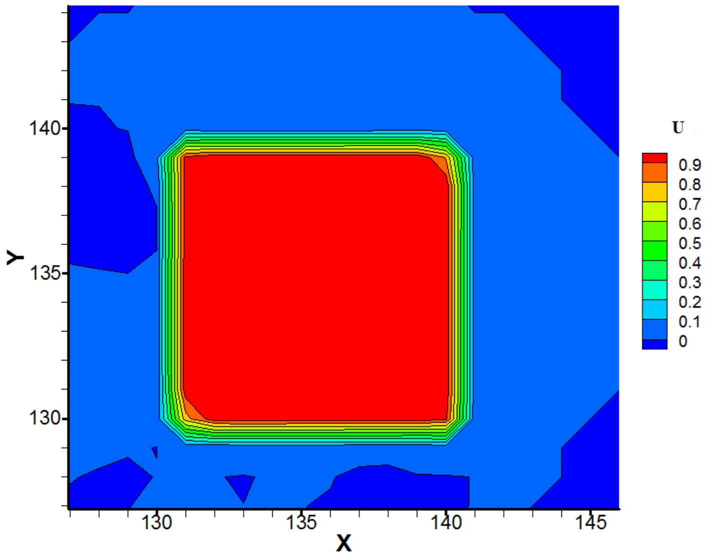

Рис. 9 Профиль «прямоугольный параллелепипед» в момент времени $t_{fin} = 120$

Профиль сохраняет первоначальную форму.

Табл. 2 содержит значения норм разности между точным и численным решением на момент времени $t_{fin} = 120$:

Таблица 2

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*1.02703*	*2536.26*	*38.9357*
Локальная	*1.00511*	*23.1132*	*4.3522*

Для сравнительного анализа будем использовать начальные профили «конус», «конус без сектора» и «буква М». Результат будем сравнивать в нормах C, L_1, L_2 интегрально и локально со схемами П. Лакса([4]), схемой с «лимитерами»([5]) и схемой с направленными разностями (описание данных схем представлено в приложении 1).

При расчётах величину искусственной вязкости будем регулировать с помощью параметра α, задавая его значение для линейной комбинации $\alpha\mu_{max} + (1-\alpha)\mu_{min}$. Число Куранта ($\gamma = \min(\frac{a_1\tau}{h_x}, \frac{a_2\tau}{h_y})$) ограничивается сверху величиной $\gamma_{max} = 0.25$ ($\gamma \leq \gamma_{max}$).

Тест «конус»

Табл. 3 содержит значения норм разностей точного и численного решения, полученного по методу АИВ, для начального профиля «конус» на момент времени $t_{fin} = 120$, число Куранта равно 0.15, параметр $\alpha = 0.2$.

Таблица 3

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*0.492662*	*5956.67*	*29.8267*
Локальная	*0.420144*	*61.5856*	*3.10825*

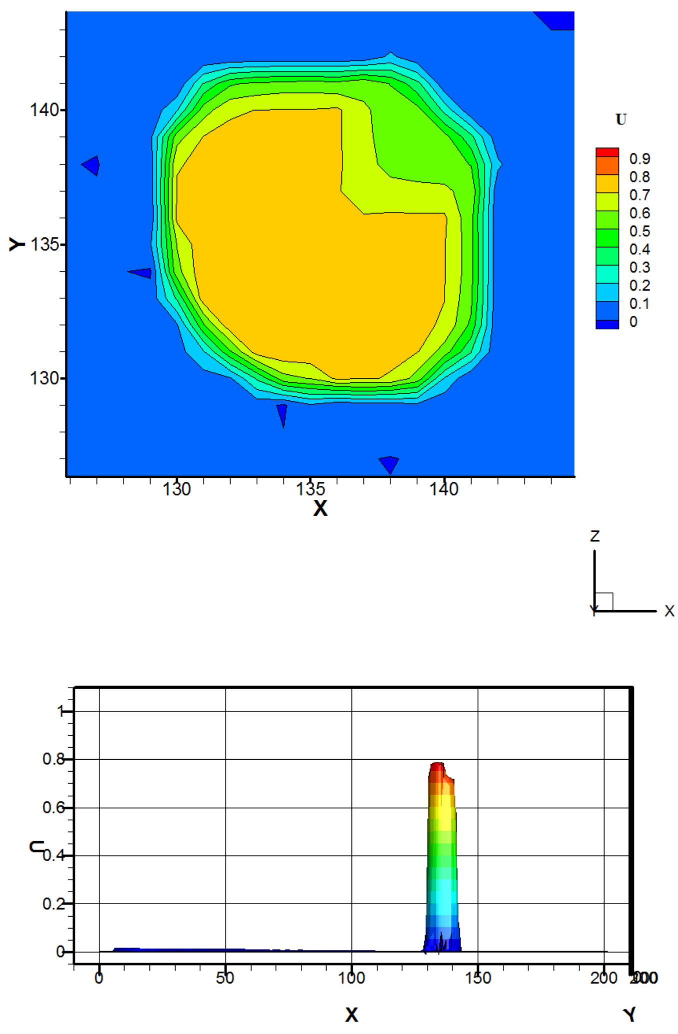

Рис. 10 Тест «конус» на момент времени $t_{fin} = 120$

Тест «конус без сектора»

Полученные значения норм разности точного и численного решений для начального профиля «конус без сектора» представлены в табл. 4.

Таблица 4

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*0.874428*	*5760.59*	*32.8994*
Локальная	*0.719869*	*54.781*	*3.34619*

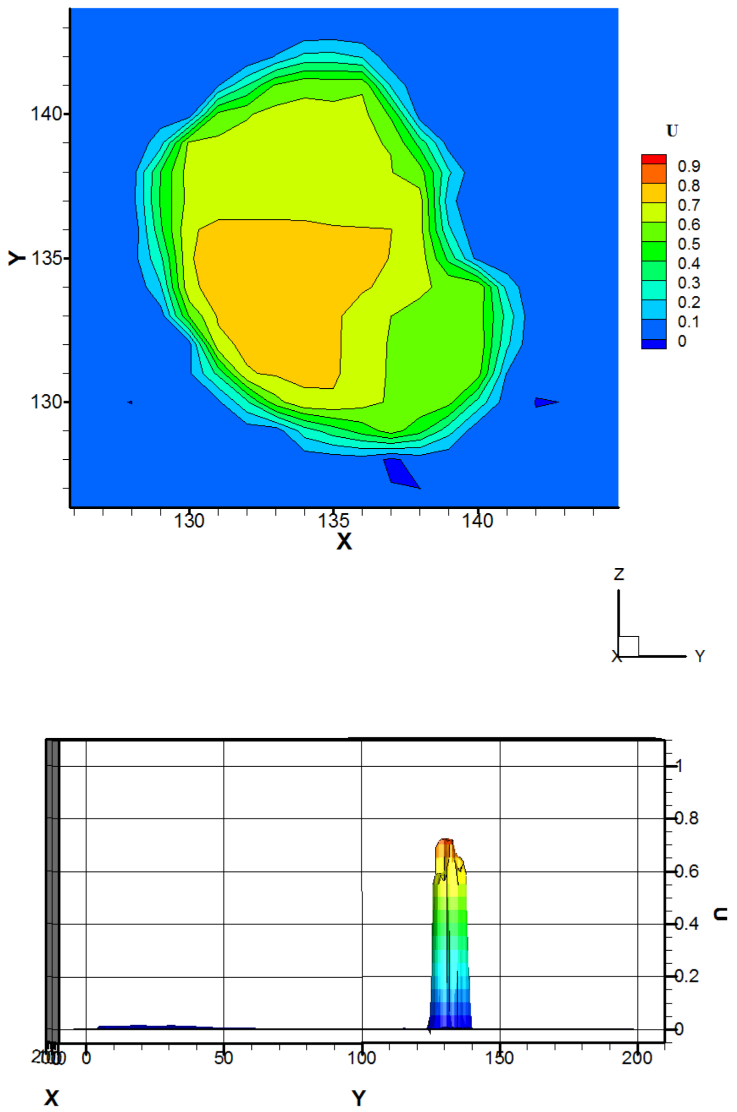

Рис. 11 Тест «конус без сектора» на момент времени $t_{\mathrm{fin}} = 120$

Тест «буква М»

В табл. 5 представлены значения норм разностей точного и численного решения, полученного по методу АИВ, для начального профиля «буква М» на момент времени $t_{fin} = 120$, число Куранта равно 0.15, параметр $\alpha = 0.2$.

Таблица 5

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*0.993475*	*10522.4*	*69.5198*
Локальная	*0.776929*	*105.247*	*6.81835*

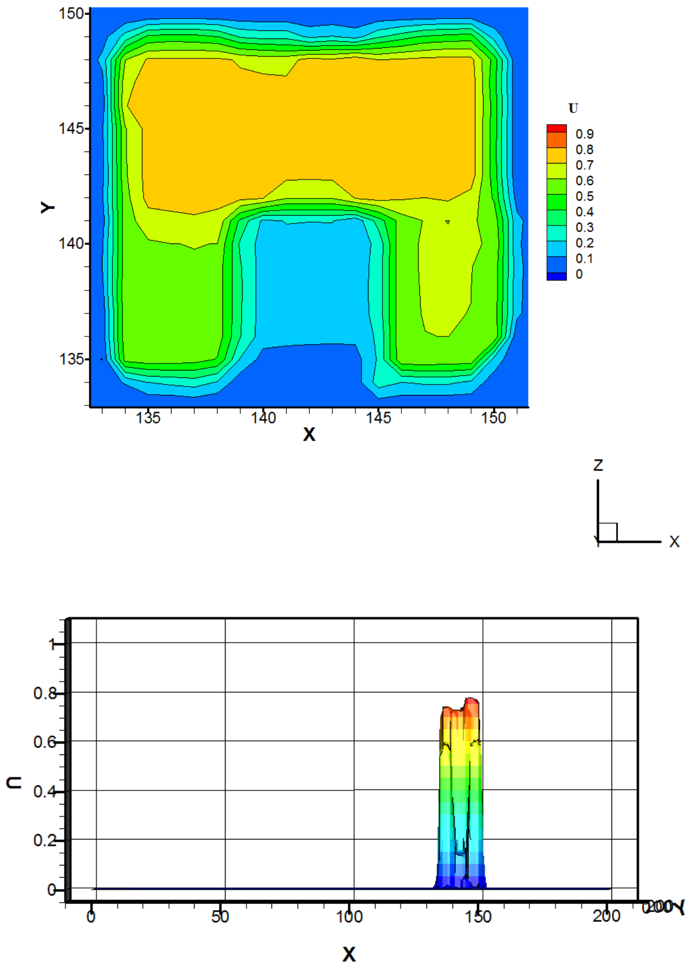

Рис. 12 Тест «буква М» на момент времени $t_{fin} = 120$

Тесты для схемы с центральными разностями

Будем при аппроксимации потоков использовать центральную разность, проведём аналогичные расчёты.

Тест «конус»

Для «конуса» получаем следующие значения норм (значения параметра α и числа Куранта прежние):

Таблица 6

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*0.40745*	*2336.52*	*13.442*
Локальная	*0.389485*	*31.3716*	*1.79619*

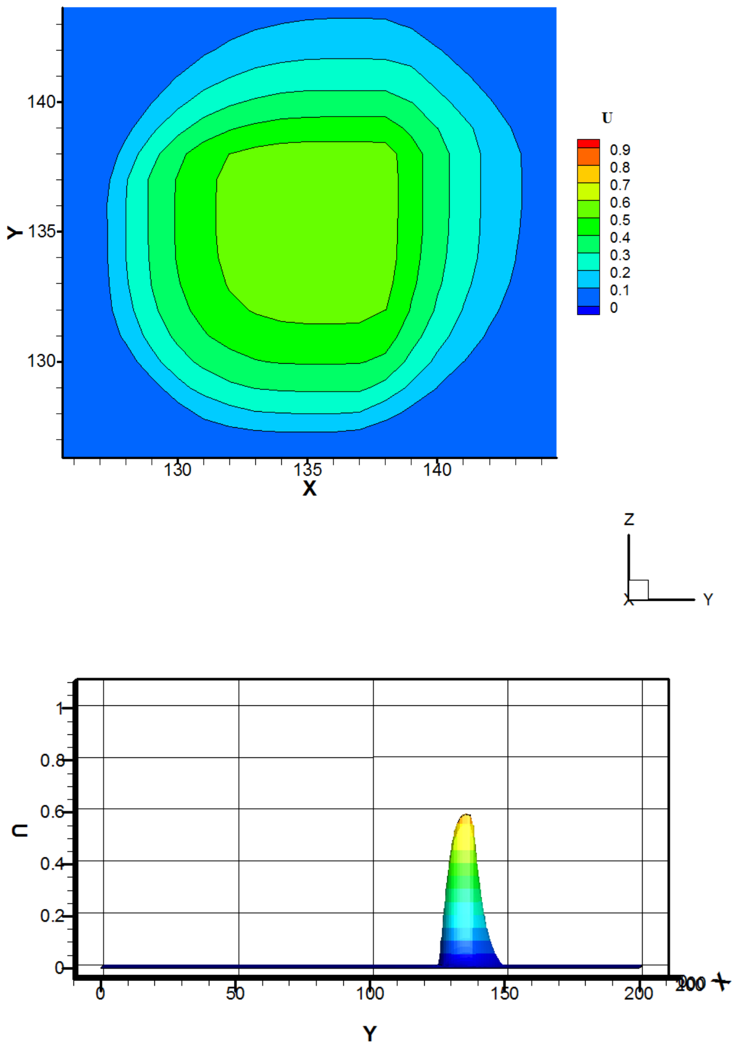

Рис. 13 Тест «конус» на момент времени $t_{fin} = 120$

На рис. 13 видно, что в процессе расчёта происходит диссипация решения.

Тест «конус без сектора»

Для конуса без сектора также наблюдается сильное падение амплитуды, начальный профиль «размывается».

Таблица 7

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*0.8562*	*3664.9*	*24.9678*
Локальная	*0.511313*	*43.6331*	*2.76011*

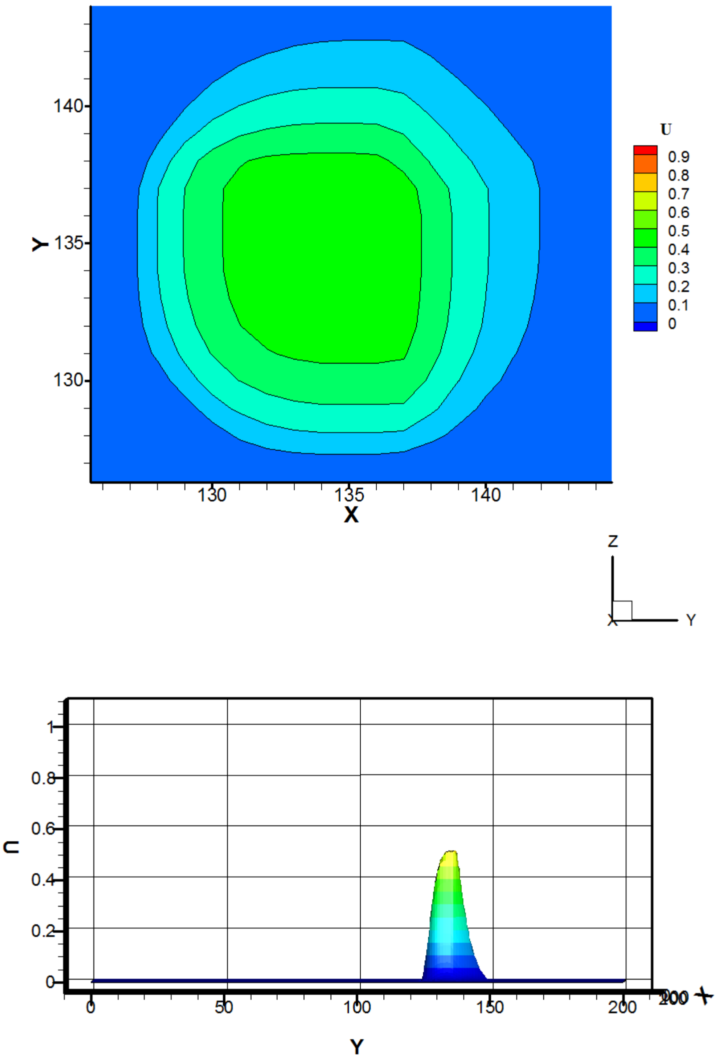

Рис. 14 Тест «конус без сектора» на момент времени $t_{fin} = 120$

Тест «буква М»

При начальном профиле «М» наблюдается сильное «размазывание» решения, значительное уменьшение амплитуды.

Таблица 8

Норма	C	L_1	L_2
Интегральная	*0.994375*	*16663.9*	*80.0625*
Локальная	*0.832268*	*162.598*	*7.89453*

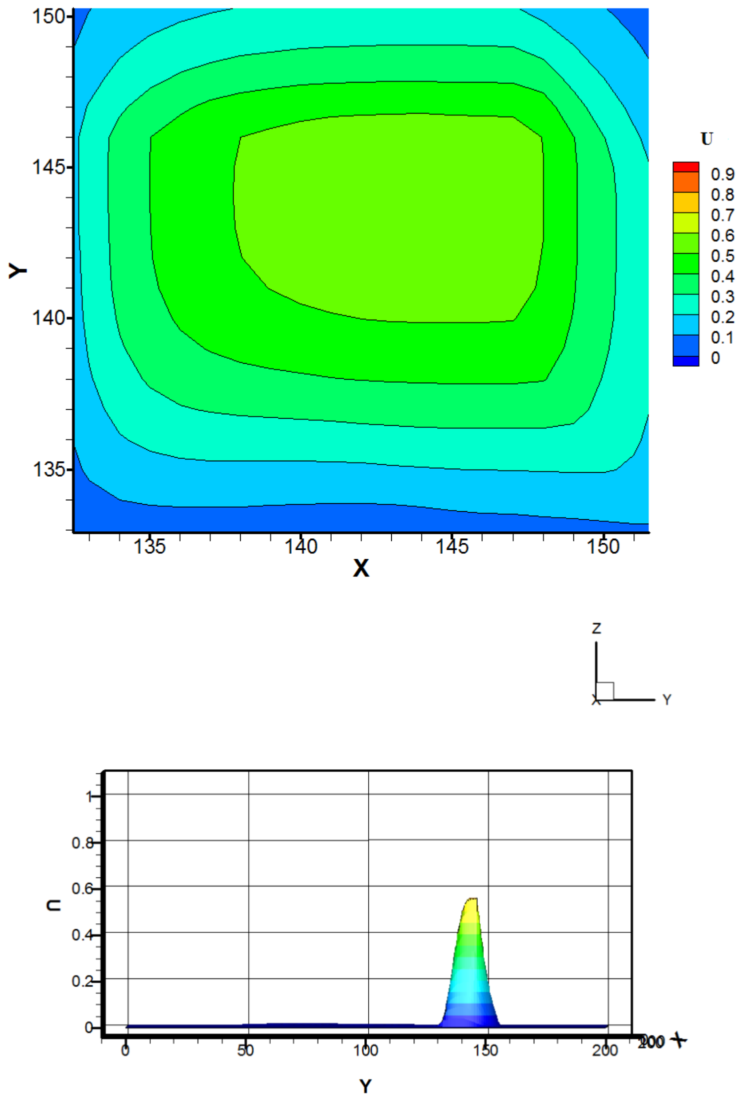

Рис. 15 Тест «М» на момент времени $t_{fin} = 120$

При использовании варианта аппроксимации потоков с центральной разностью, начальный профиль становится колоколообразным, амплитуда сильно уменьшается. При аппроксимации потоков с использованием разности вперёд начальные профили сохраняют форму, амплитуда понижается слабее.

Сравним полученные результаты с вышеперечисленными схемами из [3]. При использовании схемы с направленными разностями и схемы П. Лакса для любых формах поверхности начального условия наблюдается «размазывание» численного решения на достаточно большое число интервалов разностной сетки и уменьшение его амплитуды. Результаты, полученные в данной работе для схемы с вариантом аппроксимации потоков с использованием разности вперёд, близки к результатам схемы с «лимитерами». Ниже приведём значения норм. Табл. 9 содержит значения для начального профиля «конус», результаты для профилей «конус без сектора» и «буква М» представлены в табл. 10 и табл. 11 соответственно.

Таблица 9

Норма	C		L_1		L_2	
	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»
Интегральная	0.492662	0.45	5956.67	5704.77	29.8267	35.73
Локальная	0.420144	0.43	61.5856	54.47	3.10825	3.67

Таблица 10

Норма	C		L_1		L_2	
	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»
Интегральная	0.874428	0.87	5760.59	4719.94	32.8994	33.28
Локальная	0.719869	0.85	54.781	48.29	3.34619	3.67

Таблица 11

Норма	C		L_1		L_2	
	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»	АИВ	«лимитеры»
Интегральная	0.993475	0.96	10522.4	7914.47	69.5198	56.87
Локальная	0.776929	0.91	105.247	72.48	6.81835	5.35

Заключение

1. Построенные схемы для уравнения переноса обладают свойством консервативности.
2. Разностные операторы градиента и дивергенции для построенных схем являются самосопряженными.
3. Результаты тестовых расчётов для схемы, построенной с использованием разности вперёд, оказались близки к аналогичным значениям для схемы с «лимитерами». Численные решения, полученные по схеме, построенной с использованием центральной разности, существенно уступают по точности схеме, использующей разность вперёд.

Приложение 1

1. Схема с направленными разностями

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} - \frac{\tau}{h_x}\left(\tilde{\tilde{a}}_{1_{ij}}^{n} u_{ij}^{n} - \tilde{\tilde{a}}_{1_{i-1j}}^{n} u_{i-1j}^{n}\right) - \frac{\tau}{h_x}\left(\tilde{a}_{1_{i+1j}}^{n} u_{i+1j}^{n} - \tilde{a}_{1_{ij}}^{n} u_{ij}^{n}\right) -$$

$$-\frac{\tau}{h_y}\left(\tilde{\tilde{a}}_{2_{ij}}^{n} u_{ij}^{n} - \tilde{\tilde{a}}_{2_{ij-1}}^{n} u_{ij-1}^{n}\right) - \frac{\tau}{h_y}\left(\tilde{a}_{2_{ij+1}}^{n} u_{ij+1}^{n} - \tilde{a}_{2_{ij}}^{n} u_{ij}^{n}\right)$$

$$\tilde{\tilde{a}}_{1_{ij}}^{n} = 0.5\left(a_{1_{ij}}^{n} + \left|a_{1_{ij}}^{n}\right|\right), \tilde{a}_{1_{ij}}^{n} = 0.5\left(a_{1_{ij}}^{n} - \left|a_{1_{ij}}^{n}\right|\right)$$

$$\tilde{\tilde{a}}_{2_{ij}}^{n} = 0.5\left(a_{2_{ij}}^{n} + \left|a_{2_{ij}}^{n}\right|\right), \tilde{a}_{2_{ij}}^{n} = 0.5\left(a_{2_{ij}}^{n} - \left|a_{2_{ij}}^{n}\right|\right)$$

2. Схема Лакса [4]
   Применяется расщепление по координатам, по каждому направлению решается одномерная задача.

$$u_{ij}^{n+1} = \tilde{u}_{ij}^{n} - 0.5\frac{\tau}{h_x}\left(a_{1_{i+1j}}^{n} u_{i+1j}^{n} - a_{1_{i-1j}}^{n} u_{i-1j}^{n}\right) -$$

$$-0.5\frac{\tau}{h_y}\left(a_{1_{ij+1}}^{n} u_{ij+1}^{n} - a_{1_{ij-1}}^{n} u_{ij-1}^{n}\right)$$

$$\tilde{u}_{ij}^{n} = 0.25(u_{i+1j}^{n} + u_{i-1j}^{n} + u_{ij+1}^{n} + u_{ij-1}^{n})$$

3. Схема с «лимитерами» [5]

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n} - \frac{\tau}{h_x}\left(h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+0.5\frac{\tau}{h_x}\left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^{-}\left(h_{i+\frac{1}{2}} - f(u_i)\right) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{-}\left(h_{i-\frac{1}{2}} - f(u_{i-1})\right)\right) -$$

$$-0.5\frac{\tau}{h_x}\left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^{+}\left(f(u_{i+1}) - h_{i+\frac{1}{2}}\right) - \alpha_{i-\frac{1}{2}}^{+}\left(f(u_i) - h_{i-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$h_{i+\frac{1}{2}} = h(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} \min\limits_{u_i \le u \le u_{i+1}} f(u), \text{при } u_i < u_{i+1} \\ \max\limits_{u_{i+1} \le u \le u_i} f(u), \text{ при } u_i \ge u_{i+1} \end{cases}$$

$$\alpha_{i\pm\frac{1}{2}}^{\mp} = \alpha(R_{i\pm\frac{1}{2}}^{\mp})$$

$$R_{i-\frac{1}{2}}^{-} = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - f(u_i)}{h_{i-\frac{1}{2}} - f(u_{i-1})}, \; R_{i+\frac{1}{2}}^{+} = \frac{f(u_i) - h_{i-\frac{1}{2}}}{f(u_{i+1}) - h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & R \le 0 \\ \dfrac{\big(a + b(1-\delta)\big)R}{(a+b)(1-\delta)}, & 0 < R < 1-\delta \\ \dfrac{a + bR}{a+b}, & |R-1| \le \delta, a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\big(a + b(1-\delta)\big)R - 2a\delta}{(a+b)(1-\delta)}, & 1+\delta < R < 2 \\ 2, & R \ge 2 \end{cases}$$

Список литературы

1. Попов И. В., Тимофеева Ю. Е. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015, № 39, 24 с, URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-39
2. Попов И. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М., Красанд, 2015, 288 с.
3. Галанин М. П., Еленина Т. Г. Нелинейная монотонизация схемы К. И. Бабенко («квадрат») для уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2002, № 4, 26 с, URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-4
4. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Математическое моделирование плазмы. М., Наука, 1982, 319 с.
5. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Квазимонотонные разностные схемы повышенного порядка точности // М.: Препринт ИПМ АН СССР, 1987, №36, 27 с.