ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 37 за 2015 г.

Пустыльников Л.Д.

О гипотезе квантового хаоса и обобщённых цепных дробях

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д. О гипотезе квантового хаоса и обобщённых цепных дробях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 37. 12 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-37

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Л. Д. Пустыльников

О гипотезе квантового хаоса и обобщённых цепных дробях

Москва — 2015

УДК 511.41
Лев Давидович Пустыльников
О гипотезе квантового хаоса и обобщённых цепных дробях. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2015

Дано доказательство гипотезы квантового хаоса для широкого класса систем, включающего как частный случай модель вращающейся частицы, находящейся под действием коротких толчков; распределение модулей расстояний между соседними уровнями энергии близко к закону распределения Пуассона и отличается от него членами третьего порядка малости. При этом оценка остаточного члена основана на новой теории обобщённых цепных дробей для векторов.
Ключевые слова: цепная дробь, квантовый хаос.

Lev Davidovich Pustyl'nikov
On the quantum chaos conjecture and generalized continued fractions

The proof of the quantum chaos conjecture for a broad class of quantum systems including the „kicked rotator“ model as a special case is given; the distribution of absolute values of distances between adjacent energy levels is close to Poisson distribution and differs from it by a third order of smallness. The estimate of the remainder term is based on the new theory of generalized continued fractions for vectors.

Key words: continued fraction, quantum chaos.

Оглавление

Введение 3
1 Описание модели и доказательство гипотезы квантового хаоса 4
2 Обобщённые цепные дроби и их свойства 6
3 Оценка распределения энергетических уровней 8
Список литературы 11

Введение

В данной работе дано строгое обоснование гипотезы квантового хаоса, которая была поставлена М. Берри и М. Табор в [1–3]. Гипотеза состоит в том, что для многих квантовых систем распределение расстояний между соседними уровнями энергии близко к закону распределения Пуассона с плотностью к $\mathrm{const}\exp(-\tau)$. Впервые эта гипотеза была доказана в $[4, 5, 11]$ для одного класса квантовых систем, включающего как частный случай модель вращающейся частицы, находящейся под действием коротких толчков, периодически зависящих от времени и фазы („kicked rotator“, [6–10]). Эта система периодически зависит от времени, и для таких систем существует понятие энергии [14], которая представляет собой мнимую часть логарифма спектра оператора монодромии (Флоке) для уравнения Шредингера. В частном случае, когда величина толчка одна и та же при всех значениях фазы, спектр оператора монодромии — дискретный, и можно говорить о соседних уровнях энергии, которые соответствуют состояниям с соседними частотами колебаний. В общем случае, когда зависимость величины толчка от фазы существует, также можно ввести соседние уровни энергии как функции от фазы, которые в указанном частном случае становятся константами. Эти функции хорошо известны и исследовались (см. например, $[7, 9]$). Таким образом, для того чтобы выявить квантовый хаос, необходимо ввести понятие расстояния между соседними уровнями энергии, которые в работах $[4, 5]$ определяются с помощью вещественных функций

$$\beta_k(\phi) = \bigl\{-\bigl(\ln\lambda_k(\phi)\bigr)/(2\pi i)\bigr\},$$

где $k = 1,2,\ldots$ — натуральное число, ϕ — фаза, $\lambda_k(\phi)$ — обобщённое собственное значение оператора монодромии, а фигурные скобки обозначают дробную часть числа внутри этих скобок. При этом уровни $\beta_k(\phi)$ и $\beta_{k+1}(\phi)$ являются соседними. Можно дать два естественных определения расстояния между уровнями энергии $\beta_k(\phi)$ и $\beta_{k+1}(\phi)$.

Первое расстояние $\Delta'(\phi)$ задаётся равенством

$$\Delta'(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi),$$

тогда как второе расстояние $\Delta''(\phi)$ задаётся равенством

$$\Delta''(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigl|\beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi)\bigr|.$$

Расстояние $\Delta'(\phi)$ используется в работах $[4, 5]$, тогда как расстояние $\Delta''(\phi)$ применяется в настоящей работе.

1. Описание модели и доказательство гипотезы квантового хаоса

Здесь дадим описание модели и доказательство гипотезы квантового хаоса в случае, когда расстояние между соседними уровнями энергии задаётся функцией $\Delta''(\phi)$.

Рассмотрим одномерный нелинейный осциллятор, задаваемый функцией Гамильтона $H = H(\phi, I, t) = H_0(I) + H_1(\phi, t)$:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{dH_0}{dI}, \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial H_1}{\partial \phi}, \tag{1}$$

где I, ϕ — переменные „действие угол“, t — независимая переменная, а функция $H_1(\phi, t)$ имеет период 2π по ϕ, период $T > 0$ по t и представляется в виде

$$H_1(\phi, t) \equiv F(\phi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \tag{2}$$

где $F(\phi)$ — гладкая 2π-периодическая функция, $\delta = \delta(t)$ — дельта-функция, а суммирование распространено на все целые числа k. Первые строгие результаты о поведении решений системы (1) для функции $H_0(I)$ общего вида получены в [10]. Здесь же мы предполагаем, что $H_0(I) = \sum\limits_{s=0}^{n} b_s I^s$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с коэффициентами $b_s = a_s/\hbar^s$ $(s = 0, \ldots, n)$, где $\hbar$ — постоянная Планка, а a_s — вещественные числа. В частном случае, когда $n = 2$, $a_0 = a_1 = 0$, система (1) есть „kicked rotator“ [6–10].

Введём гильбертово пространство L^2 комплексных 2π-периодических функций по ϕ как пространство состояний квантовой системы и оператор импульса $\hat{I} = \big(\hbar/i\big)\partial/\partial\,\phi$. Изменение волновой функции $\Psi = \Psi(\phi, t) \in L^2$ описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\phi, t) = \hat{H}(t)\Psi(\phi, t), \tag{3}$$

где i — мнимая единица, оператор $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$, $\hat{H}_0 = \sum\limits_{s=0}^{n} b_s \hat{I}^s$, а $\hat{H}_1(t)$ есть предел при $\varepsilon \to 0$ операторов умножения на функцию $H_1^{(\varepsilon)}$, которая получается из функции H_1 в (2), если δ-функцию заменить на гладкую функцию δ_ε, сосредоточенную на отрезке $[0, \varepsilon]$, интеграл которой равен 1. Обозначим через $\Psi_+(\phi, nT)$ решение уравнения (3) сразу после момента $t = nT$ и введём оператор монодромии (Флоке)

$$\mathscr{U}\colon \Psi_+(\phi, nT) \to \Psi_+\big(\phi, (n+1)T\big).$$

Лемма 1 ([6, 9])**.** *Оператор* $\mathscr{U}$ *имеет вид*

$$\mathscr{U} = \exp(-iF/\hbar)\exp(-iT\hat{H}_0/\hbar),$$

где $\exp(-iF/\hbar)$ *— оператор умножения на функцию* $\exp(-iF/\hbar)$*.*

Лемма 2. *При* $k \in \mathbb{Z}$ *рассмотрим функцию* $e_k(\phi) = \exp(ik\phi) \in L^2$*. Тогда* $\mathscr{U}e_k(\phi) = \lambda_k(\phi)e_k(\phi)$*, где*

$$\lambda_k(\phi) = \exp\left(-i\big(F(\phi) + T\sum_{s=0}^{n} a_s k^s\big)/\hbar\right).$$

Доказательство. Из определения коэффициентов b_s ($s = 0, \ldots, n$) многочлена $H_0(I)$ и операторов $\hat{I}$, $\hat{H}_0$ следует, что $\hat{H}_0 = \sum\limits_{s=0}^{n}(-i)^s a_s \mathscr{D}^s$, где оператор $\mathscr{D} = \dfrac{\partial}{\partial\phi}$. Поэтому, разлагая оператор $\exp\big(-iT\hat{H}_0/\hbar\big)$ в ряд Тейлора и применяя каждый член этого разложения к функции $e_k(\phi)$, получим утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана. ■

Определение 1. Функции $e_k(\phi)$ называются обобщёнными собственными функциями, а функции $\lambda_k(\phi)$ — их обобщёнными собственными значениями.

Замечание 1. Если $F(\phi) = \mathrm{const}$, то $e_k(\phi)$ — обычные собственные функции оператора $\mathscr{U}$, а $\lambda_k(\phi)$ — их собственные значения.

Обозначение. Символ $\{x\}$ есть дробная часть числа x.

Определение 2. Следуя [14], величина

$$\beta_k(\phi) = \big\{-\big(\ln\lambda_k(\phi)\big)/(2\pi i)\big\},$$

называется k-уровнем энергии системы (3).

Определение 3. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ k-уровень и $(k+1)$-уровень называются соседними.

Замечание 2. Смысл определения 3 состоит в том, что функции $e_k(\phi)$ и $e_{k+1}(\phi)$ соответствуют квантовым состояниям, между частотами колебаний $\gamma_k = \dfrac{k}{2\pi}$, $\gamma_{k+1} = \dfrac{k+1}{2\pi}$ которых нет других частот состояний $e_s(\phi)$ при $s \neq k, k+1$.

Далее будет сформулирована и доказана теорема 1, в которой дано обоснование гипотезы квантового хаоса, когда расстояние между соседними уровнями энергии определяется с помощью функции $\Delta''(\phi)$ (введение).

Теорема 1. *Предположим, что среди чисел* $(Ta_2)/(2\pi\hbar)$, $\ldots, (Ta_n)/(2\pi\hbar)$ *хотя бы одно число — иррациональное,* $0 < \sigma \leqslant 1$, N *— натуральное число,* $\mathscr{D}_N(\phi,\sigma)$ *— количество чисел* k *среди чисел* $1, \ldots, N$ *таких,* *что* $\left|\beta_{k+1}(\phi)-\beta_k(\phi)\right| < \sigma$. *Тогда при любом* ϕ *существует предельная функция распределения* $P(\sigma) = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\mathscr{D}_N(\phi,\sigma)}{N}$, *независимая от* ϕ, *которая имеет вид* $P(\sigma) = 2\sigma - \sigma^2$ *и отличается от функции распределения* $\hat{P}(\sigma) = 2-2\exp(-\sigma)$ *закона Пуассона с плотностью* $2\exp(-\sigma)$ *членами третьего порядка малости относительно* σ.

Доказательство. Согласно лемме 2 и определению 2 $\beta_k(\phi)$

$$\beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) = \{b_\phi(k+1)\} - \{b_\phi(k)\},$$

где $b_\phi(k)$ — значение в точке $x = k$ многочлена

$$b_\phi(x) = \sum_{s=0}^{n} \tilde{a}_s x^s,$$

с коэффициентами

$$\tilde{a}_0 = \frac{F(\phi) + Ta_0}{2\pi\hbar}, \quad \tilde{a}_s = \frac{Ta_s}{2\pi\hbar}, \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Поэтому величина $\mathscr{D}_N(\phi,\sigma)$, введённая в формулировке теоремы 1, есть количество $\hat{\mathscr{D}}_N(\phi,\sigma)$ чисел k среди чисел $1,\ldots,N$ таких, что $\left|\{b_\phi(k+1)\} - \{b_\phi(k)\}\right| < \sigma$. Если выполнено условие теоремы 1, то среди коэффициентов $\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n$ многочлена $b_\phi(x)$ хотя бы одно число — иррациональное. Теперь утверждение теоремы 1 следует из равенства $\lim\limits_{N\to\infty} \hat{\mathscr{D}}_N(\phi,\sigma)/N = 2\sigma - \sigma^2$, которое доказано в [13, теорема II]. ■

2. Обобщённые цепные дроби и их свойства

Обозначения

1) $\mathbb{R}_n$ — n-мерное вещественное линейное пространство.

2) $\mathbb{T}_n$ — n-мерный тор. Здесь

$$\mathbb{T}_n = \{y_1,\ldots,y_n : 0 \leqslant y < 1, \ldots, 0 \leqslant y_n < 1\}.$$

3) mes — мера Лебега на $\mathbb{T}_n$.

4) Для вещественного числа x символ $\{x\}$ обозначает дробную часть x, а символ $[x]$ — целую часть x.

5) Для вектора $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}_n$ символ $\{x\}$ обозначает вектор $\{x\} = (\{x_1\},\ldots,\{x_n\})$ с координатами $\{x_s\}$, $1 \leqslant s \leqslant n$, а символ $[x]$ обозначает вектор $[x] = ([x_1],\ldots,[x_n])$ с координатами $[x_s]$, $1 \leqslant s \leqslant n$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, A — взаимно-однозначное отображение $\mathbb{R}_n$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{T}_n$. Представим x в виде обобщённой цепной дроби, отвечающей отображению A и вектору ω, которую мы будем называть (A, ω)-цепной дробью.

Будем обозначать (A, ω)-цепную дробь вектора x в виде $x = [q^{(0)}, \ldots, q^{(m)}]_{A,\omega}$, если она конечная, и в виде $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots]_{A,\omega}$, если она бесконечная. Пусть $q^{(0)} = (q_1^{(0)}, \ldots, q_n^{(0)})$ — вектор, такой, что при $s = 1, \ldots, n$, $q_s^{(0)} = [x_s]$. Полагаем $x = x^{(0)} = q^{(0)} + \delta^{(0)}$. Если $\delta^{(0)} = \omega$, то процесс построения цепной дроби на этом заканчивается и $x = [q^{(0)}]_{A,\omega}$. Если же $\delta^{(0)} \neq \omega$, то полагаем $x^{(1)} = A\delta^{(0)}$.

Предположим теперь, что при некотором $k \geqslant 0$ построены n-мерные вектора $q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots, q^{(k)}$ с целочисленными координатами и n-мерные вектора $x^{(0)}, \ldots, x^{(k+1)}$, такие, что при $s = 0, \ldots, k$ $x^{(s)} = q^{(s)} + \delta^{(s)}$ и $\delta^{(s)} \neq \omega$. Пусть $q^{(k+1)} = (q_1^{(k+1)}, \ldots, q_n^{(k+1)})$ — такой вектор, что $q_\nu^{(k+1)} = [x_\nu^{(k+1)}]$ при $\nu = 1, \ldots, n$, и полагаем $x^{(k+1)} = q^{(k+1)} + \delta^{(k+1)}$. Если $\delta^{(k+1)} = \omega$, то процесс построения (A, ω)-цепной дроби заканчивается и $x = [q^{(0)}, \ldots, q^{(k+1)}]_{A,\omega}$. Если же $\delta^{(k+1)} \neq \omega$, то полагаем $x^{(k+2)} = A\delta^{(k+1)}$. Если $\delta^{(k)} \neq \omega$ для всех $k \geqslant 0$, то $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots]_{A,\omega}$ и (A, ω)-цепная дробь вектора x — бесконечная. Представление вектора x в виде (A, ω)-цепной дроби полностью описано. Из конструкции (A, ω)-цепной дроби следует, что достаточно иметь отображение $A\colon \mathbb{T}_n \setminus \omega \to \mathbb{R}$. В частном случае, когда x — число ($n = 1$), $\omega = 0$, а $A = \Gamma$ — отображение множества $\mathbb{T}_1 \setminus 0$, имеющие вид $\Gamma\colon y \to \dfrac{1}{y}$, (A, ω)-цепная дробь совпадает с обычной цепной дробью [15]. Далее, рассмотрим пример отображения A, для которого описанная конструкция представляет интерес для квантового хаоса.

Пример: Пусть $n > 1$, а отображение A имеет вид $A\colon y = (y_1, \ldots, y_n) \to y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$, где

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 + \varkappa_1, \\ y'_\nu &= y_\nu + \varkappa_\nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} a_{\nu j} y_j, \quad (\nu = 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

$\varkappa_1$ — иррациональное число, $a_{\nu j}$ — целые числа, $a_{\nu j} \neq 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что отображение A имеет вид, как в примере.

Определение. Введём отображение $\bar{A}$ тора $\mathbb{T}_n$, которое совпадает с отображением A, и равенства для y'_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) в примере рассматриваются как сравнения по модулю 1.

Определение. $\hat{A}$ — отображение тора $\mathbb{T}_n$, обратное к отображению $\bar{A}$.

Теорема 2. *(A,ω)-цепная дробь вектора x — конечная тогда и только тогда, когда вектор $\{x\}$ принадлежит траектории $\hat{A}^k\omega$ ($k = 0,1,\ldots$), где $\hat{A}^k$ — k-тая степень $\hat{A}$, а $\hat{A}^0$ — тождественное отображение тора $\mathbb{T}_n$.*

Доказательство теоремы 2 дано в [12, Theorem 1].

Определение. Пусть $x = [q^{(0)}, q^{(1)}, \ldots]_{A,\omega}$ — бесконечная (A,ω)-цепная дробь вектора x. При $\nu = 0,1,\ldots$ введём (A,ω)-подходящие дроби $S^{(\nu)} = [q^{(0)},\ldots,q^{(\nu)}]_{A,\omega}$ вектора x следующим образом:

$$\begin{gathered} S^{(0)} = q^{(0)} + \omega, \\ S^{(\nu)} = q^{(0)} + \big(\ldots\big(q^{(\nu-2)} + A^{-1}(q^{(\nu-1)} + \\ + A^{-1}(q^{(\nu)} + \omega))\big)\ldots\big), \quad \nu > 0, \end{gathered}$$

где A^{-1} — отображение, обратное к A, правая часть последнего равенства обозначает конечную итерационную процедуру, состоящую из ν шагов, в которой на первом шаге находится величина $S^{(\nu)}(1) = q^{(\nu-1)} + A^{-1}(q^{(\nu)} + \omega)$, а при целом k, удовлетворяющем условию $1 < k \leqslant \nu$, на k-том шаге находится $S^{(\nu)}(k) = q^{(\nu-k)} + A^{-1}S^{(\nu)}(k-1)$ и затем полагается $S^{(\nu)} = S^{(\nu)}(\nu)$.

Теорема 3. *Пусть (A,ω)-цепная дробь вектора x — бесконечная, и $S^{(\nu)}$ ($\nu = 0,1,\ldots$) — (A,ω)-подходящие дроби вектора x. Тогда $\{x\}$ — предельная точка последовательности $\{S^{(\nu)}\}$.*

Доказательство теоремы 3 дано в [12, Theorem 5].

3. Оценка распределения энергетических уровней

Далее будут сформулированы две теоремы 4 и 5, которые используют множество Γ_ρ на торе $\mathbb{T}_n$, введённое в [5] (§ 3, определение 7); и преобразование A, введённое в [5, § 4].

Теорема 4. *Предположим, что число $Ta_n/\big(2\pi(n+1)\hbar\big)$ — иррациональное, $0 < \sigma \leqslant 1$, N — натуральное, $0 < \rho < \dfrac{1}{2}$, $\rho_1 = (1+6\rho)/(10-4\rho)$, $n_0 = 2+10/(1-2\rho_1)$, $a^* = (a_1^*,\ldots,a_n^*)$ — вектор с координатами $a_s^* = Ta_{s-1}/\big(2\pi\hbar s\big)$ ($s = 1,\ldots,n$), $\mathscr{D}_N^+(\phi,\sigma)$ — количество таких $k \in \{1,\ldots,N\}$, что $0 \leqslant \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) < \sigma$. Тогда, если $n > n_0$, то выполняются следующие утверждения:*

1) если существует такое $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$, что (A,ω)-цепная дробь вектора a^* конечная и имеет вид $a^* = [q^{(0)},\ldots,q^{(\nu)}]_{A,\omega}$, то для любого $\varepsilon > 0$, такого, что $0 < \varepsilon < \sigma$, и $N \geqslant 2$,

$$\left|\frac{\mathscr{D}_N^+(\phi,\sigma)}{N} - \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right| \leqslant 4\varepsilon + \frac{c_1(c_2+\nu)}{N^{\rho}\varepsilon}, \tag{4}$$

где $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n)$ — константы, не зависящие от N, σ, ε, $a_0, \ldots, a_n$ и от функции $F(\phi)$;

2) для любого a_0 множество векторов $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}_{n-1}$, для которых справедливы (4) *и равенство $a^* = [q^{(0)}, \ldots, q^{(\nu)}]_{A,\omega}$, имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;*

3) если при $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$ вектор $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$ разлагается в бесконечную (A, ω)-цепную дробь и для некоторого $\nu \geqslant 0$ $S^{(\nu)} = \bigl(S_1^{(\nu)}, \ldots, S_n^{(\nu)}\bigr) = [q^{(0)}, \ldots, q^{(\nu)}]_{A,\omega}$ — такая (A, ω)-подходящая дробь вектора a^*, что при $\delta = 1,2$ координаты векторов $b^{(\delta)} = \bigl(b_1^{(\delta)}, \ldots, b_{n-\delta}^{(\delta)}\bigr) = B^{(\delta)} I^{(\delta)}\bigl(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\}\bigr)$ (*отображение $I^{(\delta)}$ и матрица $B^{(\delta)}$ для $\delta = \nu$ введены в* [5, § 3]) *удовлетворяют неравенствам $b_s^{(\delta)} \leqslant q^{-s-\rho_1-2} \big/ \bigl(2\pi(n-\delta)\bigr)$* ($s = 1, \ldots, n-\delta$)*, то оценка* (4) *справедлива при $2 \leqslant N \leqslant q$;*

4) утверждение 3) справедливо при сколь угодно большом числе q.

Теорема 4 доказана в [5] (теорема 6). Её доказательство существенно использует теоремы 2 и 3 настоящей работы. Далее будет сформулирована и доказана теорема 5, которая даёт оценку распределения энергетических уровней в случае, когда расстояние между уровнями определяется с помощью функции $\Delta''(\phi)$ (см. введение). Пусть N — натуральное число.

Определения и обозначения.

Введём функции $\mathscr{D}_N^+(\phi, \sigma)$, $\mathscr{D}_N^-(\phi, \sigma)$ и $\mathscr{D}_N(\phi, \sigma)$ следующим образом.
$\mathscr{D}_N^+(\phi, \sigma)$ — количество таких $k \in \{1, \ldots, N\}$, что $0 \leqslant \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) < \sigma$;
$\mathscr{D}_N^-(\phi, \sigma)$ — количество таких $k \in \{1, \ldots, N\}$, что $0 > \beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi) > -\sigma$;
$\mathscr{D}_N(\phi, \sigma)$ — количество таких $k \in \{1, \ldots, N\}$, что $0 \leqslant |\beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi)| < \sigma$.

Теорема 5. *Предположим, что число $\dfrac{Ta_n}{2\pi(n+1)\hbar}$ — иррациональное, $0 < \sigma \leqslant 1$, N — натуральное, $0 < \rho < \dfrac{1}{2}$, $\rho_1 = \dfrac{1+6\rho}{10-4\rho}$, $n_0 = 2 + \dfrac{10}{1-2\rho_1}$, $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$ — вектор с координатами $a_s^* = \dfrac{Ta_{s-1}}{2\pi s\hbar}$,* ($s = 1, \ldots, n$)*, $\mathscr{D}_N(\phi, \sigma)$ — количество таких $k \in \{1, \ldots, N\}$, что $|\beta_{k+1}(\phi) - \beta_k(\phi)| < \sigma$. Тогда, если $n > n_0$, то выполняются следующие утверждения:*

1) если существует такое $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$, что (A, ω)-цепная дробь вектора a^* — конечная и имеет вид

$$a^* = [q^{(0)}, \ldots, q^{(n)}]_{A,\omega}, \tag{5}$$

то для любого $\varepsilon > 0$, такого, что $0 < \varepsilon < \sigma$, и $N \geqslant 2$

$$\left| \frac{\mathscr{D}_N(\phi, \sigma)}{N} - (2\sigma - \sigma^2) \right| \leqslant 8\varepsilon + 2\frac{c_1(c_2 + \nu)}{N^{\rho}\varepsilon}, \tag{6}$$

где $c_1 = c_1(n)$, $c_1 = c_2(n)$ — константы, не зависящие от N, σ, ε, $a_0, \ldots, a_n$ и от функции $F(\phi)$;

2) для любого a_0 множество векторов $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}_{n-1}$, для которых справедливы (5) *и* (6)*, имеет в $\mathbb{R}_{n-1}$ дополнение нулевой лебеговой меры;*

3) если при $\omega \in \Gamma_{\rho_1}$ вектор a^* разлагается в бесконечную (A, ω)-цепную дробь и для некоторого $\nu \geqslant 0$ $S^{(\nu)} = (S_1^{(\nu)}, \ldots, S_n^{(\nu)}) = [q^{(0)}, \ldots, q^{(\nu)}]_{A,\omega}$ — такая (A, ω)-подходящая дробь вектора a^*, что при $\delta = 1{,}2$ координаты векторов $b^{(\delta)} = (b_1^{(\delta)}, \ldots, b_{n-\delta}^{(\delta)}) = B^{(\delta)} I^{(\delta)}(\{a^*\} - \{S^{(\nu)}\})$ (*отображение $I^{(\delta)}$ и матрица $B^{(\delta)}$ для $\delta = \nu$ введены в* [5], § 3) *удовлетворяют неравенствам $b_s^{(\delta)} \leqslant \dfrac{q^{-s-\rho_1-2}}{2\pi(n-\delta)}$* $(s = 1, \ldots, n-\delta)$*, то оценка* (6) *справедлива при $2 \leqslant N \leqslant q$;*

4) утверждение 3) справедливо при сколь угодно большом числе q.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{D}_N^+(\phi, \sigma) + \mathscr{D}_N^-(\phi, \sigma) = \mathscr{D}_N(\phi, \sigma).$$

Доказательство леммы 1 следует из определений функций $\mathscr{D}_N^+(\phi, \sigma)$, $\mathscr{D}_N^-(\phi, \sigma)$ и $\mathscr{D}_N(\phi, \sigma)$.

Далее, из теоремы 4 следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\mathscr{D}_N^+(\phi, \sigma)}{N} - \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right| \leqslant 4\varepsilon + \frac{c_1(c_2 + \nu)}{N^{\rho}\varepsilon},$$

а, нумеруя уровни $\beta_k(\phi)$ в обратном порядке по k, в силу теоремы 4 получим:

$$\left| \frac{\mathscr{D}_N^-(\phi, \sigma)}{N} - \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right| \leqslant 4\varepsilon + \frac{c_1(c_2 + \nu)}{N^{\rho}\varepsilon}.$$

Поэтому, складывая последние два неравенства, в силу леммы 1 имеем:

$$\left| \frac{\mathscr{D}_N(\phi, \sigma)}{N} - (2\sigma - \sigma^2) \right| \leqslant 8\varepsilon + \frac{2c_1(c_2 + \nu)}{N^{\rho}\varepsilon}. \tag{7}$$

Теперь заменяем в (7) константу $2c_1$ на c_1, и теорема 5 следует из (7) и теоремы 4.

Список литературы

[1] Berry M. V. and Tabor M. Level clustering in the regular spectrum // Proc. R. Soc. Lond. A. 1977. 356. P. 375–394.

[2] Косыгин Д. В., Минасов А. А. и Синай Я. Г. Статистические свойства спектра операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля // Успехи матем. наук. 1993. Т. 48. N 4. С. 3–130.

[3] Knauf A. Sinai Ya. G. Classical Nonintegrability, Quantum Chaos. Basel: Birkhauser. 1997. (DMV Seminar V. 27).

[4] Пустыльников Л. Д. Доказательство гипотезы квантового хаоса и обобщённые цепные дроби // УМН, Т. 57, вып. 1, (2002), 161–162.

[5] Пустыльников Л. Д. Гипотеза квантового хаоса и обобщённые цепные дроби // Матем. сборник (2003), 194:4, 107–118.

[6] Grempel D. R., Prange R. E. and Fishman S. Quantum dynamics of a nonintegrable system // Physical Review A. 1984. vol. 29. N 4. P. 1639–1647.

[7] Casati G., Guarneri I. Non-Recurrent Behaviour in Quantum Dynamics // Commun. Math. Phys. 1984. 95. P. 121–127.

[8] Chirikov B.V., Izrailev F.M. and Shepelyansky D.L. Quantum Chaos: Localization vs. Ergodicity // Physica D. 33. 1988. P. 77–88.

[9] Belissard J. Non Commutative Methods in Semiclassical Analysis, in the book „Transition to Chaos in Classical and Quantum Mechanics“. Editor: S. Graffi. Springer–Verlag. 1991, P. 1–47.

[10] Пустыльников Л. Д. Неограниченный рост переменной действия в некоторых физических моделях // Труды Мос. мат. общ. 1983. Т. 46. с. 187–200.

[11] Пустыльников Л. Д. Вероятностные законы в распределении дробных частей значений многочленов и обоснование гипотезы квантового хаоса // УМН. Т. 54. (1999). N 6. с. 173–174.

[12] Pustyl’nikov L. D. Generalized continued fractions and ergodic theory // Journal of Mathematical Sciences. 1999. T. 95. N 5. P. 2552–2553.

[13] Пустыльников Л. Д. Распределение дробных частей значений многочлена, суммы Вейля и эргодическая теория // УМН, Т. 48, (1993), N 4, с. 143–180.

[14] Зельдович Я. Б. Квазиэнергия квантовой системы, подвергающейся периодическому воздействию // ЖЭТФ. (1966). Т. 51. с. 1492–1495.

[15] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Гос.изд.физ-мат. литературы, 1961.