



Трофимов С.П.

Увод малых космических аппаратов с верхнего сегмента низких орбит с помощью паруса для увеличения силы светового давления

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Трофимов С.П. Увод малых космических аппаратов с верхнего сегмента низких орбит с помощью паруса для увеличения силы светового давления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 32. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-32>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

С.П. Трофимов

**Увод малых космических аппаратов
с верхнего сегмента низких орбит
с помощью паруса для увеличения
силы светового давления**

Москва — 2015

Трофимов С.П.

Увод малых космических аппаратов с верхнего сегмента низких орбит с помощью паруса для увеличения силы светового давления

Представлен экономичный способ увода малых спутников с верхнего сегмента низких орбит с помощью солнечного паруса за счет силы светового давления. Показано, что достигается значительный выигрыш в быстродействии в сравнении с традиционным способом увода – стабилизацией паруса по набегающему потоку. Исследуется вопрос устойчивости построенного квазипериодического режима углового движения аппарата с парусом по начальным данным и различным параметрам парусной системы.

Ключевые слова: увод с орбиты, малый спутник, солнечный парус, низкая орбита, давление солнечного излучения

Sergey Pavlovich Trofimov

Deorbiting of Low-Earth Orbit Spacecraft Using a Sail for Solar Radiation Pressure Force Augmentation

The efficient mechanism to deorbit a small satellite from low-earth orbits higher than 700 km using a sail augmenting the solar radiation pressure force is presented. It is shown that a dramatic gain in deorbit time is achieved in comparison with the common drag sail approach when the sail normal is stabilized along the satellite velocity vector direction. The issue of stability with respect to both initial conditions and sailcraft parameters is studied for the desired quasiperiodic attitude motion of a sailcraft.

Key words: deorbiting, small satellite, solar sail, low-earth orbit, solar radiation pressure

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 12-01-33045-мол_а_вед, 13-01-00665-а, 14-01-31313-мол-а.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Постановка задачи	4
Уравнения движения КА с парусом	6
Обеспечение квазигиперболоидальной прецессии КА	11
Численные результаты	20
Заключение	31
Литература	32

Введение

Проблема образования *космического мусора* – засорения околоземного космического пространства отработавшими срок и/или вышедшими из строя космическими аппаратами (КА), верхними ступенями ракет, другими разнообразными объектами антропогенной природы – стала очевидной после проведения Китаем в 2007 году теста с уничтожением спутника Фэньюнь-1С. Усугубило дело столкновение спутника связи Iridium-33 с уже давно не функционирующим советским военным спутником Космос-2251 в 2009 году. Опасность наступления *синдрома Кесслера*, достижения критической плотности мусора, которая вызывает цепную реакцию фрагментации, грозит остановить на долгое время дальнейшее освоение космического пространства человеком. Согласно прогнозам большинства специалистов, для самых загрязненных околоземных орбит – *низких солнечно-синхронных* и *геостационарной* – критический уровень плотности мусора будет превзойден уже к середине XXI века.

В 2002 году, по поручению *Комитета ООН по мирному использованию космического пространства, Межагентский координационный комитет по космическому мусору* подготовил список мер, направленных на ограничение техногенного засорения космоса. Предложения, выработанные согласованно с ведущими государствами-членами Комитета, включали, к примеру, 25-летнее ограничение на максимальное время жизни исчерпавших свой ресурс низкоорбитальных космических аппаратов и перевод геостационарных спутников на *орбиты захоронения*. Впоследствии национальные стандарты всех крупнейших космических держав были адаптированы в соответствии с этими предложениями.

Очевидно, что любые способы удаления с орбиты существующего космического мусора сложны с технической точки зрения и весьма дорогостоящи. Кроме того, они будут неэффективными в случае отсутствия тщательно продуманной и законодательно закрепленной программы, имеющей целью уменьшить загрязнение космоса отходами технологической деятельности человека. Можно с уверенностью констатировать тот факт, что разработка технологий *деорбитинга*, увода исчерпавших ресурс КА с орбиты, становится крайне актуальной и востребованной задачей сегодняшнего дня.

Особняком стоит проблема деорбитинга малых КА, возможности активного маневрирования которых (в том числе и для деорбитинга) отсутствуют либо минимальны. Количество выводимых на околоземные орбиты малых КА растет лавинообразно. Тем самым стимулируется создание новых систем управления движением с минимальным или даже нулевым потреблением топлива и/или энергии. Исполнительные органы таких систем управления должны быть компактными и легкими, чтобы удовлетворять жестким требованиям на допустимые габариты и массу, предъявляемым к малым аппаратам. В последние годы интенсивно разрабатываются и тестируются новые технические решения типа солнечного паруса, позволяющие наиболее эффективно использовать естественные внешние силы и уводить КА в пассивном или полупассивном режиме. В данной работе предлагается экономичный механизм увода КА с низких орбит световым давлением.

Постановка задачи

Господствующий подход к проблеме увода КА с низкой орбиты с помощью солнечного паруса предполагает его использование в роли атмосферного, то есть выставление паруса *по набегающему потоку* для увеличения аэродинамического сопротивления. В то же время на низких орбитах из верхнего сегмента (с высотой более 700 км) сила атмосферного торможения уступает силе светового давления. Для орбит выше 800 км они уже различаются по порядку величины. Естественно было бы в таком случае привлекать к деорбитингу именно силу светового давления. Ненулевая в среднем за виток проекция силы давления на направление, противоположное вектору скорости (для околокруговых орбит – на трансверсальное направление) позволит сильно ускорить процесс снижения орбиты на самом проблемном – начальном – этапе, когда атмосферная плотность очень низка. По мере дальнейшего спуска сопротивление атмосферы будет возрастать и в какой-то момент обеспечит пассивную стабилизацию паруса по набегающему потоку.

Еще более амбициозная задача – осуществить желаемые вековые изменения орбиты за счет светового давления при максимальной эксплуатации внешних моментов для реализации соответствующего режима углового движения. Если ввести *связанную с КА систему координат* $O\xi\eta\zeta$ (ССК) таким образом, что ось $O\xi$ совпадает с осью симметрии, и описывать ее ориентацию относительно осей *орбитальной системы координат* $Oxyz$ (ОСК) через углы Эйлера (см. рис. 1), благоприятная с точки зрения увода КА с помощью светового давления (рис. 2) ориентация нормали паруса \mathbf{n} задается соотношениями $\psi \approx 180^\circ$, $0 < \theta < 90^\circ$ (будем считать для определенности, что вектор на Солнце \mathbf{s} образует острый угол с вектором орбитального момента).

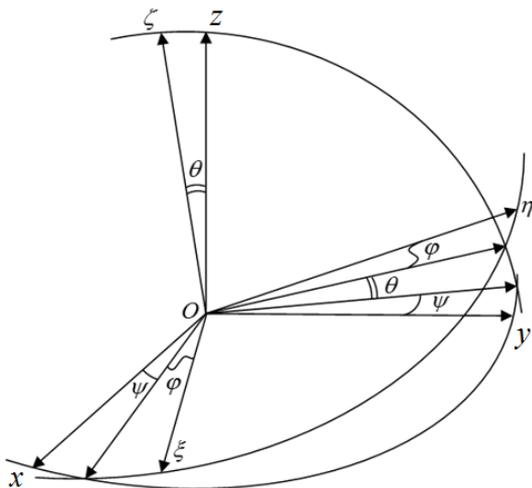


Рис. 1. Углы Эйлера взаимной ориентации ОСК и ССК

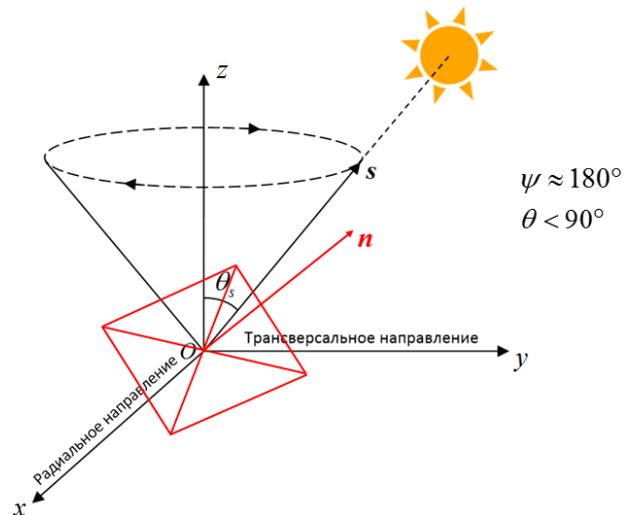


Рис. 2. Благоприятная для увода с орбиты ориентация нормали паруса

В дальнейшем изложении будем рассматривать четырехлепестковый квадратный парус 5×5 м, который является составной частью 3U-кубсата массой 3 кг.

По аналогии с параметрами современных проектов КА с парусом типа CubeSail [1] форм-фактор паруса (занимаемый им в сложенном состоянии объем) возьмем равным $2U$, а массу паруса вместе с механизмом разворачивания примем за 1.4 кг. Сам парус крепится к 1U-модулю с полезной нагрузкой и бортовыми системами (рис. 3).

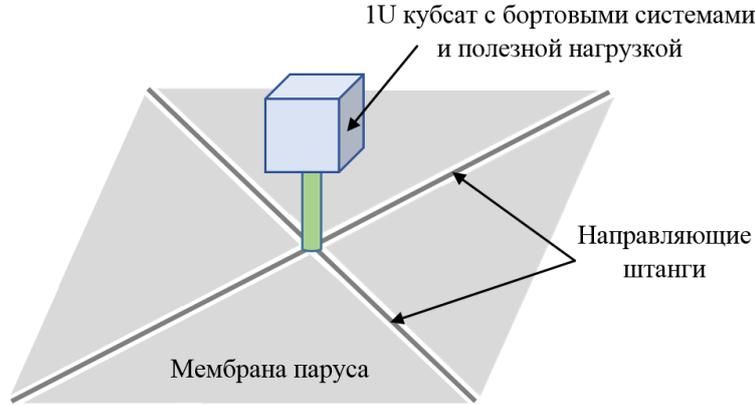


Рис. 3. Модель кубсата с раскрытым квадратным парусом (не в масштабе)

В качестве модели оптических свойств плоского солнечного паруса возьмем относительно простую, но весьма точную модель, учитывающую зеркальное отражение, диффузное отражение и поглощение. Соответствующие коэффициенты обозначим как r_s , r_d и a . Сила давления солнечного излучения, действующая на спутник с плоским парусом площадью A (рис. 4), выражается формулой

$$\mathbf{F}_{SRP} = -\left[\left(2|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|r_s + \chi_f r_d + \gamma a \right) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + |\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|(r_d + a) \mathbf{s} \right] PA, \quad (1)$$

где параметр

$$\gamma = \frac{\chi_f \varepsilon_f - \chi_b \varepsilon_b}{\varepsilon_f + \varepsilon_b} \quad (2)$$

задается через излучательные способности ε_f и ε_b передней (освещаемой) и задней поверхностей паруса, а коэффициенты χ_f и χ_b характеризуют отличие этих поверхностей от ламбертовых, для которых равны в точности $2/3$. Постоянная P имеет размерность давления и численно равняется отношению *солнечной постоянной* $W = 1366 \text{ Вт/м}^2$ к скорости света $c = 299792458 \text{ м/с}$:

$$P = W/c \approx 4.56 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2. \quad (3)$$

По смыслу она может быть интерпретирована как давление светового излучения на расстоянии 1 а.е. от Солнца. Момент силы, возникающий при наличии смещения d центра масс от центра давления вдоль нормали паруса, вычисляется как

$$\mathbf{T}_s = -d \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{F}_{SRP} = -(r_d + a) P A d |\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}| \mathbf{s} \times \mathbf{n}. \quad (4)$$

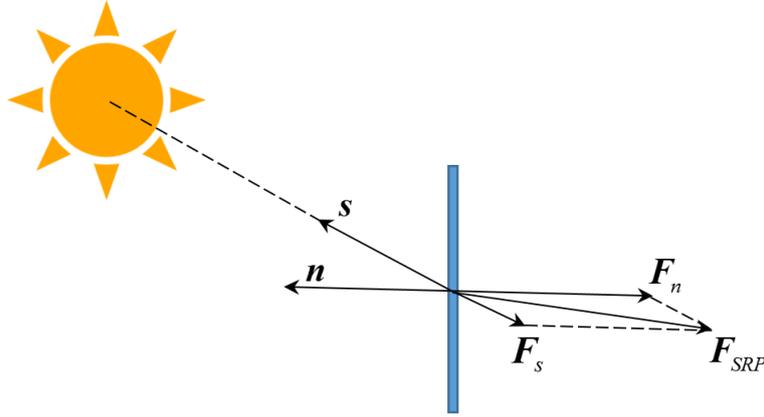


Рис. 4. Разложение силы светового давления вдоль векторов \mathbf{n} и \mathbf{s}

Сторона паруса, которой он будет развернут к Солнцу, заранее неизвестна; она может изменяться в процессе орбитального движения аппарата и годичного движения Солнца. Поэтому логично считать, что все оптические свойства обеих поверхностей паруса одинаковы, и пренебрегать слагаемым γa в формуле (1).

Значения коэффициентов r_s , r_d и a примем равными 0.83, 0.05 и 0.12 соответственно, основываясь на результатах исследований, проведенных в 70-х годах прошлого века в Лаборатории реактивного движения NASA (JPL) для типичных мембран солнечных парусов [2].

Что касается выбора начальной орбиты, сосредоточимся на наиболее популярных низких орбитах – солнечно-синхронных (ССО). Чтобы промоделировать различные условия освещенности, рассмотрим набор из четырех ССО с высотой 900 км и наклоном 99° при значениях *местного времени восходящего узла* от 18 часов (ССО типа закат-восход) до 12 часов (ССО типа полдень-полночь). Ориентация плоскости ССО относительно Солнца мало меняется в течение года.

Уравнения движения КА с парусом

Для описания орбитального движения КА с парусом будем пользоваться системой уравнений в вариациях элементов орбиты p , i , Ω , $e_x = e \cos \omega$, $e_y = e \sin \omega$

$$\frac{dp}{dt} = 2r \sqrt{\frac{p}{\mu}} f_y, \quad \frac{di}{dt} = f_z \frac{r \cos u}{\sqrt{\mu p}}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = f_z \frac{r \sin u}{\sqrt{\mu p} \sin i}$$

$$\frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ f_x \sin u + f_y \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r e_x}{p} \right] + f_z \frac{r e_y}{p} \cot i \sin u \right\}, \quad (5)$$

$$\frac{de_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -f_x \cos u + f_y \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r e_y}{p} \right] - f_z \frac{r e_x}{p} \cot i \sin u \right\},$$

и уравнения для аргумента широты u

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - f_z \frac{r \cot i \sin u}{\sqrt{\mu p}}. \quad (6)$$

Здесь f_x , f_y и f_z обозначают ОСК-компоненты вектора суммарного возмущающего ускорения \mathbf{f} , а геоцентрическое расстояние r выражается по формуле

$$r = \frac{p}{1 + e_x \cos u + e_y \sin u}. \quad (7)$$

Элементы e_x и e_y эволюционируют медленно даже при малом эксцентриситете e , что делает систему уравнений (5), (6) пригодной и для околокруговых орбит.

Из возмущений включим в модель три основных: вторую зональную гармонику геопотенциала

$$\mathbf{f}_{J_2} = \frac{3J_2 \mu R_\oplus^2}{2r^4} \begin{pmatrix} 3 \sin^2 i \sin^2 u - 1 \\ -\sin^2 i \sin 2u \\ -\sin 2i \sin u \end{pmatrix}, \quad (8)$$

световое давление (парус считаем непрозрачным, т.е. $r_s + r_d + a = 1$)

$$\mathbf{f}_{SRP} = -\frac{PA}{m} \left[(2|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|r_s + \chi_f r_d)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + |\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|(1 - r_s)\mathbf{s} \right] \quad (9)$$

и сопротивление атмосферы плотностью ρ

$$\mathbf{f}_{атм} = -\frac{C_d A}{2m} \rho |\mathbf{v}_{омн} \cdot \mathbf{n}| \mathbf{v}_{омн}. \quad (10)$$

Коэффициент лобового сопротивления C_d примем равным стандартному значению 2.2. Скорость КА с парусом относительно набегающего потока $\mathbf{v}_{омн}$ можно для простоты рассчитывать в приближении полностью увлекаемой Землей атмосферы

$$\mathbf{v}_{омн} = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_\oplus \times \mathbf{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \begin{pmatrix} e_x \sin u - e_y \cos u \\ 1 + e_x \cos u + e_y \sin u \\ 0 \end{pmatrix} - \boldsymbol{\omega}_\oplus r \begin{pmatrix} 0 \\ \cos i \\ \sin i \cos u \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\omega}_\oplus \approx 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – скорость вращения Земли вокруг своей оси. В случае полярных и околополярных орбит (в том числе и ССО) вращением атмосферы допустимо пренебречь [3]. Векторы \mathbf{s} и \mathbf{n} задаются в ОСК выражениями

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \sin \psi_s \sin \theta_s \\ -\cos \psi_s \sin \theta_s \\ \cos \theta_s \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Связь компонент вектора на Солнце \mathbf{s} с положением плоскости орбиты относительно направления на Солнце выявляется из сравнения (12) и альтернативного выражения

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos u + \sigma_y \sin u \\ \sigma_y \cos u - \sigma_x \sin u \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (14)$$

через компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}$, связанные с долготой восходящего узла Ω , наклоном i и эклиптической долготой λ по формулам [4]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \cos \Omega \cos \lambda + \sin \Omega \sin \lambda \cos \varepsilon, \\ \sigma_y &= \cos \Omega \cos i \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \Omega \cos i \cos \lambda + \sin i \sin \lambda \sin \varepsilon, \\ \sigma_z &= -\cos \Omega \sin i \sin \lambda \cos \varepsilon + \sin \Omega \sin i \cos \lambda + \cos i \sin \lambda \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\varepsilon = 23^\circ 26'$ – наклон эклиптики к экватору. Имеем:

$$\begin{aligned} \theta_s &= \arccos \sigma_z, \\ \psi_s &= \mathbf{atan2}(\sigma_x \cos u + \sigma_y \sin u, \sigma_x \sin u - \sigma_y \cos u). \end{aligned} \quad (16)$$

Функция **atan2** обозначает операцию взятия обратного тангенса с учетом знаков обоих аргументов.

Перейдем теперь к угловому движению КА с парусом. Заметим, что все основные внешние моменты – гравитационный, светового давления и аэродинамический – потенциальны. В частности, потенциальная функция для момента силы давления солнечного излучения (4) на непрозрачный парус записывается в виде

$$U_s = -\frac{(1-r_s)PA_d}{2} |\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}| \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \quad (17)$$

или, принимая во внимание (12) и (13),

$$\begin{aligned} U_s &= -\frac{(1-r_s)PA_d}{2} \left| \cos \theta_s \cos \theta + \sin \theta_s \sin \theta \cos(\psi - \psi_s) \right| \times \\ &\times \left[\cos \theta_s \cos \theta + \sin \theta_s \sin \theta \cos(\psi - \psi_s) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Гравитационный момент

$$\mathbf{T}_g = \frac{3\mu}{r^5} (I_n - I_t) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \times \mathbf{n}, \quad (19)$$

действующий на осесимметричный КА с продольным (осевым) моментом инерции I_n и поперечным моментом инерции I_t , стремится уложить нормаль паруса в плоскость Oyz и также потенциален:

$$U_g = \frac{3\mu}{2r^5} (I_n - I_t) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2 = \frac{3\mu}{2r^3} (I_n - I_t) \sin^2 \psi \sin^2 \theta. \quad (20)$$

Аэродинамический момент

$$\mathbf{T}_a = -\frac{C_d Ad}{2} \rho |\mathbf{v}_{отн} \cdot \mathbf{n}| \mathbf{v}_{отн} \times \mathbf{n} \approx -\frac{C_d Ad}{2} \rho |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \mathbf{v} \times \mathbf{n} \quad (21)$$

и его потенциальная функция

$$U_a = -\frac{C_d Ad}{4} \rho |\mathbf{v}_{отн} \cdot \mathbf{n}| \mathbf{v}_{отн} \cdot \mathbf{n} \approx -\frac{C_d Ad}{4} \rho |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \approx \frac{C_d Ad \mu}{4p} \rho \times \\ \times |\cos \psi \sin \theta| \cos \psi \sin \theta = \frac{C_d Ad \mu}{4p} \rho |\cos \psi| \cos \psi \sin^2 \theta \quad (22)$$

похожи по форме записи на момент и потенциальную функцию давления света.

Если обозначить за ω_ξ , ω_η и ω_ζ проекции абсолютной угловой скорости КА с парусом на оси ССК, то связывающие их с производными углов Эйлера кинематические соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= (\dot{\psi} + \omega_0) \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= (\dot{\psi} + \omega_0) \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega_0) \cos \theta, \end{aligned} \quad (23)$$

где ω_0 – скорость поворота ОСК в инерциальном пространстве:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e_x \cos u + e_y \sin u)^2. \quad (24)$$

Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$K = \frac{1}{2} I_t [(\dot{\psi} + \omega_0)^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} I_n [\dot{\varphi} + (\dot{\psi} + \omega_0) \cos \theta]^2. \quad (25)$$

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})} - \frac{\partial L}{\partial (\psi, \theta, \phi)} = 0 \quad (26)$$

с лагранжианом

$$L = K - U \equiv K - U_s - U_g - U_a \quad (27)$$

трансформируются в первый интеграл – скорость закрутки ω_ζ КА с парусом во-круг оси симметрии – и дифференциальные уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \dot{\omega}_0 + \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta} \left[2(\dot{\psi} + \omega_0) \cos \theta - \kappa \omega_\zeta \right] &= -\frac{1}{I_t \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \ddot{\theta} - (\dot{\psi} + \omega_0) \sin \theta \left[(\dot{\psi} + \omega_0) \cos \theta - \kappa \omega_\zeta \right] &= -\frac{1}{I_t} \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (28)$$

относительно углов прецессии и нутации (за κ обозначено отношение продольного и поперечного моментов инерции I_n/I_t). С учетом (24) имеем:

$$\dot{\omega}_0 = \frac{2\omega_0^2 (e_y \cos u - e_x \sin u)}{1 + e_x \cos u + e_y \sin u} \approx 2\omega_0^2 (e_y \cos u - e_x \sin u). \quad (29)$$

В процессе увода с низкой околокруговой орбиты эксцентриситет не будет превышать несколько сотых, и можно полагать $\dot{\omega}_0 \approx 0$. Для полноты изложения приведем выражения для всех частных производных в правых частях (28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_g}{\partial (\psi, \theta)} &= \frac{3\mu}{r^3} (I_n - I_t) \sin \psi \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial U_a}{\partial (\psi, \theta)} &\approx \frac{C_d A d \mu}{2p} \rho |\cos \psi| \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial U_s}{\partial (\psi, \theta)} &= (1 - r_s) P A d \left| \cos \theta_s \cos \theta + \sin \theta_s \sin \theta \cos(\psi - \psi_s) \right| \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \sin \theta_s \sin \theta \sin(\psi - \psi_s) \\ \cos \theta_s \sin \theta - \sin \theta_s \cos \theta \cos(\psi - \psi_s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Вычислять плотность атмосферы при различных уровнях солнечной активности (СА) будем с применением кусочно-экспоненциальной аппроксимации соответствующих функций в модели атмосферы CIRA-2012.

Важный фактор при моделировании орбитального и углового движения КА на низких орбитах – земная тень. В самой простой *цилиндрической модели* условие нахождения на теневом участке орбиты записывается в виде неравенства [5]

$$\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}{r} \equiv \sin \psi_s \sin \theta_s \leq -\sqrt{1 - \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2}. \quad (31)$$

В тени, разумеется, отключаются сила и момент светового давления. Кроме того, будем считать плотность атмосферы на дневном участке в среднем вдвое превышающей плотность ночной атмосферы.

Связанными с альбедо эффектами будем пренебрегать: хотя доля отраженного от поверхности Земли солнечного излучения достигает 30 %, благоприятная с точки зрения деорбитинга ориентация нормали паруса в плоскости Ouz подразумевает ее ортогональность местной вертикали. Дополнительная сила светового давления оказывается минимальной. К тому же ее воздействию подвержены почти в равной степени обе стороны паруса, и результирующее влияние альбедо на орбитальную и угловую динамику КА исчезающе мало.

Обеспечение квазигиперболоидальной прецессии КА

Выгодный для увода с орбиты вращательный режим КА с парусом, напоминающий *гиперболоидальную прецессию*, не реализуется в отсутствии управления. Главную дестабилизирующую роль играет момент силы светового давления. Угловое движение спутника с парусом будет хаотическим (рис. 5). Чтобы стабилизировать вращение КА с парусом, попробуем ввести в уравнения эволюции углов Эйлера ψ и θ модельное демпфирование:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \dot{\omega}_0 + \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta} \left[2(\dot{\psi} + \omega_0) \cos \theta - \kappa \omega_{\zeta} \right] &= -\frac{1}{I_t \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi} - k_{\psi} \dot{\psi}, \\ \ddot{\theta} - (\dot{\psi} + \omega_0) \sin \theta \left[(\dot{\psi} + \omega_0) \cos \theta - \kappa \omega_{\zeta} \right] &= -\frac{1}{I_t} \frac{\partial U}{\partial \theta} - k_{\theta} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (32)$$

Оно эквивалентно приложению управляющих моментов

$$\begin{aligned} T_{\xi} &= -I_t \left(k_{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + k_{\theta} \dot{\theta} \cos \varphi \right), \\ T_{\eta} &= -I_t \left(k_{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - k_{\theta} \dot{\theta} \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (33)$$

в осях ССК. Если коэффициенты демпфирования k_{ψ} и k_{θ} равны, то моменты (33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T_{\xi} &= -k_d I_t \left(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \right) \equiv -k_d I_t \left(\omega_{\xi} - \omega_0 \sin \theta \sin \varphi \right), \\ T_{\eta} &= -k_d I_t \left(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \right) \equiv -k_d I_t \left(\omega_{\eta} - \omega_0 \sin \theta \cos \varphi \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где $k_d = k_{\psi} = k_{\theta}$. Именно такой тип демпфирования был предложен Д. Лоуренсом и М. Уортоном [6]. Стоящие в скобках правой части (34) величины имеют смысл

компонент угловой скорости КА относительно вращающейся ОСК. Для реализации модельного демпфирования требуется измерять компоненты абсолютной угловой скорости КА в проекции на оси ССК, а также знать ориентацию этих осей относительно нормали к плоскости орбиты.

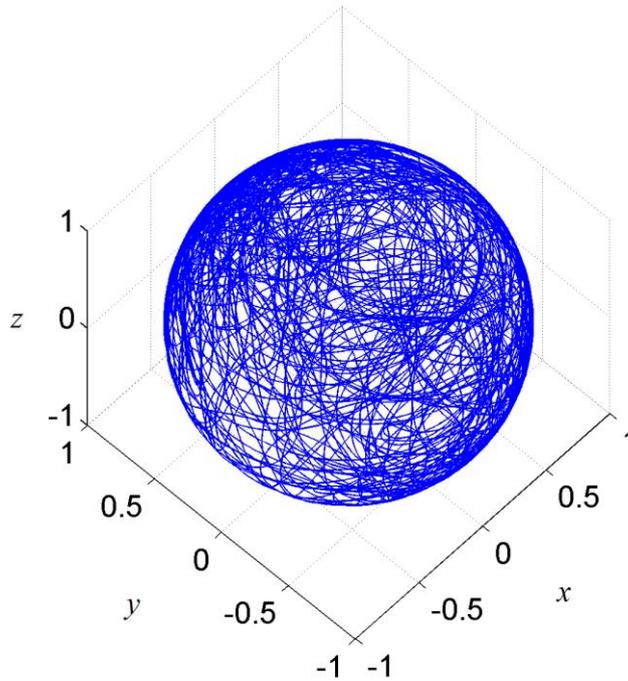


Рис. 5. Хаотические вращения единичного вектора нормали паруса

Для обоснованного выбора коэффициентов демпфирования используем инструмент *ляпуновских экспонент* (по-другому, *ляпуновских характеристических показателей*), а именно, величину *старшей экспоненты*

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{w}(t)\|}{\|\mathbf{w}(t_0)\|}, \quad (35)$$

характеризующей среднюю скорость разбегания двух близких фазовых траекторий, которые различаются в начальный момент времени t_0 на $\mathbf{w}(t_0)$. Символ $\|\ \|\$ обозначает некоторую норму в фазовом пространстве. В реальности вычисляется не λ_1 , а ее конечновременной аналог

$$\Lambda_1(T) = \frac{1}{T} \ln \frac{\|\mathbf{w}(t_0 + T)\|}{\|\mathbf{w}(t_0)\|} \quad (36)$$

при достаточно большом T . Как было показано в работе [7], и для регулярной, и для хаотической динамики имеет место следующая асимптотика:

$$\Lambda_1(T) \approx \lambda_1 + \frac{b + z(T)}{T}, \quad (37)$$

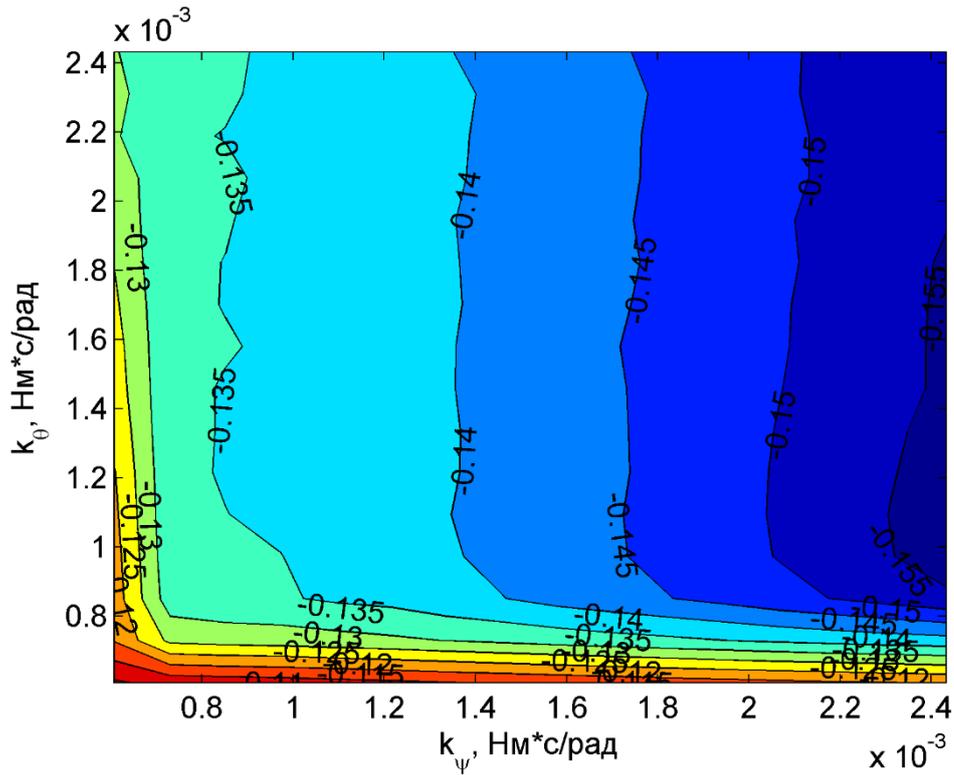
где b – константа, а $z(T)$ – шум с нулевым средним. При произвольном начальном отклонении $w(t_0)$ второе слагаемое в (37) будет затухать с увеличением T .

В сочетании с компактностью фазового пространства описывающей вращения КА системы уравнений положительность старшей ляпуновской экспоненты указывает на хаотичность динамики, равенство нулю – на регулярность. С точки зрения практических вычислений критерий хаотичности формулируется как выход конечновременной экспоненты Λ_1 на некоторый положительный уровень. В случае регулярной динамики будем наблюдать затухающие к нулю осцилляции.

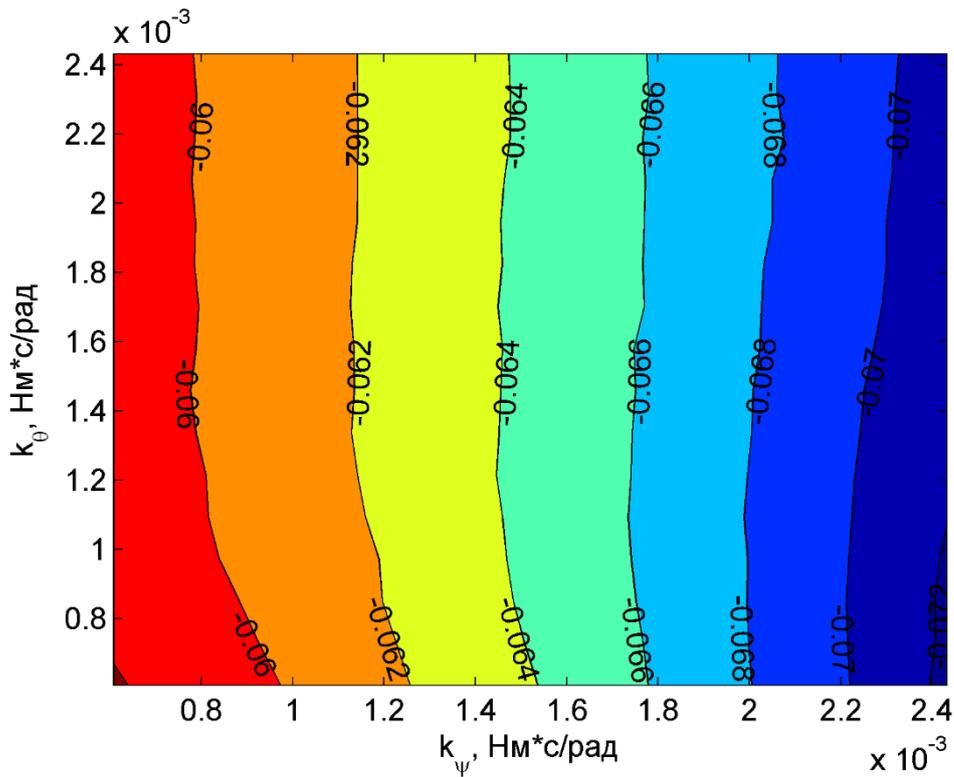
На рисунках 6–9 показаны *карты старших ляпуновских экспонент*, построенных для четырех ССО со значениями среднего местного времени восходящего узла (MLTAN) 12, 14, 16 и 18 часов на суточном и полусуточном интервалах при среднем уровне солнечной активности. Карты экспонент представляют собой визуализацию отображения $(k_\psi, k_\theta) \rightarrow \Lambda_1(T)$: на плоскости коэффициентов демпфирования k_ψ, k_θ показаны изолинии старшей ляпуновской экспоненты, дополненные соответствующей цветовой заливкой. Диапазон коэффициентов выбран так, что, когда скорость изменения углов прецессии и нутации не будет превосходить орбитальной (10^{-3} рад/с), демпфирующий момент по величине меньше внешних моментов. Как свидетельствуют карты экспонент, во всем выбранном диапазоне вращения спутника с парусом носят регулярный характер; значения старшей экспоненты убывают пропорционально длине интервала интегрирования.

Стоит отметить, что при низком уровне СА аэродинамический момент мал; это ухудшает свойства устойчивости вращений в ситуациях, когда Солнце освещает орбиту КА отвесно (под большим углом к ее плоскости), что и подтверждается суточными картами экспонент (см. рис. 10–13). При высоком уровне СА угловое движение более регулярно, чем при среднем уровне СА, и карты экспонент не приводятся.

Все дальнейшие вычисления проводятся с коэффициентами демпфирования $k_\psi = k_\theta = 2 \cdot 10^{-3}$ Нмс, которые позволяют обеспечить регулярность углового движения во всем диапазоне условий освещенности, а также при различных уровнях СА. Типовой вид эволюции углов ψ и θ , значения которых в начальный момент времени соответствовали случаю гиперболоидальной прецессии (т.е. $\psi = 180^\circ$ и $0 < \theta < 90^\circ$), представлен на рисунке 14. Получающийся квазипериодический режим вращения КА с парусом естественно называть *квазигиперболоидальной прецессией*. Средняя величина $\bar{\theta}$ угла нутации при вращении нормали паруса, зависит от положения Солнца относительно плоскости орбиты и уровня СА. Для модификации $\bar{\theta}$ можно менять скорости закрутки КА ω_ζ , до сих пор считавшуюся равной нулю. Однако нужно быть аккуратным: как и для классической гиперболоидальной прецессии, устойчивость квазигиперболоидальной прецессии пропадает примерно при скоростях закрутки, превосходящих по модулю орбитальную скорость $\omega_0 \sim 10^{-3}$ рад/с (рис. 15).

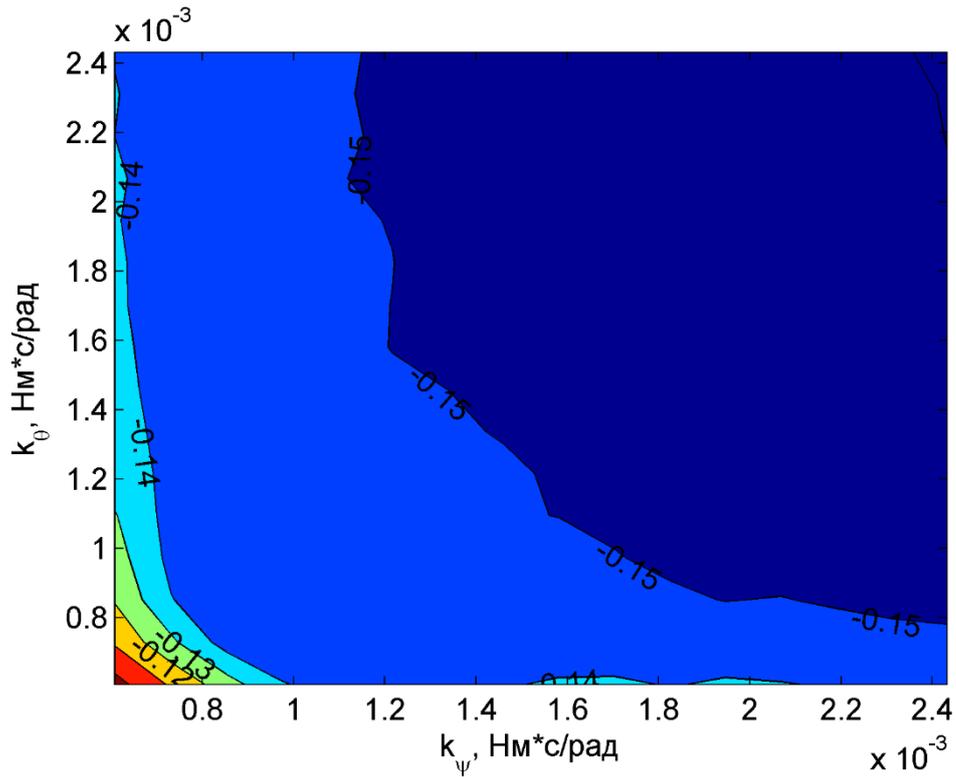


а) на полусуточном интервале времени

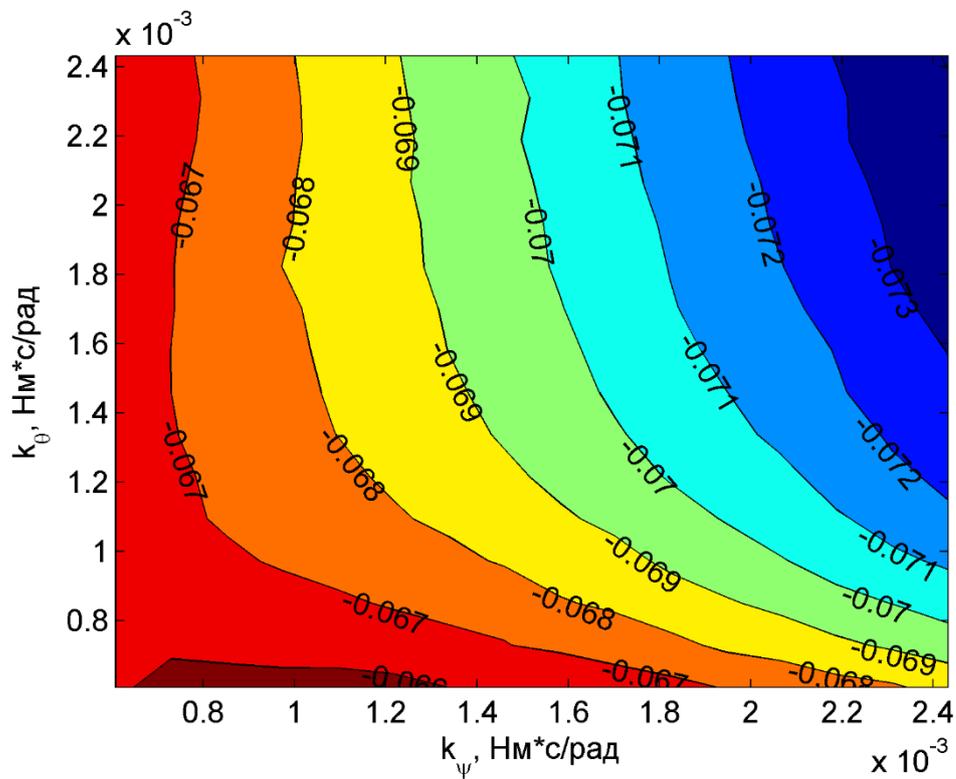


б) на суточном интервале времени

Рис. 6. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 12 часов. Расчет выполнен для среднего уровня СА и скорости закрутки $\omega_\zeta = 0$

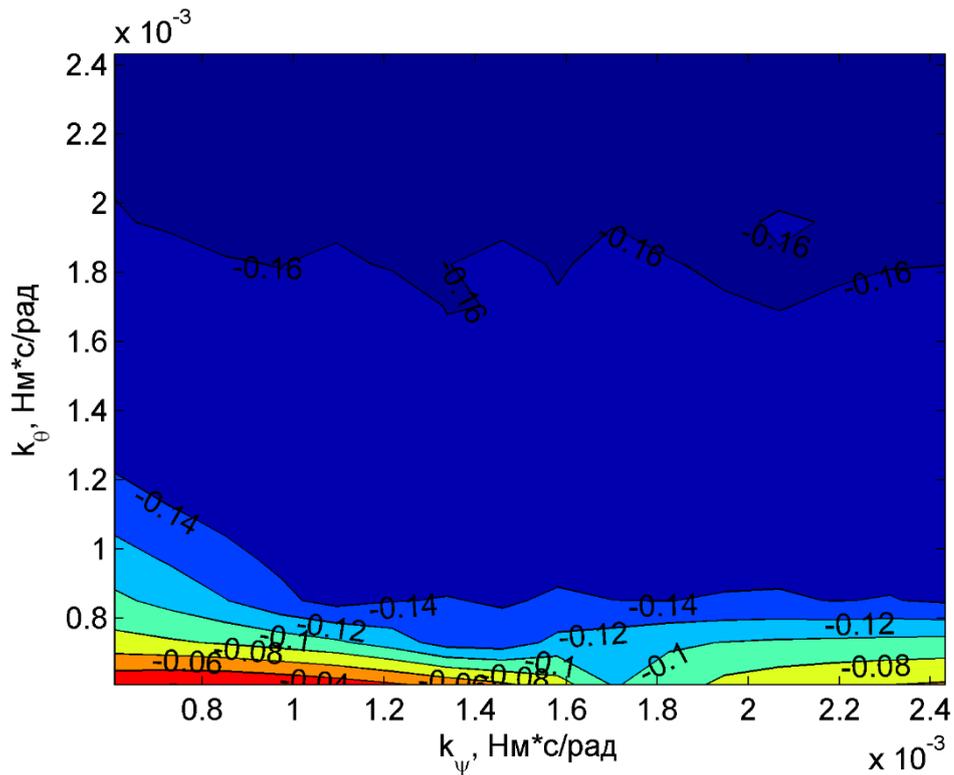


а) на полусуточном интервале времени

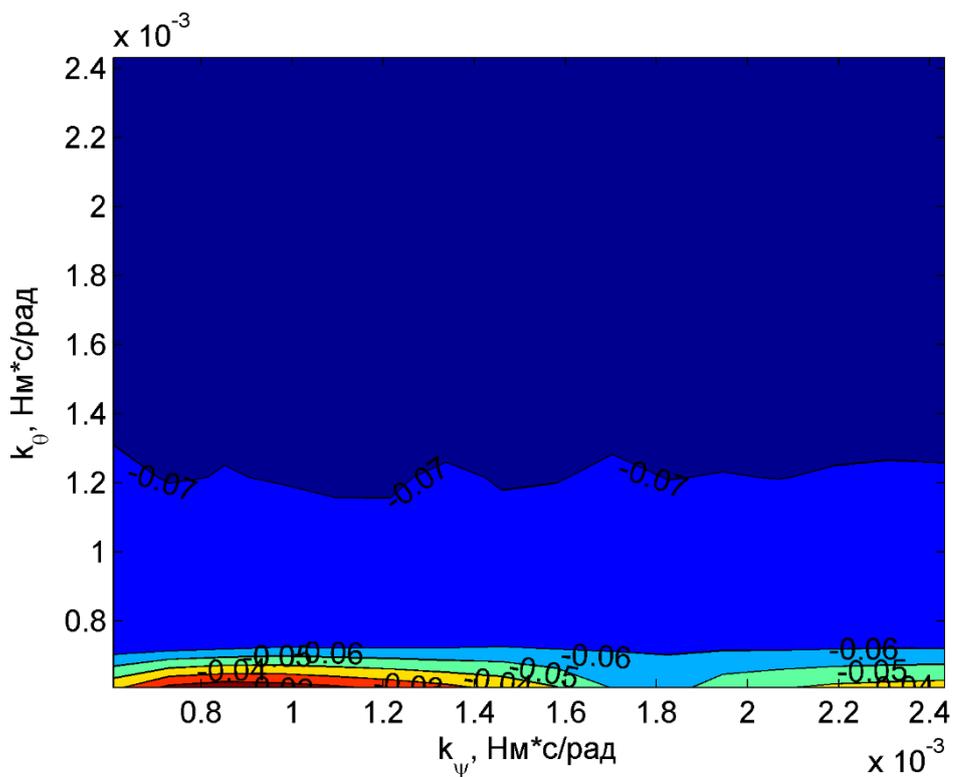


б) на суточном интервале времени

Рис. 7. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 14 часов. Расчет выполнен для среднего уровня СА и скорости закрутки $\omega_\zeta = 0$

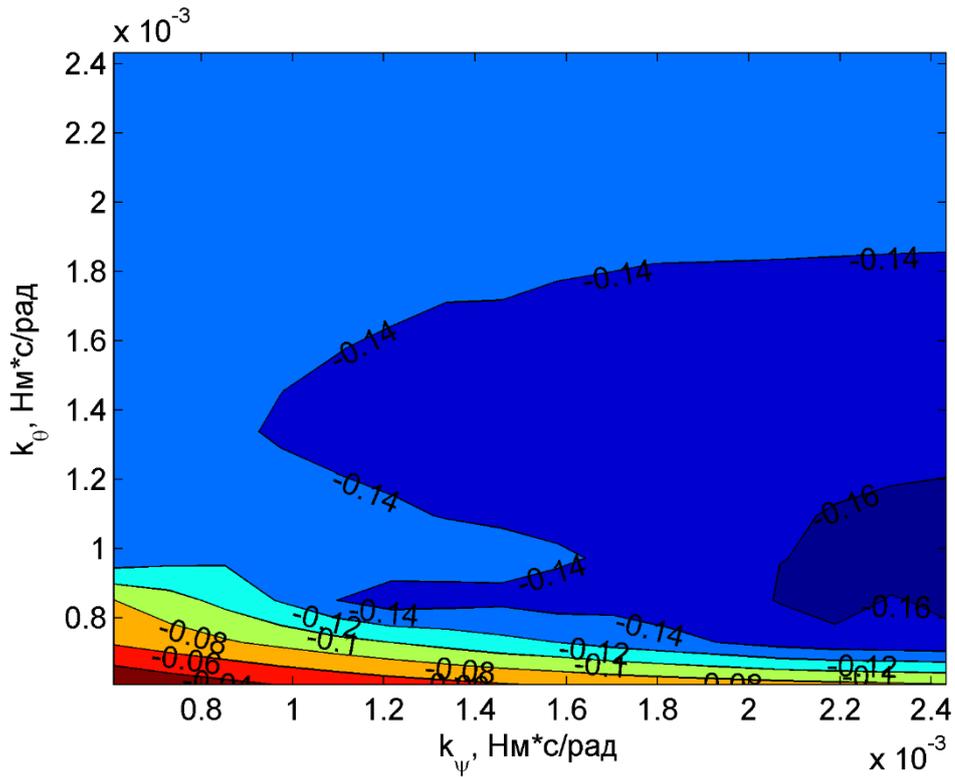


а) на полусуточном интервале времени

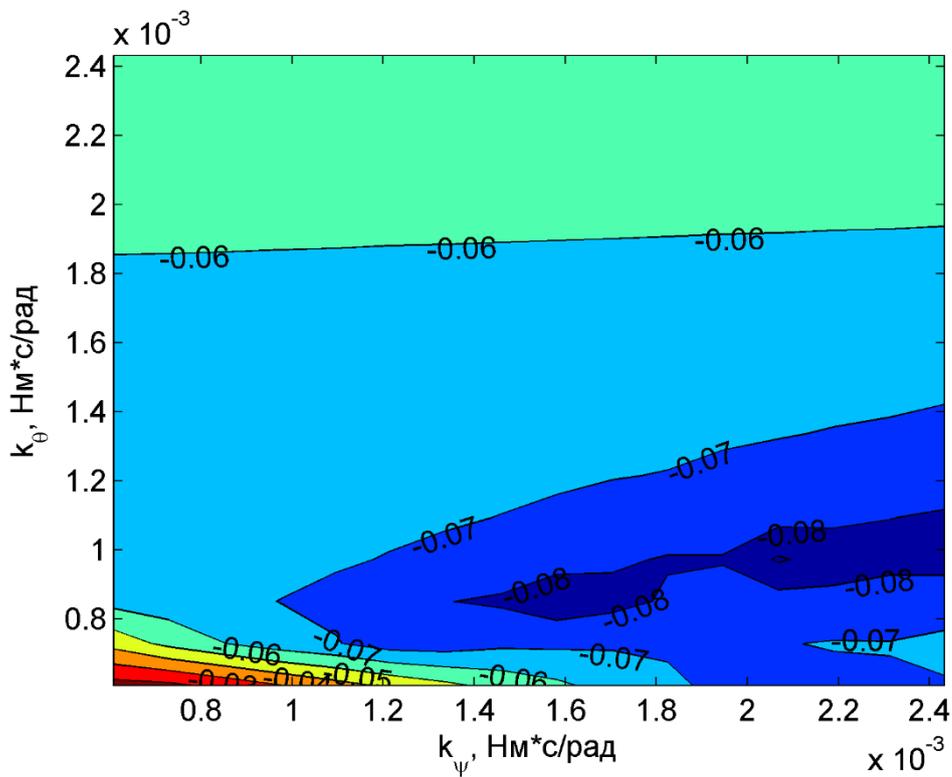


б) на суточном интервале времени

Рис. 8. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 16 часов. Расчет выполнен для среднего уровня СА и скорости закрутки $\omega_z = 0$



а) на полусуточном интервале времени



б) на суточном интервале времени

Рис. 9. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 18 часов. Расчет выполнен для среднего уровня СА и скорости закрутки $\omega_\zeta = 0$

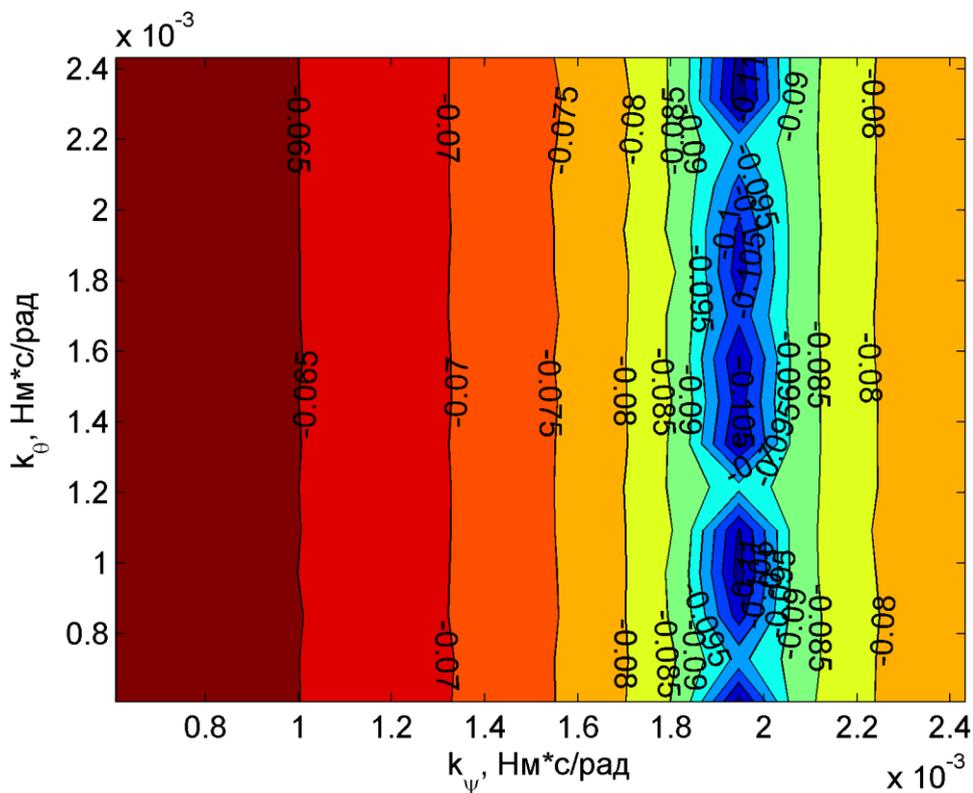


Рис. 10. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 12 часов. Расчет выполнен для низкого уровня СА и скорости закрутки $\omega_\zeta = 0$

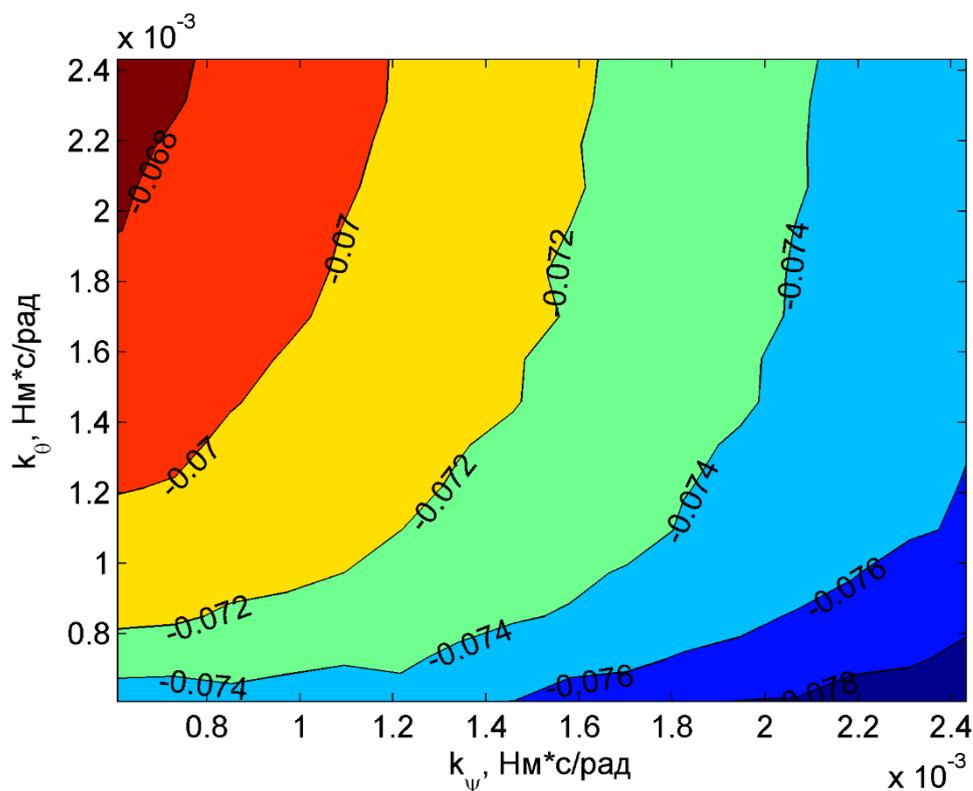


Рис. 11. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 14 часов. Расчет выполнен для низкого уровня СА и скорости закрутки $\omega_\zeta = 0$

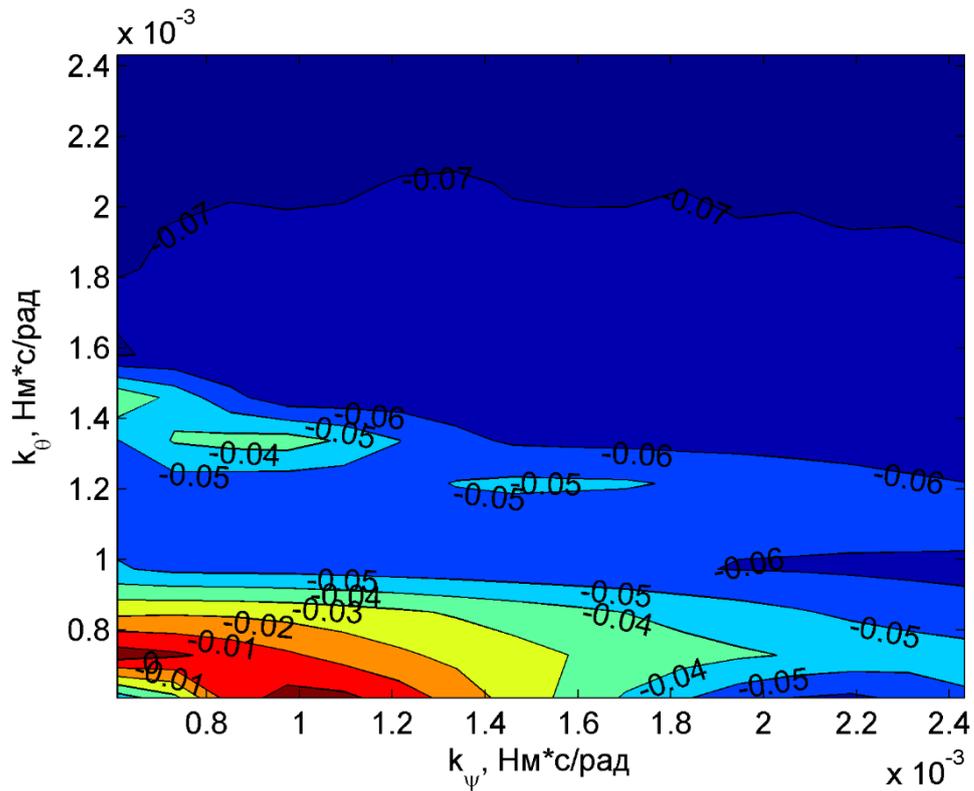


Рис. 12. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 16 часов. Расчет выполнен для низкого уровня СА и скорости закрутки $\omega_\zeta = 0$

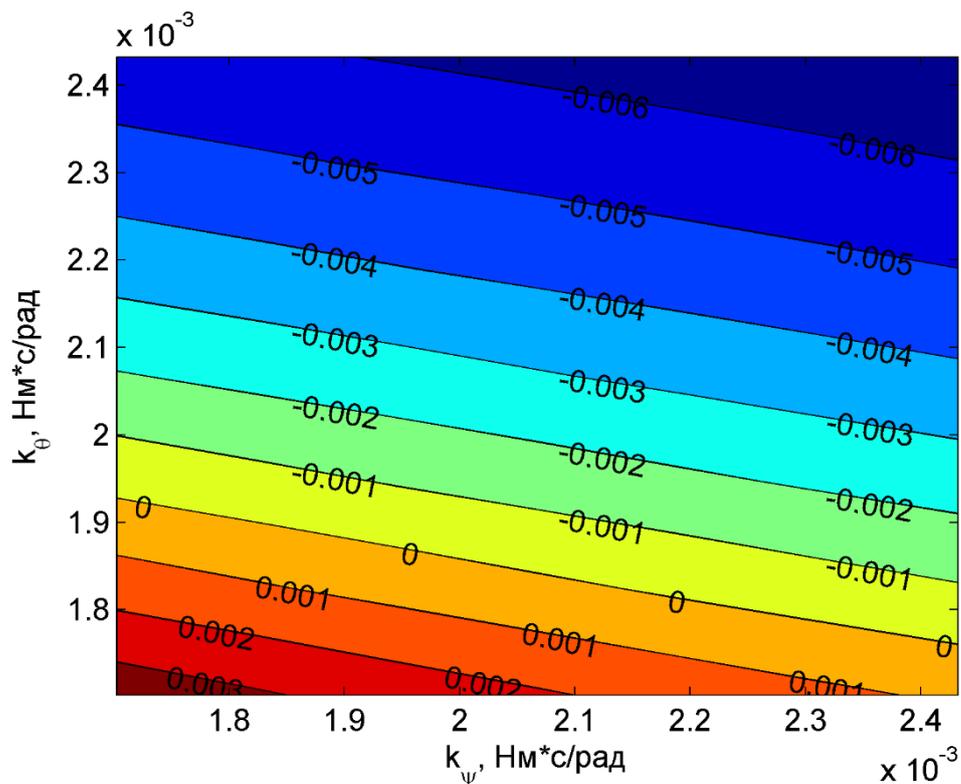


Рис. 13. Карта ляпуновских экспонент для ССО с MLTAN 18 часов. Расчет выполнен для низкого уровня СА и скорости закрутки $\omega_\zeta = 0$

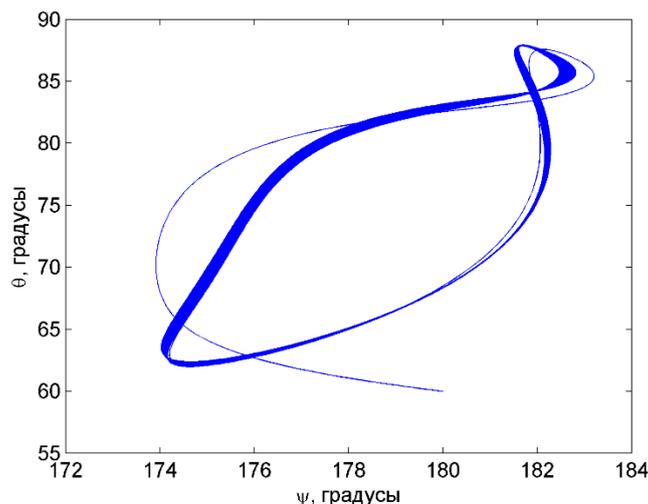


Рис. 14. Недельная эволюция углов прецессии и нутации.
Расчет выполнен для ССО с MLTAN 16 часов при $k_\psi = k_\theta = 2 \cdot 10^{-3}$ Нмс

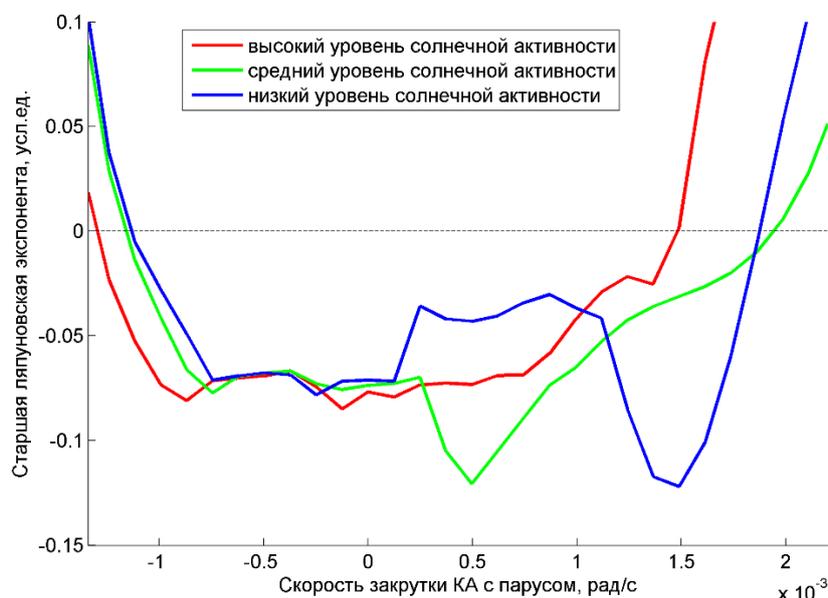


Рис. 15. Старшая ляпуновская экспонента как функция скорости закрутки.
Расчет выполнен для ССО с MLTAN 16 часов при $k_\psi = k_\theta = 2 \cdot 10^{-3}$ Нмс

Численные результаты

Проанализируем кривые эволюции оскулирующей высоты орбиты КА с парусом, получаемые численным интегрированием системы уравнений углового и орбитального движения (5), (6), (32). Представленные на рисунках 16–19, кривые наглядно демонстрируют характер изменений элементов орбиты, индуцируемых силой светового давления и торможением атмосферы, при квазигиперболическом режиме вращения КА.

Начнем с очевидного свойства: продолжительность увода КА с орбиты значительно увеличивается в случае понижения уровня СА и, как следствие, уменьшения плотности атмосферы. Атмосферное сопротивление, почти ничтожное на

начальном этапе спуска, в последующем начинает играть все более важную роль. По мере увеличения аэродинамического момента угол нутации тоже увеличивается; квазигиперболоидальная прецессия постепенно трансформируется в режим стабилизации по набегавшему потоку с $\theta = 90^\circ$ (рис. 20, а). Отметим, что производные $\dot{\psi}$ и $\dot{\theta}$, не превосходят по величине половину орбитальной скорости (см. рис. 20, б) и демпфирующий момент мал в сравнении с внешними моментами.

Второе наблюдение состоит в заметно большей эффективности силы светового давления для увода спутников с орбит, освещаемых Солнцем почти отвесно (в нашем случае – 16-часовой и 18-часовой ССО). Когда, напротив, Солнце практически лежит в плоскости орбиты, давление света приводит лишь к увеличению эксцентриситета. Также на графиках четко проявляются долгопериодические колебания эксцентриситета с периодом от 110 до 150 суток, обусловленные вращением линии апсид под влиянием сжатия Земли. В самом деле, темп дрейфа линии апсид для ССО высотой 900 км составляет 2.8 градуса в сутки, что соответствует периоду около 130 суток.

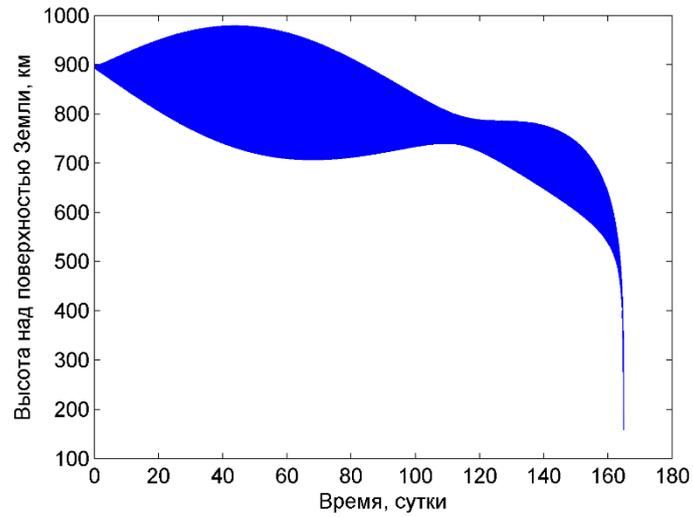
Упомянутый выше инструмент – изменение скорости закрутки КА – может значительно ускорить процедуру снижения высоты орбиты путем настройки среднего значения угла нутации $\bar{\theta}$. Увеличение скорости закрутки влечет уменьшение угла нутации. Оптимальное значение $\bar{\theta}$ зависит от ориентации плоскости орбиты относительно вектора на Солнце, которая полностью характеризуется углом θ_s . Для количественного описания эффективности силы светового давления введем ее КПД на освещенном участке орбиты как отношение среднего значения «полезной» тормозящей компоненты силы давления к максимальной силе давления света на идеальный (зеркально отражающий) парус. Несколько консервативная оценка длины освещенного участка как половины витка с $\pi \leq \psi_s \leq 2\pi$ ведет, с учетом выражений (1), (12), (13) и допущений $\bar{\psi} \approx \pi$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \approx n_y v$, к формуле

$$\overline{КПД}(\bar{\theta}, \theta_s) = -\frac{(\mathbf{F}_{SRP} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/v)}{2PA} \approx \frac{r_s \sin \bar{\theta}}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(\psi_s, \bar{\psi}, \theta_s, \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\psi}=\pi} d\psi_s, \quad (38)$$

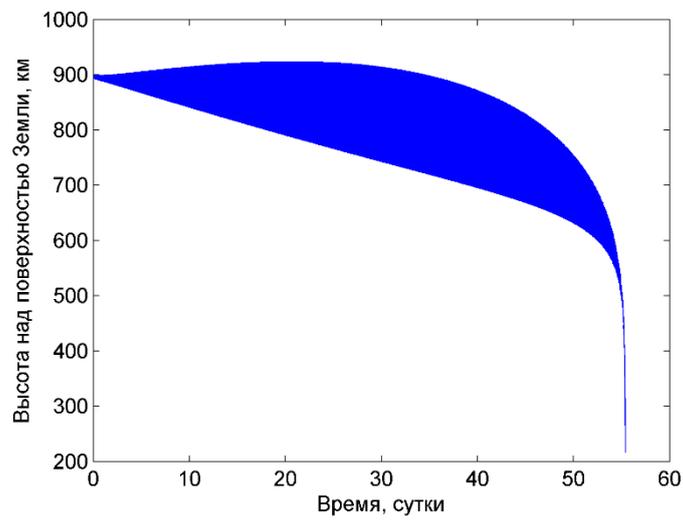
где

$$f(\psi_s, \bar{\psi}, \theta_s, \bar{\theta}) = \left| \cos \theta_s \cos \bar{\theta} + \sin \theta_s \sin \bar{\theta} \cos(\bar{\psi} - \psi_s) \right| \times \\ \times \left[\cos \theta_s \cos \bar{\theta} + \sin \theta_s \sin \bar{\theta} \cos(\bar{\psi} - \psi_s) \right]. \quad (39)$$

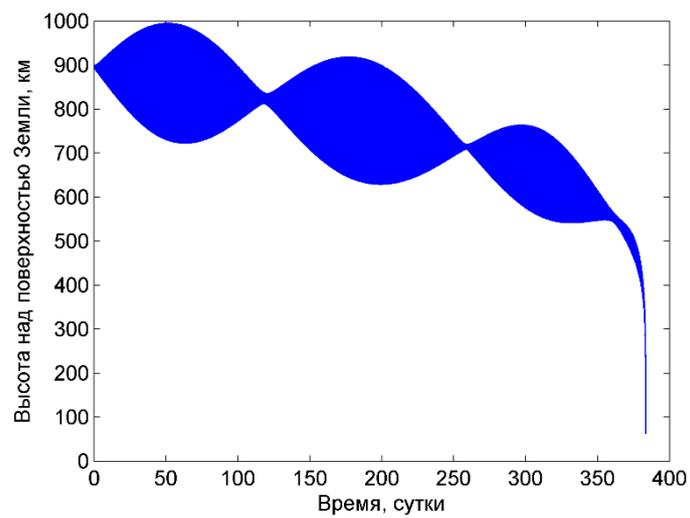
Графики функций $\overline{КПД} = \overline{КПД}(\bar{\theta})$ при нескольких различных θ_s собраны на рисунке 21. Для 18-часовой ССО угол θ_s равен в среднем 16° и не превосходит 33° . Поэтому совсем небольшая скорость закрутки $\omega_\zeta = 1.1 \cdot 10^{-4}$ рад/с, уменьшающая $\bar{\theta}$ с почти 85° (рис. 22, а) до $45-50^\circ$ (рис. 22, б), выгодно сказывается на длительности увода КА с орбиты – он ускоряется со 128 до 92 суток (см. рис. 23, а-б).



а) при среднем уровне СА

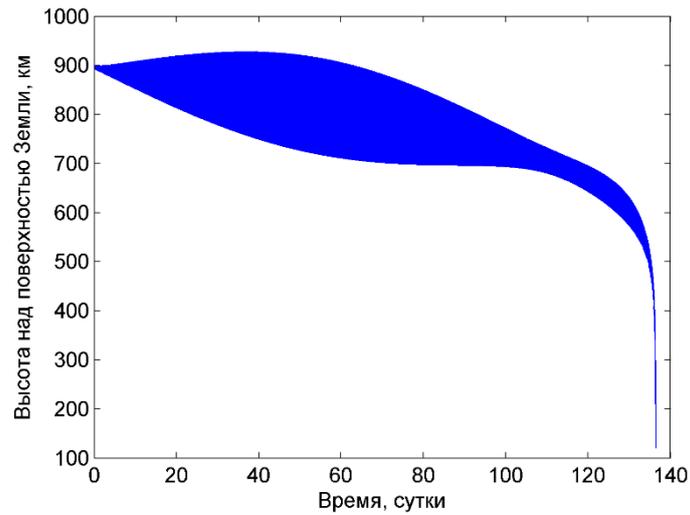


б) при высоком уровне СА

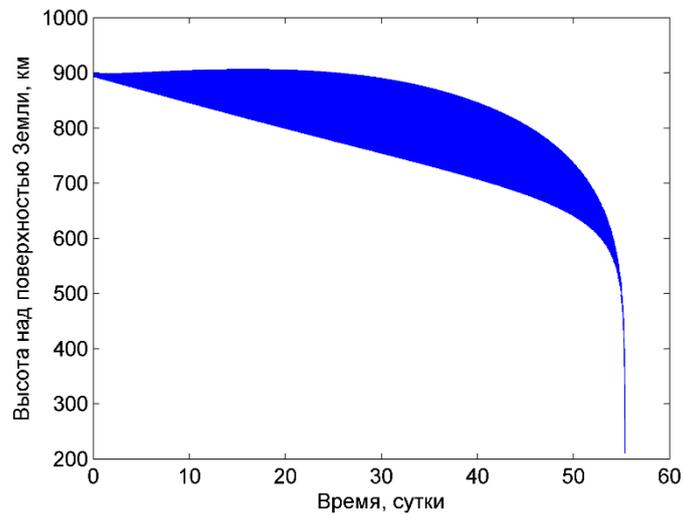


в) при низком уровне СА

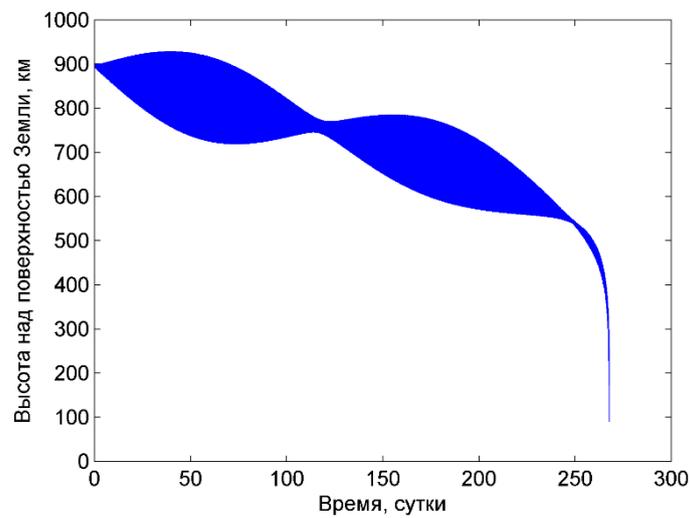
Рис. 16. Эволюция высоты ССО с MLTAN 12 часов



а) при среднем уровне СА

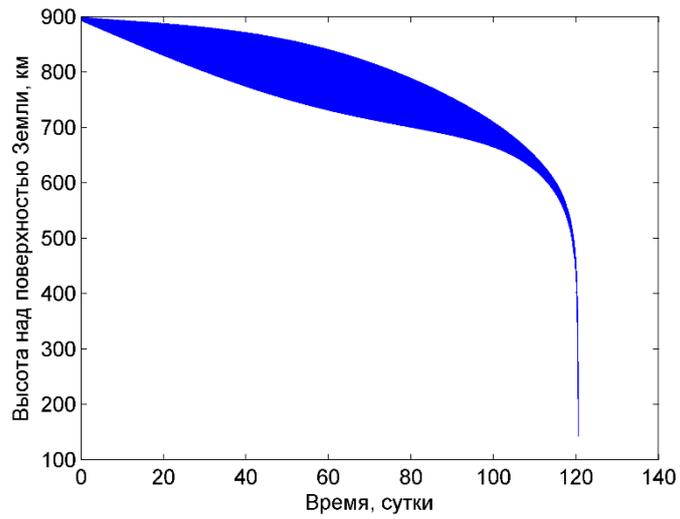


б) при высоком уровне СА

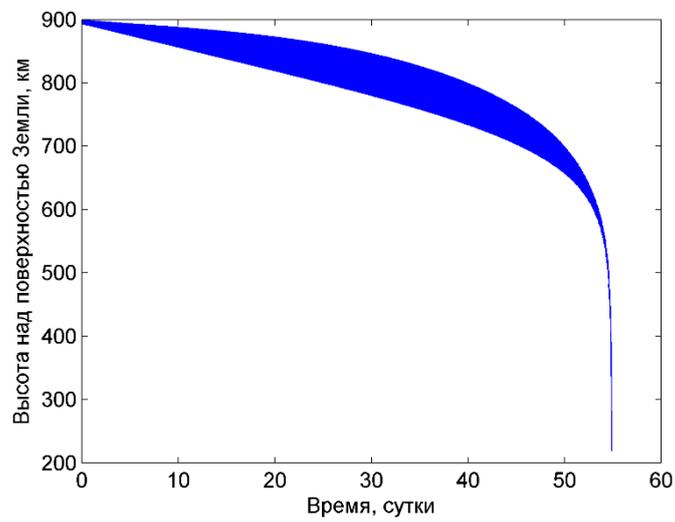


в) при низком уровне СА

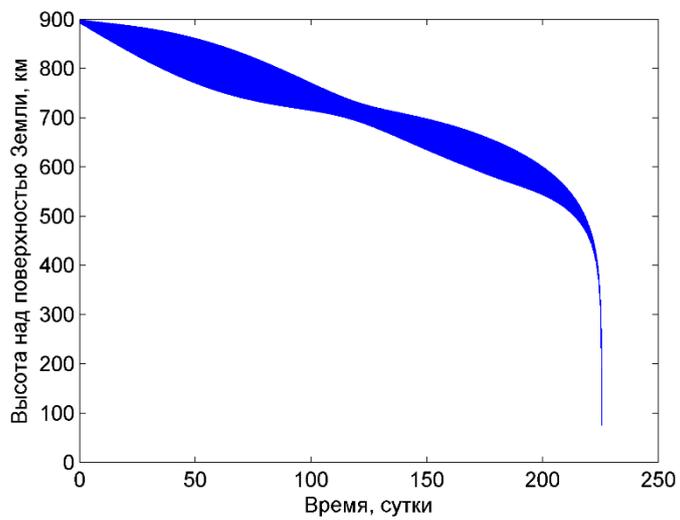
Рис. 17. Эволюция высоты ССО с MLTAN 14 часов



а) при среднем уровне СА

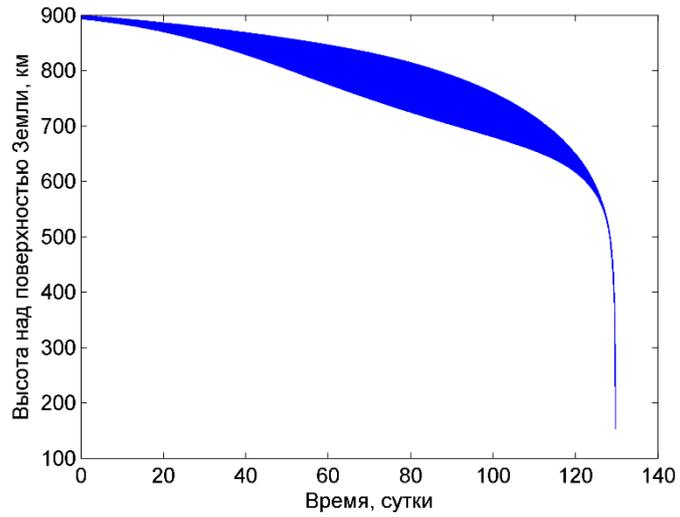


б) при высоком уровне СА

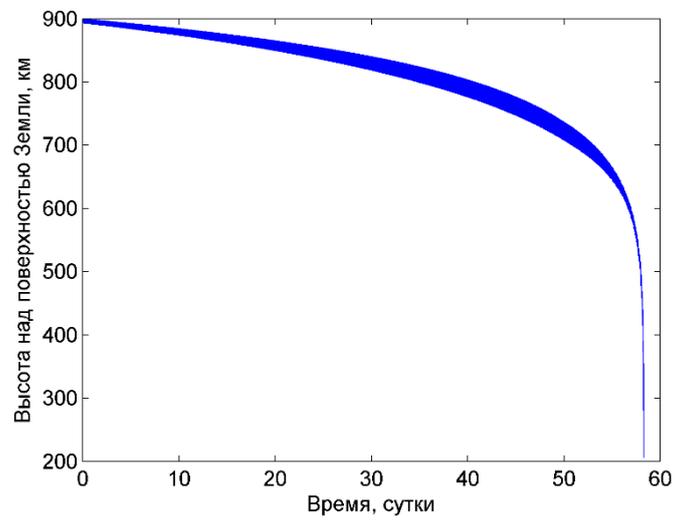


в) при низком уровне СА

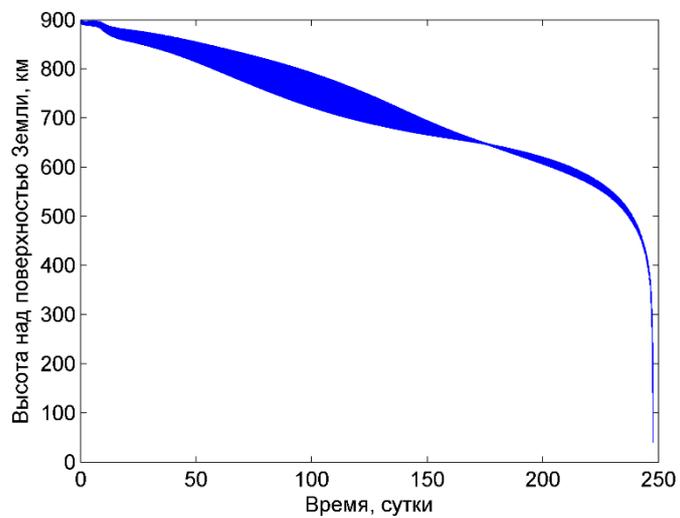
Рис. 18. Эволюция высоты ССО с MLTAN 16 часов



а) при среднем уровне СА



б) при высоком уровне СА



в) при низком уровне СА

Рис. 19. Эволюция высоты ССО с MLTAN 18 часов

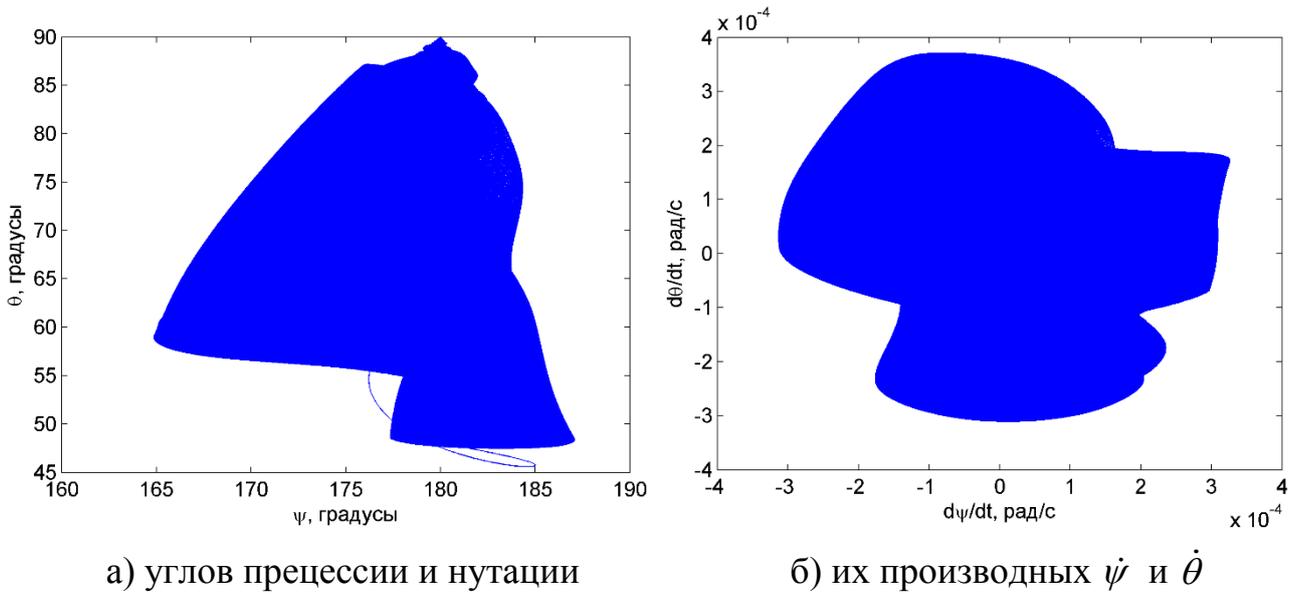


Рис. 20. Типичный характер эволюции квазигиперболоидальной прецессии. Расчет выполнен для ССО с MLTAN 14 часов при $\omega_\zeta = 3.3 \cdot 10^{-4}$ рад/с

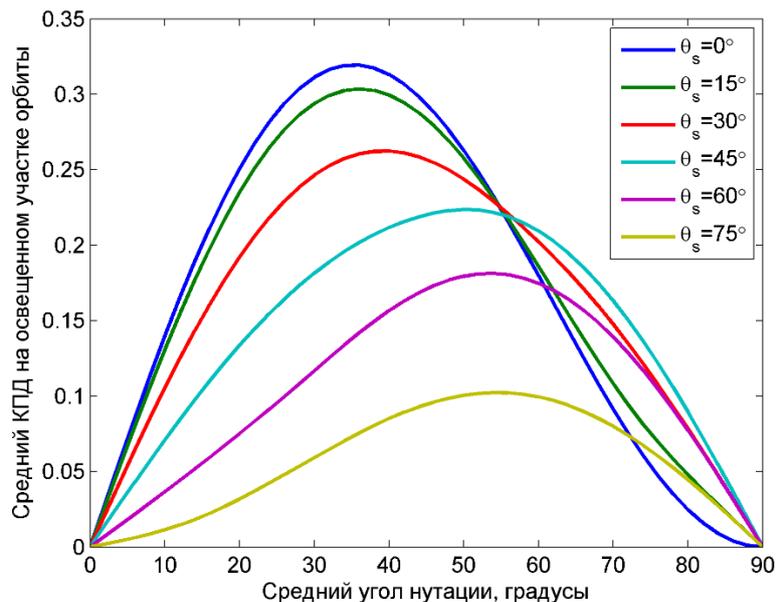


Рис. 21. КПД силы светового давления как функция среднего угла нутации

Рассмотрим теперь вопрос чувствительности квазигиперболоидальной прецессии к начальным условиям углового движения, а также геометрическим и оптическим параметрам паруса. Все определяется соотношением между внешними моментами. На орбитах не выше 900 км при нулевой или же небольшой положительной скорости закрутки ω_ζ имеется лишь один устойчивый квазипериодический режим – типа благоприятной для увода КА с орбиты квазигиперболоидальной прецессии. Переход к нему при нескольких различных начальных значениях угла нутации θ_0 , осуществляющийся максимум за 2-3 витка, показан на рисунках 24, а-г.

Отметим, что с малой отрицательной скоростью закрутки КА можно стабилизировать другой квазипериодический режим вблизи противоположной ориентации нормали паруса $\bar{\psi} = 0^\circ$, $90 < \bar{\theta} < 180^\circ$. По сути это – тоже квазигиперболоидальная прецессия, приводящая к уменьшению высоты орбиты аппарата, но модуль с бортовыми системами и полезной нагрузкой будет закрыт от Солнца мембраной паруса на всем витке (или, по крайней мере, большей его части). Поэтому панели солнечных батарей придется располагать с обратной стороны паруса, что не очень удобно по инженерным соображениям.

Изменение сдвига центра давления от центра масс КА с парусом влечет пропорциональное изменение светового и аэродинамического моментов; амплитуда отклонений углов прецессии и нутации от средних значений $\bar{\psi}$ и $\bar{\theta}$ убывает (см. рис. 25, а) или возрастает (рис. 25, б). В пределе, когда центр давления совпадает с центром масс, квазигиперболоидальная прецессия перейдет в классическую гиперболоидальную. Избыточно большое смещение d может повлечь разрушение квазипериодического режима вращения.

Деградация поверхности паруса, наступающая в жестких условиях космоса, выражается обычно в постепенном помутнении его мембраны – уменьшении коэффициента зеркального отражения и увеличении коэффициентов поглощения и диффузного отражения. Основное влияние деградации оказывает на угловое движение: момент силы светового давления пропорционален $1 - r_s$ и уже при незначительном снижении r_s резко растет, видоизменяя режим вращения (см. рис. 26). Чтобы избежать разрушения квазигиперболоидальной прецессии ввиду деградации паруса, достаточно соответствующим образом уменьшить смещение центра давления от центра масс. Подобная процедура довольно легко осуществима с *телескопическими механизмами развертывания* паруса, активно разрабатываемыми в настоящее время.

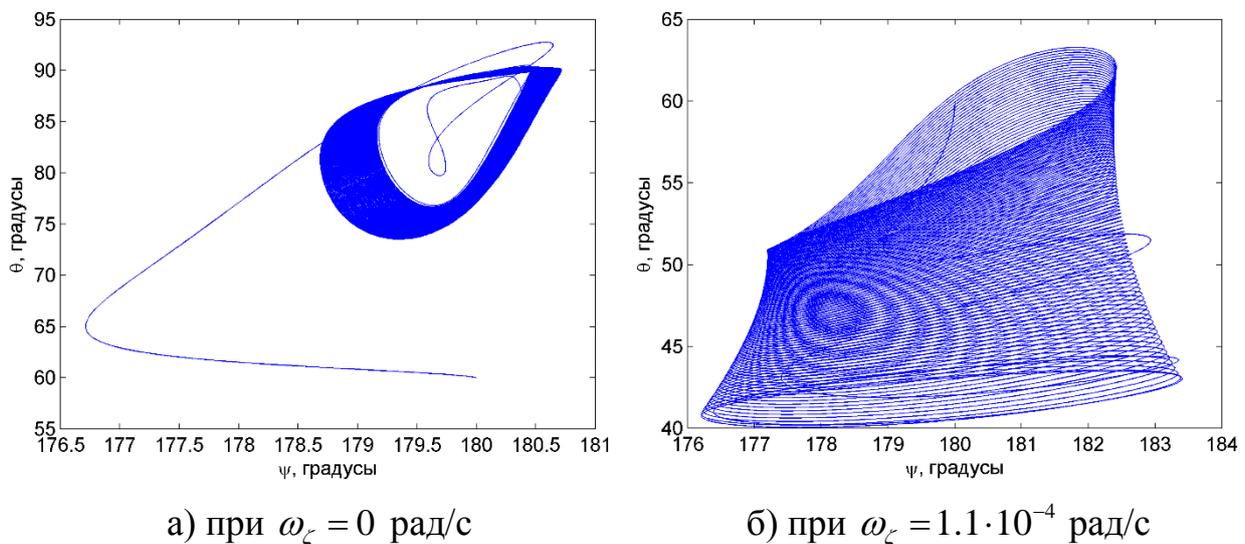


Рис. 22. Недельная эволюция углов прецессии и нутации.
Расчет выполнен для ССО с MLTAN 18 часов при среднем уровне СА

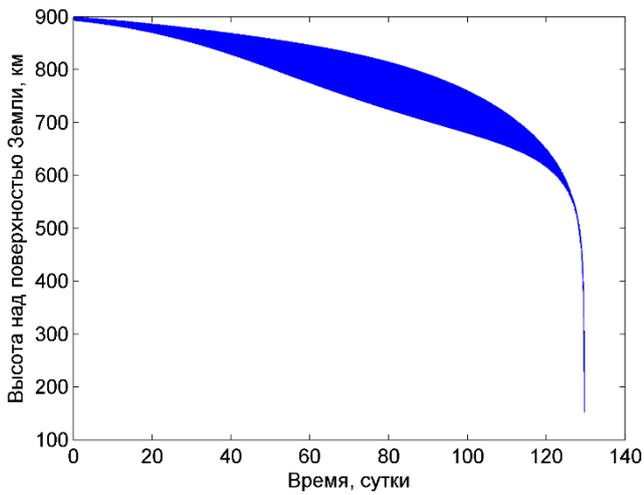
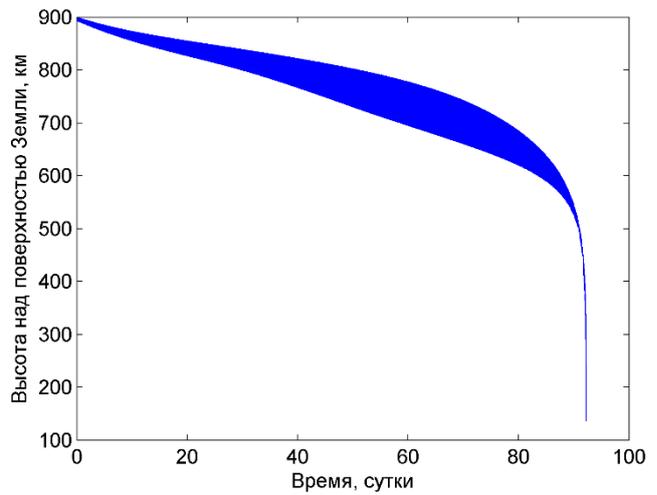
а) при $\omega_\zeta = 0$ рад/сб) при $\omega_\zeta = 1.1 \cdot 10^{-4}$ рад/с

Рис. 23. Эволюция высоты ССО с MLTAN 18 часов (средний уровень СА)

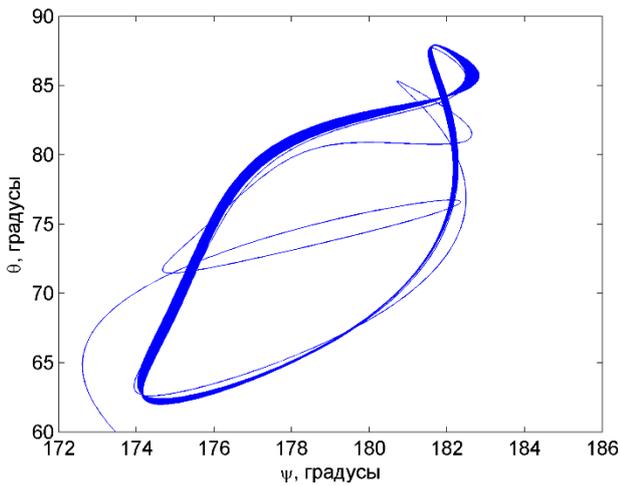
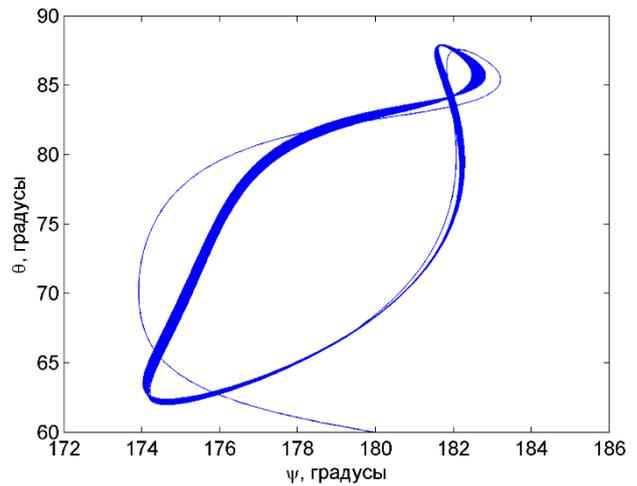
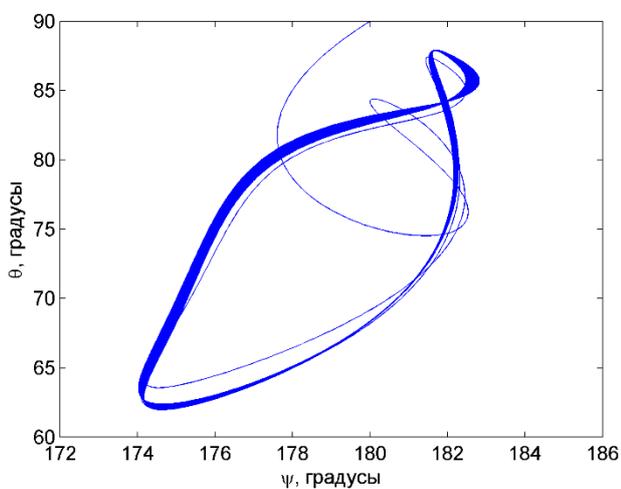
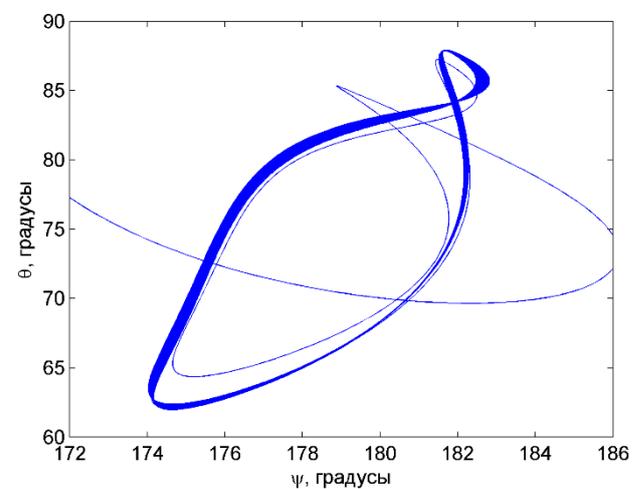
а) $\theta_0 = 30^\circ$ б) $\theta_0 = 60^\circ$ в) $\theta_0 = 90^\circ$ г) $\theta_0 = 120^\circ$

Рис. 24. Чувствительность режима вращения к начальным условиям

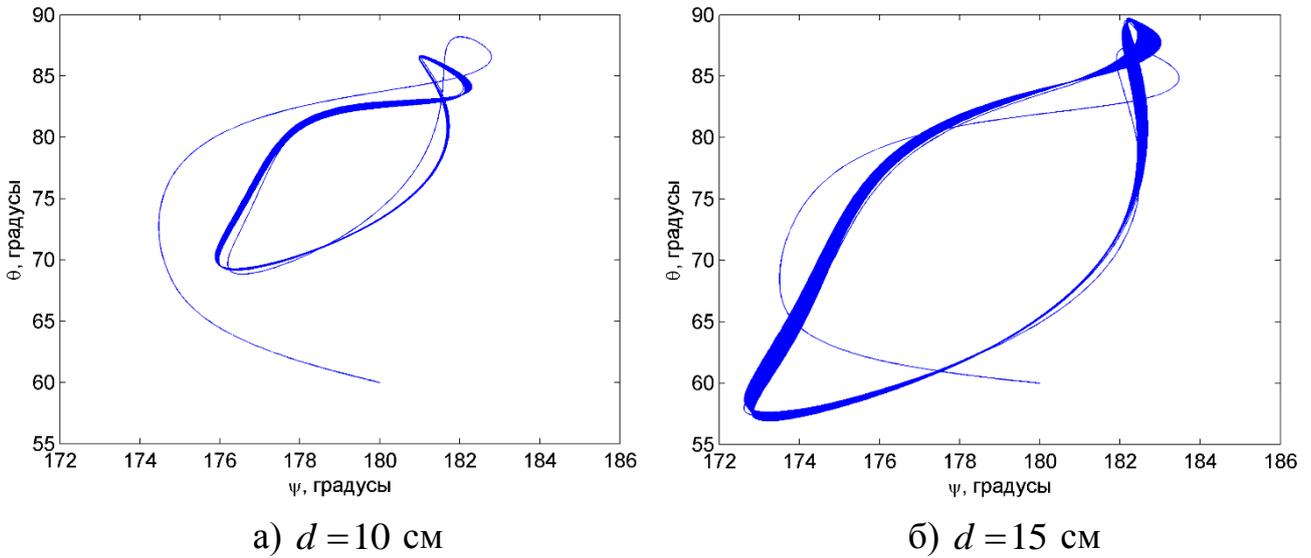


Рис. 25. Чувствительность режима вращения к смещению центра давления

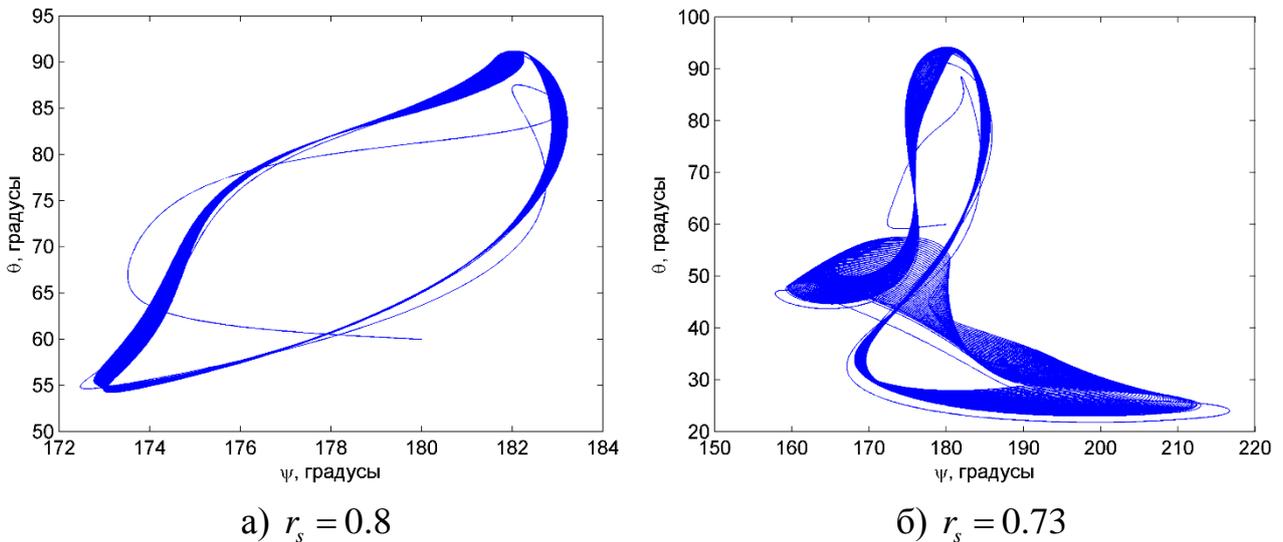
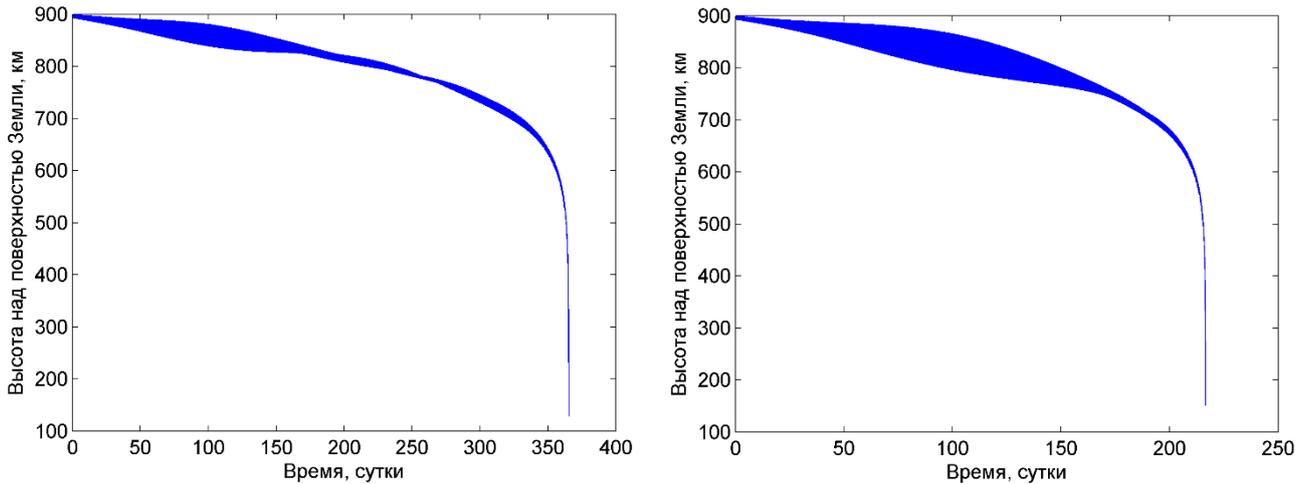


Рис. 26. Чувствительность режима вращения к деградации полотна паруса

До сих пор эффективность открытого способа деорбитинга обосновывалась качественными рассуждениями о превосходстве силы светового давления над атмосферным сопротивлением на высотах более 700 км. Настало время предъявить количественные показатели. Сравнение эволюции высоты орбиты спутника при неуправляемом вращении паруса (режим в миссии NanoSail-D2 [8]) и при стабилизации КА с парусом по набегающему потоку (режим в планирующихся сейчас миссиях LightSail-1, Gossamer и CubeSail [1]) для 18-часовой ССО (см. рис. 27, а-б) с эволюцией орбитальной высоты при квазигипербоидальной прецессии КА с парусом (см. рис. 23, а-б) показывает колоссальный выигрыш в скорости увода с орбиты. Длительность операции деорбитинга, даже с максимальным использованием атмосферного торможения, на 70-135 % больше, чем в предложенном режиме. Выгодность проявляется еще более выпукло при низком уровне СА, когда выигрыш в длительности доходит до 200 %.



а) с неуправляемым вращением паруса б) при стабилизации паруса по потоку

Рис. 27. Эволюция высоты ССО с MLTAN 18 часов (средний уровень СА)

Преимущество квазигиперболаидальной прецессии состоит не только в выигрыше в скорости увода КА с орбиты, но и, что не менее важно, в экономичности управления угловым движением КА с парусом, требуемого для поддержания благоприятного квазипериодического режима. Максимальная величина демпфирующего момента примерно равна $2 \cdot 10^{-6}$ Нм и может легко обеспечиваться даже миниатюрными токовыми катушками с дипольным моментом 0.2 Ам^2 . Неполная управляемость угловым движением, связанная с невозможностью создания с помощью катушек момента вдоль местного вектора геомагнитной индукции, не отражается критически на устойчивости квазипериодического режима. На рисунке 28, а изображена недельная эволюция углов прецессии и нутации с демпфирующим моментом

$$\begin{aligned} T_{\xi} &= -k_d I_t (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi |\cos u|), \\ T_{\eta} &= -k_d I_t (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi |\cos u|), \end{aligned} \quad (40)$$

где $k_d = k_{\psi} = k_{\theta} = 2 \cdot 10^{-3}$ Нмс. Поскольку все ССО – околополярные орбиты, вектор индукции на всем витке лежит практически в плоскости орбиты и вращается в ОСК с орбитальной частотой. Добавление множителя $|\cos u|$ имитирует плохую управляемость по углу нутации вблизи точек орбиты $u = \pi/2$, $u = 3\pi/2$. Рисунок 28, б, демонстрирующий эволюцию высоты орбиты КА с управлением (40), полностью идентичен рисунку 18, а.

Расход электроэнергии на генерацию демпфирующего момента двумя токовыми катушками, расположенными вдоль поперечных осей КА, не будут превышать 0.5 Вт, что гораздо ниже требований режима стабилизации КА по потоку.

Работает предложенный механизм и в задаче увода с других типов орбит, не являющихся солнечно-синхронными. Условия освещенности для любой орбиты,

способные существенно изменяться со временем, будут, однако, в любой момент близки к одному из рассмотренных случаев ССО. Кардинальное изменение условий освещенности орбиты спутника, наподобие перехода Солнца в другое полупространство относительно ее плоскости, может, правда, вынудить осуществить перенастройку среднего значения угла нутации $\bar{\theta}$, но она легко выполнима с помощью управления скоростью закрутки или варьирования смещения центра давления от центра масс КА с парусом.

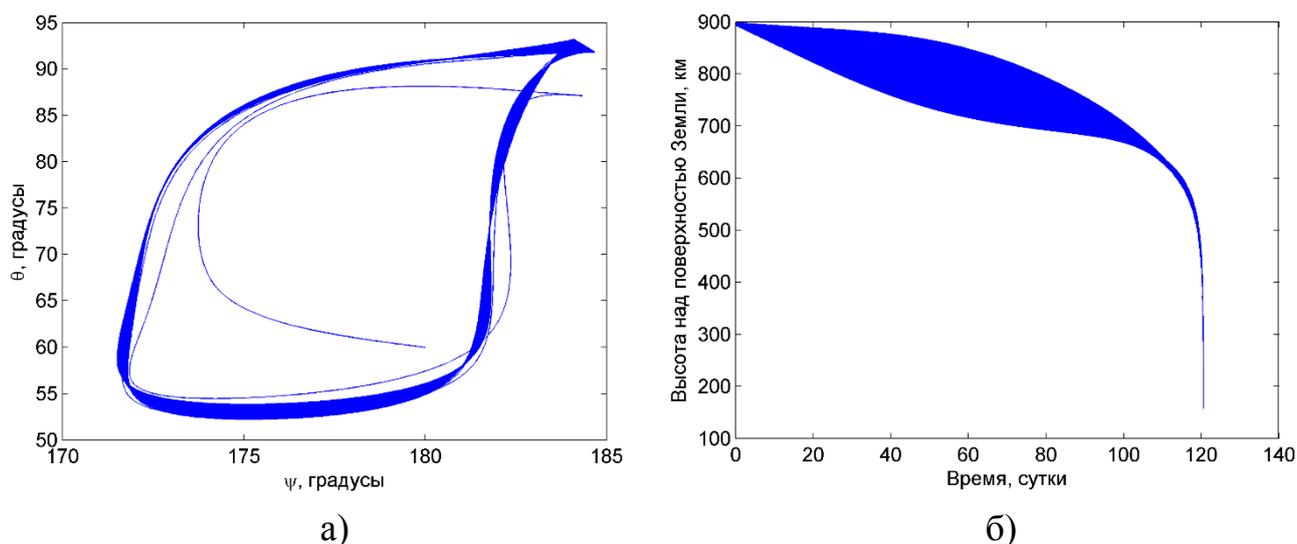


Рис. 28. Недельная эволюция углов прецессии и нутации (а) и эволюция высоты орбиты (б) спутника с активной магнитной системой ориентации. Расчет выполнен для ССО с MLTAN 16 часов при среднем уровне СА

Заключение

Эффективное использование естественных внешних моментов – гравитационного, светового давления и аэродинамического – позволяет реализовывать режим квазигиперболоидальной прецессии КА с парусом с минимальными энергетическими затратами. Быстрота прохождения спутником в процессе деорбитинга наиболее загрязненного эшелона высот 700-1000 км выгодно отличает открытый способ увода от привычной стабилизации паруса по набегающему потоку: резко сокращается произведение длительности полета на эффективную площадь миделева сечения, причем по причине уменьшения как первого, так и второго множителя. Пропорционально сокращается риск столкновения аппарата с фрагментами космического мусора. Кроме того, в результате ускорения операции увода удлиняется на соответствующую величину *срок эксплуатации спутника (срок его активного существования за вычетом продолжительности деорбитинга)*, уменьшается вероятность выхода из строя отдельных бортовых систем в процессе операции, понижаются экономические затраты на ее наземное сопровождение.

Режим квазигиперболоидальной прецессии обладает универсальностью по отношению к массогабаритным параметрам КА и паруса. Увеличение массы аппарата или уменьшение площади мембраны паруса приведет только к трансформации квазигиперболоидальной прецессии в классическую гиперболоидальную. Поэтому открытый способ увода применим в равной мере и для микро- и миниспутников. Вместо паруса могут также использоваться разворачиваемые панели солнечных батарей со схожими оптическими свойствами, что еще заметнее расширяет область применимости предложенной методики деорбитинга.

Литература

1. V. Lappas et al. CubeSail: A low cost CubeSat based solar sail demonstration mission // *Advances in Space Research*. — 2011. — Vol. 48. — No. 11. — P. 1890–1901. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2011.05.033>
2. C.R. McInnes. *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications*. — Chichester, UK: Praxis Publishing Ltd. — 1999. — 296 p.
3. Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе. *Основы механики космического полета*. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. — 1990. — 448 с.
4. И.Е. Зараменских, М.Ю. Овчинников. Использование давления солнечной радиации для компенсации влияния полярного сжатия Земли на относительное движение формации спутников // *Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша*. — 2009. — № 5. — 23 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-5>
5. П. Эскобал. *Методы определения орбит*. — М.: Мир. — 1970. — 472 с.
6. D.A. Lawrence, M.S. Whorton. Solar Sail Dynamics and Coning Control in Circular Orbits // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2009. — Vol. 32. — No. 3. — P. 974–985. — URL: <http://dx.doi.org/10.2514/1.35970>
7. I. Goldhirsch, P.L. Sulem, S.A. Orszag. Stability and Lyapunov stability of dynamical systems: A differential approach and a numerical method // *Physica D*. — 1987. — Vol. 27. — No. 3. — P. 311–337. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(87\)90034-0](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(87)90034-0)
8. A.F. Heaton, B.F. Faller, C.K. Katan. NanoSail-D Orbital and Attitude Dynamics // *Advances in Solar Sailing*, ed. by M. Macdonald. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 2014. — P. 95–113.