



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 29 за 2015 г.



Вашковьяк М.А.

Качественные особенности
эволюции некоторых
полярных спутниковых
орбит

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вашковьяк М.А. Качественные особенности эволюции некоторых полярных спутниковых орбит // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 29. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-29>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.А. Вашковьяк

**Качественные особенности эволюции
некоторых полярных спутниковых
орбит**

Москва — 2015

Вашковьяк М.А.

Качественные особенности эволюции некоторых полярных спутниковых орбит

Рассмотрены два частных случая задачи о вековых возмущениях в элементах орбиты спутника пренебрежимо малой массы, вызываемых совместным влиянием сжатия центральной планеты, притяжения ее наиболее массивных (или главных) спутников и Солнца. Эти случаи принадлежат к числу интегрируемых в общей неинтегрируемой эволюционной задаче. Первый из них реализуется, когда плоскость спутниковой орбиты и ось вращения планеты лежат в ее орбитальной плоскости. Второй – когда плоскость спутниковой орбиты ортогональна линии пересечения плоскостей экватора планеты и ее орбиты. Соответствующие частные решения и отвечают тем полярным спутниковым орбитам, для которых в данной работе описаны основные качественные особенности эволюции эксцентриситета и аргумента перицентра. В фазовой плоскости этих элементов построены семейства интегральных кривых для спутниковых систем Юпитера, Сатурна и Урана.

Ключевые слова: вековые возмущения, полярные спутниковые орбиты.

Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak

Qualitative peculiarities of evolution for some satellite polar orbits.

Two special cases of problem are considered on secular perturbations in the elements of orbit of satellite negligible mass, caused by joint influence of oblateness of central planet, attraction of its most massive (or main) satellites and Sun. These cases belong to the number integrable ones in a general nonintegrable evolutionary problem. First from them realized when the plane of satellite orbit and rotational axis of planet lie in its orbital plane. Second - when the plane of satellite orbit is orthogonal to the cross line of equatorial planet's plane and its orbital one. In present work main qualitative peculiarities of evolution of eccentricity and of pericenter argument are described for such satellite polar orbits. The families of integral curves in phase plane of these elements are constructed for satellite systems of Jupiter, Saturn and Uranus.

Key words: secular perturbations, polar satellite orbits.

1. Введение и постановка задачи

Настоящая работа является продолжением исследования интегрируемых случаев задачи об эволюции орбиты спутника пренебрежимо малой массы под действием совместных гравитационных возмущений от сжатия центральной планеты, притяжения её главных спутников и Солнца (Вашковьяк, 2015). Некоторые из описанных случаев могут оказаться полезными при рассмотрении одной интересной особенности спутниковых систем всех планет-гигантов. Эта особенность связана с существованием в околопланетном пространстве зон «избегания» малыми небесными телами или зон, разделяющих множества орбит регулярных и нерегулярных спутников. В этих зонах влияние указанных возмущений попарно или в совокупности примерно сравнимо по величине.

Математической основой исследования являются так называемые вековые уравнения. В первом приближении теории возмущений – это дифференциальные уравнения для изменения элементов орбиты, в которых полная возмущающая функция R заменена ее вековой частью W . При предполагаемом отсутствии взаимных орбитальных резонансов она находится с помощью независимого осреднения R по средним планетоцентрическим долготам Солнца, главных спутников и исследуемого (пробного или гипотетического) спутника. Функция W зависит от пяти планетоцентрических кеплеровских элементов орбиты: a – большой полуоси, e – эксцентриситета, i – наклона, ω – аргумента перицентра и Ω – долготы восходящего узла. Угловые элементы в данной задаче удобно отнести к плоскости планетного экватора и линии ее пересечения с плоскостью гелиоцентрической орбиты планеты (или планетоцентрической орбиты Солнца). Для связности изложения мы позволим себе повторить ряд формул и обозначений вышеупомянутой работы, которую для краткости будем называть исходной.

Функция W , состоит из трёх слагаемых, отвечающих различным названным возмущающим факторам, а два первых интеграла эволюционной системы имеют вид

$$a = \text{const}, \quad W = W_0 + W_1 + W_2 = \text{const}. \quad (1)$$

Кроме элементов спутниковой орбиты, используются следующие обозначения:

μ_0, μ_j, μ' – произведения гравитационной постоянной на массы, соответственно, планеты, её j -го главного спутника и Солнца;

a_0, a_j, a' – соответственно, средний экваториальный радиус планеты, большая полуось орбиты её j -го главного спутника и планетоцентрической орбиты Солнца;

c_{20} – коэффициент при второй зональной гармонике гравитационного поля планеты;

i_{orb}, ω_{orb} - соответственно, наклонение и аргумент перицентра орбиты пробного спутника, отнесенные к плоскости орбиты планеты.

В данной работе (как и в исходной) эволюционная задача рассматривается с учетом главных членов вековых частей возмущающих функций, выражения для которых приводятся ниже.

Функция

$$W_0 = \frac{3\mu_0 a_0^2 c_{20}}{4a^3} (1-e^2)^{-3/2} (\sin^2 i - 2/3) \quad (2)$$

описывает вековое влияние второй зональной гармоник гравитационного поля планеты.

Функция

$$W_1 = \frac{3\mu' a^2}{16a'^3} \left\{ \begin{array}{l} 2e^2 - (2 + 3e^2) \left[\sin^2 i + \sin^2 I (\cos 2i + \sin^2 i \sin^2 \Omega) - \frac{1}{2} \sin 2I \sin 2i \cos \Omega \right] + \\ + 5e^2 \cos 2\omega \left[\sin^2 i + \sin^2 I (\cos 2i + (\sin^2 i - 2) \sin^2 \Omega) - \frac{1}{2} \sin 2I \sin 2i \cos \Omega \right] + \\ + 5e^2 \sin 2\omega \left[-\sin^2 I \cos i \sin 2\Omega + \sin 2I \sin i \sin \Omega \right] \end{array} \right\}. \quad (3)$$

описывает влияние вековых солнечных возмущений в квадратичном приближении относительно a/a' или – в приближении Хилла (параметр I – это угол между экваториальной плоскостью планеты и плоскостью её орбиты).

Функция W_2 описывает вековые возмущения от главных спутников планеты, которые в нашем рассмотрении предполагаются не взаимодействующими между собой. Эта функция определяется формулой

$$W_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(E) (1 - e \cos E) dE, \quad (4)$$

где E – эксцентрическая аномалия пробного спутника, а V в динамической интерпретации представляет собой силовую функцию системы конечного числа J гауссовых колец с массами, равными массам спутников. В упрощенной модели мы предполагаем, что орбиты всех главных спутников лежат в экваториальной плоскости планеты и имеют нулевые эксцентриситеты. При этом функция V может быть представлена гипергеометрическим рядом

$$V = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{r^2 + a_j^2}} F \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{4a_j^2 (r^2 - z^2)}{(r^2 + a_j^2)^2} \right) = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{r^2 + a_j^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\frac{4a_j^2 (r^2 - z^2)}{(r^2 + a_j^2)^2} \right]^n, \quad (5)$$

где

$$r = a(1 - e \cos E), \quad z = a \sin i [(\cos E - e) \sin \omega + (1 - e^2)^{1/2} \cos \omega \sin E], \quad (6)$$

B_n – постоянные числовые коэффициенты, определяемые общей или рекуррентной формулами

$$B_n = \frac{(4n)!}{2^{6n} (n!)^2 (2n)!}; \quad B_n = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{16n^2}\right) B_{n-1}, \quad n > 0, \quad B_0 = 1. \quad (7)$$

Можно показать, что функция W_2 зависит от e , i и ω , соответственно, лишь посредством комбинаций e^2 , $\sin^2 i$ и $e^2 \sin^2 i \cos 2\omega$. Указанные свойства справедливы для любых значений эксцентриситета и наклона орбиты пробного спутника, а выражение для функции W_2 в общем виде может быть представлено следующей формулой

$$W_2 = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{a^2 + a_j^2}} \sum_k P_k^{(j)}(a, a_j) Q_k^{(j)}(e^2, \sin^2 i, e^2 \sin^2 i \cos 2\omega), \quad (8)$$

где $P_k^{(j)}, Q_k^{(j)}$ – суть некоторые рациональные функции своих аргументов.

В исходной работе было использовано упрощение, позволившее для умеренных значений эксцентриситета и синуса наклона ограничиться в выражении (8) частичной суммой ряда по степеням этих малых параметров. Поэтому два из семи указанных интегрируемых случаев (IV и VI) не могли получить правомерного рассмотрения, т.к. для них обоих $\sin i = 1$.

Целью настоящей работы является получение аналитического выражения функции W_2 для $i = 90^\circ$ и умеренных значений эксцентриситета, а также проведение на его основе качественного исследования двух указанных интегрируемых случаев, т.е. системы дифференциальных уравнений Лагранжа в элементах с полной осредненной возмущающей функцией W .

2. Выражение функции W для полярных орбит

Для получения аналитического выражения функции W_2 необходимо выполнить интегрирование в формуле (4), положив в формуле (6) $\sin i = 1$ и учесть, как и в исходной работе, лишь слагаемые порядка e^2 и e^4 . Заметим, что ее выражение для произвольного i , справедливое, в частности, и для $i = 90^\circ$, получено в работе (Вашковьяк, 1976), однако лишь с точностью до e^2 , включительно.

Проведение необходимых стандартных, но несколько громоздких преобразований приводит к следующему выражению

$$W_2 = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{a^2 + a_j^2}} \left(P_1^{(j)} e^2 + P_2^{(j)} e^4 + P_3^{(j)} e^4 \cos 2\omega + P_4^{(j)} e^4 \cos 4\omega + P_5^{(j)} e^2 \cos 2\omega \right). \quad (9)$$

Для представления функций $P_k^{(j)}$ используются ряды по степеням «единого» параметра

$$\zeta_j = \left(\frac{2aa_j}{a^2 + a_j^2} \right)^2, \quad (10)$$

остающегося меньшим единицы для любого соотношения между большими полуосями a и a_j . Этот параметр был введен для получения единого аналитического выражения вековой части возмущающей функции в работе (Вашковьяк, 2013). Само подобное представление требует введения некоторых вспомогательных функций, играющих роль коэффициентов Лапласа в классических разложениях. Для полярных орбит, рассматриваемых в данной работе, использованы следующие функции

$$C_j^{(m)} = \delta_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{n+1} G_n \zeta_j^n, \quad D_j^{(m)} = \frac{1}{2} \delta_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m}{(n+1)(n+2)} G_n \zeta_j^n, \quad (11)$$

где $\delta_{m0} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$, а постоянные числовые коэффициенты коэффициенты G_n

определяются конечной либо рекуррентной формулами

$$G_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} B_n = \frac{(4n)!}{2^{8n} (n!)^4}; \quad G_n = G_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \left(1 - \frac{3}{4n}\right), \quad G_0 = 1. \quad (12)$$

Выражение для функций $P_k^{(j)}$ имеет общий вид

$$P_k^{(j)}(a, a_j) = \sum_{m=0}^{M_k} g_k^{(m)} p_{k,m}(\alpha_j) C_j^{(m)} \quad (k \neq 4); \quad P_k^{(j)}(a, a_j) = \sum_{m=0}^{M_k} g_k^{(m)} p_{k,m}(\alpha_j) D_j^{(m)}. \quad (k = 4). \quad (13)$$

Функции $p_{k,m}(\alpha_j)$ представляют собой полиномы степени S_k

$$p_{k,m}(\alpha_j) = \sum_{s=0}^{S_k} p_{k,m}^{(s)} \alpha_j^s \quad (14)$$

относительно безразмерной величины (функции больших полуосей a и a_j)

$$\alpha_j = \frac{a^2}{a_j^2 + a^2}, \quad (15)$$

Величины $M_k, S_k, p_{k,m}^{(s)}$ являются целыми числами, а $g_k^{(m)}$ могут быть и дробными.

Для того чтобы не загромождать текст, весь числовой табличный материал вынесен в приложение.

В исходной работе были введены постоянные параметры

$$\alpha_0 = -\frac{3}{16} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 c_{20}, \quad \alpha_{k>0} = \frac{a}{\mu_0} S_k, \quad S_k = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{a^2 + a_j^2}} P_k^{(j)}(a, a_j), \quad (1 \leq k \leq 5), \quad (16)$$

$$\beta = \frac{3}{16} \frac{\mu'}{\mu_0} \left(\frac{a}{a'} \right)^3, \quad \gamma_k = \alpha_k / \beta, \quad (0 \leq k \leq 5) \quad (17)$$

и новая независимая переменная

$$\tau = \beta n(t - t_0), \quad (18)$$

где $n = \sqrt{\mu_0 / a^3}$ - среднее движение пробного спутника, t_0 и t - начальный и текущий момент времени, соответственно. Эти параметры и нормированную возмущающую функцию

$$W_N = \frac{W}{\beta n^2 a^2} = \frac{Wa}{\beta \mu_0} \quad (19)$$

мы и будем использовать в дальнейшем.

После выполненных предварительных преобразований по нахождению функции W_2 и подстановки $\sin i = 1$ в формулы (2), (3) полная нормированная возмущающая функция для полярных орбит принимает следующий вид

$$\begin{aligned} W_N = & -\gamma_0 \left(2e^2 + \frac{5}{2} e^4 \right) + \gamma_1 e^2 + \gamma_2 e^4 + \gamma_3 e^4 \cos 2\omega + \gamma_4 e^4 \cos 4\omega + \gamma_5 e^2 \cos 2\omega + \\ & + 5e^2 \cos 2\omega \left[1 - \sin^2 I (1 + \sin^2 \Omega) \right] + 5e^2 \sin 2\omega \sin 2I \sin \Omega + \\ & + 2e^2 - (2 + 3e^2) (1 - \sin^2 I \cos^2 \Omega) = \text{const.} \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь в части, пропорциональной γ_0 , опущена константа, а также слагаемые порядка малости e^6 и выше. В следующем разделе будут в отдельности рассмотрены два случая различной взаимно ортогональной ориентации полярных орбит с $\cos i = 0$:

1. $\sin \Omega = 0$ при $\cos I = 0$ (плоскость экватора планеты ортогональна плоскости ее гелиоцентрической орбиты, а спутник движется в этой плоскости, $\sin i_{\text{orb}} = 0$).
2. $\cos \Omega = 0$ при произвольном угле I (плоскость орбиты спутника ортогональна линии их пересечения).

В нумерации исходной работы это случаи IV и VI, соответственно. Изначально данная нумерация интегрируемых случаев была введена в работе (Лидов, 1974) где эволюционная задача рассмотрена с учетом сжатия центральной планеты и притяжения Солнца, т.е. без учета притяжения массивных спутников или при $\gamma_k = 0$ ($1 \leq k \leq 5$).

Эволюционная система задачи упрощается, поскольку для полярных орбит при $\cos i = 0$ в обоих случаях правые части двух уравнений обращаются в нуль

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{d\Omega}{d\tau} = 0. \quad (21)$$

Упрощенная система сводится к двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{de}{d\tau} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial W_N}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial W_N}{\partial e} \quad (22)$$

с первым интегралом (20), наличие которого и позволяет провести ее качественное исследование и, в принципе, получить необходимые квадратуры.

В силу многопараметричности задачи ее исследование для произвольных значений I и γ_k ($0 \leq k \leq 5$) представляется затруднительным и не слишком оправданным. Поэтому, так же как и в нашей исходной работе, далее будет рассмотрена, главным образом, спутниковая система Урана со своими конкретными физическими параметрами. Как было уже отмечено во введении, наибольший интерес представляет изучение той области околопланетного пространства, в которой влияние на спутник указанных возмущений попарно или в совокупности сравнимо по величине. На рис. 1 показаны зависимости коэффициентов γ_k от большой полуоси орбиты спутника Урана. Цифры рядом с линиями соответствуют шести значениям индекса k . В представленном диапазоне больших полуосей реальных спутников не наблюдается, поэтому речь может идти лишь о спутниках гипотетических. Все кривые $\gamma_k(a)$, кроме $\gamma_0(a)$, уходят в минус бесконечность, когда a стремится к $a_5 \approx 0.6$ млн.км – большой полуоси наиболее далекого из главных спутников Урана.

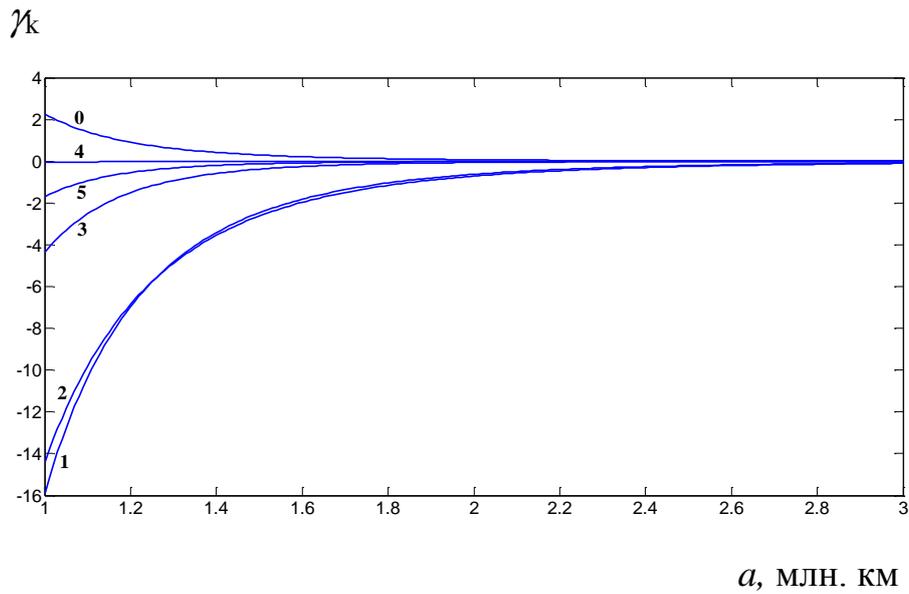


Рис. 1. Зависимости γ_k от большой полуоси

На рис. 2 для большей детализации эти же зависимости даны в логарифмическом масштабе. Они дают представление о порядках возмущений от сжатия и массивных спутников по сравнению с солнечными - горизонтальной прямой, соответствующей нулевому значению логарифма. Видно, что в данном диапазоне больших полуосей возмущающее влияние массивных спутников Урана существенно превосходит влияние его сжатия.

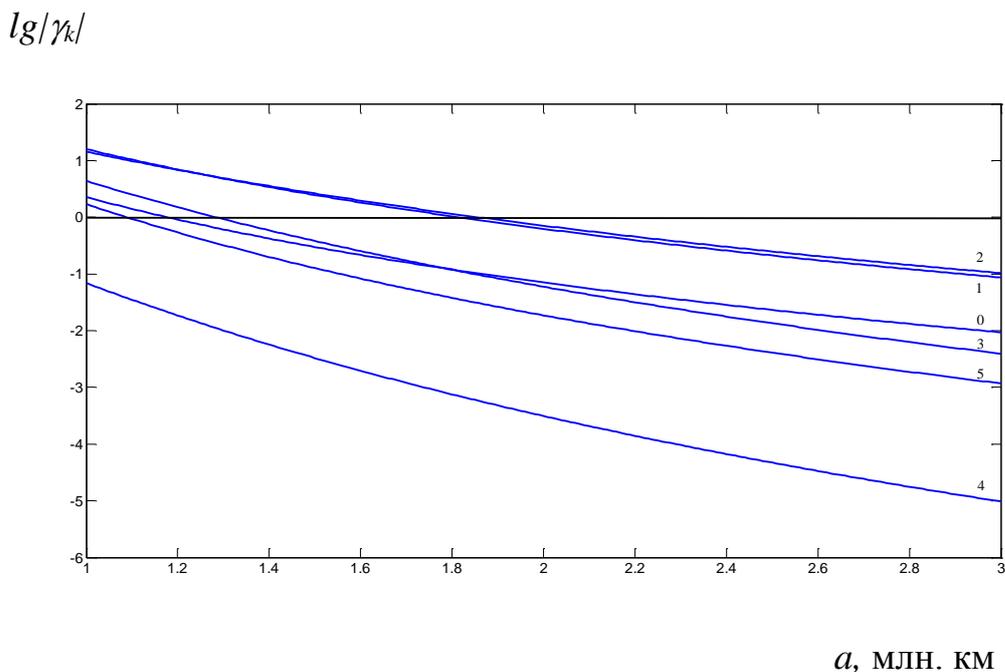


Рис. 2. Зависимости $lg|\gamma_k|$ от большой полуоси

Поскольку в формуле (9) не учитываются слагаемые порядка малости e^6 и выше, неизбежно возникает необходимость оценки пригодности полученного выражения функции W_2 для немалых значений эксцентриситета. Такая оценка проведена путем сравнительных вычислений этой функции двумя способами – предлагаемым аналитическим (W_a) и с помощью численного нахождения квадратуры (4) (W_c), в принципе, выполнимого для произвольного $e < 1$. На рис. 3 представлены результаты такого сравнения в том же диапазоне больших полуосей. Числа над линиями соответствуют двум граничным значениям ω в градусах. Сплошные линии соответствуют аналитическому методу, а штриховые – численному. При этом для корректности сравнения в функции W_c (так же, как и в W_a) опущены слагаемые, не зависящие от e . Для сравнения выбрано значение эксцентриситета $e = 0.4$, заметно отличающееся от нуля. При этом отброшенные слагаемые возмущающей функции, имеющие порядок e^6 , по величине составляют примерно 0.0041. Нам представляется, что для исследования эволюционной задачи вполне приемлемой является точность даже порядка 0.01, а качественные особенности эволюции спутниковой орбиты будут адекватны и при несколько больших значениях $e \sim 0.5 \div 0.7$.

$W_a - W_c$

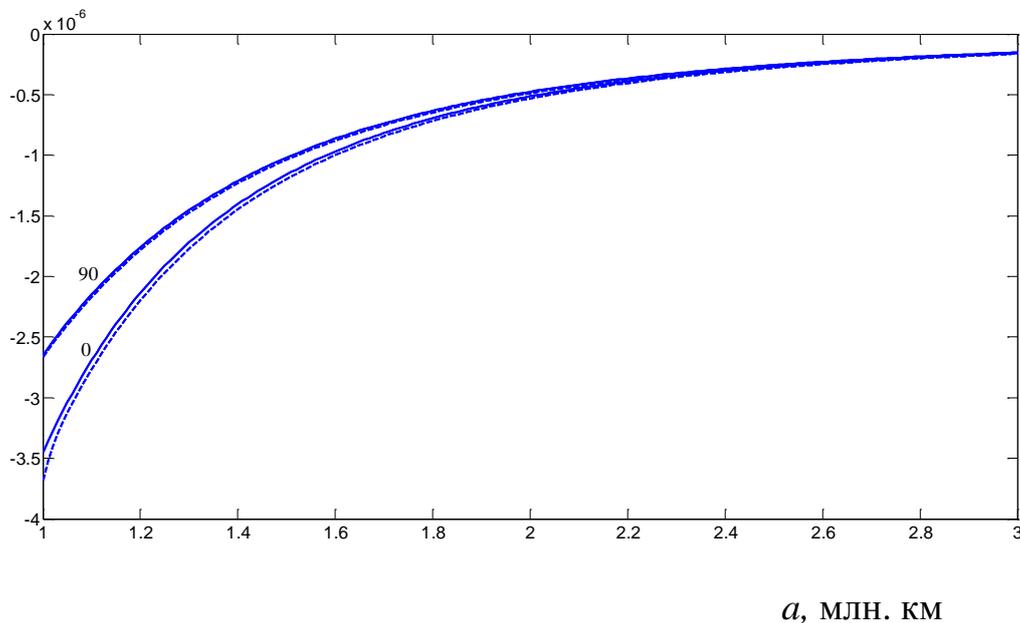


Рис. 3. Зависимости от большой полуоси функций W , полученных различными методами.

В таблице 1 приведены максимальные по a и ω значения модуля разностей, полученных аналитическим и численным методами, что дает числовые оценки абсолютной погрешности нахождения функции W для различных значений

эксцентриситета. На основании данных этой таблицы и рис. 3 максимум по a и ω относительной погрешности W для $e = 0.4$ может быть оценен величиной порядка 0.05.

Таблица 1.

Абсолютная погрешность определения функции W

e	e^6	$\max_{a,\omega} W_a - W_c $
0.05	$1.6 \cdot 10^{-8}$	$4.9 \cdot 10^{-11}$
0.1	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$5.5 \cdot 10^{-11}$
0.2	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$
0.3	$7.3 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$
0.4	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$

3. Качественное исследование случая IV

При $\cos I = 0$, $\cos i = 0$ и $\sin \Omega = 0$ функция W_N (и первый интеграл) имеет следующий вид

$$W_N = A(\omega)e^4 + B(\omega)e^2 = c, \quad (23)$$

где
$$A(\omega) = -\frac{5}{2}\gamma_0 + \gamma_2 + \gamma_3 \cos 2\omega + \gamma_4 \cos 4\omega, \quad (24)$$

$$B(\omega) = 2(1 - \gamma_0) + \gamma_1 + \gamma_5 \cos 2\omega.$$

Из интеграла (23) нетрудно найти зависимость e от ω и постоянной интеграла c , определяемой начальными значениями e_0 и ω_0 при $\tau = 0$

$$c = A(\omega_0)e_0^4 + B(\omega_0)e_0^2. \quad (25)$$

Конечно, кроме ω , функции A и B зависят от большой полуоси a посредством γ_k . Изменение эксцентриситета и аргумента перицентра описывается уравнениями

$$\frac{de}{d\tau} = 2\sqrt{1-e^2} g_1(e, \omega), \quad \frac{d\omega}{d\tau} = 2\sqrt{1-e^2} g_2(e, \omega), \quad (26)$$

где

$$g_1(e, \omega) = e[\gamma_5 + e^2(\gamma_3 + 4\gamma_4 \cos 2\omega)] \sin 2\omega, \quad g_2(e, \omega) = B(\omega) + 2A(\omega)e^2. \quad (27)$$

Наличие первого интеграла (23), в принципе, позволяет получить решение задачи в квадратурах. Для этого необходимо, найти из него зависимость $\omega(e)$ и подставить ее в первое из уравнений (26). После этого для переменной $x = e^2$ получается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка. Однако, в данной работе мы проводим лишь качественное исследование эволюционной системы.

Стационарные решения системы (26) существуют только при $\sin 2\omega^* = 0$ или при $\omega^* = \pm \pi/2, 0, \pi$, поскольку из рис. 1 следует, что $\gamma_k < 0$ для всех $1 \leq k \leq 5$ и $\gamma_3 \pm 4\gamma_4 < 0$. Особые (стационарные) значения эксцентриситета в фазовой плоскости (ω, e) определяются формулой

$$(e^*)^2 = -\frac{B(\omega^*)}{2A(\omega^*)} \quad (28)$$

Как для $\omega^* = \pm \pi/2$, так и для $\omega^* = 0, \pi$ в отличие от случая $\gamma_k = 0$ ($1 \leq k \leq 5$), существуют относительно небольшие интервалы значений большой полуоси, в которых $(e^*)^2 > 0$ и $0 < e^* < 1$. На рис. 4 показаны зависимости от большой полуоси стационарных значений эксцентриситета в диапазоне их существования (числа рядом с линиями соответствуют двум значениям ω^* в градусах). На оси абсцисс отмечены четыре специальных значения большой полуоси a , отвечающие смене структур семейств фазовых траекторий в плоскости (ω, e) . Можно показать, что особая точка при $\omega^* = 0, \pi$ ($\cos 2\omega^* = 1$) является седлом, а при $\omega^* = \pm \pi/2$ ($\cos 2\omega^* = -1$) – центром. Седловым точкам отвечают значения постоянной интеграла

$$c_s = 0 \quad \text{и} \quad c_s = -\frac{B(0)^2}{2A(0)}, \quad (29)$$

а уравнения одной или двух ветвей сепаратрис получаются из (23) при $c = c_s$

$$e^2 = \frac{-B(\omega) \pm \sqrt{B(\omega)^2 + 4A(\omega)c_s}}{2A(\omega)} \quad (30)$$

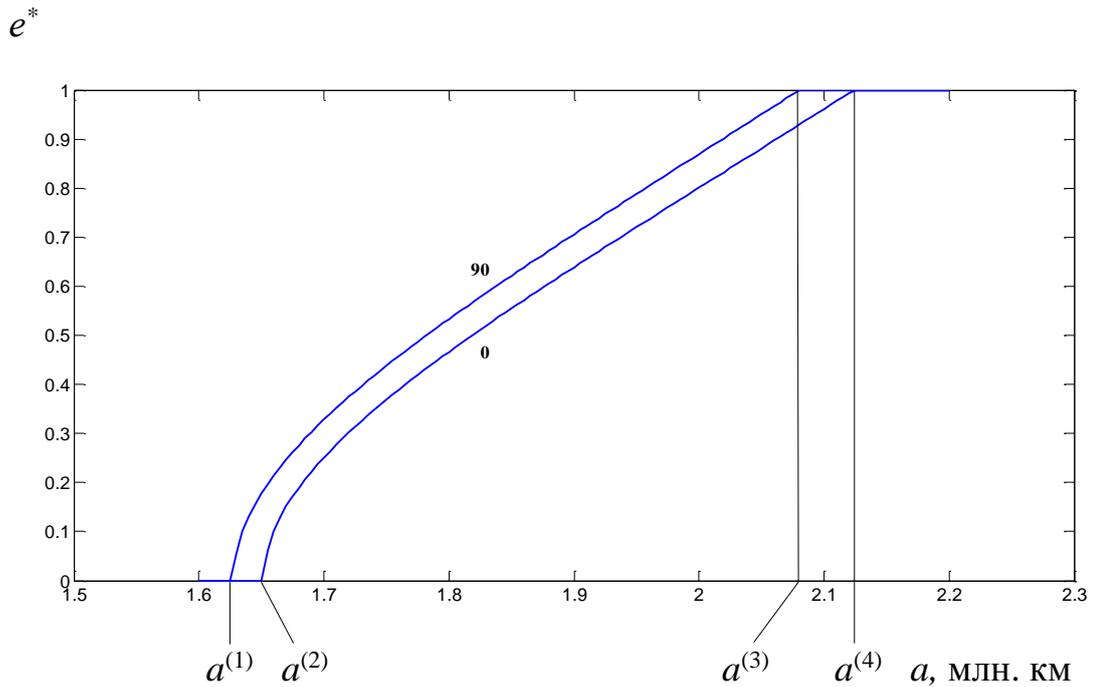


Рис. 4. Зависимости от большой полуоси стационарных значений эксцентриситета.

При $a < a^{(1)} \approx 1.625$ млн. км в плоскости (ω, e) особых точек не существует, а эволюция орбиты сводится к монотонному (циркуляционному) уменьшению аргумента перицентра при незначительных колебаниях эксцентриситета (рис. 5)

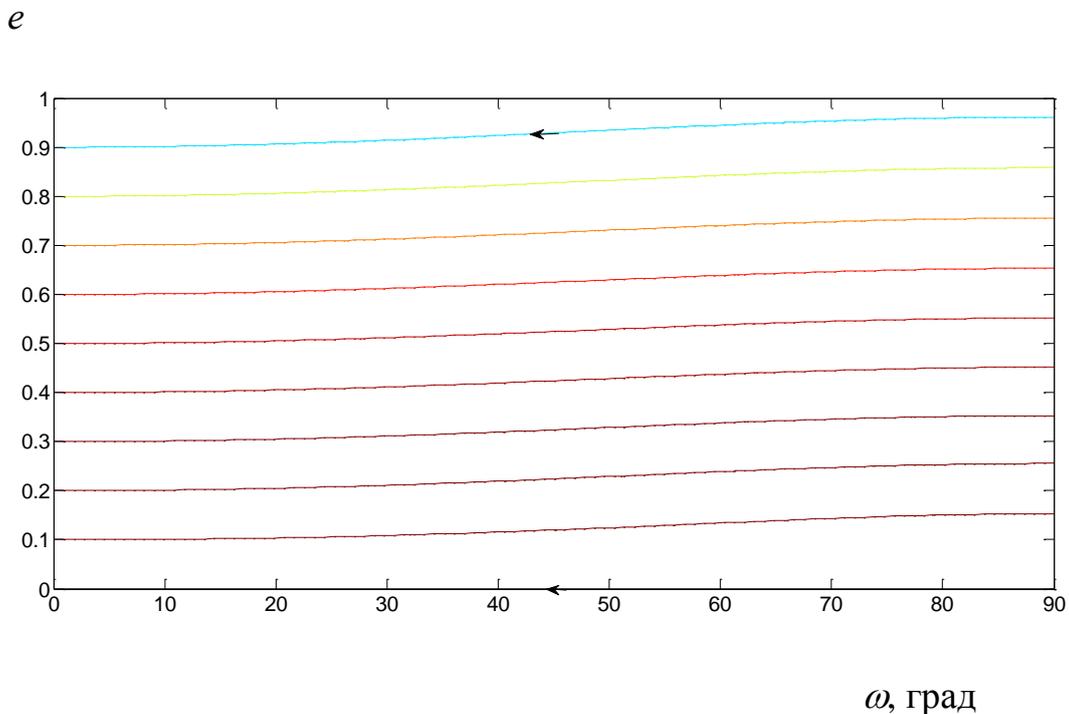


Рис. 5. Семейство фазовых траекторий случая IV в плоскости (ω, e) для $a = 1.62$ млн. км.

При первом бифуркационном значении $a = a^{(1)}$ в правом нижнем углу изображенного прямоугольника зарождается пара особых точек. В силу двойной симметрии фазовых траекторий и возможности их естественного продолжения, показан лишь диапазон $0 \leq \omega \leq 90^\circ$. Значение $a^{(1)}$ является решением уравнения $B(\pm\pi/2) = 0$ или

$$2 - 2\gamma_0(a) + \gamma_1(a) - \gamma_5(a) = 0. \quad (31)$$

При $a^{(1)} < a < a^{(2)} \approx 1.652$ млн. км. в фазовой плоскости существуют две особые точки (одна из них отмечена кружочком) и появляется область либрации аргумента перицентра (рис. 6).

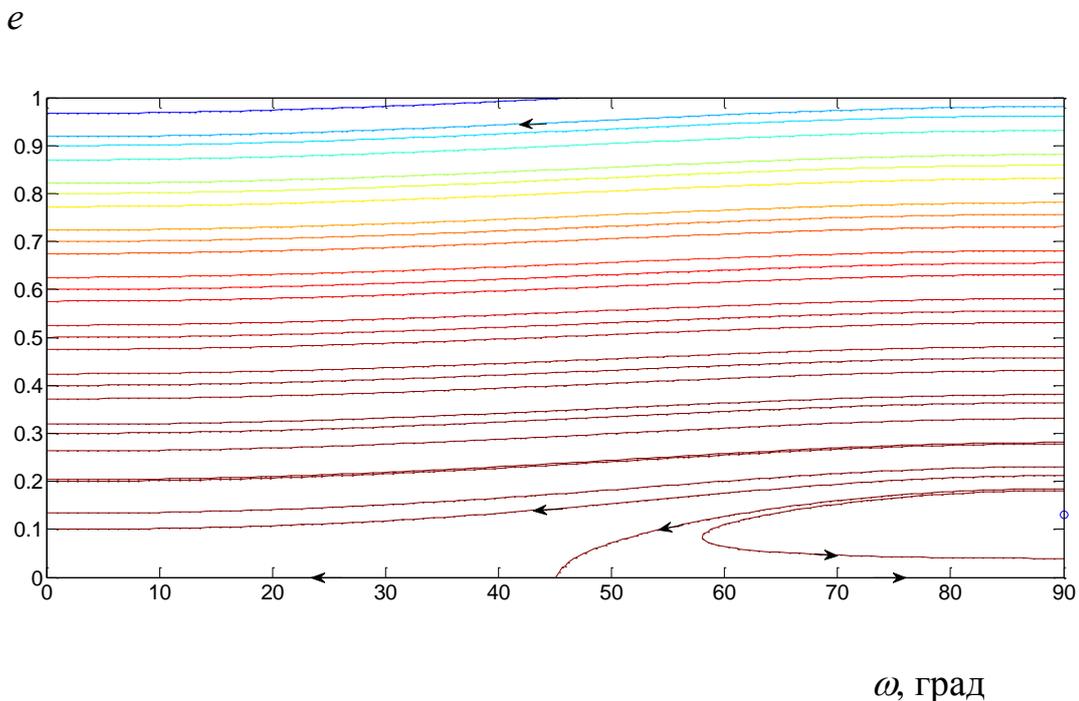


Рис. 6. То же самое, что и на рис. 5, но для $a = 1.64$ млн. км.

Значение ω_s , отвечающее пересечению сепаратрисы с осью $e = 0$, определяется из формулы $B(\omega_s) = 0$ или

$$\cos 2\omega_s = \frac{2(\gamma_0 - 1) - \gamma_1}{\gamma_5}. \quad (32)$$

Значение e_s , отвечающее пересечению сепаратрисы с осью $\omega = 90^\circ$, определяется из формулы

$$e_s^2 = -\frac{B(\pm\pi/2)}{A(\pm\pi/2)}. \quad (33)$$

При втором бифуркационном значении $a = a^{(2)}$ сепаратриса при $e = 0$ «входит» в левый нижний угол. Значение $a^{(2)}$ является решением уравнения $B(0) = 0$ или

$$2\gamma_0(a) - 2 - \gamma_1(a) - \gamma_5(a) = 0. \quad (34)$$

При $a^{(2)} < a < a^{(3)} \approx 2.08$ млн. км. в фазовой плоскости также существуют две особые точки и область либрации аргумента перицентра. Но в отличие от рис. 6, у сепаратрисы появляется вторая ветвь, а седловая точка расположена на оси $\omega = 0$ (рис. 7).

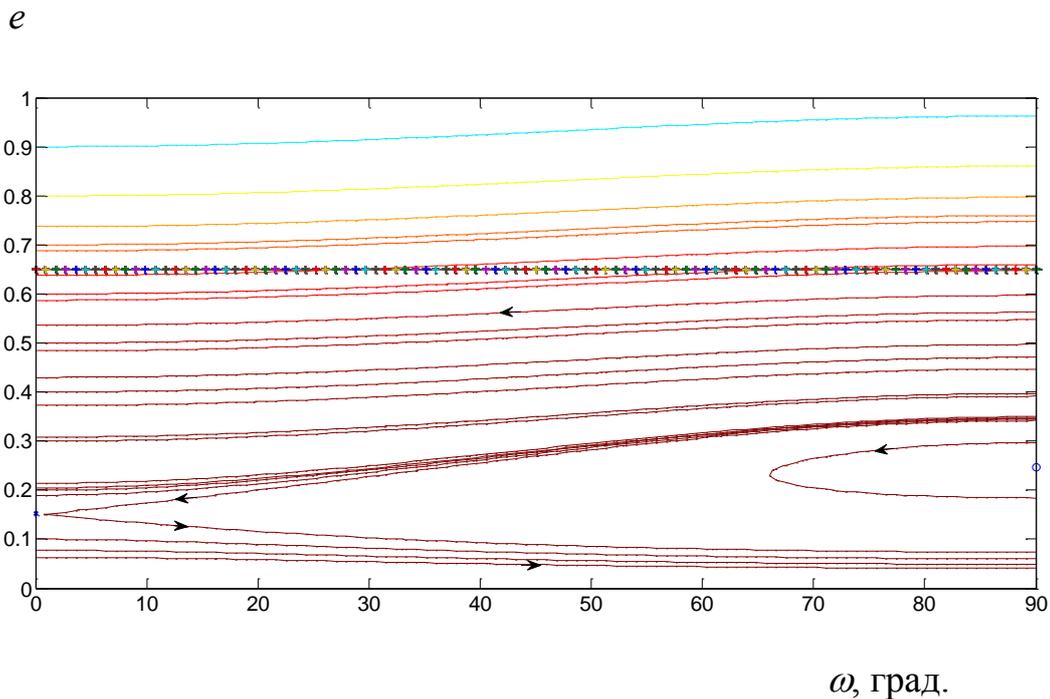


Рис. 7. То же самое, что и на рис. 5, но для $a = 1.67$ млн. км.

Максимальная по эксцентриситету ширина зоны либрации определяется с помощью формулы (30), в которой следует положить $\omega = \pm\pi/2$.

Кроме фазовых траекторий и особых точек, на рис. 7 более крупными крестиками помечена специальная горизонтальная прямая, отвечающая так называемому критическому эксцентриситету. Для внешнего варианта задачи он определяется условием равенства расстояния перицентра орбиты пробного спутника и либо радиуса орбиты одного из массивных спутников планеты ($1 \leq j \leq J$), либо – ее собственного радиуса ($j = 0$). Для полярных орбит подобное условие выполняется лишь при $\omega = 0, \pi$. При $e > \bar{e}_j$ исследование эволюционной задачи имеет лишь формальный интерес, поскольку регулярность орбиты пробного спутника нарушается из-за возможности ее пересечения либо с орбитой массивных спутников, либо с поверхностью планеты.

«Крестовая» прямая (не показанная на рис. 5 и 6) на рис. 7 соответствует $j = 5$, т.е. касанию в перицентре орбиты пробного спутника и орбиты Оберона – наиболее далекого из главных спутников Урана. Ясно, что в фазовой плоскости (ω, e) неявно присутствуют и прямые, отвечающие критическим эксцентриситетам для $0 \leq j \leq 4$. Для фиксированного значения большой полуоси они располагаются выше «крестовой» прямой, но на рисунке не показаны.

При увеличении большой полуоси обе особые точки перемещаются в область больших эксцентриситетов (рис. 8).

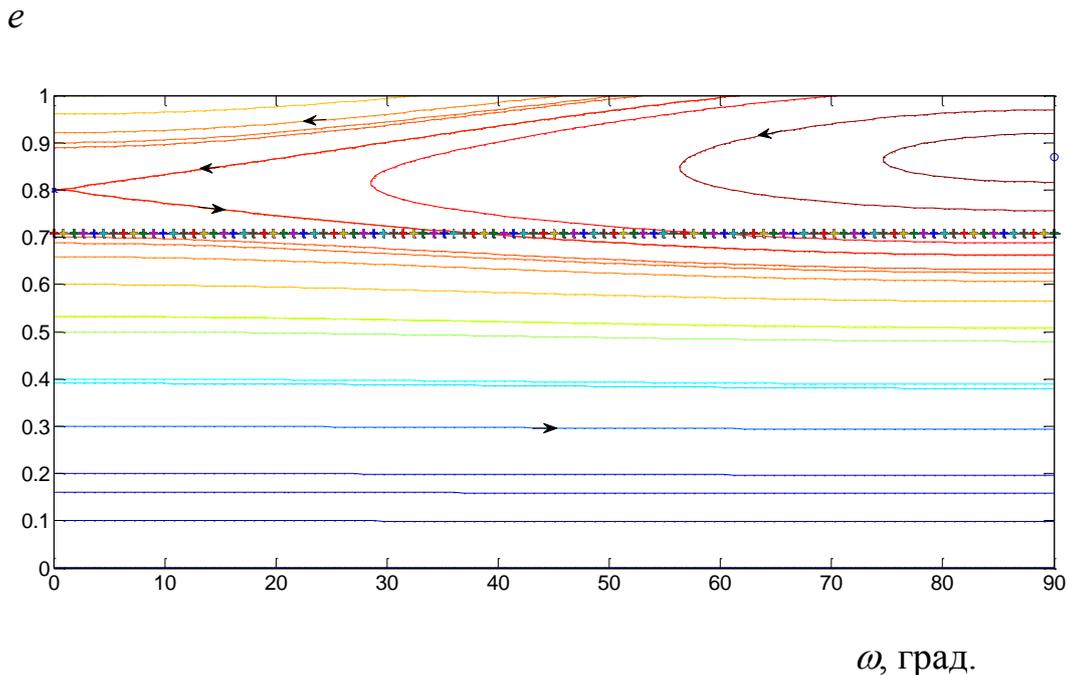


Рис. 8. То же самое, что и на рис. 5, но для $a = 2.00$ млн. км.

При дальнейшем увеличении большой полуоси качественные изменения структур семейств фазовых траекторий происходят в области $\bar{e}_j < e \approx 1$. Поэтому мы приведем значение $a = a^{(4)} \approx 2.12$ млн. км (формально следующее из модели) и отметим, что при $a > a^{(4)}$ в фазовой плоскости существуют лишь циркуляционные траектории с монотонным увеличением аргумента перицентра. Вдобавок, поскольку наше рассмотрение ограничено умеренными значениями эксцентриситета, на этом мы и закончим рассмотрение интегрируемого случая IV.

Интересно только отметить, что выявленные структуры семейств фазовых траекторий, представленных на рис. 6 – 8 (зоны либрации аргумента перицентра), обязаны своим существованием исключительно возмущающему влиянию массивных спутников. При $\mu_k = 0$ для $1 \leq k \leq 5$, т.е. при их отсутствии, эксцентриситет орбиты пробного спутника остается постоянным, а аргумент перицентра уменьшается или увеличивается монотонно с постоянной скоростью, зависящей от большой полуоси (Лидов, 1974).

4. Качественное исследование случая VI

При $\cos i = 0$, $\cos \Omega = 0$ и произвольном угле I функция W_N (и первый интеграл) имеет следующий вид

$$W_N = A(\omega)e^4 + D(\omega)e^2 = c, \quad (35)$$

где $A(\omega)$ определяется первой из формул (24),

$$D(\omega) = -1 - 2\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_5 \cos 2\omega + 5 \left[\cos 2\omega \cos 2I + \sin 2\omega \sin 2I \operatorname{sign}(\sin \Omega) \right]. \quad (36)$$

Из интеграла (35) нетрудно найти зависимость e от ω и постоянной интеграла c , определяемой начальными значениями e_0 и ω_0 при $\tau = 0$

$$c = A(\omega_0)e_0^4 + D(\omega_0)e_0^2. \quad (37)$$

Кроме ω , функция D (так же, как A и B) зависит от большой полуоси a посредством μ . Изменение эксцентриситета и аргумента перицентра описывается уравнениями

$$\frac{de}{d\tau} = 2\sqrt{1-e^2} f_1(e, \omega), \quad \frac{d\omega}{d\tau} = 2\sqrt{1-e^2} f_2(e, \omega), \quad (38)$$

где

$$f_1(e, \omega) = e \left\{ \begin{array}{l} \left[\gamma_5 + 5\cos 2I + e^2(\gamma_3 + 4\gamma_4 \cos 2\omega) \right] \sin 2\omega - \\ - 5\cos 2\omega \sin 2I \operatorname{sign}(\sin \Omega) \end{array} \right\}, \quad (39)$$

$$f_2(e, \omega) = D(\omega) + 2A(\omega)e^2.$$

Так же как и в случае IV, наличие первого интеграла (35), в принципе, позволяет получить решение задачи в квадратурах. Для этого необходимо, найти из него зависимость $\omega(e)$ и подставить ее в первое из уравнений (38). После этого для переменной $x = e^2$ получается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для отыскания стационарных решений системы (38) необходимо решить уравнения

$$f_1(e, \omega) = 0, \quad f_2(e, \omega) = 0. \quad (40)$$

Рассмотрим вначале два простейших модельных случая, когда $\sin 2I = 0$:

а) $I = 90^\circ$ ($\cos 2I = -1$) и б) $I = 0$ ($\cos 2I = 1$).

Если случай а) достаточно близок к реальной ориентации плоскостей экватора и орбиты Урана, то случай б) представляется гипотетическим. Тем не менее, в обоих этих случаях формальное решение уравнений (40) определяется простыми формулами

$$\sin 2\omega^* = 0, \quad e^* = \sqrt{\frac{-1 - 2\gamma_0 + \gamma_1 + (\gamma_5 + 5\cos 2I)\cos 2\omega^*}{5\gamma_0 - 2(\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_3\cos 2\omega^*)}}. \quad (41)$$

Из этих формул и проведенных вычислений следует, что в случае а) существует лишь решение $\omega^* = \pm \pi/2$, причем в узком диапазоне больших полуосей

$$a^{(1)}(I = 90^\circ) \approx 1.40 \text{ млн. км} \leq a \leq 1.80 \text{ млн. км} \approx a^{(2)}(I = 90^\circ),$$

а в случае б) – лишь решение $\omega^* = 0, \pi$, причем в диапазоне

$$a^{(1)}(I = 0) \approx 1.43 \text{ млн. км} \leq a \leq 1.84 \text{ млн. км} \approx a^{(2)}(I = 0).$$

Для произвольного угла I зависимость $\omega(e)$ может быть приближенно найдена с учетом упрощающего предположения $\gamma_4 = 0$. Оно оправдано, в частности, для системы главных спутников Урана, поскольку, как видно из рис. 1, для этой системы справедливо неравенство $|\gamma_4| \ll |\gamma_k|$ ($k=0,1,2,3,5$). При $\gamma_4 = 0$ из первого уравнения (40) получим приближенное выражение

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{5\sin 2I \operatorname{sign}(\sin \Omega)}{5\cos 2I + \gamma_5 + \gamma_3 e^2}. \quad (42)$$

Подставляя $\sin 2\omega$ и $\cos 2\omega$ во второе из уравнений (40), получим уравнение четвертой степени относительно e^2 . Пренебрегая слагаемыми порядка малости e^6 и e^8 , в соответствии с принятой точностью представления возмущающей функции W , получим биквадратное уравнение относительно эксцентриситета

$$b_2 e^4 + b_1 e^2 + b_0 = 0, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= d_1(d_2^2 - d_1), \quad b_1 = 2d_1 d_2 d_4 + 2d_3(d_2^2 - 3d_1)\gamma_3, \\ b_2 &= d_1 d_4^2 + 4d_2 d_3 d_4 \gamma_3 + (d_2^2 - 4d_1 - 9d_3^2)\gamma_3^2, \\ d_1 &= 25 + (10\cos 2I + \gamma_5)\gamma_5, \quad d_2 = 1 + 2\gamma_0 - \gamma_1, \\ d_3 &= 5\cos 2I + \gamma_5, \quad d_4 = 5\gamma_0 - 2\gamma_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Решение уравнения (43) дает стационарные значения эксцентриситета ($0 \leq e^* \leq 1$) для различных углов I , существующие лишь в достаточно узком диапазоне больших полуосей $a^{(1)}(I) \leq a \leq a^{(2)}(I)$. Для $I = 97.^\circ 86$, отвечающего наклону экватора Урана к его орбите, значения $a^{(1)} \approx 1.4$ млн. км, $a^{(2)} \approx 1.8$ млн. км. В этом диапазоне больших полуосей, естественно, существует и зона либрации аргумента перицентра в фазовой плоскости (ω, e) , границей которой служит сепаратриса, определяемая уравнением (35) при $c = 0$

$$e_s^2 = -\frac{D(\omega)}{A(\omega)} \quad (45)$$

На последующих рисунках для случая VI, в отличие от случая IV, показана структура семейств π -периодических и естественно продолжаемых фазовых траекторий в большем диапазоне $0 \leq \omega \leq 180^\circ$. Так же как и в случае IV, траектории, расположенные выше критической «крестовой» прямой, имеют лишь формальный интерес.

При $a < a^{(1)}$ в плоскости (ω, e) особых точек не существует. Эволюция орбиты сводится к монотонному (циркуляционному) уменьшению аргумента перицентра при ограниченных колебаниях эксцентриситета (рис. 9). Видно, что при $e = 0$ и $\omega \approx I$ имеется тенденция к зарождению особой точки, которое и происходит при бифуркационном значении $a^{(1)}$.

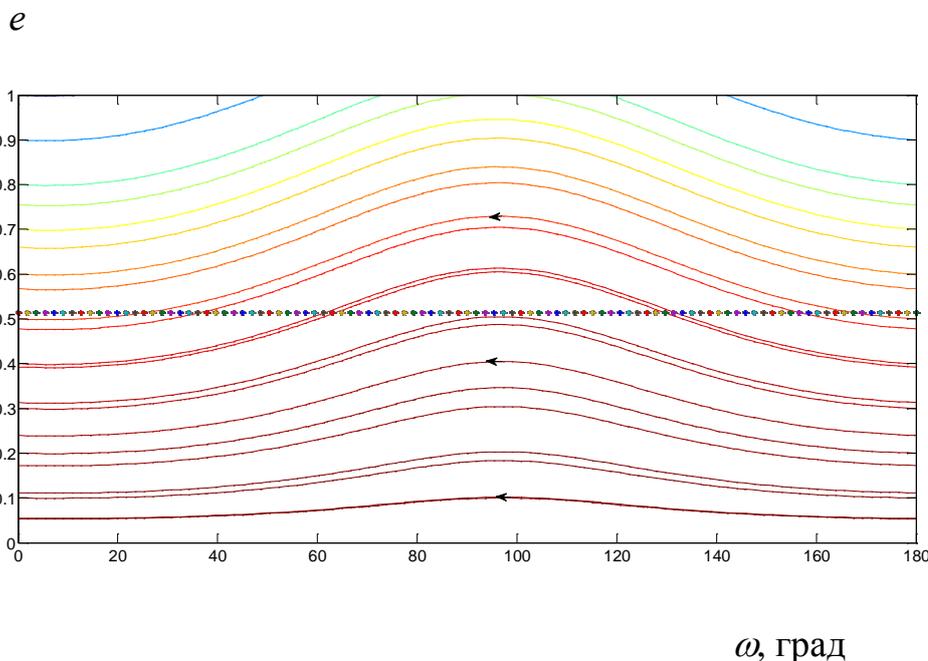


Рис. 9. Семейство фазовых траекторий случая VI в плоскости (ω, e) для $a = 1.2$ млн. км (система Урана).

При $a^{(1)} < a < a^{(2)}$ в плоскости (ω, e) существуют особые точки типа центр и седло. Для промежуточного значения $a = 1.6$ млн. км (рис. 10) реализуется

ситуация, когда $e^* = \bar{e} < e_s$. Все фазовые точки, движущиеся по траекториям семейства, за конечное время пересекают прямую критического эксцентриситета, что в данной эволюционной задаче служит качественным аналогом известного эффекта Лидова-Козаи в двукратно осредненной задаче Хилла (Лидов, 1961; Козаи, 1962).

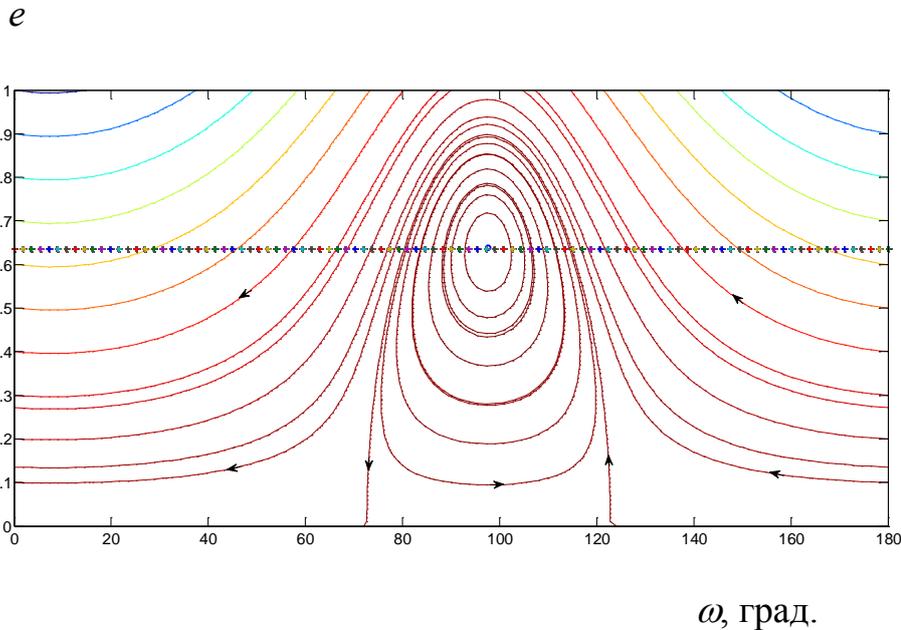


Рис. 10. То же самое, что и на рис. 9, но для $a = 1.6$ млн. км.

Мы не приводим здесь очевидной структуры семейства для случая $e^* < e_s < \bar{e}$.

При $a > a^{(2)}$ все фазовые точки, движущиеся по траекториям семейства, также за конечное время пересекают прямую критического эксцентриситета, но в плоскости (ω, e) не существует особой точки типа центр (рис. 11).

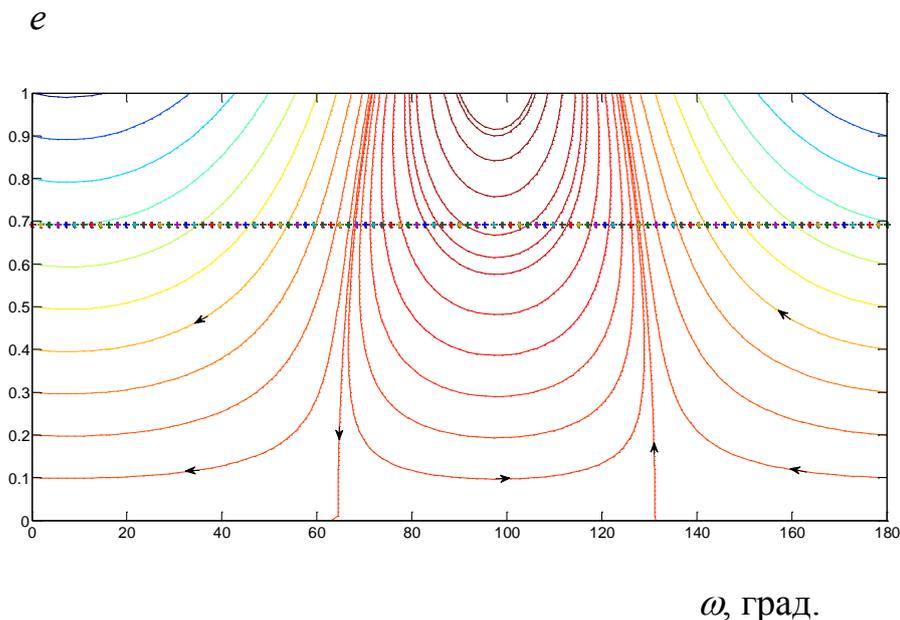


Рис. 11. То же самое, что и на рис. 9, но для $a = 1.9$ млн. км.

Рассматриваемый в данном разделе интегрируемый случай VI может также отражать качественные особенности эволюции орбиты пробного спутника и в системе Юпитера. Для получения результатов, аналогичных полученным в системе Урана, необходимо задать параметры μ_j , a_j , a_0 , c_{20} , $I = 3^\circ.13$, $J = 4$, соответствующие Юпитеру и его главным (галилеевым) спутникам. Проведенные расчеты показали, что качественный характер зависимостей коэффициентов γ_k от большой полуоси сохраняется, причем $|\gamma_4| \ll |\gamma_k|$ ($k=0,1,2,3,5$). Семейства фазовых траекторий видоизменяются примерно так же, как и для системы Урана. Различие заключается в числовых значениях величин параметров, в частности, $a^{(1)} \approx 2.09$ млн. км, $a^{(2)} \approx 2.69$ млн. км. Для $a < a^{(1)}$ семейства качественно аналогичны показанным на рис. 9, причем «зарождение» особой точки, также происходит при $e = 0$ и $\omega \approx I$. При $a^{(1)} < a < a^{(2)}$ стационарное значение e^* изменяется от 0 до 1. Рис. 12, качественно аналогичный рис. 10, показывает семейства фазовых траекторий для $a = 2.3$ млн. км. На нем проведены не одна, а две критических крестовых прямых $e = \bar{e}_4$ (касание орбиты Каллисто) и $e = \bar{e}_0$ (касание «поверхности» Юпитера).

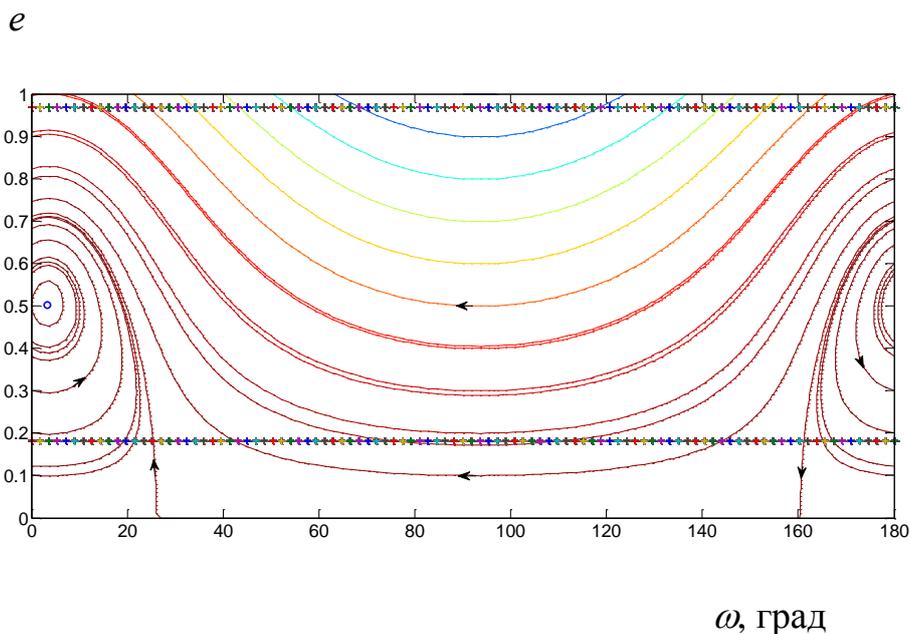


Рис. 12. То же самое, что и на рис. 10, но для $a = 2.3$ млн. км (система Юпитера)

Заметим, что для массивных спутников Юпитера (так же, как Урана и далее для Сатурна) принята нумерация этих спутников по возрастанию больших полуосей их орбит.

Все вышесказанное по поводу системы Юпитера в полной мере относится и к системе Сатурна. Задаются параметры μ_j , a_j , a_0 , c_{20} , $I = 25^\circ.33$, $J = 7$, соответствующие Сатурну и его главным спутникам. Семейства фазовых траекторий видоизменяются примерно так же, как и для системы Урана. Различие заключается в числовых значениях величин параметров, в частности,

$a^{(1)} \approx 2.4$ млн. км, $a^{(2)} \approx 3.1$ млн. км. Для $a < a^{(1)}$ семейства качественно аналогичны показанным на рис. 9, причем «зарождение» особой точки, также происходит при $e = 0$ и $\omega \approx I$. При $a^{(1)} < a < a^{(2)}$ стационарное значение e^* изменяется от 0 до 1. Рис. 13, также качественно аналогичный рис. 10, показывает семейства фазовых траекторий для $a = 2.5$ млн. км.

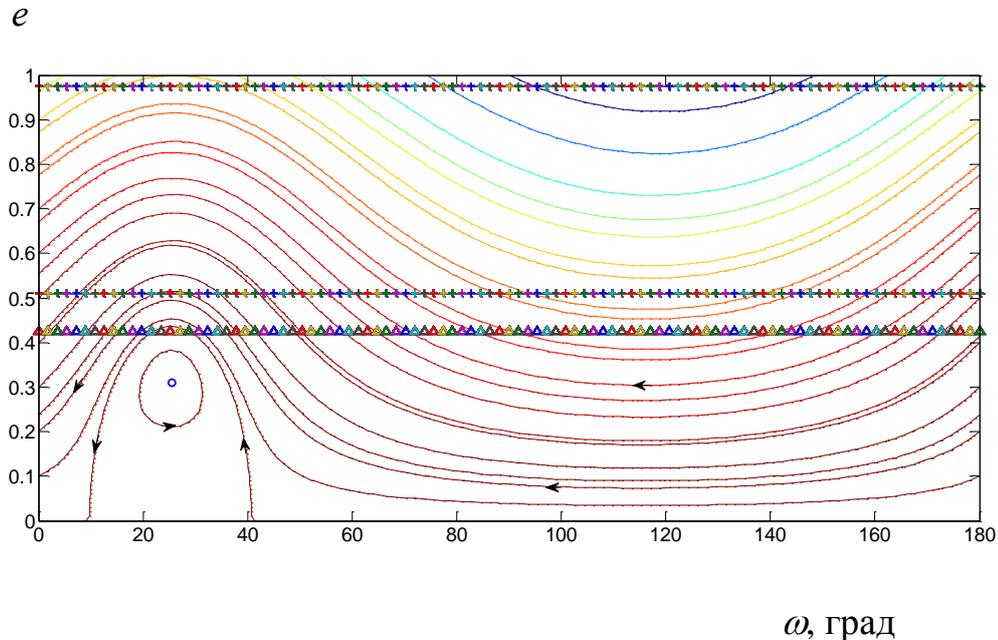


Рис. 13. То же самое, что и на рис. 10, но для $a = 2.5$ млн. км (система Сатурна)

На рис. 13, кроме двух «крестовых» прямых, отражающих критический эксцентриситет для внешнего варианта задачи, треугольниками показана еще одна прямая, отражающая критический эксцентриситет, но для внутреннего варианта задачи, когда орбита пробного спутника в своем апоцентре касается орбиты массивного (в данном случае Япета, $j = 7$). Последний рисунок характерен еще и тем, что не все фазовые траектории пересекают прямые критического эксцентриситета ($j = 6$ и $j = 0$), а в небольшой окрестности особой точки существуют и регулярные траектории с $e < \bar{e}_7$.

Отметим, что на рис. 10, 12, 13 абсциссы равновесных точек определяются равенством $\dot{\omega}^* = I$, что соответствует условию $\dot{\omega}_{orb}^* = 0$.

Кроме того, укажем что при $\mu_k = 0$ для $1 \leq k \leq 5$, т.е. в отсутствие массивных спутников, происходит смещение диапазонов существования особых точек. Соответствующие значения $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ уменьшаются примерно на $0.4 \div 0.7$ млн. км. Однако, структуры семейств фазовых траекторий, показанные на рис. 9 – 13, в отличие от случая IV, качественно сохраняются (Лидов, 1974). Ради уточнения, заметим, что в указанной работе рис. 2в и 2с должны быть поменяны местами (при сохранении подписей к ним).

5 Заключительные замечания

Настоящая работа дополняет исследование интегрируемых случаев общей задачи об эволюции спутниковой орбиты при совместном влиянии трех различных возмущающих факторов: нецентральности гравитационного поля планеты, притяжения Солнца и её главных спутников. Для двух особых интегрируемых случаев выполнен качественный анализ вековых уравнений, в первом приближении определяющих эволюцию эксцентриситета и аргумента перицентра полярных орбит. Исследование проведено для различного наклона плоскости орбиты удаленной возмущающей точки к экваториальной плоскости планеты, в частности, - для ортогональной ориентации этих плоскостей (случай IV), приблизительно отвечающей положению экватора Урана относительно его гелиоцентрической орбиты ($I = 97^\circ.86$). Для гипотетических и относительно далеких полярных спутниковых орбит, которые, в принципе, могли бы располагаться в плоскости орбиты Урана, возмущающее влияние его массивных спутников приводит (наряду с циркуляционным) к возможности либрационного изменения аргумента перицентра. Правда, это может осуществляться лишь в достаточно узком диапазоне больших полуосей приблизительно от 1.6 до 2.1 млн. км. Полярные орбиты гипотетических спутников Урана, ортогональные линии пересечения обеих основных плоскостей (случай VI), в принципе, могли бы существовать лишь в районе a , меньшем или приблизительно равном 1.6 млн. км. Для этого же интегрируемого случая исследовано поведение полярных орбит гипотетических спутников Юпитера и Сатурна. К спутниковой системе Нептуна рассмотренные интегрируемые случаи эволюционной задачи не могут быть применены в силу специфики орбит его массивных спутников - либо значительного эксцентриситета, либо значительного наклона.

Проведенный анализ устанавливает пороговые значения постоянных больших полуосей спутниковых орбит, начиная с которых возникают особые точки в фазовой плоскости (аргумент перицентра – эксцентриситет), т.е. происходит потеря устойчивости круговых орбит относительно эксцентриситета. При дальнейшем увеличении больших полуосей семейства фазовых траекторий приобретают специфическую особенность, связанную с проявлением эффекта Лидова – Козаи. Достижение критического эксцентриситета для различных «эффективных» радиусов касания орбит приводит к их пересечениям. В этих условиях вероятность соударения гипотетических спутников с реальными (массивными) или с «поверхностями» планет-гигантов резко возрастает

Выявленные качественные особенности эволюции могут помочь в объяснении существования в околопланетном пространстве «пустых» зон, разделяющих множества орбит регулярных и нерегулярных спутников.

6 Приложение

В прилагаемой таблице 2 приводятся числовые значения всех величин, необходимых для вычисления функции W_2 по формулам (9) – (15).

Таблица 2.

Значения M_k , S_k , $g_k^{(m)}$ и $p_{k,m}^{(s)}$

k	M_k	S_k	m	$g_k^{(m)}$	$p_{k,m}^{(0)}$	$p_{k,m}^{(1)}$	$p_{k,m}^{(2)}$	$p_{k,m}^{(3)}$	$p_{k,m}^{(4)}$
1	3	2	0	3/4	0	-1	1		
			1	1/4	2	-19	19		
			2	1/2	3	-1	1		
			3	1	1	-4	4		
2	5	4	0	15/64	0	0	3	-10	7
			1	1/64	4	-4	393	-1190	809
			2	1/16	0	-11	309	-804	520
			3	1/16	-5	-42	462	-992	600
			4	1	0	-4	21	-36	20
			5	1/4	1	-8	24	-32	16
3	5	4	1	1/16	4	2	33	-70	35
			2	1/12	-4	-1	177	-352	176
			3	1/12	-7	-46	390	-688	344
			4	1/3	1	-20	84	-128	64
			5	1/3	1	-8	24	-32	16
			6	1/3	1	-8	24	-32	16
4	6	4	1	1/64	-40	120	-183	130	-35
			2	1/192	-188	1564	-2775	2122	-599
			3	1/16	2	19	-149	164	-56
			4	1/48	43	-314	654	-416	88
			5	1/2	1	-8	22	-24	8
			6	1/12	1	-8	24	-32	16
5	3	2	1	1/4	6	-7	3		
			2	1/2	5	-16	8		
			3	1	1	-4	4		

Библиографический список

- Вашковьяк, 1976* *Vashkovjak M.A.* On the Stability of the Circular 'Asteroid' Orbits in an N-Planetary System // *Celestial Mechanics*. 1976. V. 13. No. 3. P. 313-324.
- Вашковьяк, 2013* Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. О разложении вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты // *Астрон. вестник*. 2013. Т. 47. № 1. С. 32-39.
- Вашковьяк, 2015* Вашковьяк М.А. Интегрируемые случаи задачи об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения её массивных спутников и Солнца // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2015. № 12. 24 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_12.pdf
- Лидов, 1961* Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // *Искусственные спутники Земли* // 1961. Вып. 8. С. 5-45.
- Лидов, 1974* Лидов М.Л., Ярская М.В. Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты // *Космические исследования*. 1974. Т. 12. Вып. 2. С.155-170.
- Козаи, 1962* *Kozai Y.* Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Eccentricity. // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591 - 598.

Оглавление

1. Введение и постановка задачи.....	3
2. Выражение функции W для полярных орбит.....	5
3. Качественное исследование случая IV.....	11
4. Качественное исследование случая VI	17
5. Заключительные замечания.....	23
6. Приложение.....	24
Библиографический список.....	25