[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](#) • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 16 за 2015 г.](#)

Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф.

Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 16. 12 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-16

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Е.Е.Мышецкая, В.Ф.Тишкин

Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности

Москва — 2015

Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф.

Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности

В работе помещены оценки для разности решений уравнения теплопроводности и его гиперболизированной версии. Оценки получены в норме L_2 для уравнения анизотропной теплопроводности и в норме C для одномерного случая и постоянных коэффициентов.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, гиперболизация

Elena Evgenievna Myshetskaya, Vladimir Fedorovich Tishkin

Assess the impact of hyperbolization for the heat equation

In this paper present estimations for difference of solutions equations of thermal conduction and his hyperbolization version. Estimates are obtained in the L_2-norm for the equation of anisotropic heat conduction and obtained estimations in the C-norm for one-dimensional case and constant coefficients.

Key words: heat equation, hyperbolization

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 14-01-00145-а.

Оглавление

Введение

Особенности современных супер-ЭВМ в значительной мере ограничивают эффективность логически сложных вычислительных алгоритмов. В связи с этим приобретает интерес разработка явных схем, допускающих почти 100% распараллеливание. Для уравнений параболического типа с этой целью в настоящее время успешно используется гиперболизация уравнений [1−12], позволяющая ослабить условия устойчивости явных алгоритмов.

В настоящей работе получены оценки для разности решений анизотропного уравнения теплопроводности и его гиперболизированной версии. Показано, что величина этой разности пропорциональна второй производной по времени от решения невозмущённого уравнения и по порядку малости совпадает с величиной гиперболизирующей добавки.

Авторы выражают свою благодарность академику РАН Б.Н.Четверушкину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Оценка для уравнений анизотропной теплопроводности

Рассмотрим начально-краевую задачу для анизотропного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div} A(\bar{x}) \mathrm{grad} u + f(x,t), \\ &u(\bar{x},0) = u_0(\bar{x}), \\ &\bar{x} \in D \subset R^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь D − область, в которой ищется решение, $A(\bar{x})$ − симметричная положительно определённая матрица $n \times n$. На границе области D могут быть заданы граничные условия:

$$u(\bar{x},t) = u_1(\bar{x},t) \tag{2}$$

или

$$\begin{aligned} &(A(\bar{x}) \mathrm{grad} u, \bar{\mathbf{n}}) = \alpha(\bar{x}) u + u_2(\bar{x},t), \\ &\alpha(\bar{x}) \geq 0, \\ &\bar{x} \in \partial D. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$u_1(\bar{x},t), u_2(\bar{x},t)$ − заданные функции,

$\bar{\mathbf{n}}$ − вектор внешней нормали.

Условие (2) представляет собой условие первого рода.

Условие (3) при $\alpha(\bar{x})=0$ является условием второго рода, а в остальных точках, где $\alpha(\bar{x})\neq 0$ задано условие третьего рода, связывающее поток тепла с температурой на границе. В этом случае (3) можно переписать в виде:

$$(\overline{\mathbf{W}},\bar{\mathbf{n}})=-\alpha(\bar{x})\big(u-u_0(\bar{x},t)\big), \tag{4}$$

где $\overline{\mathbf{W}}=-A(\bar{x})\operatorname{grad}u$ − вектор теплового потока,

$u_0=-\dfrac{u_2(x,t)}{\alpha(x)}$ − температура окружающей среды.

Условие $\alpha(\bar{x})>0$ означает, что поток тепла направлен от более высокой температуры в сторону более низкой.

Одновременно рассмотрим сингулярно возмущённую задачу:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\operatorname{div}A(\bar{x})\operatorname{grad}u+f(\bar{x},t),\\
&\tilde{u}(\bar{x},0)=u_0(\bar{x}),\\
&\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(\bar{x},0)=\operatorname{div}A(\bar{x})\operatorname{grad}u_0(\bar{x})+f(\bar{x},0)
\end{aligned} \tag{5}$$

с граничными условиями (2)-(3), в которых вместо функции $u(\bar{x},t)$ используется функция $\tilde{u}(\bar{x},t)$:

$$\tilde{u}(\bar{x},t)=u_1(\bar{x},t) \tag{6}$$

или

$$\begin{aligned}
&(A(\bar{x})\operatorname{grad}\tilde{u},\bar{\mathbf{n}})=\alpha(\bar{x})\tilde{u}+u_2(\bar{x},t),\\
&\alpha(\bar{x})\geq 0,\\
&\bar{x}\in\partial D.
\end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим через $\delta(\bar{x},t)$ разность решений гиперболизированной и невозмущённой задачи:

$$\delta(\bar{x},t)=\tilde{u}(\bar{x},t)-u(\bar{x},t). \tag{8}$$

Вычитая (1) из (5) получим уравнение для $\delta(\bar{x},t)$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}+\frac{\partial\delta}{\partial t}=\operatorname{div}A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\delta(\bar{x},0)=0,\\
&\frac{\partial\delta}{\partial t}(\bar{x},0)=0.
\end{aligned}\tag{9}$$

На границе области D либо

$$\delta(\bar{x},0)=0,\tag{10}$$

либо

$$\begin{aligned}
&(A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta,\bar{\mathbf{n}})=\alpha(\bar{x})\delta,\\
&\bar{x}\in\partial D.
\end{aligned}\tag{11}$$

Получим оценку для $\delta(\bar{x},t)$ в норме $L_2(D\times(0,T))$. Для этого умножим (9) на $\dfrac{\partial\delta}{\partial t}$ и проинтегрируем по области D и по времени в пределах от 0 до T:

$$\begin{aligned}
\int_D\int_0^T\left(\varepsilon\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}\,\frac{\partial\delta}{\partial t}+\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2\right)dtdx=\int_0^T\int_D\frac{\partial\delta}{\partial t}\operatorname{div}A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta\, d\bar{x}dt-\\
-\varepsilon\int_0^T\int_D\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial\delta}{\partial t}\,dtdx.
\end{aligned}\tag{12}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial\delta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2\right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial t}\operatorname{div}\bigl(A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta\bigr)=\operatorname{div}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta\right)-\left(A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta,\operatorname{grad}\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)=\\
=\operatorname{div}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\bigl(A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta,\operatorname{grad}\delta\bigr).
\end{aligned}$$

С учётом начальных условий преобразуем (12) к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2}\int_D\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 d\bar{x}\Big|_{t=T}+\int_0^T\int_D\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 d\bar{x}dt+\frac{1}{2}\int_D\bigl(A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta,\operatorname{grad}\delta\bigr)d\bar{x}\Big|_{t=T}-\\
-\oint_{\partial D}\int_0^T\frac{\partial\delta}{\partial t}\bigl(A(\bar{x})\operatorname{grad}\delta,n\bigr)dSdt=-\varepsilon\int_0^T\int_D\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\frac{\partial\delta}{\partial t}\,d\bar{x}dt.
\end{aligned}\tag{13}$$

Контурный интеграл в левой части (13) обращается в 0 на тех участках границы, где задано условие (10), а на участках $\Gamma \subset \partial D$, где задано условие (11), он равен

$$-\int_{\Gamma}\int_{0}^{T}\alpha(\bar{x})\delta\frac{\partial\delta}{\partial t}dSdt = \int_{\Gamma}\int_{0}^{T}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha(\bar{x})\delta^2}{2}dtdS = -\int_{\Gamma}\frac{\alpha(\bar{x})\delta^2}{2}dS \geq 0.$$

С учётом этого приходим к неравенству

$$\int_{0}^{t}\int_{D}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 dtd\bar{x} \leq \varepsilon\left|\int_{0}^{t}\int_{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial t}dtd\bar{x}\right| \leq \varepsilon\sqrt{\int_{0}^{T}\int_{D}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)d\bar{x}dt}\cdot\sqrt{\int_{0}^{T}\int_{D}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 d\bar{x}dt}$$

или

$$\left\|\frac{\partial\delta}{\partial t}\right\|_{L_2(D\times(0,T))} \leq \varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{L_2(D\times(0,T))}. \tag{14}$$

Далее, т.к

$$\delta(\bar{x},t) = \int_{0}^{t}\frac{\partial\delta}{\partial t}dt,$$

имеем

$$|\delta(\bar{x},t)| \leq \sqrt{t}\sqrt{\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 dt} \leq \sqrt{T}\sqrt{\int_{0}^{T}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2}dt.$$

Возведя это неравенство в квадрат и, интегрируя его по области D и по времени в пределах от 0 до Т, получим

$$\int_{0}^{T}\int_{D}\delta^2(\bar{x},t)dt \leq T^2\int_{D}\int_{0}^{T}\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)^2 dt = T^2\left\|\frac{\partial\delta}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D\times(0,\mathrm{T}))} \leq \varepsilon^2 T^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{L_2(D\times(0,\mathrm{T}))},$$

что и даёт требуемую оценку

$$\left\|\delta(\bar{x},t)\right\|_{L_2(D\times(0,\mathrm{T}))} \leq \varepsilon T^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\|_{L_2(D\times(0,\mathrm{T}))}. \tag{15}$$

Оценка для одномерного уравнения в равномерной норме

Для задачи Коши одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\qquad (16)$$
$$u(x,0)=u_o(x)$$

можно получить оценку разности решения $u(x,t)$ и решения возмущённой задачи $\tilde{u}(x,t)$ в норме C.
Здесь $\tilde{u}(x,t)$ − решение задачи

$$\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}+f(x,t),$$
$$\tilde{u}(x,0)=u_o(x),\qquad (17)$$
$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x^2}+f(\tilde{x},0).$$

Аналогично предыдущему, получим уравнение для

$$\delta(x,t)=\tilde{u}(x,t)-u(x,t).$$

$$\varepsilon\ \frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}+\frac{\partial\delta}{\partial t}=\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\delta(x,0)=0,\qquad (18)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial t}(x,0)=0.$$

Посредством замены

$$\Delta=\mathrm{e}^{t/(2\varepsilon)}\ \delta,\qquad (19)$$

$$\tilde{x}=\sqrt{\varepsilon}\ x,\qquad (20)$$

задача (18) приводится к виду

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}-\frac{1}{4\varepsilon^2}\Delta=\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}-e^{\frac{t}{2\varepsilon}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\Delta(x,0)=0,\qquad (21)$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}(x,0)=0.$$

Решение (21) имеет вид (см.[13])

$$\Delta(\tilde{x},t)=\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\tilde{x}-(t-\tau)}^{\tilde{x}+(t-\tau)} e^{\frac{\tau}{2\varepsilon}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,\tau)I_0\left(\frac{\sqrt{(t-\tau)^2-(\tilde{x}-\xi)^2}}{2\varepsilon}\right)d\xi d\tau, \tag{22}$$

где $I_0(z)$ − модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Возвращаясь к исходной функции $\delta(\tilde{x},t)$, имеем:

$$\delta(\tilde{x},t)=\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\tilde{x}-(t-\iota)}^{\tilde{x}+(t-\iota)} e^{-\frac{t-\tau}{2\varepsilon}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,\tau)I_0\left(\frac{\sqrt{(t-\tau)^2-(\tilde{x}-\xi)^2}}{2\varepsilon}\right)d\xi d\tau. \tag{23}$$

Из (23) следует оценка:

$$|\delta(\tilde{x},t)|\leq \max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\tilde{x}-(t-\tau)}^{\tilde{x}+(t-\tau)} e^{-\frac{(t-\tau)}{2\varepsilon}} I_0\left(\frac{\sqrt{(t-\tau)^2+(\tilde{x}-\xi)^2}}{2\varepsilon}\right)d\xi d\tau. \tag{24}$$

Здесь максимум $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|$ берётся по характеристическому треугольнику с вершиной в точке $(\tilde{x},t)$: $0\leq\tau\leq t;\quad \tilde{x}-(t-\tau)\leq\xi\leq\tilde{x}+(t-\tau)$ (см. рис.1).

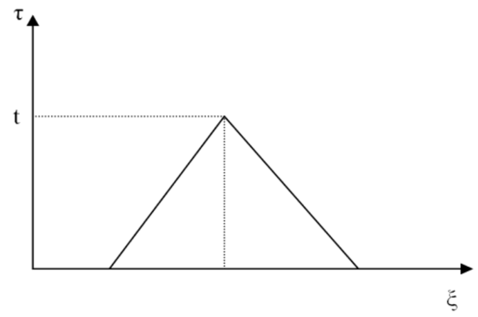

Рис.1.

В дальнейшем нам понадобится оценка для $I_0(z)$:

$$I_0(z)\leq\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{e^z}{\sqrt{z}+1}. \tag{25}$$

Для получения этой оценки воспользуемся интегральным представлением (см. [13], [14]).

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{z\cos t}dt. \tag{26}$$

Из (26) непосредственно следует

$$I_0(z) < e^z. \tag{27}$$

Далее, заменой $\cos t = \tau,$ приведём (26) к виду

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{e^{z\tau}}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau \le \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{e^{z\tau}}{\sqrt{1-\tau}}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{e^{-z\tau}}{\sqrt{1-\tau}}d\tau \le \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{e^{z\tau}}{\sqrt{1-\tau}}d\tau. \tag{28}$$

Сделав в (28) замену $\xi = \sqrt{1-\tau}$, получим

$$I_0(z) \le \frac{4e^z}{\pi}\int_0^1 e^{-z\xi^2}d\xi, \tag{29}$$

и, наконец, в виде $\tilde{\xi} = \sqrt{z}\xi$

$$I_0(z) \le \frac{4e^z}{\pi\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{z}} e^{-\tilde{\xi}^2}d\tilde{\xi} \le \frac{4e^z}{\pi\sqrt{z}}\int_0^{\infty} e^{-\tilde{\xi}^2}d\tilde{\xi} = \frac{2e^z}{\sqrt{\pi z}}. \tag{30}$$

Умножая (27) на $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$, а (30) на $\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$ и, складывая их, получим искомую оценку (25).

Оценим теперь интеграл в формуле (24).

$$I_n = \int_0^t \int_{\tilde{x}-(t-\tau)}^{\tilde{x}+(t-\tau)} e^{-\frac{(t-\tau)}{2\varepsilon}} I_0\left(\sqrt{\left(\frac{t-\tau}{2\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{x}-t}{2\varepsilon}\right)^2}\right)d\xi d\tau. \tag{31}$$

Для упрощения формул сделаем замены

$$\tilde{\tau} = \frac{t-\tau}{2\varepsilon} \text{ и } \tilde{\xi} = \frac{\xi - \tilde{x}}{2\varepsilon}.$$

При этом (31) перепишется в виде

$$I_n = 4\varepsilon^2 \int_0^{\frac{t}{2\varepsilon}} \int_{-\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}} e^{-\tilde{\tau}} I_0\left(\sqrt{\tilde{\tau}^2 - \tilde{\xi}^2}\right)d\xi d\tilde{\tau}. \tag{32}$$

Воспользовавшись (25), получим

$$I_n = 4\varepsilon^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\frac{t}{2\varepsilon}}\int_{-\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}}\frac{e^{\sqrt{\tilde{\tau}^2-\tilde{\xi}^2}-\tilde{\tau}}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-\tilde{\xi}^2}+1}d\xi d\tilde{\tau}. \tag{33}$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$\tilde{\tau}-\sqrt{\tilde{\tau}^2-\tilde{\xi}^2} > \frac{\xi^2}{2\tilde{\tau}}$$

следует

$$I_n \le 4\varepsilon^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\frac{t}{2\varepsilon}}\int_{-\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}}\frac{e^{-\frac{\tilde{\xi}^2}{2\tilde{\tau}}}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-\tilde{\xi}^2}+1}d\tilde{\xi}d\tilde{\tau} =$$

$$= 8\varepsilon^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\frac{t}{2\varepsilon}}\int_0^{\tilde{\tau}}\frac{e^{-\frac{\tilde{\xi}^2}{2\tilde{\tau}}}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-\tilde{\xi}^2}+1}d\tilde{\xi}d\tilde{\tau}. \tag{34}$$

Сделав в (34) замену $\eta = \frac{\tilde{\xi}}{\sqrt{2\tilde{\tau}}}$, получим

$$I_n \le 8\varepsilon^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\frac{t}{2\varepsilon}}\int_0^{\sqrt{\frac{\tilde{\tau}}{2}}}\frac{e^{-\eta^2}\sqrt{2\tilde{\tau}}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-2\tilde{\tau}\eta^2}+1}d\eta d\tilde{\tau} =$$

$$= 8\varepsilon^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\frac{t}{2\varepsilon}}\left[\int_0^{0.5\sqrt{\tilde{\tau}}}\frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-2\tilde{\tau}\eta^2}+1}d\eta + \int_{0.5\sqrt{\tilde{\tau}}}^{\sqrt{\frac{\tilde{\tau}}{2}}}\frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-2\tilde{\tau}\eta^2}+1}d\eta\right]d\tau. \tag{35}$$

Оценим интегралы в квадратных скобках в (35):

$$\int_{0.5\sqrt{\tilde{\tau}}}^{\sqrt{0.5\tilde{\tau}}}\frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-2\tilde{\tau}\eta^2}+1}d\eta \le \int_{0.5\sqrt{\tilde{\tau}}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta \le \int_{0.5\sqrt{\tilde{\tau}}}^{\infty}e^{-\frac{\eta\sqrt{\tilde{\tau}}}{2}}d\eta = \frac{2}{\sqrt{\tilde{\tau}}}e^{-\tilde{\tau}/4}, \tag{36}$$

$$\int_0^{0.5\sqrt{\tilde{\tau}}}\frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt[4]{\tilde{\tau}^2-2\tilde{\tau}\eta^2}+1}d\eta \le \int_0^{0.5\sqrt{\tilde{\tau}}}\frac{e^{-\eta^2}\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\tilde{\tau}}}d\eta \le \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tilde{\tau}}\sqrt[4]{8}}. \tag{37}$$

Подставляя (36) и (37) в (35), получим

$$I_n \le 8\varepsilon^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\int\limits_0^{t/(2\varepsilon)}\left(2\sqrt{2}e^{-\frac{\tilde{\tau}}{4}}+\sqrt[4]{2\pi^2}\right)d\tilde{\tau} =$$

$$= 8\varepsilon^2\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(8\sqrt{2}(1-e^{-\frac{t}{8\varepsilon}})+\frac{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{2}t}{2\varepsilon}\right) \le$$

$$\le 8\varepsilon\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(8\sqrt{2}\varepsilon+\frac{\sqrt[4]{2\pi^2}T}{2}\right).$$

Отсюда и из (24) для $\delta(\tilde{x},t)$ следует оценка

$$|\delta(\tilde{x},t)| \le M\varepsilon\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(8\sqrt{2}\varepsilon+\frac{\sqrt[4]{2\pi^2}}{2}T\right),$$

где

$$M = \max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,\tau)\right|,$$
$$0 \le \tau \le t,$$
$$x-(t-\tau)/\sqrt{\varepsilon} \le \xi \le x+(t-\tau)/\sqrt{\varepsilon}.$$

Список литературы

1. Давыдов А.А., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах // ЖВМ и МФ. 2010. 12.
2. Chetverushkin Boris N. and Shilnikov Evgeny V. Flux Relaxation as an Approach to the Stability Improvement for Explicit Finite Difference Schemes. CD proceedings of the II International conference on Engineering Optimization (EngOpt-2010), Lisbon, Portugal, September 2010.
3. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование. 2012. т. 24. № 11. с. 33-52.
4. Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной явной схеме для решения задач фильтрации // Математическое моделирование. 2010. т. 22. № 4. с. 99-109.
5. Четверушкин Б.Н., Гулин А.В. Явные схемы и моделирование на вычислительных системах сверхвысокой производительности // Доклады РАН. 2012. т. 446. № 5. с. 501-503.
6. Chetverushkin B.N., Shilnikov E.V., Davydov A.A. Numerical Simulation of Continuous Media Problems on Hybrid Computer Systems, Advances in

Engineering Software, Elsevier, 2013. 60-61. p. 42-47. URL:http://dx.doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.02.003.
7. Репин С. И., Четверушкин Б.Н. Оценки разности приближённых решений задач Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Доклады Академии Наук. 2013. т. 451. № 3. с. 255-258.
8. Davydov Alexander A. and Shilnikov Evgeny V. Numerical Simulation of the Low Compressible Viscous Gas Flows on GPU-based Hybrid Supercomputers. In: M. Bader, A. Bode, H.-J. Bungartz, M. Gerndt, G.R. Joubert, F. Peters (eds.). Computing: Accelerating Computational Science and Engineering (CSE). Advances in Parallel Computing. 2014. № 25. p. 315-323. IOS Press.
9. Trapeznikova M.A., Churbanova N.G., Lyupa A.A., Morozov D.N. Simulation of Multiphase Flows in the Subsurface on GPU-based Supercomputers. Parallel Computing: Accelerating Computational Science and Engineering (CSE). Advances in Parallel Computing. 2014. V. 25. M. Bader, A. Bode, H.-J. Bungartz, M. Gerndt, G.R. Joubert, F. Peters (eds.). p. 324-333. IOS Press.
10. Шильников Е.В. Моделирование течений вязкого газа на основе КГД системы уравнений на неортогональных индексных сетках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 33. 20 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-33
11. Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Использование явных схем для моделирования процесса двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. 2011. т. 23. № 7. с. 52-60.
12. Исупов Н.В., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Моделирование процессов просачивания многофазных жидкостей в слоистой пористой среде // Математическое моделирование. 2010. т. 22. № 6. с. 84-98.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // Наука, 1999. − 798 с.
14. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции // Долгопрудный: Интеллект, 2007.